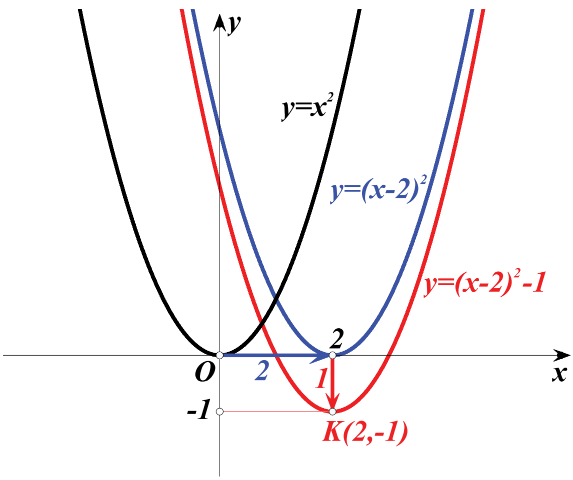
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων



Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Σ. Ανδρεαδάκης Β. Κατσαργύρης Σ. Παπασταυρίδης
Γ. Πολύζος Α. Σβέρκος Λ. Αδαμόπουλος Χ. Δαμιανού

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ
«ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ

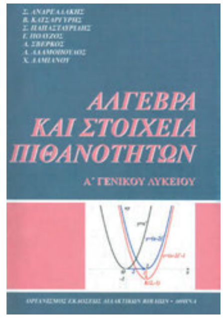
ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ



ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός
Κατσαργύρης Βασίλειος
Παπασταυρίδης Σταύρος
Πολύζος Γεώργιος
Σβέρκος Ανδρέας

ΟΜΑΔΑ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός	*Ομοτ. Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών*
Κατσαργύρης Βασίλειος	*Καθηγητής Βαρβακείου Πειραματικού Λυκείου*
Παπασταυρίδης Σταύρος	*Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών*
Πολύζος Γεώργιος	*Μόνιμος Πάρεδρος του Π.Ι.*
Σβέρκος Ανδρέας	*Καθηγητής 2ου Πειραματικού Λυκείου Αθηνών*

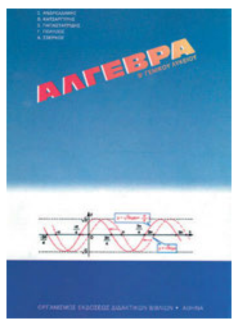
ΕΠΟΠΤΕΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ Π.Ι.

Σκούρας Αθανάσιος	*Σύμβουλος του Π.Ι.*
Πολύζος Γεώργιος	*Μόνιμος Πάρεδρος του Π.Ι.*

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΜΟΡΦΩΜΕΝΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

Ελευθερόπουλος Ιωάννης	*Καθηγητής Μαθηματικών, Αποσπασμένος στο Π.Ι.*
Ζώτος Ιωάννης	*Καθηγητής Μαθηματικών, Αποσπασμένος στο Π.Ι.*
Καλλιπολίτου Ευρυδίκη	*Καθηγήτρια Μαθηματικών, Αποσπασμένη στο Π.Ι.*

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ



Ανδρεαδάκης Στυλιανός	*Ομοτ. Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών*
Κατσαργύρης Βασίλειος	*Καθηγητής Βαρβακείου Πειραματικού Λυκείου*
Παπασταυρίδης Σταύρος	*Καθηγητής Πανεπιστημίου Πάτρας*
Πολύζος Γεώργιος	*Μόνιμος Πάρεδρος του Π.Ι.*
Σβέρκος Ανδρέας	*Καθηγητής 2ου Πειραματικού Λυκείου Αθηνών*

Α′ ΕΚΔΟΣΗ: 1991
ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΕΙΣ ΜΕ ΒΕΛΤΙΩΣΕΙΣ: 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998
Η προσαρμογή του βιβλίου στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα έγινε από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Αδαμόπουλος Λεωνίδας — *Επ. Σύμβουλος Παιδαγωγικού Ινστιτούτου*

Δαμιανού Χαράλαμπος — *Αναπλ. Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών*

Σβέρκος Ανδρέας — *Σχολικός Σύμβουλος*

ΚΡΙΤΕΣ:

Κουνιάς Στρατής — *Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών*

Μακρής Κωνσταντίνος — *Σχολικός Σύμβουλος*

Τσικαλουδάκης Γεώργιος — *Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης*

ΓΛΩΣΣΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:

Μπουσούνη Λία — *Καθηγήτρια Β/θμιας Εκπαίδευσης*

ΔΑΚΤΥΛΟΓΡΑΦΗΣΗ: Μπολιώτη Πόπη

ΣΧΗΜΑΤΑ: Μπούτσικας Μιχάλης

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας περιλαμβάνει την ύλη της Άλγεβρας και των Πιθανοτήτων που προβλέπεται από το πρόγραμμα σπουδών της Α΄ τάξης του Γενικού Λυκείου.

Το βιβλίο αυτό προήλθε από αναμόρφωση της Α΄ έκδοσης (2010) του βιβλίου ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ, του οποίου τη συγγραφική ομάδα αποτελούν οι Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος και Α. Σβέρκος. Προστέθηκαν επίσης δυο ακόμα κεφάλαια: το κεφάλαιο «Πιθανότητες» και το κεφάλαιο «Πρόοδοι».

Το κεφάλαιο «Πιθανότητες» είναι μέρος του αντίστοιχου κεφαλαίου από το βιβλίο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ (2010) του οποίου τη συγγραφική ομάδα αποτελούν οι Λ. Αδαμόπουλος, Χ. Δαμιανού και Α. Σβέρκος. Το κεφάλαιο «Πρόοδοι» είναι μέρος του αντίστοιχου κεφαλαίου από το βιβλίο ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ (2010), του οποίου τη συγγραφική ομάδα αποτελούν οι Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος και Α. Σβέρκος.

Το περιεχόμενο του βιβλίου περιλαμβάνει σε γενικές γραμμές τα εξής:

Στο **1ο Κεφάλαιο** γίνεται μια εισαγωγή στη Θεωρία των Πιθανοτήτων. Η απόδειξη των ιδιοτήτων της πιθανότητας ενός ενδεχομένου γίνεται μόνο στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Η Θεωρία των Πιθανοτήτων ασχολείται με καταστάσεις όπου υπάρχει αβεβαιότητα, και αυτό την κάνει ιδιαίτερα σημαντική στις εφαρμογές της καθημερινής ζωής.

Στο **2ο Κεφάλαιο** επαναλαμβάνονται, συμπληρώνονται και επεκτείνονται οι βασικές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.

Στο **3ο Κεφάλαιο** επαναλαμβάνονται, επεκτείνονται και εξετάζονται συστηματικά όσα είναι γνωστά από το Γυμνάσιο για τις εξισώσεις 1ου και 2ου βαθμού. Επίσης εξετάζονται εξισώσεις που, για να επιλυθούν, ανάγονται σε 1ου και 2ου βαθμού.

Στο **4ο Κεφάλαιο** παρουσιάζονται ανισώσεις 1ου και 2ου βαθμού καθώς και ανισώσεις που, για να επιλυθούν, ανάγονται σε 1ου και 2ου βαθμού.

Στο **5ο Κεφάλαιο** γίνεται εισαγωγή στην έννοια της ακολουθίας πραγματικών αριθμών, και εξετάζονται η αριθμητική και η γεωμετρική πρόοδος ως ειδικές περιπτώσεις κανονικότητας (pattern) σε ακολουθίες.

Στο **6ο Κεφάλαιο** εισάγεται η έννοια της συνάρτησης. Η συνάρτηση είναι μια θεμελιώδης έννοια που διαπερνά όλους τους κλάδους των Μαθηματικών και έχει κεντρική σημασία για την περαιτέρω ανάπτυξη και εφαρμογή τους.

Στο **7ο Κεφάλαιο** γίνεται μελέτη των συναρτήσεων $f(x)=\alpha x^2$, $f(x)=\frac{\alpha}{x}$ και $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Η μελέτη της $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ είναι ο κεντρικός στόχος του κεφαλαίου αυτού.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Ε.1 ΤΟ ΛΕΞΙΛΟΓΙΟ ΤΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

Στην παράγραφο αυτή θα γνωρίσουμε μερικές βασικές έννοιες της Λογικής, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια, όπου αυτό κρίνεται αναγκαίο, για τη σαφέστερη διατύπωση μαθηματικών εννοιών, προτάσεων κτλ.

Τα παραδείγματα που θα χρησιμοποιήσουμε αναφέρονται σε έννοιες και ιδιότητες που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο.

Η συνεπαγωγή

Ας θεωρήσουμε δύο πραγματικούς αριθμούς α και β. Είναι γνωστό ότι:

Αν οι αριθμοί α και β είναι ίσοι, τότε και τα τετράγωνά τους θα είναι ίσα.

Αυτό σημαίνει ότι:

Αν ο ισχυρισμός «$\alpha=\beta$» είναι αληθής, τότε και ο ισχυρισμός «$\alpha^2=\beta^2$» θα είναι αληθής.

Γι’ αυτό λέμε ότι ο ισχυρισμός «$\alpha=\beta$» <u>συνεπάγεται</u> τον ισχυρισμό «$\alpha^2=\beta^2$» και γράφουμε: $\alpha=\beta \Rightarrow \alpha^2=\beta^2$.

Γενικά:

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τέτοιοι ώστε, όταν αληθεύει ο P να αληθεύει και ο Q, τότε λέμε ότι **ο P συνεπάγεται τον Q** και γράφουμε $\mathbf{P \Rightarrow Q}$.

Ο ισχυρισμός « $\mathbf{P \Rightarrow Q}$ » λέγεται **συνεπαγωγή** και πολλές φορές διαβάζεται **«αν P, τότε Q»**. Ο P λέγεται **υπόθεση** της συνεπαγωγής, ενώ ο Q λέγεται **συμπέρασμα** αυτής[1].

---

[1] Στην καθημερινή πράξη, συνήθως, δεν χρησιμοποιούμε συνεπαγωγές με ψευδή υπόθεση. Αλλά και η μαθηματική επιστήμη δεν έχει ανάγκη τέτοιου είδους συνεπαγωγών. Όμως, για τεχνικούς λόγους που συνδέονται με την ευκολία της έκφρασης μαθηματικών ζητημάτων, θα υιοθετήσουμε τη <u>σύμβαση</u> ότι η συνεπαγωγή «$P \Rightarrow Q$» να είναι αληθής και στην περίπτωση που η υπόθεση P είναι ψευδής. Έτσι, η συνεπαγωγή «$P \Rightarrow Q$» είναι ψευδής, μόνο όταν η υπόθεση P είναι αληθής και το συμπέρασμα Q είναι ψευδές και αληθής σε κάθε άλλη περίπτωση. Εκ πρώτης όψεως η σύμβαση αυτή φαίνεται περίεργη, αλλά στο πλαίσιο του παρόντος βιβλίου δεν μπορούν να εξηγηθούν οι λόγοι που οδήγησαν σε αυτή.

Η ισοδυναμία ή διπλή συνεπαγωγή

Ας θεωρήσουμε τις γνωστές μας από το Γυμνάσιο συνεπαγωγές:

$$\alpha=\beta \Rightarrow \alpha^2=\beta^2 \qquad (1)$$

και

$$\alpha=\beta \Rightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma \qquad (2),$$

που ισχύουν για όλους τους πραγματικούς α, β και γ.

Παρατηρούμε ότι:

✓ Για την πρώτη συνεπαγωγή, δεν ισχύει το αντίστροφο. Δηλαδή <u>δεν ισχύει</u> η συνεπαγωγή $\alpha^2=\beta^2 \Rightarrow \alpha=\beta$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β, αφού για παράδειγμα είναι $(-3)^2=3^2$, ενώ $-3\neq 3$.

✓ Για τη δεύτερη, όμως, συνεπαγωγή ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει και η συνεπαγωγή:

$$\alpha+\gamma=\beta+\gamma \Rightarrow \alpha=\beta$$

Γι' αυτό λέμε ότι οι δύο ισχυρισμοί είναι <u>ισοδύναμοι</u> και γράφουμε:

$$\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma.$$

Γενικά

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τέτοιοι ώστε, όταν αληθεύει ο P, να αληθεύει και ο Q και όταν αληθεύει ο Q, να αληθεύει και ο P, τότε λέμε ότι **ο P συνεπάγεται τον Q και αντιστρόφως** ή, αλλιώς, ότι **ο P είναι ισοδύναμος με τον Q** και γράφουμε **P** $\Leftrightarrow$ **Q**.

Ο ισχυρισμός **«P** $\Leftrightarrow$ **Q»** λέγεται **ισοδυναμία** και αρκετές φορές διαβάζεται **«P αν και μόνο αν Q»**.

Ο σύνδεσμος «ή»

Γνωρίζουμε ότι:

Το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών α και β είναι ίσο με το μηδέν, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς α και β είναι ίσος με το μηδέν.

Για να δηλώσουμε ότι ένας τουλάχιστον από τους α και β είναι ίσος με το μηδέν, γράφουμε α = 0 ή β = 0. Έτσι, έχουμε την ισοδυναμία

$$\alpha\cdot\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \ \text{ή} \ \beta=0$$

Γενικά

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τότε ο ισχυρισμός **P ή Q** αληθεύει μόνο στην περίπτωση που ένας τουλάχιστον από τους δύο ισχυρισμούς αληθεύει.

Ο ισχυρισμός **«P ή Q»** λέγεται **διάζευξη** των P και Q.

Για παράδειγμα η εξίσωση

$$(x^2 - x)(x^2 - 1) = 0$$

αληθεύει, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους παράγοντες $x^2 - x$ και $x^2 - 1$ είναι ίσος με το μηδέν, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει η διάζευξη:

$$x^2 - x = 0 \text{ ή } x^2 - 1 = 0.$$

Παρατηρούμε εδώ ότι:

✓ Για $x = 1$ αληθεύουν και οι δύο εξισώσεις, ενώ

✓ Για $x = 0$ αληθεύει μόνο η πρώτη και για $x = -1$ αληθεύει μόνο η δεύτερη.

Ο σύνδεσμος «και»

Γνωρίζουμε ότι:

> *«Το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών α και β είναι διάφορο του μηδενός, αν και μόνο αν και οι δύο αριθμοί α και β είναι διάφοροι του μηδενός».*

Για να δηλώσουμε ότι και οι δύο αριθμοί α και β είναι διάφοροι του μηδενός γράφουμε

$$\alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

Έτσι, έχουμε την ισοδυναμία

$$\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

Γενικά

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τότε ο ισχυρισμός **P και Q** αληθεύει μόνο στην περίπτωση που και οι δύο ισχυρισμοί αληθεύουν.

Ο ισχυρισμός **«P και Q»** λέγεται **σύζευξη** των P και Q.
Για παράδειγμα, ο ισχυρισμός

$$x(x - 1) = 0 \text{ και } (x - 1)(x + 1) = 0$$

αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία αληθεύουν και οι δύο εξισώσεις, δηλαδή για $x = 1$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

I. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β. Διαφορετικά να κυκλώσετε το γράμμα Ψ.

1.	$\alpha^2 = 9 \Rightarrow \alpha = 3$	Α	Ψ
2.	$\alpha^2 = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 1$	Α	Ψ
3.	$\alpha^2 \neq \alpha \Rightarrow \alpha \neq 1$	Α	Ψ
4.	$\alpha \neq 2 \Leftrightarrow \alpha^2 \neq 4$	Α	Ψ
5.	$\alpha > 2 \Rightarrow \alpha^2 > 4$	Α	Ψ
6.	$\alpha < 2 \Rightarrow \alpha^2 < 4$	Α	Ψ
7.	$\alpha^2 < 4 \Rightarrow \alpha < 2$	Α	Ψ
8.	$\alpha^2 > 4 \Rightarrow \alpha > 2$	Α	Ψ
9.	$\alpha < 2$ και $\beta < 3 \Rightarrow \alpha \cdot \beta < 6$	Α	Ψ

II. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τους ισχυρισμούς της ομάδας Α′ με τον ισοδύναμό του ισχυρισμό από την ομάδα Β′.

Α′ ΟΜΑΔΑ	
1	$x(x-2)=0$
2	$x(x-2)\neq 0$
3	$x^2=4$
4	$x^2=4$ και $x<0$
5	$x(x-2)=0$ και $x(x-1)=0$
6	$x^2=4$ και $x>0$

Β′ ΟΜΑΔΑ	
Α	$x\neq 0$ και $x\neq 2$
Β	$x=2$
Γ	$x=-2$ ή $x=2$
Δ	$x=0$
Ε	$x=0$ ή $x=2$
Ζ	$x=-2$

Ε.2 ΣΥΝΟΛΑ

Η έννοια του συνόλου

Πολλοί άνθρωποι συνηθίζουν να συλλέγουν διάφορα πράγματα, όπως π.χ. γραμματόσημα, νομίσματα, πίνακες ζωγραφικής, εφημερίδες, βιβλία κτλ. Οι περισσότεροι συλλέκτες ταξινομούν τις συλλογές τους σε κατηγορίες, π.χ. «γραμματόσημα που προέρχονται από την ίδια χώρα», «νομίσματα του περασμένου αιώνα», «πίνακες της αναγέννησης» κτλ.
Επίσης από αρχαιοτάτων χρόνων οι άνθρωποι ενδιαφέρθηκαν για τους αριθμούς και τους ταξινόμησαν σε κατηγορίες, όπως είναι π.χ. «οι άρτιοι αριθμοί», «οι πρώτοι αριθμοί» κτλ.
Συλλογές ή κατηγορίες όπως οι παραπάνω ή ακόμη ομάδες αντικειμένων, ομοειδών ή όχι, που μπορούμε με κάποιο τρόπο να τα ξεχωρίσουμε, ονομάζονται στα Μαθηματικά **σύνολα**.

Σύμφωνα με τον μεγάλο μαθηματικό Cantor:

Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο.

Τα αντικείμενα αυτά, που αποτελούν το σύνολο, ονομάζονται στοιχεία ή μέλη του συνόλου.

ΣΧΟΛΙΟ

Ένα σύνολο πρέπει να είναι, όπως συνηθίζουμε να λέμε, «καλώς ορισμένο». Αυτό σημαίνει ότι τα στοιχεία του μπορούν να αναγνωρίζονται με σιγουριά. Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να μιλάμε για το σύνολο των μεγάλων πραγματικών αριθμών. Αυτό δεν είναι σύνολο, με τη μαθηματική έννοια του όρου, διότι δεν υπάρχει κανόνας που να καθορίζει αν ένας πραγματικός αριθμός είναι ή δεν είναι μεγάλος. Αν όμως θεωρήσουμε τους πραγματικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 1000000, τότε αυτοί αποτελούν σύνολο.

Για να συμβολίσουμε ένα σύνολο στα Μαθηματικά, χρησιμοποιούμε ένα από τα κεφαλαία γράμματα του Ελληνικού ή του Λατινικού αλφαβήτου, ενώ για τα στοιχεία του χρησιμοποιούμε τα μικρά γράμματα αυτών. Για παράδειγμα:

✓ με $\mathbb{N}$ συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών,

✓ με $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων αριθμών,

✓ με $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών και

✓ με $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Τα σύμβολα $\in$ και $\notin$

Για να δηλώσουμε ότι το x είναι στοιχείο του συνόλου Α, γράφουμε $x\in A$ και διαβάζουμε «το x ανήκει στο Α», ενώ για να δηλώσουμε ότι το x δεν είναι στοιχείο του συνόλου Α γράφουμε $x\notin A$ και διαβάζουμε «το x δεν ανήκει στο Α».

