ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο **ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για κάθε πολυώνυμο:

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

ισχύει: $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$ με $x_0 \in \mathbb{R}$.

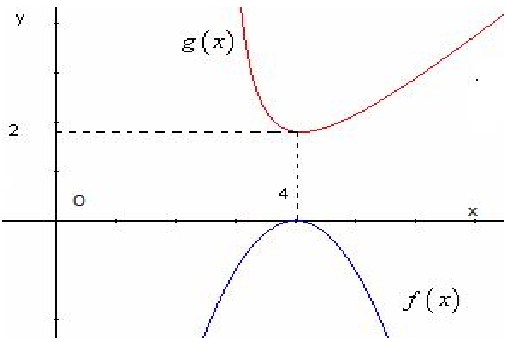
Μονάδες 10

Α2. Πότε μία συνάρτηση λέγεται συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της ;

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή,ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Δίνεται το παρακάτω σχήμα, τότε $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.



β. Αν η f δεν είναι αντιστρέψιμη, δεν είναι γνησίως μονότονη.

γ. Η f είναι «1-1» αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $y = f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

δ. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο σύνολο $A=[1,4]$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,\ 4]$ και $f(3)=-2$. Τότε ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in[1,\ 4]$.

ε. Δίνεται η συνεχής και αντιστρέψιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^{-1}(-2015)=4$, $f^{-1}(1949)=-1$, τότε δεν υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x)+2f(x)\eta\mu x=x^2+\sigma\upsilon\nu^2 x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } f(0)=1.$$

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x)=f(x)+\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R},$$

διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Μονάδες 10

Β2. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x.$$

Μονάδες 5

Β3. Να βρείτε τα όρια: **α)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2+\sigma\upsilon\nu x}{x}$ και **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}2+\ln^2 x, & 0<x\leq e\\ \alpha x+\ln(x-e+1), & e<x\end{cases}$$

α. Να βρείτε τον αριθμό $\alpha\in\mathbb{R}$ έτσι, ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

β. Αν $\alpha = \frac{3}{e}$, τότε η εξίσωση $f(x) = 6$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1,\ 2e)$.

Μονάδες 5

Γ2. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

$$f\left(e^{f(x)}\right) = 4\ln x + 3 \text{ , για κάθε } x > 0 \text{ και}$$

$$(f o f)\left(e^{f(x)}\right) = \ln\left(\ln x^4 + 3\right)^2 + 1 \text{, για κάθε } x > e^{-\frac{3}{4}}.$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».

Μονάδες 5

β. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Μονάδες 3

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$(f o f)(x) = f\left(e^{x-2014}\right)$$

έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $\left(\frac{1}{e},\ 1\right)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης f στο $[0,\ +\infty)$.

Μονάδες 3

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$ (Μονάδες 2) και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Δ4. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει:

$$\left(\sqrt{\alpha^2+1}+\alpha\right)\left(\sqrt{\beta^2+1}+\beta\right)=1,$$

να αποδείξετε ότι $\alpha+\beta=0$.

Μονάδες 5

Δ5. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f.

Μονάδες 6