

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 3

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε μία συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση «1-1» ;

Μονάδες 8

A2. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ;

Μονάδες 7

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Μια συνάρτηση f που είναι «1-1» σε ένα διάστημα Δ είναι πάντα γνησίως μονότονη στο Δ .

β. Αν f^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της $f:A \rightarrow \mathbb{R}$, τότε το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών $f(A)$ της f .

γ. Αν μία συνάρτηση είναι «1-1» τότε δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

δ. Αν για μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $-2015 \leq f(x) \leq 2015$ για κάθε $x \in A$, τότε η f έχει μέγιστη τιμή το 2015 και ελάχιστη τιμή το -2015 .

ε. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$ των αξόνων $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση $g:(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι γνησίως φθίνουσα και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$. Αν για την συνάρτηση f ισχύει $f(x) = \ln x - g(x)$ για κάθε $x > 0$.

B1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 10

B2. Να λύσετε την ανίσωση: $2\ln x < 2 + g(x^2)$ στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(1 + f(x)) = 2x - 6 + f(x) \quad (1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: **i.** Η f αντιστρέφεται, **ii.** $f(3) = 2$

Μονάδες 8+7

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(1 + f(x^2 + x + 1)) = f(1 + f(3))$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(x - y) = f(x)f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ ή $f(0) = 1$.

Μονάδες 7

Δ2. Αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων να βρείτε την συνάρτηση f .

Μονάδες 8

Δ3. Αν $f(0) \neq 0$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Μονάδες 5