Για παράδειγμα

$$\frac{3}{5}\notin \mathbb{N},\quad \frac{3}{5}\in\mathbb{Q},\quad -2\in\mathbb{Z},\quad \sqrt{2}\notin\mathbb{Q},\quad \sqrt{2}\in\mathbb{R}\ \text{κτλ.}$$

Παράσταση συνόλου

Για να παραστήσουμε ένα σύνολο χρησιμοποιούμε συνήθως έναν από τους παρακάτω τρόπους:

α) Όταν δίνονται όλα τα στοιχεία του και είναι λίγα σε πλήθος, τότε γράφουμε τα στοιχεία αυτά μεταξύ δύο αγκίστρων, χωρίζοντάς τα με το κόμμα. Έτσι π.χ., αν το σύνολο Α έχει ως στοιχεία τους αριθμούς 2, 4 και 6, γράφουμε:

$$A=\{2, 4, 6\}$$

Πολλές φορές χρησιμοποιούμε έναν παρόμοιο συμβολισμό και για σύνολα που έχουν πολλά ή άπειρα στοιχεία, γράφοντας μερικά μόνο από αυτά και αποσιωπώντας τα υπόλοιπα, αρκεί να είναι σαφές ποια είναι αυτά που παραλείπονται. Έτσι για παράδειγμα το σύνολο Β των ακεραίων από το 1 μέχρι το 100 συμβολίζεται ως εξής

$$B=\{1, 2, 3, \ldots, 100\},$$

ενώ το σύνολο των κλασμάτων της μορφής $\frac{1}{\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος, συμβολίζεται ως εξής:

$$\Gamma=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$$

Ο παραπάνω τρόπος παράστασης ενός συνόλου λέγεται «παράσταση του συνόλου με **αναγραφή** των στοιχείων του».

β) Αν από το σύνολο των πραγματικών αριθμών επιλέξουμε εκείνους που έχουν την ιδιότητα να είναι θετικοί, τότε φτιάχνουμε το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών, το οποίο συμβολίζεται με:

$$\{x\in\mathbb{R} \mid x>0\}$$

και διαβάζεται «Το σύνολο των $x\in\mathbb{R}$, όπου $x>0$».

Ομοίως το σύνολο των άρτιων ακεραίων συμβολίζεται

$$\{x\in\mathbb{Z} \mid x\ \text{άρτιος}\}$$

Γενικά, αν από ένα σύνολο Ω επιλέγουμε εκείνα τα στοιχεία του, που έχουν μια ορισμένη ιδιότητα Ι, τότε φτιάχνουμε ένα νέο σύνολο που συμβολίζεται με:

$$\{x \in \Omega | x \text{ έχει την ιδιότητα Ι}\}$$

και διαβάζεται «Το σύνολο των $x \in \Omega$, όπου x έχει την ιδιότητα Ι».
Ο παραπάνω τρόπος παράστασης ενός συνόλου λέγεται «παράσταση του συνόλου με **περιγραφή** των στοιχείων του».

Ίσα σύνολα

Ας θεωρήσουμε τώρα τα σύνολα:

$$A = \{1, 2\} \text{ και } B = \{x \in \mathbb{R} | (x-1)(x-2) = 0\}$$

Επειδή οι λύσεις της εξίσωσης $(x-1)(x-2) = 0$ είναι οι αριθμοί 1 και 2, το σύνολο Β έχει τα ίδια ακριβώς στοιχεία με το Α. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι τα σύνολα Α και Β είναι ίσα.

Γενικά

Δύο σύνολα Α και Β λέγονται **ίσα**, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

Με άλλα λόγια:
«Δύο σύνολα Α και Β λέγονται ίσα, όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β και αντιστρόφως κάθε στοιχείο του Β είναι και στοιχείο του Α».
Στην περίπτωση αυτή γράφουμε **Α = Β**.

Υποσύνολα συνόλου

Ας θεωρήσουμε τα σύνολα

$$A=\{1, 2, 3, \dots, 15\} \text{ και } B=\{1, 2, 3, \dots, 100\}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του συνόλου Α είναι και στοιχείο του συνόλου Β. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το Α είναι υποσύνολο του Β.

Γενικά

Ένα σύνολο Α λέγεται **υποσύνολο** ενός συνόλου Β, όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β.

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $\mathbf{A \subseteq B}$.
Άμεσες συνέπειες του ορισμού είναι οι:
i) $A \subseteq A$, για κάθε σύνολο Α.
ii) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \subseteq \Gamma$.
iii) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε $A = B$.

Το κενό σύνολο

Ας αναζητήσουμε τα στοιχεία του συνόλου $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 = -1\}$. Είναι φανερό ότι τέτοια στοιχεία δεν υπάρχουν, αφού η εξίσωση $x^2 = -1$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$. Το σύνολο αυτό, που δεν έχει κανένα στοιχείο, λέγεται **κενό σύνολο** και συμβολίζεται με Ø ή { }. Δηλαδή:

Κενό σύνολο είναι το σύνολο που δεν έχει στοιχεία.

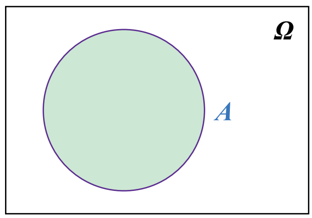
Δεχόμαστε ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.

Διαγράμματα Venn

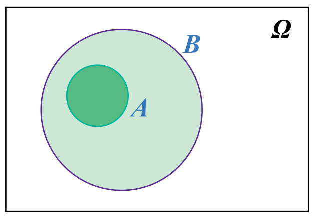
Μια εποπτική παρουσίαση των συνόλων και των μεταξύ τους σχέσεων γίνεται με τα διαγράμματα Venn.

- Κάθε φορά που εργαζόμαστε με σύνολα, τα σύνολα αυτά θεωρούνται υποσύνολα ενός συνόλου που λέγεται **βασικό σύνολο** και συμβολίζεται με **Ω**. Για παράδειγμα, τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$, είναι υποσύνολα του βασικού συνόλου $\Omega = \mathbb{R}$.

  Το βασικό σύνολο συμβολίζεται με το εσωτερικό ενός ορθογωνίου, ενώ κάθε υποσύνολο ενός βασικού συνόλου παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου.



- Αν $A \subseteq B$, τότε το A παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης που παριστάνει το B.



Πράξεις με σύνολα

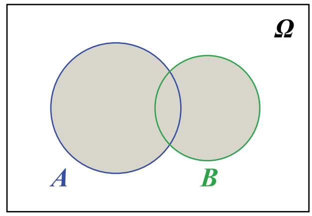
Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ ένα βασικό σύνολο και δύο υποσύνολά του:

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ και } B = \{3, 4, 5, 6\}.$$

- Το σύνολο $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, που έχει ως στοιχεία τα κοινά και τα μη κοινά στοιχεία των A και B, δηλαδή το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα A και B λέγεται <u>ένωση</u> των συνόλων A και B.

Γενικά:

Ένωση δύο υποσυνόλων Α, Β ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα σύνολα Α και Β και συμβολίζεται με $\mathbf{A \cup B}$.



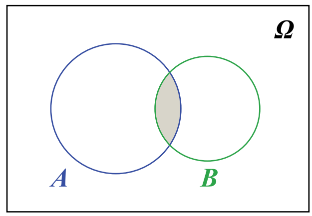
Δηλαδή είναι:

$$\mathbf{A \cup B = \{x \in \Omega | x \in A \text{ ή } x \in B\}}$$

- Το σύνολο {3, 4} που έχει ως στοιχεία τα κοινά μόνο στοιχεία των Α και Β λέγεται <u>τομή</u> των Α και Β.

Γενικά:

Τομή δύο υποσυνόλων Α, Β ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν και στα δύο σύνολα Α, Β και συμβολίζεται με $\mathbf{A \cap B}$.



Δηλαδή είναι:

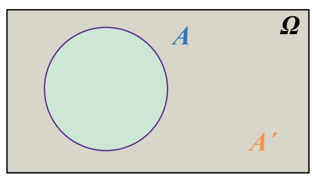
$$\mathbf{A \cap B = \{x \in \Omega | x \in A \text{ και } x \in B\}}$$

Στην περίπτωση που δύο σύνολα Α και Β δεν έχουν κοινά στοιχεία, δηλαδή όταν $A \cap B = \emptyset$, τα δύο σύνολα λέγονται **ξένα** μεταξύ τους.

- Το σύνολο {5, 6, 7, 8, 9, 10} που έχει ως στοιχεία τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο Α, λέγεται <u>συμπλήρωμα</u> του συνόλου Α.

Γενικά:

Συμπλήρωμα ενός υποσυνόλου Α ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που δεν ανήκουν στο Α και συμβολίζεται με $\mathbf{A'}$.



Δηλαδή είναι:

$$\mathbf{A' = \{x \in \Omega | x \notin A\}}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

I. 1. Στους παρακάτω πίνακες να συμπληρώσετε με το σύμβολο “✓” εκείνα τα τετραγωνάκια των οποίων ο αντίστοιχος αριθμός ανήκει στο αντίστοιχο σύνολο.

2. Πώς ονομάζονται οι αριθμοί για τους οποίους έχουν συμπληρωθεί τα τετραγωνάκια μόνο της τελευταίας γραμμής;

3. Να χρησιμοποιήσετε τα διαγράμματα του Venn για να παραστήσετε τις διαδοχικές σχέσεις εγκλεισμού των συνόλων $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ και να τοποθετήσετε μέσα σε αυτά τους αριθμούς αυτούς.

	$-3{,}5$	0	$\sqrt{10}$	$-\frac{13}{5}$	π	$2{,}\overline{3}$	$\frac{20}{5}$	$\sqrt{100}$	-5
$\in\mathbb{N}$									
$\in\mathbb{Z}$									
$\in\mathbb{Q}$									
$\in\mathbb{R}$									

II. *Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να συμπληρώσετε τις ισότητες.*

1. Αν $A = \{x\in\mathbb{N} | x$ διαιρέτης του $16\}$ και $B = \{x\in\mathbb{N} | x$ διαιρέτης του $24\}$, τότε:

α) $A \cup B =$....................................... **β)** $A \cap B =$...................

2. Ας θεωρήσουμε ως βασικό σύνολο το σύνολο Ω των γραμμάτων του ελληνικού αλφαβήτου και τα υποσύνολά του

$$A = \{x\in\Omega | x \text{ φωνήεν}\} \quad \text{και} \quad B = \{x\in\Omega | x \text{ σύμφωνο}\}.$$

Τότε:

α) $A \cup B =$.............. **β)** $A \cap B =$.............. **γ)** $A' =$.............. **δ)** $B' =$..............

III. *Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να βάλετε σε κύκλο τις σωστές απαντήσεις.*

1. Έστω δύο σύνολα Α και Β. Τότε:

α) $A \subseteq A \cap B$ **β)** $B \subseteq A \cap B$ **γ)** $A \cap B \subseteq A$ **δ)** $A \cap B \subseteq B$

2. Έστω δύο σύνολα Α και Β . Τότε:

α) $A \subseteq A \cup B$ **β)** $A \cup B \subseteq B$ **γ)** $A \cup B \subseteq A$ **δ)** $B \subseteq A \cup B$

IV. *Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να συμπληρώσετε τις ισότητες.*

1. Έστω Ω ένα βασικό σύνολο, Ø το κενό σύνολο και $A \subseteq \Omega$.Τότε:

α) $\varnothing' =$.............. **β)** $\Omega' =$.............. **γ)** $(A')' =$..............

2. Έστω $A \subseteq B$. Τότε

α) $A \cap B =$ .... **β)** $A \cup B =$ ....

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Κεφάλαιο 1ο

Εισαγωγή

Υπάρχει σε πολλούς η εντύπωση ότι το κύριο κίνητρο για την ανάπτυξη της Θεωρίας των Πιθανοτήτων προήλθε από το ενδιαφέρον του ανθρώπου για τα τυχερά παιχνίδια. Σημαντική μάλιστα ώθηση στην ανάπτυξη του κλάδου αυτού των Μαθηματικών αποτέλεσε η γόνιμη αλληλογραφία που αναπτύχθηκε ανάμεσα στους Pascal και Fermat το 17ο αιώνα με αφορμή διάφορα προβλήματα που προέκυψαν από την ενασχόληση του ανθρώπου με τα τυχερά παιχνίδια.

Μολονότι όμως τα τυχερά παιχνίδια ήταν ευρέως διαδεδομένα και στους Αρχαίους Έλληνες και στους Ρωμαίους, η Θεωρία των Πιθανοτήτων δεν αναπτύχθηκε κατά την αρχαιότητα, όπως συνέβη με άλλους κλάδους των Μαθηματικών, αλλά πολύ αργότερα, το 16ο και 17ο αιώνα μ.Χ. Γι' αυτό πολλοί απορρίπτουν την άποψη ότι η Θεωρία των Πιθανοτήτων οφείλει τη γένεσή της στην ενασχόληση του ανθρώπου με τα τυχερά παιχνίδια και την αποδίδουν στις ανάγκες να λυθούν προβλήματα που παρουσιάστηκαν με την ανάπτυξη του εμπορίου, των ασφαλίσεων, της συλλογής εσόδων του κράτους κτλ. Η ανάπτυξη της Θεωρίας των Πιθανοτήτων οφείλεται επίσης και στις ανάγκες των Φυσικών Επιστημών όπως η εφαρμογή της Θεωρίας Σφαλμάτων σε αστρονομικές παρατηρήσεις.

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων αναπτύχθηκε ακόμα περισσότερο το 18ο αιώνα με τις αξιοσημείωτες εργασίες των μαθηματικών Bernoulli, Moivre, Laplace και Gauss. Ιδιαίτερα ο Laplace με τις εργασίες του άνοιξε μια καινούργια εποχή για τη Θεωρία Πιθανοτήτων. Γιατί ο Laplace δεν περιορίζεται μόνο στη μαθηματική ανάλυση των τυχερών παιγνιδιών, αλλά εφαρμόζει τα συμπεράσματά του και σε ένα πλήθος από επιστημονικά και πρακτικά προβλήματα. Έτσι, με αφορμή τη μελέτη των σφαλμάτων που προκύπτουν στις επαναλαμβανόμενες μετρήσεις του ίδιου αστρονομικού μεγέθους ανακαλύπτεται η περίφημη κανονική κατανομή του Gauss. Κατόπιν αποδεικνύεται ότι η κανονική κατανομή απεικονίζει όχι μόνο την κατανομή των σφαλμάτων των αστρονομικών παρατηρήσεων αλλά και την κατανομή πολλών βιολογικών, κοινωνικών και φυσικών φαινομένων. Έτσι, στη διάρκεια του 19ου αιώνα γεννιούνται νέοι κλάδοι των εφαρμοσμένων μαθηματικών, όπως είναι η Θεωρία των Σφαλμάτων, τα Ασφαλιστικά Μαθηματικά και η Στατιστική Μηχανική.

Στις μέρες μας η Θεωρία των Πιθανοτήτων με τις εργασίες πολλών διάσημων μαθηματικών, όπως είναι οι Chebyshev, Markov, Von Mises, Kolmogorov κ.ά., έχει σημειώσει αλματώδη πρόοδο. Καινούργια θεωρητικά αποτελέσματα παρέχουν νέες δυνατότητες για τη χρησιμοποίηση των μεθόδων της Θεωρίας των Πιθανοτήτων. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι οι εφαρμογές των Πιθανοτήτων αναφέρονται σε ένα ευρύτατο φάσμα επιστημών όπως η Φυσική, η Χημεία, η Γενετική, η Ψυχολογία, η Οικονομολογία, η Τηλεπικοινωνία, η Μετεωρολογία κτλ.

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων ανήκει στους κλάδους των Μαθηματικών που συμβαδίζουν με την ανάπτυξη των φυσικών επιστημών και της τεχνολογίας. Αυτό δε σημαίνει βέβαια ότι η Θεωρία των Πιθανοτήτων είναι απλώς ένα βοηθητικό εργαλείο για τη λύση πρακτικών προβλημάτων των άλλων επιστημών. Απεναντίας έχει μετασχηματιστεί σε έναν αυτοτελή κλάδο των καθαρών Μαθηματικών, που έχει δικά του προβλήματα και δικές του μεθόδους.

1.1 ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ - ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Πείραμα Τύχης

Όπως γνωρίζουμε από τη Φυσική, αν θερμάνουμε αποσταγμένο νερό σε 100° Κελσίου στην επιφάνεια της θάλασσας, δηλαδή σε ατμοσφαιρική πίεση 760 mm Hg, το νερό θα βράσει. Επίσης, αν αφήσουμε ένα σώμα να πέσει στο κενό υπό την επίδραση της βαρύτητας, μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια το διάστημα που θα διανύσει σε ορισμένο χρόνο t. Κάθε τέτοιο πείραμα κατά το οποίο η γνώση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελείται καθορίζει πλήρως το αποτέλεσμα λέγεται **αιτιοκρατικό** (deterministic) πείραμα.

Υπάρχουν όμως και πειράματα των οποίων δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, μολονότι επαναλαμβάνονται (φαινομενικά τουλάχιστον) κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Ένα τέτοιο πείραμα ονομάζεται **πείραμα τύχης** (random experiment). Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια τον αριθμό των τροχαίων ατυχημάτων που συμβαίνουν σε μια εβδομάδα σε ένα σημείο μιας εθνικής

οδού, αφού ο αριθμός αυτός εξαρτάται από πολλούς απρόβλεπτους παράγοντες.
Πειράματα τύχης είναι και τα εξής:

1. Ρίχνεται ένα νόμισμα και καταγράφεται η άνω όψη του.

2. Ρίχνεται ένα ζάρι και καταγράφεται η ένδειξη της άνω έδρας του.

3. Διαλέγεται αυθαίρετα μια οικογένεια με δύο παιδιά και εξετάζεται ως προς το φύλο των παιδιών και τη σειρά γέννησής τους.

4. Ρίχνεται ένα νόμισμα ώσπου να φέρουμε "γράμματα" αλλά όχι περισσότερο από τρεις φορές.

5. Επιλέγεται τυχαία μια τηλεφωνική συνδιάλεξη και καταγράφεται η διάρκειά της.

6. Γίνεται η κλήρωση του ΛΟΤΤΟ και καταγράφεται το αποτέλεσμα.

7. Την παραμονή του Πάσχα, στις 5 μ.μ., μετριέται το μήκος της ουράς των αυτοκινήτων στα πρώτα διόδια της Εθνικής οδού Αθηνών-Λαμίας.

8. Επιλέγεται τυχαία μια μέρα της εβδομάδος και μετριέται ο αριθμός των τηλεθεατών που παρακολούθησαν το απογευματινό δελτίο ειδήσεων στην ΕΤ1.

9. Επιλέγεται τυχαία μια ραδιενεργός πηγή και καταγράφεται ο αριθμός των εκπεμπόμενων σωματιδίων σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

Δειγματικός Χώρος

Όλα τα αποτελέσματα που μπορούν να εμφανιστούν σε ένα πείραμα τύχης λέγονται δυνατά αποτελέσματα ή δυνατές περιπτώσεις του πειράματος. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων λέγεται **δειγματικός χώρος** (sample space) και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα Ω. Αν δηλαδή $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\kappa$ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι το σύνολο:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\kappa\}.$$

Έτσι, στο πρώτο από τα παραπάνω πειράματα τύχης, αν με Κ συμβολίσουμε το αποτέλεσμα να φέρουμε "κεφαλή" και με Γ το αποτέλεσμα να φέρουμε "γράμματα", τότε ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{Κ, Γ\}$. Επίσης, στο δεύτερο από τα παραπάνω πειράματα τύχης η ένδειξη της άνω έδρας μπορεί να είναι ένας από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6. Επομένως, ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ενδεχόμενα

Το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης λέγεται **ενδεχόμενο** (event) ή γεγονός. Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός ζαριού τα σύνολα $Α = \{2, 4, 6\}$, $Β = \{1, 3, 5\}$ και $Γ = \{6\}$ είναι ενδεχόμενα. Το Α είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό, το Β να φέρουμε περιττό αριθμό και το Γ να φέρουμε 6. Είναι φανερό ότι ένα ενδεχόμενο είναι υποσύνολο του δειγματικού χώρου. Ένα ενδεχόμενο λέγεται **απλό** όταν έχει ένα μόνο στοιχείο και **σύνθετο** αν έχει περισσότερα στοιχεία.

