ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα. $[\alpha, \beta]$. Αν:

♦ η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ♦ $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 10

Α2. α) Διατυπώστε το Θεώρημα του Bolzano για μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, $\alpha > \beta$.

Μονάδες 3

β) Πότε μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 2

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Η εικόνα ενός διαστήματος μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

β. Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες.

γ. Μία συνάρτηση f είναι «1-1», αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

δ. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$.

ε. Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{f(x)}{f^2(x)+1}.$$

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f.

Μονάδες 5

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση fog είναι γνησίως αύξουσα και «1-1».

Μονάδες 5

Β3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f\left(g\left(x^3+1\right)\right) = f\left(g\left(4x^2+2x\right)\right)$$

έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες και μια αρνητική ρίζα.

Μονάδες 10

Β4. Να λύσετε την ανίσωση:

$$(fog)\left(x^3+4\right) > (fog)\left(3x^2\right).$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln\left(e^x-1\right) - x.$$

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 3

Γ2. Να βρείτε το πρόσημο της f.

Μονάδες 4

Γ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 5

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και βρείτε την $f^{-1}(x)$.

Μονάδες 4

Γ5. Αν είναι $h(x) = \ln\frac{1}{x}$, να αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0) = h(x_0).$$

Μονάδες 5

Γ6. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(1)x^2 + x^2 + 2}{f(2)x^2 - x + 1}.$$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$f^3(x) + 2f(x) = x + 1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1».

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της f.

Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης με το άξονα $x'x$.

Μονάδες 3

Δ4. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 4

Δ5. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = -1$.

Μονάδες 4