

ΘΕΜΑ 1^Ο

Α. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται συνεχής

- σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β) ;
- σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

(Μονάδες 2x4=8)

Β. Να διατυπώσετε (μονάδες 2) και να αποδείξετε (μονάδες 5) το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών.

(Μονάδες 7)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση «1-1», αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε: $f(x_1) = f(x_2)$.

2. Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$.

3. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού \mathbb{R} και ορίζονται οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

4. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

5. Αν $x \neq 0$, τότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = -\infty$.

(Μονάδες 2x5=10)

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{e^{2x}}$. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε γραφική παράσταση:

α) Να βρείτε

- i. Την μονοτονία της συνάρτησης f . (Μονάδες 8)
- ii. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 3$ έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = 2 \ln \frac{x+1}{1-x} + 3$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 4)

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 6)

γ. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται (μονάδες 4) και να μελετήσετε την f^{-1} ως προς τη συνέχεια (μονάδες 5).

(Μονάδες 9)

δ. Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

(Μονάδες $2 \times 3 = 6$)

ΘΕΜΑ 4°

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \kappa, \text{ με } \kappa \in \mathbb{R}.$$

Αν επιπλέον ισχύει ότι: $xf(x) \leq \eta\mu 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε

α) Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x} = 2$

(Μονάδες 4)

β) Να αποδείξετε ότι: $\kappa = 2$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το $f(0)$.

(Μονάδες 4)

δ) Να ελέγξετε την αλήθεια του παρακάτω ισχυρισμού:

$$\left| f(x) \cdot \frac{\varepsilon\varphi x}{x} \right| = -f(x) \cdot \frac{\varepsilon\varphi x}{x} \text{ κοντά στο } 0$$

(Μονάδες 6)

Να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας (Μονάδες 2)



μαθηματικός Περιηγητής
mathp.gr

- Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.
- Οι λύσεις- απαντήσεις των θεμάτων να γραφούν στην κόλλα σας και όχι στην σελίδα των θεμάτων.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