Για παράδειγμα, το Γ είναι ένα απλό ενδεχόμενο, ενώ τα Α και Β είναι σύνθετα ενδεχόμενα. Όταν το αποτέλεσμα ενός πειράματος, σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο αυτό **πραγματοποιείται** ή **συμβαίνει**. Γι' αυτό τα στοιχεία ενός ενδεχομένου λέγονται και **ευνοϊκές περιπτώσεις** για την πραγματοποίησή του. Έτσι, για παράδειγμα, το ενδεχόμενο $A = \{2, 4, 6\}$ έχει τρεις ευνοϊκές περιπτώσεις και πραγματοποιείται, όταν φέρουμε 2 ή 4 ή 6.

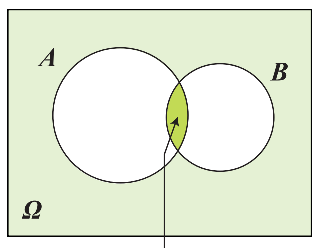
Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος θεωρείται ότι είναι ενδεχόμενο, το οποίο μάλιστα πραγματοποιείται πάντοτε, αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στο Ω. Γι' αυτό το Ω λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο**. Δεχόμαστε ακόμα ως ενδεχόμενο και το κενό σύνολο $\varnothing$ που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης. Γι' αυτό λέμε ότι το $\varnothing$ είναι το **αδύνατο ενδεχόμενο**.

Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου Α θα το συμβολίζουμε με N(A). Επομένως, αν $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και $A = \{2, 4, 6\}$ έχουμε $N(A) = 3$, $N(\Omega) = 6$ και $N(\varnothing) = 0$.

Πράξεις με Ενδεχόμενα

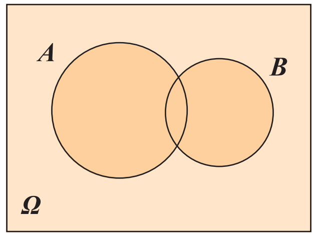
Όπως είδαμε, τα ενδεχόμενα είναι υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω. Επομένως, μεταξύ των ενδεχομένων ενός πειράματος μπορούν να οριστούν οι γνωστές πράξεις μεταξύ των συνόλων, από τις οποίες προκύπτουν νέα ενδεχόμενα. Έτσι, αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα, έχουμε:

- Το ενδεχόμενο $A \cap B$, που διαβάζεται "Α τομή Β" ή "Α και Β" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α και Β.



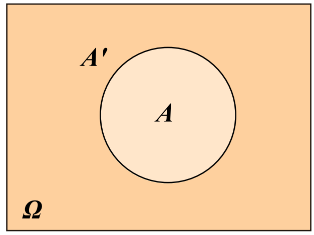
$A \cap B$

• Το ενδεχόμενο $A \cup B$, που διαβάζεται "A ένωση B" ή "A ή B" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B.

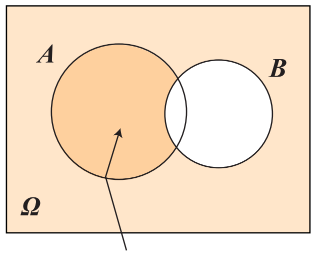


$A \cup B$

• Το ενδεχόμενο A΄, που διαβάζεται "όχι A" ή "συμπληρωματικό του A" και πραγματοποιείται, όταν δεν πραγματοποιείται το A. Το A΄ λέγεται και "αντίθετο του A".



• Το ενδεχόμενο A – B, που διαβάζεται "διαφορά του B από το A" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B. Είναι εύκολο να δούμε ότι $A - B = A \cap B'$.



$A - B$

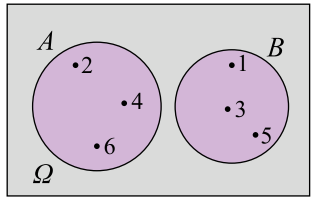
Στον παρακάτω πίνακα τα A και B συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος και το ω ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού. Στην αριστερή στήλη του πίνακα αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα A και B διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα, και στη δεξιά στήλη αναγράφονται οι ίδιες σχέσεις αλλά διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.

• Το ενδεχόμενο A πραγματοποιείται	$\omega \in A$
• Το ενδεχόμενο A δεν πραγματοποιείται	$\omega \in A'$ (ή $\omega \notin A$)
• Ένα τουλάχιστον από τα A και B πραγματοποιείται	$\omega \in A \cup B$
• Πραγματοποιούνται αμφότερα τα A και B	$\omega \in A \cap B$
• Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B	$\omega \in (A \cup B)'$
• Πραγματοποιείται μόνο το A	$\omega \in A - B$ (ή $\omega \in A \cap B'$)
• Η πραγματοποίηση του A συνεπάγεται την πραγματοποίηση του B	$A \subseteq B$

Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός ζαριού έστω τα ενδεχόμενα $A = \{1, 2, 3, 4\}$ και $B = \{2, 4, 6\}$. Αν το αποτέλεσμα της ρίψης είναι ο αριθμός 1, τότε τα ενδεχόμενα Α, $A \cup B$, $A - B$, B' πραγματοποιούνται, ενώ τα A', Β, $(A \cup B)'$, $(A - B)$, $A \cap B$ δεν πραγματοποιούνται.

Ασυμβίβαστα Ενδεχόμενα

Στη ρίψη ενός ζαριού αν Α είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό και Β το ενδεχόμενο να φέρουμε περιττό αριθμό, έχουμε $A = \{2, 4, 6\}$ και $B = \{1, 3, 5\}$. Παρατηρούμε ότι τα Α και Β δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν συγχρόνως, αφού δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο. Στην περίπτωση αυτή τα Α και Β λέγονται ασυμβίβαστα. Γενικά:



$A \cap B = \varnothing$

Δύο ενδεχόμενα Α και Β λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \varnothing$.

Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα λέγονται επίσης **ξένα μεταξύ τους** ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα.**

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις διαδοχικές φορές.

i) Να γραφτεί ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος.

ii) Να παρασταθούν με αναγραφή τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:

A_1: "Ο αριθμός των Κ υπερβαίνει τον αριθμό των Γ"

A_2: "Ο αριθμός των Κ είναι ακριβώς 2"

A_3: "Ο αριθμός των Κ είναι τουλάχιστον 2"

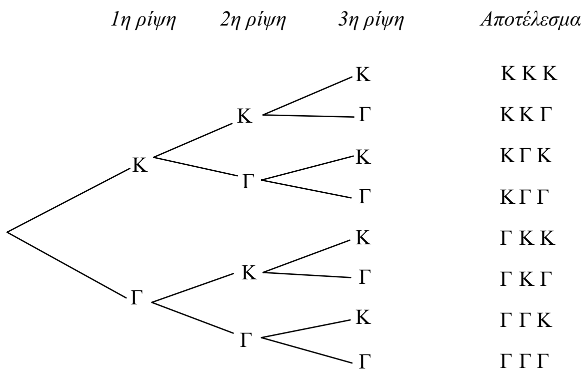
A_4: "Ίδια όψη και στις τρεις ρίψεις"

A_5: "Στην πρώτη ρίψη φέρνουμε Κ"

iii) Να βρεθούν τα ενδεχόμενα A'_3, $A_5 \cap A_2$, $A_5 \cup A_4$.

ΛΥΣΗ

i) Για να προσδιορίσουμε το δειγματικό χώρο, θα χρησιμοποιήσουμε ένα δεντροδιάγραμμα:



Άρα, ο δειγματικός χώρος του πειράματος αποτελείται από διατεταγμένες τριάδες με στοιχεία το Κ και το Γ και είναι

$$\Omega = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ\}.$$

ii) Έχοντας υπόψη το δειγματικό χώρο Ω και την αντίστοιχη ιδιότητα έχουμε:

$A_1 = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ\}$

$A_2 = \{ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ\}$

$A_3 = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ\}$ (Παρατηρούμε ότι $A_3 = A_1$)

$A_4 = \{ΚΚΚ, ΓΓΓ\}$

$A_5 = \{ΚΚΚ, ΚΓΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ\}$.

iii) Το A'_3 περιέχει εκείνα τα στοιχεία του δειγματικού χώρου που δεν περιέχει το A_3, περιέχει δηλαδή τα στοιχεία στα οποία ο αριθμός των Κ είναι μικρότερος από 2.

Επομένως, $A'_3 = \{ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ\}$.

Το ενδεχόμενο $A_5 \cap A_2$ περιέχει τα κοινά στοιχεία των A_5 και A_2, δηλαδή τα στοιχεία με δύο ακριβώς Κ, εκ των οποίων το ένα στην πρώτη θέση. Επομένως, $A_5 \cap A_2 = \{ΚΚΓ, ΚΓΚ\}$.

Το ενδεχόμενο $A_5 \cup A_4$ περιέχει τα στοιχεία που στην πρώτη θέση έχουν Κ ή τα στοιχεία που έχουν ίδιες και τις τρεις ενδείξεις. Επομένως, $A_5 \cup A_4 = \{ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΚΓ, ΚΚΚ, ΓΓΓ\}$.

2. Δίνονται δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός πειράματος με δειγματικό χώρο Ω. Να παρασταθούν με διαγράμματα Venn και να εκφραστούν με τη βοήθεια συνόλων τα ενδεχόμενα που ορίζονται με τις εκφράσεις:

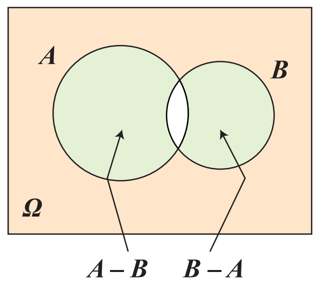
i) Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα Α και Β.

ii) Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α και Β.

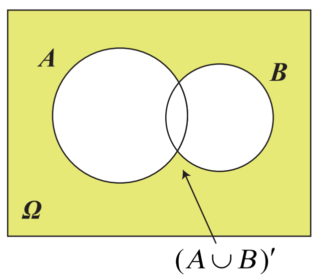
ΛΥΣΗ

i) Επειδή θέλουμε να πραγματοποιείται μόνο το Α ή μόνο το Β, γραμμοσκιάζουμε τις επιφάνειες των Α και Β με εξαίρεση την τομή τους, δηλαδή την κοινή επιφάνειά τους.

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή πραγματοποιείται ένα μόνο από τα Α − Β και Β − Α. Άρα, το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το $(A - B) \cup (B - A)$ ή ισοδύναμα το $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$.



ii) Επειδή θέλουμε να μην πραγματοποιείται κανένα από τα Α και Β, γραμμοσκιάζουμε την επιφάνεια του Ω που είναι εκτός της ένωσης των Α και Β. Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι το ζητούμενο σύνολο είναι συμπληρωματικό του $A \cup B$, δηλαδή το $(A \cup B)'$.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες, μια άσπρη, μια μαύρη και μια κόκκινη. Κάνουμε το εξής πείραμα: παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Στη συνέχεια παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα και καταγράφουμε επίσης το χρώμα της. (Όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες με επανατοποθέτηση).

i) Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;

ii) Ποιο είναι το ενδεχόμενο "η πρώτη μπάλα να είναι κόκκινη";

iii) Ποιο είναι το ενδεχόμενο "να εξαχθεί και τις δυο φορές μπάλα με το ίδιο χρώμα";

2. Να επιλυθεί το προηγούμενο πρόβλημα, χωρίς όμως τώρα να γίνει επανατοποθέτηση της πρώτης μπάλας πριν την εξαγωγή της δεύτερης. (Όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες χωρίς επανατοποθέτηση.)

3. Μια οικογένεια από την Αθήνα αποφασίζει να κάνει τις επόμενες διακοπές της στην Κύπρο ή στη Μακεδονία. Στην Κύπρο μπορεί να πάει με αεροπλάνο ή με πλοίο. Στη Μακεδονία μπορεί να πάει με το αυτοκίνητό της, με τρένο ή με αεροπλάνο. Αν ως αποτέλεσμα του πειράματος θεωρήσουμε τον τόπο διακοπών και το ταξιδιωτικό μέσο, τότε:

i) Να γράψετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος.

ii) Να βρείτε το ενδεχόμενο Α: "Η οικογένεια θα πάει με αεροπλάνο στον τόπο των διακοπών της".

4. Ένα ξενοδοχείο προσφέρει γεύμα που αποτελείται από τρία πιάτα. Το κύριο πιάτο, το συνοδευτικό και το γλυκό. Οι δυνατές επιλογές δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Γεύμα	Επιλογές
Κύριο πιάτο	Κοτόπουλο ή φιλέτο
Συνοδευτικό	Μακαρόνια ή ρύζι ή χόρτα
Γλυκό	Παγωτό ή τούρτα ή ζελέ

Ένα άτομο πρόκειται να διαλέξει ένα είδος από κάθε πιάτο,

i) Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος

ii) Να βρείτε το ενδεχόμενο Α: "το άτομο επιλέγει παγωτό"

iii) Να βρείτε το ενδεχόμενο Β: "το άτομο επιλέγει κοτόπουλο"

iv) Να βρείτε το ενδεχόμενο $A\cap B$

v) Αν Γ το ενδεχόμενο: "το άτομο επιλέγει ρύζι", να βρείτε το ενδεχόμενο $(A\cap B)\cap \Gamma$.

5. Η διεύθυνση ενός νοσοκομείου κωδικοποιεί τους ασθενείς σύμφωνα με το αν είναι ασφαλισμένοι ή όχι και σύμφωνα με την κατάσταση της υγείας τους, η οποία χαρακτηρίζεται ως καλή, μέτρια, σοβαρή ή κρίσιμη. Η διεύθυνση καταγράφει με 0 τον ανασφάλιστο ασθενή και με 1 τον ασφαλισμένο, και στη συνέχεια δίπλα γράφει ένα από τα γράμματα α, β, γ ή δ, ανάλογα με το αν η κατάστασή του είναι καλή, μέτρια, σοβαρή ή κρίσιμη. Θεωρούμε το πείραμα της κωδικοποίησης ενός νέου ασθενούς. Να βρείτε:

i) Το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος.

ii) Το ενδεχόμενο Α: "η κατάσταση του ασθενούς είναι σοβαρή ή κρίσιμη και είναι ανασφάλιστος",

iii) Το ενδεχόμενο Β: "η κατάσταση του ασθενούς είναι καλή ή μέτρια",

iv) Το ενδεχόμενο Γ: "ο ασθενής είναι ασφαλισμένος".

6. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα:

i) Ρίχνουμε ένα ζάρι. Α είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε 3 και Β είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό.

ii) Επιλέγουμε ένα άτομο. Α είναι το ενδεχόμενο να έχει γεννηθεί στην Ελλάδα και Β το ενδεχόμενο να είναι καθολικός.

iii) Επιλέγουμε μια γυναίκα. Α είναι το ενδεχόμενο να έχει ηλικία άνω των 30 και Β το ενδεχόμενο να είναι παντρεμένη πάνω από 30 χρόνια.

iv) Επιλέγουμε κάποιον με ένα αυτοκίνητο. Α είναι το ενδεχόμενο το αυτοκίνητό του να είναι ευρωπαϊκό και Β το ενδεχόμενο να είναι ασιατικό.

7. Μεταξύ των οικογενειών με τρία παιδιά επιλέγουμε τυχαία μια οικογένεια και εξετάζουμε τα παιδιά ως προς το φύλο και ως προς τη σειρά γέννησής τους. Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δύο παίκτες θα παίξουν σκάκι και συμφωνούν νικητής να είναι εκείνος που πρώτος θα κερδίσει δύο παιχνίδια. Αν α είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει ο πρώτος παίκτης ένα παιχνίδι και β είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει ο δεύτερος παίκτης ένα παιχνίδι, να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

2. Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Να βρείτε τα ενδεχόμενα:

Α: "Το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης είναι μεγαλύτερο από το αποτέλεσμα της 2ης ρίψης".

Β: "Το άθροισμα των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι άρτιος αριθμός".

Γ: "Το γινόμενο των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι μικρότερο του 5".

Στη συνέχεια να βρείτε τα ενδεχόμενα $A \cap B$, $A \cap \Gamma$, $B \cap \Gamma$, $(A \cap B) \cap \Gamma$.

1.2 ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Εισαγωγή

Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά του πειράματος τύχης, όπως είδαμε, είναι η αβεβαιότητα για το ποιο αποτέλεσμα του πειράματος θα εμφανιστεί σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του. Επομένως, αν Α είναι ένα ενδεχόμενο, δεν μπορούμε με βεβαιότητα να προβλέψουμε αν το Α θα πραγματοποιηθεί ή όχι. Γι' αυτό είναι χρήσιμο να αντιστοιχίσουμε σε κάθε ενδεχόμενο Α έναν αριθμό, που θα είναι ένα μέτρο της "προσδοκίας" με την οποία αναμένουμε την πραγματοποίησή του. Τον αριθμό αυτό τον ονομάζουμε πιθανότητα του Α και τον συμβολίζουμε με Ρ(Α). Πώς όμως θα προσδιορίσουμε για κάθε ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης την πιθανότητά του; Δηλαδή πώς θα βρούμε μια διαδικασία με την οποία σε κάθε ενδεχόμενο θα αντιστοιχίζουμε την πιθανότητά του; Θα προσπαθήσουμε στη συνέχεια να απαντήσουμε στα ερωτήματα αυτά.

Έννοια και Ιδιότητες Σχετικής Συχνότητας

Αν σε ν εκτελέσεις ενός πειράματος ένα ενδεχόμενο Α πραγματοποιείται κ φορές, τότε ο λόγος $\frac{\kappa}{\nu}$ ονομάζεται *σχετική συχνότητα του Α* και συμβολίζεται με f_A. Ιδιαίτερα αν ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος είναι το πεπερασμένο σύνολο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\lambda\}$ και σε ν εκτελέσεις του πειράματος αυτού τα απλά ενδεχόμενα $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, \{\omega_\lambda)$ πραγματοποιούνται $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_\lambda$ φορές αντιστοίχως, τότε για τις σχετικές συχνότητες

$f_1 = \frac{\kappa_1}{\nu}, \quad f_2 = \frac{\kappa_2}{\nu}, \quad \ldots, f_\lambda = \frac{\kappa_\lambda}{\nu}$ των απλών ενδεχομένων θα έχουμε:

1. $0 \le f_i \le 1, \; i = 1, 2..., \lambda$ (αφού $0 \le \kappa_i \le \nu$)

2. $f_1 + f_2 + ... + f_\lambda = \frac{\kappa_1 + \kappa_2 + ... + \kappa_\lambda}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1.$

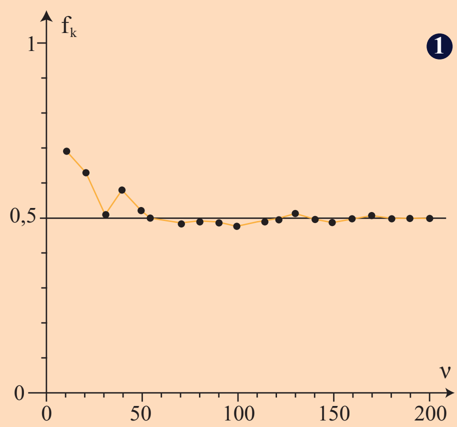
Ας εκτελέσουμε τώρα το ακόλουθο πείραμα: Ρίχνουμε ένα συμμετρικό και ομογενές νόμισμα και σημειώνουμε με Κ το αποτέλεσμα "κεφαλή" και με Γ το αποτέλεσμα "γράμματα".

Στον παρακάτω πίνακα αναφέρονται το πλήθος των Κ και οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες στις 10, 20, 30, ..., 200 ρίψεις του νομίσματος, ενώ στο σχήμα 1 παριστάνεται το αντίστοιχο διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

Πίνακας ρίψεων ενός νομίσματος

ν	κ	$f_κ$
10	7	0,700
20	13	0,650
30	16	0,533
40	23	0,575
50	26	0,520
60	31	0,517
70	33	0,471
80	39	0,488
90	43	0,478
100	46	0,460
110	53	0,482
120	61	0,508
130	66	0,508
140	70	0,500
150	73	0,486
160	81	0,506
170	87	0,512
180	89	0,494
190	93	0,489
200	99	0,495

Διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων



Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται ο αριθμός ν των ρίψεων η σχετική συχνότητα $f_κ$ εμφάνισης της "κεφαλής" σταθεροποιείται γύρω από την τιμή 0,5 ή, όπως λέμε "τείνει" στον αριθμό 0,5. Αυτό επιβεβαιώνει την "προσδοκία" μας ότι στη ρίψη ενός συμμετρικού και ομογενούς νομίσματος ή, όπως λέμε, ενός "αμερόληπτου" νομίσματος, οι σχετικές συχνότητες των ενδεχομένων {Κ}, {Γ} είναι ίσες. Ανάλογα παραδείγματα μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι οι σχετικές συχνότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων ενός πειράματος σταθεροποιούνται γύρω από κάποιους αριθμούς (όχι πάντοτε ίδιους), καθώς ο αριθμός των δοκιμών του πειράματος επαναλαμβάνεται απεριόριστα. Το εμπειρικό αυτό εξαγόμενο, το οποίο επιβεβαιώνεται και θεωρητικά, ονομάζεται **στατιστική ομαλότητα** ή **νόμος των μεγάλων αριθμών**.

Θα προσπαθήσουμε τώρα στηριζόμενοι στις προηγούμενες διαπιστώσεις να ορίσουμε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου.

Κλασικός Ορισμός Πιθανότητας

Ας εξετάσουμε την ειδική περίπτωση του αμερόληπτου νομίσματος. Ρίχνουμε ένα τέτοιο νόμισμα και παρατηρούμε την όψη που θα εμφανιστεί. Όπως διαπιστώσαμε προηγουμένως η σχετική συχνότητα καθενός από τα απλά ενδεχόμενα $\{Κ\}$, $\{Γ\}$ τείνει στον αριθμό $\frac{1}{2}$. Ομοίως θα μπορούσαμε να διαπιστώσουμε ότι στη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού η σχετική συχνότητα καθενός από τα απλά ενδεχόμενα $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}$ και $\{6\}$ τείνει στον αριθμό $\frac{1}{6}$. Σε πειράματα όπως τα προηγούμενα λέμε ότι τα δυνατά αποτελέσματα ή, ισοδύναμα, τα απλά ενδεχόμενα είναι **ισοπίθανα**.

Ας δούμε τώρα ποια αναμένουμε να είναι η σχετική συχνότητα ενός σύνθετου ενδεχομένου σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα.

Έστω για παράδειγμα, το ενδεχόμενο να φέρουμε ζυγό αριθμό στη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού. Επειδή το ενδεχόμενο αυτό πραγματοποιείται όταν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι 2 ή 4 ή 6 και καθένα από τα αποτελέσματα αυτά εμφανίζεται με σχετική συχνότητα $\frac{1}{6}$, η συχνότητα εμφάνισης του ζυγού αριθμού αναμένεται να είναι $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}$.

Γενικά, σε ένα πείραμα με ν ισοπίθανα αποτελέσματα η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου με κ στοιχεία θα τείνει στον αριθμό $\frac{κ}{ν}$. Γι' αυτό είναι εύλογο σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να ορίσουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου Α τον αριθμό:

$$P(A)=\frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Έτσι, έχουμε τον **κλασικό** ορισμό της πιθανότητας, που διατυπώθηκε από τον Laplace το 1812.

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει άμεσα ότι:

1. $P(\Omega)=\frac{N(\Omega)}{N(\Omega)}=1$

2. $P(\varnothing)=\frac{0}{N(\Omega)}=0$

3. Για κάθε ενδεχόμενο Α ισχύει $0\le P(A)\le 1$, αφού το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου είναι ίσο ή μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας

Για να μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας σε ένα δειγματικό χώρο με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, είναι απαραίτητο τα απλά ενδεχόμενα να είναι ισοπίθανα. Υπάρχουν όμως πολλά πειράματα τύχης, των οποίων ο δειγματικός χώρος δεν αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Όπως για παράδειγμα ο αριθμός των αυτοκινητιστικών δυστυχημάτων μια ορισμένη εβδομάδα, η ρίψη ενός ζαριού που δεν είναι συμμετρικό κτλ. Για τις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιούμε τον παρακάτω αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας, ο οποίος έχει ανάλογες ιδιότητες με τη σχετική συχνότητα.

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$, έτσι ώστε να ισχύουν:

- $0 \le P(\omega_i) \le 1$
- $P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_\nu) = 1$.

Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$.
Ως πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa\} \neq \varnothing$ ορίζουμε το άθροισμα $P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + ... + P(\alpha_\kappa)$, ενώ ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου $\varnothing$ ορίζουμε τον αριθμό $P(\varnothing) = 0$.

Αν $P(\omega_i) = \dfrac{1}{\nu}$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, τότε έχουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου.

ΣΧΟΛΙΟ

Όταν έχουμε ένα δειγματικό χώρο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu\}$ και χρησιμοποιούμε τη φράση "παίρνουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω", εννοούμε ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα με πιθανότητα $P(\omega_i) = \dfrac{1}{\nu}$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$.

Κανόνες Λογισμού των Πιθανοτήτων

Για τις πιθανότητες των ενδεχομένων ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες, γνωστές ως "κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων". Οι κανόνες αυτοί θα αποδειχθούν στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Αποδεικνύεται όμως ότι ισχύουν και στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα.

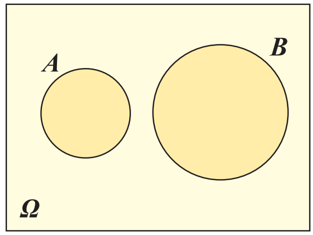
1. Για οποιαδήποτε **ασυμβίβαστα** μεταξύ τους ενδεχόμενα Α και Β ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $N(A) = \kappa$ και $N(B) = \lambda$, τότε το $A \cup B$ έχει $\kappa + \lambda$ στοιχεία, γιατί αλλιώς τα Α και Β δε θα ήταν ασυμβίβαστα. Δηλαδή, έχουμε $N(A \cup B) = \kappa + \lambda = N(A) + N(B)$.

Επομένως: $$P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A) + N(B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} = P(A) + P(B).$$



$A \cup B$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **απλός προσθετικός νόμος** (simply additive law) και ισχύει και για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Έτσι, αν τα ενδεχόμενα Α, Β και Γ είναι ανά δύο ασυμβίβαστα θα έχουμε: $P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma)$.

2. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και A' ισχύει:

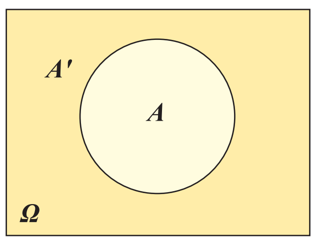
$$P(A') = 1 - P(A)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $A \cap A' = \varnothing$, δηλαδή τα Α και A' είναι ασυμβίβαστα, έχουμε διαδοχικά, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$
$$P(\Omega) = P(A) + P(A')$$
$$1 = P(A) + P(A').$$

Οπότε $P(A') = 1 - P(A)$.



3. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

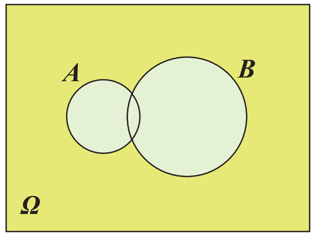
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για δυο ενδεχόμενα Α και Β έχουμε

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B), \quad (1)$$

αφού στο άθροισμα $N(A) + N(B)$ το πλήθος των στοιχείων του $A \cap B$ υπολογίζεται δυο φορές.



$A \cup B$

Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με $N(\Omega)$ έχουμε:

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **προσθετικός νόμος** (additive law).

Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$

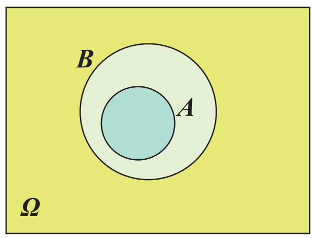
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $A \subseteq B$ έχουμε διαδοχικά:

$$N(A) \leq N(B)$$

$$\frac{N(A)}{N(\Omega)} \leq \frac{N(B)}{N(\Omega)}$$

$$P(A) \leq P(B)$$



5. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει

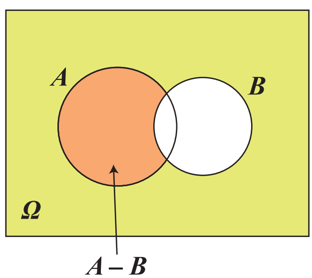
$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή τα ενδεχόμενα $A - B$ και $A \cap B$ είναι ασυμβίβαστα και $(A - B) \cup (A \cap B) = A$, έχουμε:

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B).$$

Άρα $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Ρίχνουμε δύο "αμερόληπτα" ζάρια. Να βρεθεί η πιθανότητα να φέρουμε ως αποτέλεσμα δύο διαδοχικούς αριθμούς.

ΛΥΣΗ

- Για να βρούμε το δειγματικό χώρο του πειράματος, χρησιμοποιούμε έναν πίνακα "διπλής εισόδου", όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

1ο \ 2ο	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Από τον πίνακα αυτόν έχουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω έχει 36 ισοπίθανα δυνατά αποτελέσματα, δηλαδή $N(\Omega) = 36$.

- Το ενδεχόμενο Α: "να φέρουμε δύο διαδοχικούς αριθμούς", είναι το

$$A = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (4,5), (5,4), (5,6), (6,5)\}$$

δηλαδή $N(A)=10$

- Επομένως, $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$.

Άρα, η πιθανότητα να φέρουμε δύο διαδοχικούς αριθμούς είναι $\dfrac{5}{18} \approx 0,28$ ή, στη γλώσσα των ποσοστών, περίπου 28%.

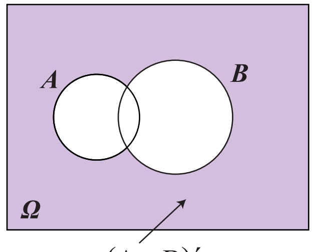
2. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται P(A) = 0,5, P(B) = 0,4 και $P(A \cap B) = 0,2$. Να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων:
 i) Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α και Β.
 ii) Να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Α και Β.

ΛΥΣΗ

i) Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α και Β είναι το $(A \cup B)'$.

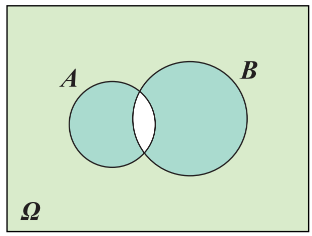
Επομένως

$$\begin{aligned} P((A\cup B)') &= 1-P(A\cup B)\\ &= 1-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))\\ &= 1-(0,5+0,4-0,2)\\ &= 1-0,7\\ &= 0,3. \end{aligned}$$



$(A\cup B)'$

ii) Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B είναι το $(A-B)\cup(B-A)$. Επειδή τα ενδεχόμενα $A-B$ και $B-A$ είναι ασυμβίβαστα, έχουμε:



$(A-B)\cup(B-A)$

$$\begin{aligned} P((A-B)\cup(B-A)) &= P(A-B)+P(B-A)\\ &= P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)\\ &= P(A)+P(B)-2P(A\cap B)\\ &= 0,5+0,4-2\cdot 0,2\\ &= 0,5. \end{aligned}$$

3. Για δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν P(A) = 0,6 και P(B) = 0,5.

i) Να εξεταστεί αν τα A και B είναι ασυμβίβαστα.

ii) Να αποδείξετε ότι $0,1\le P(A\cap B)\le 0,5$.

ΛΥΣΗ

i) Αν τα A και B ήταν ασυμβίβαστα, από τον απλό προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων θα είχαμε:

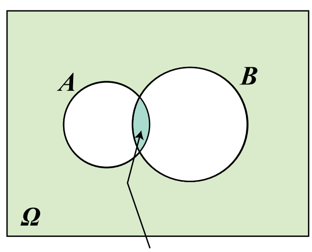
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0,6+0,5=1,1$$

ισχύει, δηλαδή, $P(A\cup B)>1$, που είναι άτοπο. Άρα, τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.

ii) Επειδή $A\cap B\subseteq B$ και $A\cap B\subseteq A$, έχουμε

$P(A\cap B)\le P(B)$ και $P(A\cap B)\le P(A)$,

επομένως $P(A\cap B)\le 0,5$ (1)



$(A\cap B)$

Από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0,6 + 0,5 - P(A \cap B).$$

Όμως $\quad P(A \cup B) \le 1.$

Επομένως: $\quad 0,6 + 0,5 - P(A \cap B) \le 1$

$$0,6 + 0,5 - 1 \le P(A \cap B)$$

$$0,1 \le P(A \cap B). \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$0,1 \le P(A \cap B) \le 0,5.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Από μια τράπουλα με 52 φύλλα παίρνουμε ένα στην τύχη. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων i) το χαρτί να είναι πέντε ii) το χαρτί να μην είναι πέντε.

2. Να βρείτε την πιθανότητα στη ρίψη δύο νομισμάτων να εμφανιστούν δύο "γράμματα".

3. Ένα κουτί περιέχει μπάλες: 10 άσπρες, 15 μαύρες, 5 κόκκινες και 10 πράσινες. Παίρνουμε τυχαίως μια μπάλα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων η μπάλα να είναι:
i) μαύρη ii) άσπρη ή μαύρη iii) ούτε κόκκινη ούτε πράσινη.

4. Σε μια τάξη με 30 μαθητές, ρωτήθηκαν οι μαθητές πόσα αδέλφια έχουν. Οι απαντήσεις τους φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

Αριθμός μαθητών	4	11	9	3	2	1
Αριθμός αδελφών	0	1	2	3	4	5

Αν επιλέξουμε τυχαία από την τάξη ένα μαθητή, να βρείτε την πιθανότητα η οικογένειά του να έχει τρία παιδιά.

5. Έστω τα σύνολα $\Omega = \{\omega \in \mathbb{N} | 10 \le \omega \le 20\}$, $A = \{\omega \in \Omega | \omega$ πολλαπλάσιο του $3\}$ και $B = \{\omega \in \Omega | \omega$ πολλαπλάσιο του $4\}$. Αν επιλέξουμε τυχαίως ένα στοιχείο του Ω, να βρείτε τις πιθανότητες i) να ανήκει στο Α ii) να μην ανήκει στο Β.

6. Σε έναν αγώνα η πιθανότητα να κερδίσει ο Λευτέρης είναι 30%, η πιθανότητα να κερδίσει ο Παύλος είναι 20% και η πιθανότητα να κερδίσει ο Νίκος είναι 40%. Να βρείτε την πιθανότητα i) να κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Παύλος ii) να μην κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Νίκος.

7. Για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A) = \frac{17}{30}$, $P(B) = \frac{7}{15}$ και $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. Να βρείτε την $P(A \cap B)$.

8. Για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$. Να βρείτε την P(B).

9. Για τα ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου είναι γνωστό ότι P(A) = P(B), $P(A \cup B) = 0,6$ και $P(A \cap B) = 0,2$. Να βρείτε την P(A).

10. Για τα ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω δίνεται ότι $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B')=\frac{2}{3}$ και $P(A\cap B)=\frac{1}{12}$. Να βρείτε την $P(A\cup B)$.

11. Για δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι $P(A\cup B)\leq P(A)+P(B)$.

12. Ένα ορισμένο κατάστημα δέχεται πιστωτικές κάρτες D ή V. Το 25% των πελατών έχουν κάρτα D, το 55% έχουν κάρτα V και το 15% έχουν και τις δύο κάρτες. Ποια είναι η πιθανότητα ένας πελάτης που επιλέγεται τυχαία να έχει μία τουλάχιστον από τις δυο κάρτες;

13. Το 10% των ατόμων ενός πληθυσμού έχουν υπέρταση, το 6% στεφανιαία καρδιακή ασθένεια και το 2% έχουν και τα δύο. Για ένα άτομο που επιλέγεται τυχαία ποια είναι η πιθανότητα να έχει
α) τουλάχιστον μία ασθένεια; β) μόνο μία ασθένεια;

14. Από τους μαθητές ενός σχολείου το 80% μαθαίνει Αγγλικά, το 30% Γαλλικά και το 20% και τις δύο γλώσσες. Επιλέγουμε τυχαίως ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα να μη μαθαίνει καμιά από τις δύο γλώσσες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω έχουμε P(A) = κ, P(B) = λ και $P(A\cap B)=\mu$, να βρείτε τις πιθανότητες:

i) να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα Α και Β

ii) να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α και Β

iii) να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Α και Β.

2. Σε μια κωμόπολη το 15% των νοικοκυριών δεν έχουν τηλεόραση, το 40% δεν έχουν βίντεο και το 10% δεν έχουν ούτε τηλεόραση ούτε βίντεο. Επιλέγουμε τυχαίως ένα νοικοκυριό. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει τηλεόραση και βίντεο.

3. Αν $\frac{P(A)}{P(A')}=\frac{3}{4}$, να βρείτε τις πιθανότητες P(A) και P(A′).

4. Αν 0 < P(A) < 1, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{P(A)}+\frac{1}{P(A')}\geq 4$.

5. Αν Α και Β είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με P(A) = 0,6 και P(B) = 0,7, να δείξετε ότι $0{,}3\leq P(A\cap B)\leq 0{,}6$.

6. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι $P(B)-P(A')\leq P(A\cap B)$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Αν ρίξουμε δύο νομίσματα τα αποτελέσματα μπορεί να είναι δύο "κεφαλές", μια "κεφαλή" και μια "γράμματα", ή δύο "γράμματα", και επομένως, καθένα από αυτά τα ενδεχόμενα έχει πιθανότητα $\frac{1}{3}$. Τι είναι λάθος στο επιχείρημα αυτό; Ποιο είναι το σωστό;

2. Ένα νόμισμα ρίχνεται 5 φορές και έρχεται κάθε φορά "κεφαλή". Επομένως, η πιθανότητα να φέρουμε "κεφαλή" σε μια ρίψη του νομίσματος είναι $\frac{5}{5}=1$. Να σχολιάσετε το αποτέλεσμα αυτό.

3. Τρία συνηθισμένα ζάρια, ένα άσπρο, ένα μαύρο και ένα κόκκινο, τοποθετούνται σε ένα κουτί. Ένα πείραμα συνίσταται στην τυχαία επιλογή ενός ζαριού από το κουτί, στη ρίψη του ζαριού αυτού και στην παρατήρηση του χρώματος και της ένδειξης της άνω έδρας του.

(α) Τι σημαίνει εδώ η λέξη "τυχαία";

(β) Το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου του πειράματος είναι

(i) $3 \cdot 6$ (ii) 3^6 (iii) 6^3 (iv) $3 \cdot 6^3$.

(Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.)

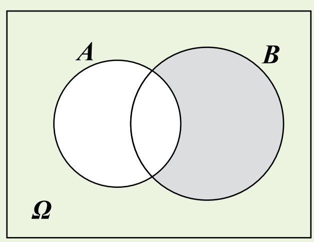
(Σε καθεμιά από τις ερωτήσεις 4-6 μία μόνο από τις συνοδευτικές απαντήσεις είναι σωστή. Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.)

4. Αν η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου είναι 0,4, ποια είναι η πιθανότητα της μη πραγματοποίησης του ενδεχομένου αυτού;
(α) 0,2 (β) 0,8 (γ) 0,6 (δ) 1,4.

5. Αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι τέτοια ώστε $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, ποια είναι η $P(A\cup B)$;

(α) 1 (β) $\frac{3}{4}$ (γ) $\frac{1}{4}$ (δ) $\frac{1}{16}$ (ε) τίποτα από τα προηγούμενα.

6. Ποιο ενδεχόμενο παριστάνει στο διπλανό διάγραμμα Venn το σκιασμένο εμβαδόν;
(α) Β (β) A' (γ) $A-B$ (δ) $B-A$.



(Καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις 7-9 είναι σωστή ή λάθος.
Αν είναι σωστή, κυκλώστε το Σ, αν είναι λάθος, κυκλώστε το Λ).

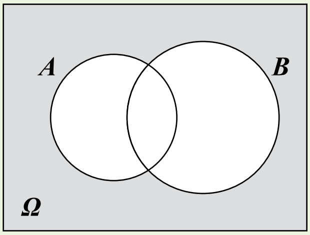
7. Δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους. Σ Λ

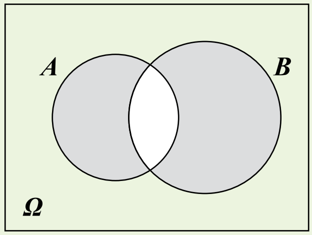
8. Δύο ενδεχόμενα ξένα μεταξύ τους είναι αντίθετα. Σ Λ

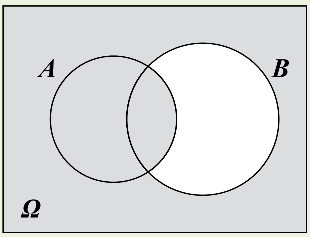
9. Αν δύο ενδεχόμενα Α και Β είναι ξένα μεταξύ τους, τότε και τα συμπληρωματικά τους A' και B' είναι ξένα μεταξύ τους. Σ Λ

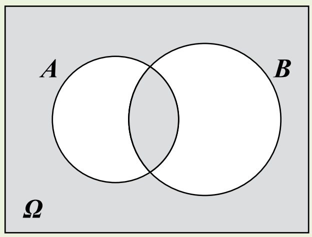
10. Αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ξένα μεταξύ τους, μπορεί να ισχύει $P(A) + P(B) = 1{,}3$;
-Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

11. Να γράψετε με τη βοήθεια των πράξεων των συνόλων το ενδεχόμενο που παριστάνει το σκιασμένο εμβαδόν σε καθένα από τα παρακάτω διαγράμματα Venn:

i)


ii)


iii)


iv)


ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

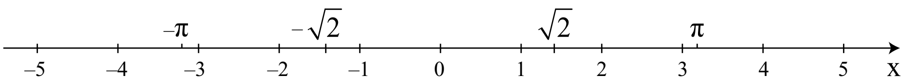
Κεφάλαιο 2ο

2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

(Επαναλήψεις – Συμπληρώσεις)

Εισαγωγή

Στο Γυμνάσιο μάθαμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται από τους **ρητούς** και τους **άρρητους** αριθμούς και παριστάνονται με τα σημεία ενός άξονα, **του άξονα των πραγματικών αριθμών.**



Θυμίζουμε ότι:

✓ Κάθε ρητός αριθμός έχει (ή μπορεί να πάρει) κλασματική μορφή, δηλαδή τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι, με $\beta \neq 0$.

✓ Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός και, αντιστρόφως, κάθε δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός μπορεί να πάρει κλασματική μορφή. Για παράδειγμα,

$$\frac{14}{5}=2{,}8,\quad -\frac{9}{8}=-1{,}25,\quad \frac{60}{11}=5{,}\overline{45},\quad 2{,}25=\frac{225}{100}\ \text{ και }\ 2{,}\overline{32}=\frac{230}{99}$$

Μπορούμε δηλαδή να πούμε ότι οι ρητοί αριθμοί αποτελούνται από τους δεκαδικούς και τους περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς.

Υπάρχουν όμως και αριθμοί, όπως οι $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, κτλ., που δεν μπορούν να πάρουν τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι, με $\beta \neq 0$ (ή, με άλλα λόγια, δεν μπορούν να γραφούν ούτε ως δεκαδικοί ούτε ως περιοδικοί δεκαδικοί). Οι αριθμοί αυτοί λέγονται **άρρητοι** αριθμοί.

Πράξεις

Στους πραγματικούς αριθμούς ορίστηκαν οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και, με τη βοήθειά τους, η αφαίρεση και η διαίρεση.

- Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ισχύουν οι ιδιότητες που αναφέρονται στον επόμενο πίνακα, οι οποίες και αποτελούν τη βάση του αλγεβρικού λογισμού.

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\alpha\beta=\beta\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$	$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$
Ουδέτερο Στοιχείο	$\alpha+0=\alpha$	$\alpha\cdot 1=\alpha$
Αντίθετος/Αντίστροφος Αριθμού	$\alpha+(-\alpha)=0$	$\alpha\frac{1}{\alpha}=1, \alpha\neq 0$
Επιμεριστική	$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$	

Στον πίνακα αυτόν, αλλά και στη συνέχεια του βιβλίου, τα γράμματα που χρησιμοποιούνται παριστάνουν *οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς*, εκτός αν δηλώνεται διαφορετικά.

Ο αριθμός 0 λέγεται και **ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης**, διότι προστιθέμενος σε οποιονδήποτε αριθμό δεν τον μεταβάλλει. Επίσης ο αριθμός 1 λέγεται και **ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού**, διότι οποιοσδήποτε αριθμός πολλαπλασιαζόμενος με αυτόν δεν μεταβάλλεται.

ΣΧΟΛΙΟ

Η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης έχουν ως συνέπεια κάθε άθροισμα με περισσότερους από δυο προσθετέους, να ισούται με οποιοδήποτε άλλο άθροισμα που σχηματίζεται από τους ίδιους αριθμούς με οποιαδήποτε σειρά και αν τους πάρουμε. Για παράδειγμα,

$$-3+2+\sqrt{2}+3-\sqrt{2}+5-2=-3+3+2-2+5+\sqrt{2}-\sqrt{2}=5.$$

Ομοίως, ένα γινόμενο με περισσότερους από δυο παράγοντες ισούται με οποιοδήποτε άλλο γινόμενο που μπορεί να σχηματισθεί από τους ίδιους αριθμούς με οποιαδήποτε σειρά και αν τους πάρουμε. Για παράδειγμα,

$$(-3)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)(-6)4\left(-\frac{5}{2}\right)=(-3)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)(-6)4=-24.$$

(Η απόδειξη των παραπάνω ισχυρισμών είναι αρκετά πολύπλοκη και παραλείπεται.)

• Η αφαίρεση και η διαίρεση ορίζονται με τη βοήθεια της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αντιστοίχως ως εξής:

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta) \quad \text{και} \quad \alpha:\beta=\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta} \qquad (\beta\neq 0)$$

Δηλαδή:
Για να βρούμε τη διαφορά $\alpha-\beta$, προσθέτουμε στο μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου, ενώ για να βρούμε το πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$, με $\beta\neq 0$, πολλαπλασιάζουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Επειδή διαίρεση με διαιρέτη το μηδέν δεν ορίζεται, όπου στο εξής συναντάμε το πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$, εννοείται ότι $\beta\neq 0$ και δεν θα τονίζεται ιδιαίτερα.

• Για τις τέσσερις πράξεις και την ισότητα ισχύουν και οι ακόλουθες ιδιότητες που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο:

1. $(\alpha=\beta \text{ και } \gamma=\delta) \Rightarrow \alpha+\gamma=\beta+\delta$

δηλαδή, δυο ισότητες μπορούμε να τις προσθέσουμε κατά μέλη.

2. $(\alpha=\beta \text{ και } \gamma=\delta) \Rightarrow \alpha\gamma=\beta\delta$

δηλαδή, δυο ισότητες μπορούμε να τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη.

3. $\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma$

δηλαδή, μπορούμε και στα δυο μέλη μιας ισότητας να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό.

4. Αν $\gamma\neq 0$, τότε:
$\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha\gamma=\beta\gamma$

δηλαδή, μπορούμε και τα δυο μέλη μιας ισότητας να τα πολλαπλασιάσουμε ή να τα διαιρέσουμε με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό.

5. $\alpha\cdot\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ ή } \beta=0$

δηλαδή, το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών είναι ίσο με το μηδέν, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς είναι ίσος με το μηδέν.

Άμεση συνέπεια της ιδιότητας αυτής είναι η ακόλουθη:

$$\boldsymbol{\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0}$$

ΣΧΟΛΙΟ

Όταν από την ισότητα $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ ή από την ισότητα $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$ μεταβαίνουμε στην ισότητα $\alpha = \beta$, τότε λέμε ότι **διαγράφουμε** τον ίδιο προσθετέο ή τον ίδιο παράγοντα αντιστοίχως. Όμως στην περίπτωση που διαγράφουμε τον ίδιο παράγοντα πρέπει να ελέγχουμε μήπως ο παράγοντας αυτός είναι ίσος με μηδέν, οπότε ενδέχεται να οδηγηθούμε σε λάθος, όπως συμβαίνει στο ακόλουθο παράδειγμα.

Έστω $\alpha = 1$. Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{gathered}
\alpha = 1 \\
\alpha \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 \\
\alpha^2 = \alpha \\
\alpha^2 - 1 = \alpha - 1 \\
(\alpha + 1)(\alpha - 1) = (\alpha - 1) \cdot 1 \\
\alpha + 1 = 1 \\
\alpha = 0
\end{gathered}$$

Όμως έχουμε και $\alpha = 1$, οπότε το 1 θα είναι ίσο με το 0. Οδηγηθήκαμε στο λανθασμένο αυτό συμπέρασμα, διότι στην ισότητα $(\alpha + 1)(\alpha - 1) = (\alpha - 1) \cdot 1$ διαγράψαμε τον παράγοντα $(\alpha - 1)$ ο οποίος, λόγω της υπόθεσης, ήταν ίσος με μηδέν.

Δυνάμεις

Είναι γνωστή από το Γυμνάσιο η έννοια της δύναμης αριθμού με εκθέτη ακέραιο. Συγκεκριμένα, αν ο α είναι πραγματικός αριθμός και ο ν φυσικός, έχουμε ορίσει ότι:

$$\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}, \qquad \text{για } \nu > 1 \text{ και}$$

$$\alpha^1 = \alpha, \qquad \text{για } \nu = 1.$$

Αν επιπλέον είναι $\alpha \neq 0$, τότε ορίσαμε ότι:

$$\alpha^0 = 1 \qquad \text{και} \qquad \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Ενώ είναι φανερό ότι, αν $\alpha = \beta$, τότε $\alpha^\nu = \beta^\nu$, δεν ισχύει το αντίστροφο, αφού για παράδειγμα είναι $(-2)^2 = 2^2$, αλλά $-2 \neq 2$.

Στον επόμενο πίνακα συνοψίζονται οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο, με την προϋπόθεση ότι κάθε φορά ορίζονται οι δυνάμεις και οι πράξεις που σημειώνονται.

$$\alpha^\kappa \cdot \alpha^\lambda = \alpha^{\kappa+\lambda} \qquad \frac{\alpha^\kappa}{\alpha^\lambda} = \alpha^{\kappa-\lambda}$$

$$\alpha^\kappa \cdot \beta^\kappa = (\alpha\beta)^\kappa \qquad \frac{\alpha^\kappa}{\beta^\kappa} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\kappa$$

$$(\alpha^\kappa)^\lambda = \alpha^{\kappa\lambda}$$

Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Η έννοια της ταυτότητας είναι γνωστή από το Γυμνάσιο. Συγκεκριμένα, κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών λέγεται **ταυτότητα**.

Στον πίνακα που ακολουθεί αναφέρονται οι γνωστές μας πιο αξιοσημείωτες ταυτότητες:

$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)$$

$$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$$

Μέθοδοι απόδειξης

1η) Ευθεία Απόδειξη

Έστω ότι για τρεις πραγματικούς αριθμούς α, β και γ ισχύει η συνθήκη $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$, δηλαδή έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε τη συνεπαγωγή:

«Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, τότε $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$».

Επειδή $\alpha + \beta + \gamma = 0$, είναι $\alpha = -(\beta + \gamma)$, οπότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= [-(\beta+\gamma)]^3 + \beta^3 + \gamma^3 \\
&= -(\beta+\gamma)^3 + \beta^3 + \gamma^3 \\
&= -\beta^3 - 3\beta^2\gamma - 3\beta\gamma^2 - \gamma^3 + \beta^3 + \gamma^3 \\
&= -3\beta^2\gamma - 3\beta\gamma^2 \\
&= -3\beta\gamma(\beta+\gamma) \\
&= 3\alpha\beta\gamma, \qquad (\text{αφού } \beta+\gamma = -\alpha).
\end{aligned}$$

Για την απόδειξη της παραπάνω συνεπαγωγής ξεκινήσαμε με την υπόθεση $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και με διαδοχικά βήματα καταλήξαμε στο συμπέρασμα $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$. Μια τέτοια διαδικασία λέγεται **ευθεία απόδειξη.**

ΣΧΟΛΙΑ

1ο) Ευθεία απόδειξη χρησιμοποιήσαμε και στο Γυμνάσιο για την απόδειξη των γνωστών μας ταυτοτήτων. Για παράδειγμα, για την απόδειξη της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, με $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta)^2 &= (\alpha+\beta)(\alpha+\beta) && [\text{Ορισμός δύναμης}] \\
&= \alpha(\alpha+\beta) + \beta(\alpha+\beta) && [\text{Επιμεριστική ιδιότητα}] \\
&= \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 && [\text{Επιμεριστική ιδιότητα}] \\
&= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 && [\text{Αναγωγή όμοιων όρων}]
\end{aligned}$$

2ο) Για να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός είναι αληθής, μερικές φορές με διαδοχικούς μετασχηματισμούς καταλήγουμε σε έναν λογικά ισοδύναμο ισχυρισμό που είναι αληθής. Έτσι συμπεραίνουμε ότι και ο αρχικός ισχυρισμός είναι αληθής.

Για παράδειγμα, έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, x, y θέλουμε να αποδείξουμε την ταυτότητα:

$$(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = (\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2$$

Έχουμε διαδοχικά:

$(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = (\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2$
$\Leftrightarrow \alpha^2x^2 + \alpha^2y^2 + \beta^2x^2 + \beta^2y^2 = \alpha^2x^2 + 2\alpha\beta xy + \beta^2y^2 + \alpha^2y^2 - 2\alpha\beta xy + \beta^2x^2$
$\Leftrightarrow \alpha^2x^2 + \alpha^2y^2 + \beta^2x^2 + \beta^2y^2 = \alpha^2x^2 + \alpha^2y^2 + \beta^2x^2 + \beta^2y^2$, που ισχύει.

3ο) Για να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός **δεν είναι πάντα αληθής**, αρκεί να βρούμε ένα παράδειγμα για το οποίο ο συγκεκριμένος ισχυρισμός δεν ισχύει ή, όπως λέμε, αρκεί να βρούμε ένα **αντιπαράδειγμα**.
Έτσι ο ισχυρισμός

«για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει $\alpha^2 > \alpha$»

δεν είναι αληθής, αφού για $\alpha = \frac{1}{2}$ έχουμε $\alpha^2 = \frac{1}{4}$, δηλαδή $\alpha^2 < \alpha$.

2η) Μέθοδος της Απαγωγής σε Άτοπο

Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε τον ισχυρισμό:

«Αν το τετράγωνο ενός ακεραίου αριθμού είναι άρτιος, τότε και ο αριθμός αυτός είναι άρτιος», δηλαδή

«Αν ο α^2 είναι άρτιος αριθμός, τότε και ο α είναι άρτιος αριθμός»

Για την απόδειξη του ισχυρισμού αυτού σκεπτόμαστε ως εξής:
Έστω ότι ο α δεν είναι άρτιος. Τότε ο α θα είναι περιττός, δηλαδή θα έχει τη μορφή $\alpha = 2\kappa + 1$, όπου κ ακέραιος, οπότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= (2\kappa + 1)^2 \\ &= 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 \\ &= 2(2\kappa^2 + 2\kappa) + 1 \\ &= 2\lambda + 1 \qquad (\text{όπου } \lambda = 2\kappa^2 + 2\kappa). \end{aligned}$$

Δηλαδή $\alpha^2 = 2\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, που σημαίνει ότι ο α^2 είναι περιττός. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι ο α^2 είναι άρτιος. Επομένως, η παραδοχή ότι α δεν είναι άρτιος είναι λανθασμένη. Άρα **ο α είναι άρτιος**.

Στην παραπάνω απόδειξη υποθέσαμε ότι δεν ισχύει αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε και χρησιμοποιώντας αληθείς προτάσεις φθάσαμε σε ένα συμπέρασμα που έρχεται σε αντίθεση με αυτό που γνωρίζουμε ότι ισχύει. Οδηγηθήκαμε όπως λέμε σε **άτοπο**.

Η μέθοδος αυτή απόδειξης χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τους Αρχαίους Έλληνες και λέγεται **απαγωγή σε άτοπο**.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδειχθούν οι εξής ιδιότητες των αναλογιών:

i) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta=\beta\gamma$ **(εφόσον $\beta\delta \neq 0$)**

ii) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$ **(εφόσον $\beta\gamma\delta \neq 0$)**

iii) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta}$ **(εφόσον $\beta\delta \neq 0$)**

iv) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$ **(εφόσον $\beta\delta(\beta+\delta) \neq 0$)**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Για $\beta\delta \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \beta\delta\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\beta\delta\cdot\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta=\beta\gamma.$$

ii) Για $\beta\gamma\delta \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta=\beta\gamma \Leftrightarrow \frac{\alpha\delta}{\gamma\delta}=\frac{\beta\gamma}{\gamma\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}.$$

iii) Για $\beta\delta \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}+1=\frac{\gamma}{\delta}+1 \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta}.$$

iv) Για $\beta\delta\,(\beta+\delta) \neq 0$, αν θέσουμε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\lambda$, έχουμε:

$\alpha=\lambda\beta$ και $\gamma=\lambda\delta$, οπότε $\alpha+\gamma=\lambda(\beta+\delta)$.

Επομένως, $\lambda=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$, δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$.

2. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος. Στη συνέχεια, με τη χρήση του κανόνα και του διαβήτη, να παρασταθούν οι $\sqrt{2}$ και $-\sqrt{2}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός. Τότε μπορούμε να γράψουμε $\sqrt{2}=\frac{\kappa}{\lambda}$, όπου κ, λ είναι φυσικοί αριθμοί και $\frac{\kappa}{\lambda}$ **ανάγωγο κλάσμα** (δηλαδή κλάσμα στο οποίο έχουν γίνει όλες οι δυνατές απλοποιήσεις). Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$(\sqrt{2})^2=\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^2$$

$$2=\frac{\kappa^2}{\lambda^2}$$

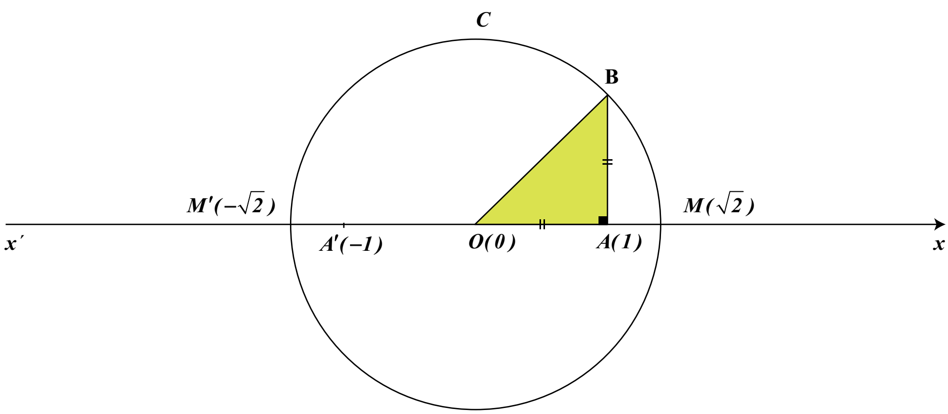
$$\kappa^2=2\lambda^2$$

που σημαίνει ότι ο κ^2 είναι άρτιος, οπότε (σελ. 49) και ο κ είναι άρτιος, δηλαδή είναι της μορφής $\kappa=2\mu$.
Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\kappa^2=2\lambda^2$$
$$(2\mu)^2=2\lambda^2$$
$$4\mu^2=2\lambda^2$$
$$\lambda^2=2\mu^2$$

Που σημαίνει ότι ο λ^2 είναι άρτιος, άρα και ο λ είναι άρτιος.

Αφού λοιπόν οι κ, λ είναι άρτιοι, το κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$ **δεν είναι ανάγωγο** (άτοπο).



Στο σημείο Α του πραγματικού άξονα που παριστάνει τον αριθμό 1 υψώνουμε κάθετο τμήμα ΑΒ με μήκος 1. Τότε η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ έχει μήκος ίσο με $\sqrt{2}$. Στη συνέχεια με κέντρο το Ο και ακτίνα $OB=\sqrt{2}$ γράφουμε κύκλο ο οποίος τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία Μ και Μ′ που παριστάνουν τους αριθμούς $\sqrt{2}$ και $-\sqrt{2}$ αντιστοίχως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται η παράσταση $A=[(x^2y^3)^{-2}\cdot(xy^3)^4]:\left(\dfrac{x^3}{y^{-1}}\right)^{-3}$.

i) Να δείξετε ότι $A=x^9\cdot y^9$.

ii) Να βρείτε την τιμή της παράστασης για x = 2010 και $y=\dfrac{1}{2010}$.

2. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=[(xy^{-1})^2:(x^3y^7)^{-1}]^2$ για x = 0,4 και y = –2,5.

3. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i) 1001^2-999^2 **ii)** $99\cdot101$ **iii)** $\dfrac{(7,23)^2-(4,23)^2}{11,46}$.

4. i) Να δείξετε ότι $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=4\alpha\beta$.

ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\left(\frac{999}{1000}+\frac{1000}{999}\right)^2-\left(\frac{999}{1000}-\frac{1000}{999}\right)^2.$$

5. i) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2-(\alpha-1)(\alpha+1)=1$.

ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$(1,3265)^2-0,3265\cdot2,3265.$$

6. Να δείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δυο διαδοχικών φυσικών αριθμών (του μικρότερου από του μεγαλύτερου) ισούται με το άθροισμά τους.

7. Αν ν φυσικός αριθμός, να δείξετε ότι ο αριθμός $2^\nu+2^{\nu+1}+2^{\nu+2}$ είναι πολλαπλάσιο του 7.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\dfrac{\alpha^3-2\alpha^2+\alpha}{\alpha^2-\alpha}$ **ii)** $\dfrac{(\alpha^2-\alpha)+2\alpha-2}{\alpha^2-1}$.

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\left(\alpha-\dfrac{1}{\alpha}\right)^2\cdot\dfrac{\alpha^3+\alpha^2}{(\alpha+1)^3}$ **ii)** $\dfrac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha+1}\cdot\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha^3-1}$.

3. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $(x+y)^2\cdot(x^{-1}+y^{-1})^{-2}$ **ii)** $\dfrac{x+y}{x-y}\cdot\dfrac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}}$.

4. Να δείξετε ότι $\left(\dfrac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\right):\left(\dfrac{x^2}{x-y}-y\right)=1$

5. Έστω α, β και γ τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Αν $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta}{\gamma}=\dfrac{\gamma}{\alpha}$.

ii) Αν $\alpha-\beta=\beta-\gamma=\gamma-\alpha$.

6. Να δείξετε ότι, αν ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο $L = 4\alpha$ και εμβαδόν $E = \alpha^2$, τότε το ορθογώνιο αυτό είναι τετράγωνο με πλευρά ίση με α.

7. Να δείξετε ότι:

i) Αν α ρητός και β άρρητος, τότε $\alpha + \beta$ άρρητος.

ii) Αν α ρητός, με $\alpha \neq 0$, και β άρρητος, τότε $\alpha\cdot\beta$ άρρητος.

2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Έννοια της διάταξης

Οι έννοιες «μεγαλύτερος από», «μικρότερος από», που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο, ορίστηκαν ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος** από έναν αριθμό β, και γράφουμε **α > β**, όταν η διαφορά **α – β** είναι θετικός αριθμός.

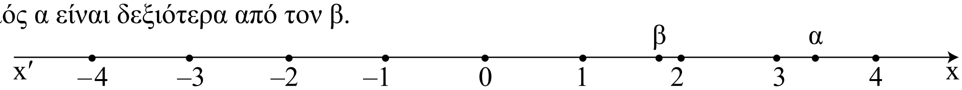
Στην περίπτωση αυτή λέμε επίσης ότι ο β είναι **μικρότερος** του α και γράφουμε **β < α**.

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει αμέσως ότι:
- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.
- Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.

Έτσι ο αρχικός ορισμός γράφεται ισοδύναμα:

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$$

Γεωμετρικά η ανισότητα $\alpha > \beta$ σημαίνει ότι, πάνω στον άξονα των πραγματικών ο αριθμός α είναι δεξιότερα από τον β.



Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει $\alpha > \beta$ ή $\alpha = \beta$, τότε γράφουμε $\boldsymbol{\alpha \geq \beta}$ και διαβάζουμε: **«α μεγαλύτερος ή ίσος του β»**.

Από τον τρόπο με τον οποίο γίνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, προκύπτει ότι:

$$(\alpha > 0 \text{ και } \beta > 0) \Rightarrow \alpha + \beta > 0$$
$$(\alpha < 0 \text{ και } \beta < 0) \Rightarrow \alpha + \beta < 0$$

$$\alpha, \beta \text{ ομόσημοι} \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} > 0$$

$$\alpha, \beta \text{ ετερόσημοι} \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 0$$

$\alpha^2 \geq 0$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$
(Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\alpha = 0$)

Από την τελευταία εύκολα προκύπτουν και οι ισοδυναμίες:

$$\boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0}$$
$$\boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0}$$

Ιδιότητες των ανισοτήτων

Στηριζόμενοι στην ισοδυναμία $\boldsymbol{\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0}$, μπορούμε να αποδείξουμε τις παρακάτω ιδιότητες των ανισοτήτων:

1. $(\alpha > \beta \text{ και } \beta > \gamma) \Rightarrow \alpha > \gamma$

2.
- $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
- Αν $\gamma > 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
- Αν $\gamma < 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$

3.
- $(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$
- Για **θετικούς** αριθμούς α, β, γ, δ ισχύει η συνεπαγωγή:
  $(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

Η ιδιότητα 3 ισχύει και για περισσότερες ανισότητες. Συγκεκριμένα:

✓ $(\alpha_1 > \beta_1 \text{ και } \alpha_2 > \beta_2 \text{ και } \ldots \text{ και } \alpha_\nu > \beta_\nu) \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu > \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu$

✓ Αν, επιπλέον, τα μέλη των ανισοτήτων είναι **θετικοί** αριθμοί, τότε:
$(\alpha_1 > \beta_1 \text{ και } \alpha_2 > \beta_2 \text{ και } \ldots \text{ και } \alpha_\nu > \beta_\nu) \Rightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu > \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_\nu$ (*)

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε και την παρακάτω ιδιότητα.

4. Για <u>θετικούς</u> αριθμούς α, β και <u>θετικό ακέραιο</u> ν ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Έστω $\alpha > \beta$. Τότε, από τη (*), για

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_\nu = \alpha > 0 \quad \text{και} \quad \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_\nu = \beta > 0,$$

προκύπτει ότι: $\alpha^\nu > \beta^\nu$.

- Για την απόδειξη του αντιστρόφου θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Έστω λοιπόν ότι $\alpha^\nu > \beta^\nu$ και $\alpha \leq \beta$. Τότε:

✓ αν ήταν $\alpha = \beta$, από τον ορισμό της ισότητας θα είχαμε $\alpha^\nu = \beta^\nu$ (άτοπο), ενώ

✓ αν ήταν $\alpha < \beta$, θα είχαμε $\alpha^\nu < \beta^\nu$ (άτοπο).

Άρα, $\alpha > \beta$.

Με τη βοήθεια της παραπάνω ιδιότητας θα αποδείξουμε τώρα ότι:

Για <u>θετικούς</u> αριθμούς α, β και <u>θετικό ακέραιο</u> ν ισχύει η ισοδυναμία:

$$\boldsymbol{\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Έστω $\alpha = \beta$. Τότε, από τον ορισμό της ισότητας προκύπτει, όπως είπαμε και προηγουμένως, ότι $\alpha^\nu = \beta^\nu$.
- Για την απόδειξη του αντιστρόφου θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Έστω λοιπόν ότι $\alpha^\nu = \beta^\nu$ και $\alpha \neq \beta$. Τότε:

✓ αν ήταν $\alpha > \beta$, λόγω της (4), θα είχαμε $\alpha^\nu > \beta^\nu$ (άτοπο), ενώ

✓ αν ήταν $\alpha < \beta$, λόγω της (4), θα είχαμε $\alpha^\nu < \beta^\nu$ (άτοπο).

Άρα, $\alpha = \beta$.

ΣΧΟΛΙΑ

1ο Σύμφωνα με την ιδιότητα 3, αν δυο ανισότητες της ίδιας φοράς τις προσθέσουμε κατά μέλη, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με την αφαίρεση. Για παράδειγμα, είναι

$$10 > 6 \text{ και } 7 > 2, \text{ αλλά } 10 - 7 < 6 - 2.$$

2ο Επίσης, σύμφωνα με την ιδιότητα 3, αν δυο ανισότητες της ίδιας φοράς με θετικούς, όμως, όρους τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με τη διαίρεση. Για παράδειγμα, είναι

$$24 > 10 \text{ και } 6 > 2, \text{ αλλά } \frac{24}{6} < \frac{10}{2}.$$

Διαστήματα

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $α \leq x \leq β$ λέγεται **κλειστό διάστημα από α μέχρι β** και συμβολίζεται με **[α, β]**.

Αν τώρα από το κλειστό διάστημα **[α, β]** παραλείψουμε τα α και β προκύπτει το αντίστοιχο **ανοικτό διάστημα από το α μέχρι β** που συμβολίζεται με **(α, β)**.

Οι αριθμοί **α** και **β** λέγονται **άκρα των διαστημάτων** αυτών και κάθε αριθμός μεταξύ των **α** και **β** λέγεται **εσωτερικό σημείο** αυτών.

Η διαφορά δηλαδή μεταξύ ενός κλειστού και του αντίστοιχου ανοικτού διαστήματος είναι ότι το πρώτο περιέχει τα άκρα του, ενώ το δεύτερο δεν τα περιέχει.

Άλλες μορφές διαστημάτων είναι:

✓ Το **ανοικτό δεξιά διάστημα [α, β)** που αποτελείται από τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $\mathbf{α \leq x < β}$ και

✓ Το **ανοικτό αριστερά διάστημα (α, β]** που αποτελείται από τους αριθμούς με x για τους οποίους ισχύει $\mathbf{α < x \leq β}$.

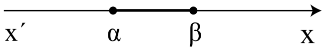
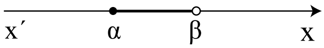
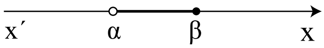
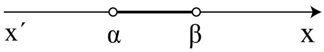
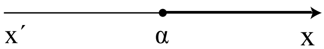
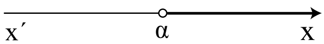
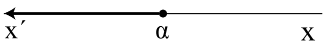
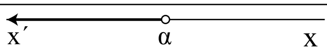
Τέλος, υπό μορφή διαστήματος,

✓ Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει $\mathbf{α \leq x}$ συμβολίζεται με **[α, +∞)**, ενώ

✓ Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει $\mathbf{x \leq α}$ συμβολίζεται με **(–∞, α]**.

Με ανάλογο τρόπο ορίζονται και τα διαστήματα **(α, +∞)** και **(–∞, α)**. Τα σύμβολα +∞ και –∞, που διαβάζονται **«συν άπειρο»** και **«πλην άπειρο»** αντιστοίχως, δεν παριστάνουν πραγματικούς αριθμούς.

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται οι μορφές διαστημάτων πραγματικών αριθμών και οι διάφορες αναπαραστάσεις τους:

ΔΙΑΣΤΗΜΑ	ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ	ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ
	$\alpha \leq x \leq \beta$	$[\alpha, \beta]$
	$\alpha \leq x < \beta$	$[\alpha, \beta)$
	$\alpha < x \leq \beta$	$(\alpha, \beta]$
	$\alpha < x < \beta$	(α, β)
	$x \geq \alpha$	$[\alpha, +\infty)$
	$x > \alpha$	$(\alpha, +\infty)$
	$x \leq \alpha$	$(-\infty, \alpha]$
	$x < \alpha$	$(-\infty, \alpha)$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδειχθεί ότι:

i) Αν α, β ομόσημοι αριθμοί, τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha} > \dfrac{1}{\beta}$

ii) Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$

iii) Αν $\alpha > 0$**, τότε** $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \geq 2$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Αφού α, β είναι ομόσημοι αριθμοί έχουμε $\alpha\beta > 0$. Επομένως ισχύει:

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha\beta} < \frac{\beta}{\alpha\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}.$$

ii) Έχουμε:

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

iii) Έχουμε:

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 \geq 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 - 2\alpha \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

2. Αν $-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{4}$ και $-\frac{2}{3}<y<\frac{5}{6}$, να αποδειχθεί ότι:

$$-11<8x-12y+3<17.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από την ανισότητα $-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{4}$ έχουμε διαδοχικά:

$$8\left(-\frac{1}{2}\right)<8x<8\cdot\frac{3}{4}$$

$$-4<8x<6 \qquad (1)$$

Ομοίως από την $-\frac{2}{3}<y<\frac{5}{6}$ έχουμε διαδοχικά:

$$12\left(-\frac{2}{3}\right)<12y<12\cdot\frac{5}{6}$$

$$-8<12y<10$$

$$8>-12y>-10$$

$$-10<-12y<8 \qquad (2)$$

Προσθέτουμε τώρα κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2), που έχουν την ίδια φορά, και έχουμε:

$$-14<8x-12y<14,$$

οπότε θα ισχύει:

$$-14+3<8x-12y+3<14+3$$

Άρα $$-11<8x-12y+3<17$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha^2+9\geq 6\alpha$ **ii)** $2(\alpha^2+\beta^2)\geq(\alpha+\beta)^2$

2. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2-2\alpha+1\geq 0$. Πότε ισχύει η ισότητα;

3. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Αν $(x-2)^2+(y+1)^2=0$ **ii)** Αν $x^2+y^2-2x+4y+5=0$

4. Αν $4{,}5<x<4{,}6$ και $5{,}3<y<5{,}4$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

i) $x+y$ **ii)** $x-y$ **iii)** $\dfrac{x}{y}$ **iv)** x^2+y^2

5. Το πλάτος x και το μήκος y ενός ορθογωνίου ικανοποιούν τις ανισότητες $2<x<3$ και $3<y<5$. Αν αυξήσουμε το πλάτος κατά 0,2 και ελαττώσουμε το μήκος κατά 0,1, να βρείτε τις δυνατές τιμές:

i) της περιμέτρου **ii)** του εμβαδού του νέου ορθογωνίου.

6. Αν $0\le\alpha<\beta$, να δείξετε ότι $\dfrac{\alpha}{1+\alpha}<\dfrac{\beta}{1+\beta}$.

7. Να βρείτε το λάθος στους παρακάτω συλλογισμούς:

Έστω $x>5$. Τότε έχουμε διαδοχικά

$$\begin{gathered}x>5\\5x>25\\5x-x^2>25-x^2\\x(5-x)>(5+x)(5-x)\\x>5+x\\0>5.\end{gathered}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνονται ένα κλάσμα $\dfrac{\alpha}{\beta}$ με θετικούς όρους και ένας θετικός αριθμός γ. Να αποδείξετε ότι:

i) Αν $\dfrac{\alpha}{\beta}<1$, τότε $\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}>\dfrac{\alpha}{\beta}$

ii) Αν $\dfrac{\alpha}{\beta}>1$, τότε $\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}<\dfrac{\alpha}{\beta}$

2. Αν $\alpha>1>\beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha+\beta>1+\alpha\beta$.

3. Αν α, β θετικοί αριθμοί, να δείξετε ότι $(\alpha+\beta)\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)\ge 4$.

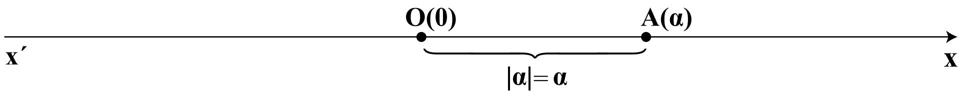
4. Να αποδείξετε ότι:

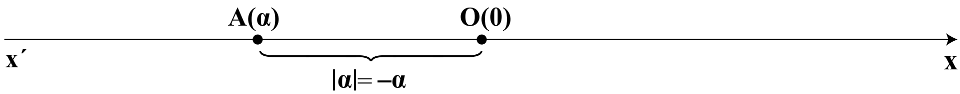
i) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\ge 0$ **ii)** $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\ge 0$

2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ορισμός της απόλυτης τιμής

Θεωρούμε έναν αριθμό α που παριστάνεται με το σημείο Α πάνω σε έναν άξονα.





Γνωρίζουμε από το Γυμνάσιο ότι η απόσταση του σημείου Α από την αρχή Ο, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΟΑ, ονομάζεται **απόλυτη τιμή** του αριθμού α και συμβολίζεται με **|α|**.
Από τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάστηκε ο άξονας προκύπτει ότι:

- $|2| = 2$, $\left|\dfrac{13}{5}\right| = \dfrac{13}{5}$, $\left|\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$ και γενικά: **|α| = α , για κάθε α > 0**.

  Δηλαδή:

  Η απόλυτη τιμή θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός.

- $|-2| = 2$, $\left|-\dfrac{13}{5}\right| = \dfrac{13}{5}$, $\left|-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$ και γενικά: **|α| = –α, για κάθε α < 0.**

  Δηλαδή:
  Η απόλυτη τιμή αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του.

- **|0| = 0**

Επομένως, έχουμε τον ακόλουθο αλγεβρικό ορισμό της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με $|\alpha|$ και ορίζεται από τον τύπο:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε αμέσως ότι:

- $|\alpha| = |-\alpha| \geq 0$
- $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$
- $|\alpha|^2 = \alpha^2$

Αν $\theta > 0$, τότε:

- $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$
- $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$

Για παράδειγμα,

✓ $|x| = 5 \Leftrightarrow x = 5$ ή $x = -5$

✓ $|\alpha - \beta| = |2\alpha - 3\beta| \Leftrightarrow \alpha - \beta = 2\alpha - 3\beta$ ή $\alpha - \beta = 3\beta - 2\alpha$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2\beta \text{ ή } \alpha = \frac{4}{3}\beta$$

Ιδιότητες των απόλυτων τιμών

Από τον τρόπο εκτέλεσης των πράξεων μεταξύ πραγματικών αριθμών, προκύπτουν για τις απόλυτες τιμές οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$
2. $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$
3. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Οι ιδιότητες αυτές, όμως, μπορούν να αποδειχθούν και με τη βοήθεια των προηγούμενων συμπερασμάτων.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} |\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta| &\Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = (|\alpha| \cdot |\beta|)^2 \\ &\Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 \\ &\Leftrightarrow (\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

2. Αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο.

3. Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας $|\alpha + \beta| \le |\alpha| + |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} |\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta| &\Leftrightarrow |\alpha+\beta|^2 \le (|\alpha| + |\beta|)^2 \\ &\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \le |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta| \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \le \alpha^2 + \beta^2 + 2|\alpha\beta| \\ &\Leftrightarrow \alpha\beta \le |\alpha\beta|, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

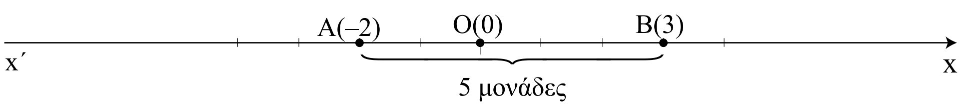
Είναι φανερό ότι η ισότητα $\alpha\beta = |\alpha\beta|$ ισχύει αν και μόνο αν $\alpha\beta \ge 0$, δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

ΣΧΟΛΙΟ

- Η ισότητα $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ ισχύει και για περισσότερους παράγοντες. Συγκεκριμένα:
  $|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \cdot \ldots \cdot |\alpha_\nu|$
  Στην ειδική μάλιστα περίπτωση που είναι $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\nu = \alpha$, έχουμε:
  $|\alpha^\nu| = |\alpha|^\nu$
- Η ανισότητα $|\alpha + \beta| \le |\alpha| + |\beta|$ ισχύει και για περισσότερους προσθετέους. Συγκεκριμένα:
  $|\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu| \le |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_\nu|$

Απόσταση δυο αριθμών

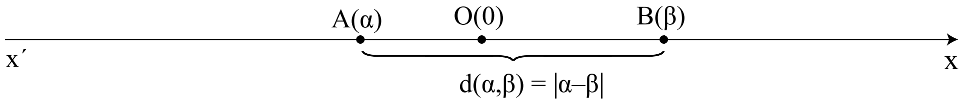
- Ας πάρουμε τώρα δυο αριθμούς, για παράδειγμα τους –2 και 3, που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία Α και Β αντιστοίχως.



Το μήκος του τμήματος ΑΒ λέγεται **απόσταση** των αριθμών –2 και 3. Παρατηρούμε ότι

$$(AB) = 5 = |(-2) - 3| = |3 - (-2)|.$$

Γενικότερα, ας θεωρήσουμε δυο αριθμούς α και β που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία Α και Β αντιστοίχως.

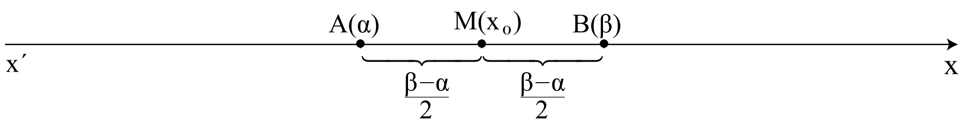


Το μήκος του τμήματος ΑΒ λέγεται **απόσταση** των αριθμών α και β, συμβολίζεται με d(α,β) και είναι ίση με |α – β|. Είναι δηλαδή:

$$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$$

Προφανώς ισχύει $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$. Στην περίπτωση μάλιστα που είναι $\alpha < \beta$, τότε η απόσταση των α και β είναι ίση με $\beta - \alpha$ και λέγεται **μήκος** του διαστήματος $[\alpha, \beta]$.

- Ας θεωρήσουμε τώρα ένα διάστημα [α, β] και ας ονομάσουμε Α και Β τα σημεία που παριστάνουν στον άξονα τα άκρα α και β αντιστοίχως.



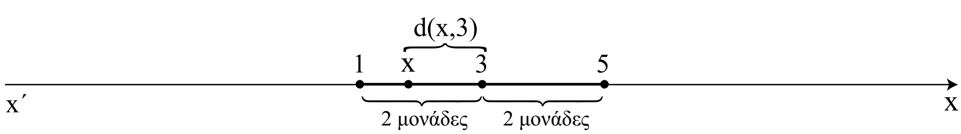
Αν $M(x_0)$ είναι το μέσον του τμήματος ΑΒ, τότε έχουμε

$$\begin{aligned}(MA) = (MB) &\Leftrightarrow d(x_0, \alpha) = d(x_0, \beta)\\ &\Leftrightarrow |x_0 - \alpha| = |x_0 - \beta|\\ &\Leftrightarrow x_0 - \alpha = \beta - x_0, \qquad (\text{αφού } \alpha < x_0 < \beta)\\ &\Leftrightarrow 2x_0 = \alpha + \beta\\ &\Leftrightarrow x_0 = \frac{\alpha+\beta}{2}\end{aligned}$$

Ο αριθμός $\frac{\alpha+\beta}{2}$ που αντιστοιχεί στο μέσον Μ του τμήματος ΑΒ λέγεται **κέντρο** του διαστήματος [α, β], ενώ ο αριθμός $\rho = \frac{\beta-\alpha}{2}$ λέγεται **ακτίνα** του [α, β].

Ως μήκος, κέντρο και ακτίνα των διαστημάτων (α, β), [α, β) και (α, β] ορίζουμε το μήκος, το κέντρο και την ακτίνα του διαστήματος [α, β].

- Έστω τώρα ότι θέλουμε να βρούμε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x - 3| < 2$.



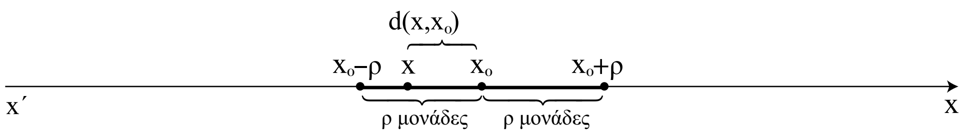
Από τον ορισμό της απόστασης έχουμε:

$$\begin{aligned}|x-3|<2 &\Leftrightarrow d(x,3)<2\\ &\Leftrightarrow 3-2<x<3+2\\ &\Leftrightarrow x\in(3-2,\,3+2)\end{aligned}$$

Γενικά:

> Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho>0$, ισχύει:
> $$\begin{aligned}|x-x_0|<\rho &\Leftrightarrow x\in(x_0-\rho,\,x_0+\rho)\\ &\Leftrightarrow x_0-\rho<x<x_0+\rho\end{aligned}$$

Δηλαδή, οι αριθμοί x που ικανοποιούν τη σχέση $|x-x_0|<\rho$ είναι τα σημεία του διαστήματος $(x_0-\rho,\, x_0+\rho)$ που έχει κέντρο το x_0 και ακτίνα ρ.



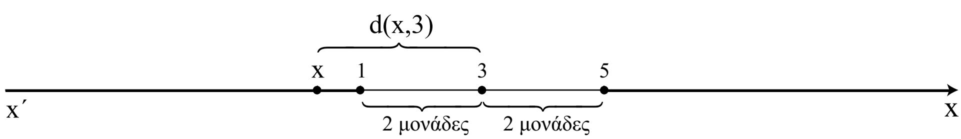
Στην ειδική περίπτωση που είναι $x_0=0$, έχουμε:

$$|x|<\rho \Leftrightarrow x\in(-\rho,\,\rho) \Leftrightarrow -\rho<x<\rho\,.$$

Για παράδειγμα,

$$|x|<2 \Leftrightarrow x\in(-2,\,2) \Leftrightarrow -2<x<2\,.$$

• Έστω, τώρα, ότι θέλουμε να βρούμε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x-3|>2$.



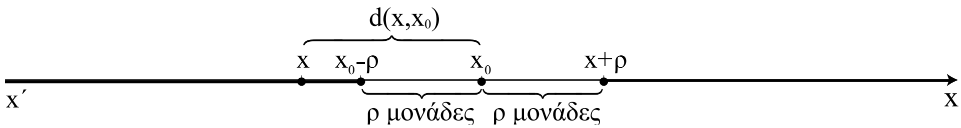
Από τον ορισμό της απόστασης έχουμε:

$$\begin{aligned}|x-3|>2 &\Leftrightarrow d(x,3)>2\\ &\Leftrightarrow x<3-2 \text{ ή } x>3+2\\ &\Leftrightarrow x\in(-\infty,\,3-2)\cup(3+2,\,+\infty).\end{aligned}$$

Γενικά:

> Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho>0$, ισχύει:
> $$\begin{aligned}|x-x_0|>\rho &\Leftrightarrow x\in(-\infty,\,x_0-\rho)\cup(x_0+\rho,\,+\infty)\\ &\Leftrightarrow x<x_0-\rho \text{ ή } x>x_0+\rho\end{aligned}$$

Δηλαδή οι αριθμοί x που ικανοποιούν τη σχέση $|x - x_0| > \rho$ αντιστοιχούν σε σημεία Μ(x) του άξονα x′x που απέχουν από το σημείο $K(x_0)$ απόσταση μεγαλύτερη του ρ.



Στην ειδική περίπτωση που είναι $x_0 = 0$, η τελευταία ισοδυναμία παίρνει τη μορφή:

$$|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho \text{ ή } x > \rho$$

Για παράδειγμα:

$$|x| > 2 \Leftrightarrow x < -2 \text{ ή } x > 2.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές.

i) $|\pi - 3|$ **ii)** $|\pi - 4|$

iii) $|3-\pi| + |4-\pi|$ **iv)** $\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right| - \left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right|$.

2. Αν $3 < x < 4$, να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση

$$|x-3| + |x-4|$$

3. Να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση $|x-3| - |4-x|$, όταν:

i) $x < 3$ **ii)** $x > 4$.

4. Αν $\alpha \neq \beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $\left|\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\right|$.

5. Αν $x \neq 0$ και $y \neq 0$, να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η παράσταση

$$A = \frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y}.$$

6. Η διάμετρος ενός δίσκου μετρήθηκε και βρέθηκε 2,37dm. Το λάθος της μέτρησης είναι το πολύ 0,005dm. Αν D είναι η πραγματική διάμετρος του κύκλου, τότε:

i) Να εκφράσετε την παραπάνω παραδοχή με τη βοήθεια της έννοιας της από-στασης

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή D.

7. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα όπως δείχνει η πρώτη γραμμή του.

ΠΙΝΑΚΑΣ		
Απόλυτη Τιμή	**Απόσταση**	**Διάστημα ή ένωση διαστημάτων**
$\|x-4\|\leq 2$	$d(x,4)\leq 2$	$[2,6]$
$\|x+3\|<4$		
$\|x-4\|>2$		
$\|x+3\|\geq 4$		
	$d(x,5)<1$	
	$d(x,-1)>2$	
	$d(x,5)\geq 1$	
	$d(x,-1)\leq 2$	
		$(-2, 2)$
		$[-5, 1]$
		$(-\infty, -2]\cup[2, +\infty)$
		$(-\infty, -5)\cup(1, +\infty)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι $|\alpha-\beta|\leq|\alpha-\gamma|+|\gamma-\beta|$.

2. Αν $\alpha>\beta$, να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha=\dfrac{\alpha+\beta+|\alpha-\beta|}{2}$ **ii)** $\beta=\dfrac{\alpha+\beta-|\alpha-\beta|}{2}$

3. Τι σημαίνει για τους αριθμούς x και y:

i) Η ισότητα $|x|+|y|=0$; **ii)** Η ανισότητα $|x|+|y|>0$;

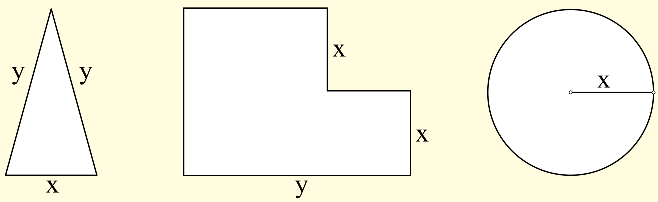
4. Έστω $0 < \alpha < \beta$.

i) Να διατάξετε από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς

$$1,\ \frac{\alpha}{\beta}\ \text{και}\ \frac{\beta}{\alpha}.$$

ii) Να δείξετε ότι στον πραγματικό άξονα ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ βρίσκεται πλησιέστερα στο 1 από ό,τι ο αριθμός $\frac{\beta}{\alpha}$.

5. Αν $|x-2|<0{,}1$ και $|y-4|<0{,}2$ να εκτιμήσετε την τιμή της περιμέτρου των παρακάτω σχημάτων:



2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τετραγωνική ρίζα μη αρνητικού αριθμού

Στο Γυμνάσιο μάθαμε την έννοια της τετραγωνικής ρίζας μη αρνητικού αριθμού και τις ιδιότητές της. Συγκεκριμένα μάθαμε ότι:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η **τετραγωνική ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον α.

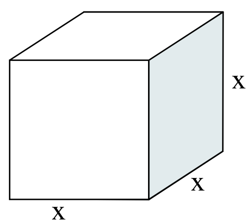
Μπορούμε επομένως να πούμε ότι:

Αν $\alpha \geq 0$, η $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha$.

Για τις τετραγωνικές ρίζες μη αρνητικών αριθμών γνωρίσαμε τις παρακάτω ιδιότητες:

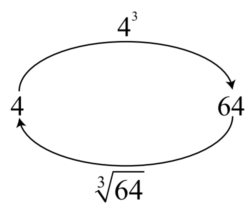
- $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$
- $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$
- $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

ν-οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού



Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε μια κυβική δεξαμενή χωρητικότητας 64 κυβικών μέτρων και ζητάμε την πλευρά της. Αν x μέτρα είναι η πλευρά της δεξαμενής, τότε ο όγκος της θα είναι x^3 κυβικά μέτρα και επομένως θα ισχύει: $x^3 = 64$.

Αναζητούμε λοιπόν έναν αριθμό x που, όταν υψωθεί στον κύβο, θα μας δώσει 64. Ο αριθμός αυτός, αφού παριστάνει μήκος, πρέπει να είναι θετικός. Με δοκιμές βρίσκουμε ότι ο ζητούμενος



αριθμός είναι ο 4, διότι $4^3 = 64$.

Ο αριθμός 4 λέγεται **τρίτη ρίζα** του 64 και συμβολίζεται με $\sqrt[3]{64}$. Δηλαδή $\sqrt[3]{64} = 4$. Η τρίτη ρίζα ενός αριθμού λέγεται και **κυβική ρίζα** του αριθμού αυτού.

Γενικεύοντας τώρα τα παραπάνω για **κάθε θετικό ακέραιο ν**, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η **ν-οστή ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός[1] που, όταν υψωθεί στην ν, δίνει τον α.

Επίσης γράφουμε

$$\sqrt[1]{\alpha} = \alpha \text{ και } \sqrt[2]{\alpha} = \sqrt{\alpha}.$$

Μπορούμε επομένως να πούμε ότι:

Αν $\alpha \geq 0$, τότε η $\sqrt[\nu]{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^\nu = \alpha$.

ΣΧΟΛΙΟ

Είναι $10^4 = 10000$, οπότε $\sqrt[4]{10000} = 10$. Είναι επίσης και $(-10)^4 = 10000$. Όμως, δεν επιτρέπεται να γράφουμε $\sqrt[4]{10000} = -10$, αφού, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, η $\sqrt[4]{10000}$ είναι η μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^4 = 10000$.

Ιδιότητες των ριζών

Από τον ορισμό της ν-οστής ρίζας ενός μη αρνητικού αριθμού α, συμπεραίνουμε αμέσως ότι:

- Αν $\alpha \geq 0$, τότε:

$$(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu = \alpha \text{ και } \sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha.$$

- Αν $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος, τότε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha|.$$

[1] Αποδεικνύεται ότι υπάρχει και είναι μοναδικός.

Για παράδειγμα:

$$\sqrt[6]{2^6}=2, \text{ ενώ } \sqrt[6]{(-2)^6}=|-2|=2.$$

Ισχύουν όμως και οι ακόλουθες ιδιότητες, από τις οποίες οι δύο πρώτες είναι ανάλογες των ιδιοτήτων της τετραγωνικής ρίζας:

Αν α, $\beta \geq 0$, τότε:

1. $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}$

2. $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ (εφόσον $\beta \neq 0$)

3. $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}=\sqrt[\mu\cdot\nu]{\alpha}$

4. $\sqrt[\nu\cdot\rho]{\alpha^{\mu\cdot\rho}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. Έχουμε:

$$\begin{aligned}\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta} &\Leftrightarrow (\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta})^{\nu}=(\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta})^{\nu}\\ &\Leftrightarrow (\sqrt[\nu]{\alpha})^{\nu}\cdot(\sqrt[\nu]{\beta})^{\nu}=\alpha\cdot\beta\\ &\Leftrightarrow \alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\beta, \qquad \text{που ισχύει.}\end{aligned}$$

2. Αποδεικνύεται όπως και η 1.

3. Έχουμε:

$$\begin{aligned}\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}=\sqrt[\mu\cdot\nu]{\alpha} &\Leftrightarrow \left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\right)^{\mu\cdot\nu}=\left(\sqrt[\mu\cdot\nu]{\alpha}\right)^{\mu\cdot\nu}\\ &\Leftrightarrow \left[\left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\right)^{\mu}\right]^{\nu}=\alpha\\ &\Leftrightarrow (\sqrt[\nu]{\alpha})^{\nu}=\alpha, \text{ που ισχύει.}\end{aligned}$$

4. Έχουμε:

$$\sqrt[\nu\cdot\rho]{\alpha^{\mu\cdot\rho}}=\sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{\alpha^{\mu\cdot\rho}}}=\sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{(\alpha^{\mu})^{\rho}}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Η ιδιότητα 1. ισχύει και για περισσότερους από δυο μη αρνητικούς παράγοντες. Συγκεκριμένα, για μη αρνητικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa$ ισχύει:

$$\sqrt[\nu]{\alpha_1}\cdot\sqrt[\nu]{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[\nu]{\alpha_\kappa}=\sqrt[\nu]{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_\kappa}$$

Στην ειδική μάλιστα περίπτωση που είναι $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_\kappa=\alpha\geq 0$, ισχύει:

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa}=(\sqrt[\nu]{\alpha})^\kappa,$$

οπότε, λόγω της ιδιότητας 1, για α, $\beta\geq 0$ έχουμε

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta}=\alpha\cdot\sqrt[\nu]{\beta}.$$

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Στη συνέχεια θα ορίσουμε παραστάσεις της μορφής $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$, που $\alpha>0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τις οποίες θα ονομάσουμε **δυνάμεις με ρητό εκθέτη**. Ο ορισμός θα γίνει με τέτοιο τρόπο, ώστε να διατηρούνται οι γνωστές μας ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη.

Τι θα πρέπει, για παράδειγμα, να σημαίνει το $3^{\frac{2}{5}}$; Αν απαιτήσουμε να ισχύει η ιδιότητα $(\alpha^p)^q=\alpha^{pq}$ και για δυνάμεις με ρητό εκθέτη, τότε θα είναι $\left(3^{\frac{2}{5}}\right)^5=3^{\frac{2}{5}\cdot 5}=3^2$.

Άρα πρέπει ο $3^{\frac{2}{5}}$ να είναι λύση της εξίσωσης $x^5=3^2$.

Δηλαδή πρέπει να είναι $3^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{3^2}$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $\boldsymbol{\alpha>0}$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε: $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$

Επιπλέον, αν μ, ν θετικοί ακέραιοι, τότε ορίζουμε $0^{\frac{\mu}{\nu}}=0$. Για παράδειγμα:

$$8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{64}=4 \qquad \text{και} \qquad 27^{-\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{27^{-4}}=\sqrt[3]{\frac{1}{27^4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{27^4}}=\frac{1}{3^4}.$$

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των ριζών αποδεικνύεται ότι οι ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη ισχύουν και για δυνάμεις με ρητό εκθέτη.
Το γεγονός αυτό διευκολύνει το λογισμό με τα ριζικά. Έτσι έχουμε για παράδειγμα:

$$\sqrt[4]{\alpha}\cdot\sqrt[3]{\alpha}=\alpha^{\frac{1}{4}}\cdot\alpha^{\frac{1}{3}}=\alpha^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}=\alpha^{\frac{7}{12}}=\sqrt[12]{\alpha^7}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Αν α και β είναι μη αρνητικοί αριθμοί, να αποδειχθεί η ισοδυναμία:

$$\alpha<\beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha}<\sqrt[\nu]{\beta}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha}<\sqrt[\nu]{\beta} \Leftrightarrow (\sqrt[\nu]{\alpha})^{\nu}<(\sqrt[\nu]{\beta})^{\nu}$$
$$\Leftrightarrow \alpha<\beta, \qquad \text{που ισχύει.}$$

2. Να τραπούν οι παραστάσεις σε ισοδύναμες, χωρίς ριζικά στους παρονομαστές:

i) $\dfrac{15}{\sqrt{3}}$ **ii)** $\dfrac{10}{\sqrt{5}-1}$ **iii)** $\dfrac{6}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

i) $$\frac{15}{\sqrt{3}}=\frac{15\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{15\cdot\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}=\frac{15\cdot\sqrt{3}}{3}=5\sqrt{3}.$$

ii) $$\frac{10}{\sqrt{5}-1}=\frac{10(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\frac{10(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-1^2}=\frac{10(\sqrt{5}+1)}{5-1}=\frac{5(\sqrt{5}+1)}{2}.$$

iii) $$\frac{6}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\frac{6(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}=\frac{6(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{6(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5}=3(\sqrt{7}-\sqrt{5}).$$

3. Να αποδειχθεί ότι:

$$\sqrt{10}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{40}=10.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε:

$$\sqrt{10}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{40}=10^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{1}{3}}\cdot40^{\frac{1}{6}}=(2\cdot5)^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{1}{3}}\cdot(2^3\cdot5)^{\frac{1}{6}}$$
$$=2^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{1}{3}}\cdot2^{\frac{3}{6}}\cdot5^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot2^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{1}{3}}\cdot5^{\frac{1}{6}}$$
$$=2^1\cdot5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=2\cdot5=10.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε τις ρίζες:

i) $\sqrt{100}$, $\sqrt[3]{1000}$, $\sqrt[4]{10000}$, $\sqrt[5]{100000}$.

ii) $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[5]{32}$.

iii) $\sqrt{0,01}$, $\sqrt[3]{0,001}$, $\sqrt[4]{0,0001}$, $\sqrt[5]{0,00001}$.

2. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς ριζικά:

i) $\sqrt{(\pi-4)^2}$ **ii)** $\sqrt{(-20)^2}$ **iii)** $\sqrt{(x-1)^2}$ **iv)** $\sqrt{\dfrac{x^2}{4}}$.

3. Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}=1.$$

4. Να αποδείξετε ότι:

$$(\sqrt{x-5}-\sqrt{x+3})\cdot(\sqrt{x-5}+\sqrt{x+3})=-8.$$

5. Να αποδείξετε ότι:

i) $(\sqrt{8}-\sqrt{18})\cdot(\sqrt{50}+\sqrt{72}-\sqrt{32})=-14$

ii) $(\sqrt{28}+\sqrt{7}+\sqrt{32})\cdot(\sqrt{63}-\sqrt{32})=31$.

6. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}=2$

ii) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{3-\sqrt{5}}=2$.

7. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sqrt{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[3]{2}$

ii) $\sqrt[5]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[3]{2}$.

8. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt[3]{3}=3\cdot\sqrt[12]{3}$ **ii)** $\sqrt[9]{2^8}\cdot\sqrt[6]{2^5}=2\cdot\sqrt[18]{2^{13}}$ **iii)** $\sqrt{5^3}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{5^4}=25\cdot\sqrt{5}$.

9. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{25\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{75}}=10$ **ii)** $\dfrac{\sqrt{216}\cdot\sqrt{75}}{\sqrt{50}}=18$.

10. Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητούς παρονομαστές:

i) $\dfrac{4}{5-\sqrt{3}}$ **ii)** $\dfrac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ **iii)** $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$.

11. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{\sqrt{162}+\sqrt{98}}{\sqrt{50}-\sqrt{32}}=16$ **ii)** $\sqrt{\dfrac{9^{12}+3^{20}}{9^{11}+27^{6}}}=3$,

αφού αναλύσετε τα υπόρριζα σε γινόμενα πρώτων παραγόντων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. **i)** Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=5+\sqrt{6}$$

ii) Αν α, β > 0 να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha\sqrt{\alpha}-\beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}=(\alpha+\beta)+\sqrt{\alpha\beta}.$$

2. **i)** Να βρείτε τα αναπτύγματα των

$(3+2\sqrt{7})^2$ και $(3-2\sqrt{7})^2$.

ii) Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{37+12\sqrt{7}}-\sqrt{37-12\sqrt{7}}=6.$$

3. **i)** Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^2$ είναι ρητός.

ii) Αν α θετικός ρητός, να αποδείξετε ότι ο $\left(\sqrt{\alpha}+\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2$ είναι ρητός.

4. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=4$ **ii)** $\dfrac{1}{(2-\sqrt{3})^2}-\dfrac{1}{(2+\sqrt{3})^2}=8\sqrt{3}$.

5. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο οι κάθετες πλευρές του είναι $AB=\sqrt{\alpha}$ και $A\Gamma=\sqrt{\beta}$.

i) Να υπολογίσετε την υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου.

ii) Με τη βοήθεια της τριγωνικής ανισότητας να αποδείξετε ότι: $\sqrt{\alpha+\beta}<\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$.

iii) Για μη αρνητικούς αριθμούς α και β, να αποδείξετε ότι $\sqrt{\alpha+\beta}\le\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$. Πότε ισχύει η ισότητα;

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

I. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής <u>για όλους</u> τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ και δ. Διαφορετικά να κυκλώσετε το γράμμα Ψ.

1. $(\alpha=\beta$ και $\gamma=\delta) \Leftrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\delta$.	Α	Ψ
2. Αν $\alpha^2=\alpha\beta$, τότε $\alpha=\beta$.	Α	Ψ
3. $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2$.	Α	Ψ
4. Το άθροισμα $\alpha+\beta$ δύο άρρητων αριθμών α και β είναι άρρητος αριθμός.	Α	Ψ
5. Το γινόμενο $\alpha\cdot\beta$ δύο άρρητων αριθμών α και β είναι άρρητος αριθμός.	Α	Ψ
6. Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma<\delta$, τότε $\alpha-\gamma>\beta-\delta$.	Α	Ψ
7. Αν $\alpha^2>\alpha\beta$, τότε $\alpha>\beta$.	Α	Ψ
8. Αν $\frac{\alpha}{\beta}>1$, τότε $\alpha>\beta$.	Α	Ψ
9. Αν $\alpha>\beta$ και $\alpha>-\beta$, τότε $\alpha>0$.	Α	Ψ
10. Αν $\alpha>\frac{1}{\alpha}$, τότε $\alpha>1$.	Α	Ψ
11. Αν $\alpha<\beta<0$, τότε $\alpha^2>\beta^2$.	Α	Ψ
12. Αν $\alpha>-2$ και $\beta>-3$, τότε $\alpha\beta>6$.	Α	Ψ
13. Αν $\alpha<-2$ και $\beta<-3$, τότε $\alpha\beta>6$.	Α	Ψ
14. $4\alpha^2-20\alpha\beta+25\beta^2\geq 0$.	Α	Ψ
15. $(\alpha-1)^2+(\alpha+1)^2>0$.	Α	Ψ
16. $(\alpha^2-1)^2+(\alpha+1)^2>0$.	Α	Ψ
17. $(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta=0$.	Α	Ψ
18. Αν $\alpha\cdot\beta\geq 0$, τότε $\lvert\alpha+\beta\rvert=\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert$.	Α	Ψ
19. Αν $\alpha^2=\beta$, τότε $\alpha=\sqrt{\beta}$.	Α	Ψ
20. $\sqrt{\alpha^2}=\alpha$.	Α	Ψ
21. Αν $\alpha\geq 0$, τότε $(\sqrt{\alpha})^2=\alpha$.	Α	Ψ

22. Αν $\alpha \cdot \beta \geq 0$, τότε μπορούμε πάντοτε να γράφουμε $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$. Α Ψ

23. Αν $\beta \geq 0$, τότε $\sqrt{\alpha^2 \cdot \beta} = \alpha \cdot \sqrt{\beta}$. Α Ψ

24. $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \alpha + \beta$. Α Ψ

25. Αν $\alpha \geq 0$, τότε μπορούμε πάντοτε να γράφουμε $\sqrt[6]{\alpha^3} = \sqrt{\alpha}$. Α Ψ

26. Μπορούμε πάντοτε να γράφουμε $\sqrt[4]{\alpha^2} = \sqrt{\alpha}$. Α Ψ

27. $5^{25} > 25^5$. Α Ψ

28. $11^{22} > 22^{11}$. Α Ψ

ΙΙ. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις.

1. Αν $2 < x < 5$ τότε η παράσταση $|x - 2| + |x - 5|$ είναι ίση με:

Α) $2x - 7$ **Β)** $7 - 2x$ **Γ)** -3 **Δ)** 3.

2. Αν $10 < x < 20$ τότε η τιμή της παράστασης $\dfrac{|x-10|}{x-10} + \dfrac{|x-20|}{x-20}$ είναι ίση με:

Α) 2 **Β)** -2 **Γ)** 10 **Δ)** 0.

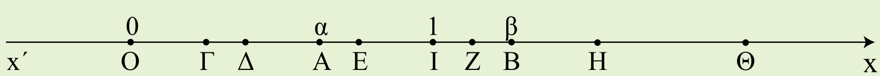
3. Αν $\alpha = \sqrt[6]{10}$, $\beta = \sqrt{2}$ και $\gamma = \sqrt[3]{3}$, τότε:

Α) $\alpha < \beta < \gamma$ **Β)** $\alpha < \gamma < \beta$ **Γ)** $\gamma < \alpha < \beta$ **Δ)** $\beta < \gamma < \alpha$.

4. Ο αριθμός $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$ είναι ίσος με:

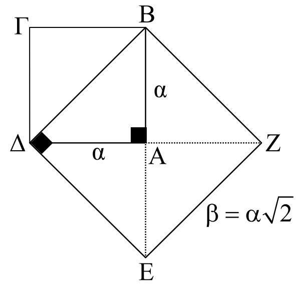
Α) $3 + 2\sqrt{5}$ **Β)** $3 + 2\sqrt[4]{5}$ **Γ)** $2 + \sqrt{5}$ **Δ)** $2 + \sqrt[4]{5}$.

ΙΙΙ. Στον παρακάτω άξονα τα σημεία Ο, Ι, Α και Β παριστάνουν τους αριθμούς 0, 1, α και β αντιστοίχως, με $0 < \alpha < 1$ και $\beta > 1$, ενώ τα σημεία Γ, Δ, Ε, Ζ, Η και Θ παριστάνουν τους αριθμούς $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, α^2, β^2, α^3 και β^3, όχι όμως με τη σειρά που αναγράφονται. Να αντιστοιχίσετε τα σημεία Γ, Δ, Ε, Ζ, Η και Θ με τους αριθμούς που παριστάνουν.



Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ



Ο «διπλασιασμός του τετραγώνου», δηλαδή η κατασκευή ενός τετραγώνου με εμβαδό διπλάσιο ενός άλλου δοθέντος τετραγώνου, μπορεί να γίνει με μια απλή «γεωμετρική» κατασκευή. Λέγοντας «γεωμετρική» κατασκευή εννοούμε κατασκευή με χάρακα και διαβήτη.

Ωστόσο, η πλευρά β, του τετραγώνου με το διπλάσιο εμβαδό, δεν προκύπτει από την πλευρά α με πολλαπλασιασμό επί ρητό αριθμό. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα (ως μονάδα μέτρησης) με το οποίο μπορούμε να μετρήσουμε ακριβώς τα δυο αυτά τμήματα, πλευρά και διαγώνιο τετραγώνου.

Η απόδειξη της ύπαρξης άρρητων αριθμών θεωρείται μια από τις σπουδαιότερες ανακαλύψεις των Πυθαγορείων. (Πυθαγόρας: 6ος π.Χ. αιώνας).

Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν μια βαθιά πίστη ότι πάντοτε δυο ευθύγραμμα τμήματα έχουν κοινό μέτρο. Γι' αυτό, στα πλαίσια της εποχής εκείνης, η ανακάλυψη αυτή των Πυθαγορείων δεν ήταν απλά και μόνο μια ενδιαφέρουσα μαθηματική πρόταση, αλλά σήμαινε την ανατροπή θεμελιωδών φιλοσοφικών αντιλήψεων για τον κόσμο και τη φύση.

Ήταν κεντρική αντίληψη των Πυθαγορείων ότι η ουσία κάθε όντος μπορεί να αναχθεί σε φυσικούς αριθμούς. Ο νεοπυθαγόρειος Φιλόλαος γύρω στα 450 π.Χ., έγραφε:

«Πραγματικά το καθετί που γνωρίζουμε έχει έναν αριθμό (δηλαδή φυσικό). Αλλιώς θα ήταν αδύνατο να το γνωρίσουμε και να το καταλάβουμε με τη λογική. Το ένα είναι η αρχή του παντός».

Η ανακάλυψη λοιπόν ότι υπάρχουν μεγέθη και μάλιστα απλά, όπως η υποτείνουσα τετραγώνου, τα οποία δεν μπορούν να εκφραστούν στα πλαίσια των φυσικών αριθμών, θεωρήθηκε αληθινή συμφορά για την πυθαγόρεια φιλοσοφία. Χαρακτηριστικοί είναι οι θρύλοι που περιβάλλουν το γεγονός αυτό. Κατά έναν από αυτούς, η ανακάλυψη της ύπαρξης των άρρητων αριθμών έγινε από τον πυθαγόρειο Ίπασσο, όταν αυτός και άλλοι Πυθαγόρειοι ταξίδευαν με πλοίο. Η αντίδραση των Πυθαγορείων ήταν να πνίξουν τον Ίπασσο και να συμφωνήσουν μεταξύ τους να μη διαδοθεί η ανακάλυψη προς τα έξω.

Η υπέρβαση των «δυσκολιών» που φέρνει στα Μαθηματικά η ύπαρξη άρρητων αριθμών, κατέστη δυνατή από τον Εύδοξο (360 π.Χ.) με την ιδιοφυή «θεωρία των Λόγων».

Η απόδειξη για το ότι ένας συγκεκριμένος αριθμός είναι άρρητος είναι ένα πρόβλημα που απαιτεί πολλές φορές πολύπλοκους συλλογισμούς.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 3ο

3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$

Στο Γυμνάσιο μάθαμε τον τρόπο επίλυσης των εξισώσεων της μορφής $\alpha x + \beta = 0$ για συγκεκριμένους αριθμούς α, β, με $\alpha \neq 0$.

Γενικότερα τώρα, θα δούμε πώς με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των πράξεων, επιλύουμε την παραπάνω εξίσωση, οποιοιδήποτε και αν είναι οι αριθμοί α, β .

Έχουμε λοιπόν

$$\alpha x + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha x + \beta - \beta = -\beta$$

$$\Leftrightarrow \alpha x = -\beta$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- Αν $\alpha \neq 0$ τότε:

$$\alpha x = -\beta \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{\alpha}$$

  Επομένως, αν $\alpha \neq 0$ η εξίσωση έχει **ακριβώς μία λύση**, την $x = -\frac{\beta}{\alpha}$.

- Αν $\alpha = 0$, τότε η εξίσωση $\alpha x = -\beta$ γίνεται $0x = -\beta$, η οποία:
  i. αν είναι $\beta \neq 0$ δεν έχει λύση και γι' αυτό λέμε ότι είναι **αδύνατη**, ενώ
  ii. αν είναι $\beta = 0$ έχει τη μορφή $0x = 0$ και αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x δηλαδή είναι **ταυτότητα**.

Η λύση της εξίσωσης $\alpha x + \beta = 0$ και γενικά κάθε εξίσωσης λέγεται και **ρίζα** αυτής.

Για παράδειγμα

✓ Για την εξίσωση $4(x - 5) = x - 5$ έχουμε:

$$\begin{aligned} 4(x-5)=x-5 &\Leftrightarrow 4x-20=x-5 \\ &\Leftrightarrow 4x-x=20-5 \\ &\Leftrightarrow 3x=15 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{15}{3}=5. \end{aligned}$$

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = 5$.

✓ Για την εξίσωση $3x - x - 3 = 2x$. Έχουμε

$$3x - x - 3 = 2x \Leftrightarrow 3x - x - 2x = 3 \Leftrightarrow 0x = 3$$

που είναι αδύνατη.

✓ Για την εξίσωση $4(x - 5) - x = 3x - 20$ έχουμε

$$4x - 20 - x = 3x - 20 \Leftrightarrow 4x - x - 3x = 20 - 20 \Leftrightarrow 0x = 0$$

που είναι ταυτότητα.

ΣΧΟΛΙΟ

Όπως βλέπουμε στα παραπάνω παραδείγματα, κάθε φορά καταλήγουμε σε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta = 0$, της οποίας οι συντελεστές α και β είναι συγκεκριμένοι αριθμοί και μπορούμε αμέσως να δούμε ποια από τις προηγούμενες περιπτώσεις ισχύει. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο, αν οι συντελεστές α και β της εξίσωσης $\alpha x + \beta = 0$ εκφράζονται με τη βοήθεια γραμμάτων. Σε τέτοιες περιπτώσεις, τα γράμματα αυτά λέγονται **παράμετροι**, η εξίσωση λέγεται **παραμετρική** και η εργασία που κάνουμε για την εύρεση του πλήθους των ριζών της λέγεται **διερεύνηση**.

Για παράδειγμα η εξίσωση

$$(\lambda^2 - 1)x - \lambda + 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

έχει παράμετρο το λ και γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned} (\lambda^2 - 1)x - \lambda + 1 = 0 &\Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)x = \lambda - 1 \\ &\Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 1)x = \lambda - 1 \end{aligned}$$

Επομένως

✓ Αν $\lambda \neq -1$ και $\lambda \neq 1$, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την

$$x = \frac{\lambda - 1}{(\lambda + 1)(\lambda - 1)} = \frac{1}{\lambda + 1}$$

✓ Αν $\lambda = -1$, η εξίσωση γίνεται $0x = -2$ και είναι αδύνατη.

✓ Αν $\lambda = 1$, η εξίσωση γίνεται $0x = 0$ και είναι ταυτότητα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ένας ποδηλάτης πήγε από μια πόλη Α σε μία πόλη Β και επέστρεψε από τον ίδιο δρόμο. Στη μετάβαση οδηγούσε με μέση ταχύτητα 25 km/h και ξεκουράστηκε ενδιάμεσα 1 ώρα. Στην επιστροφή οδηγούσε με μέση ταχύτητα 20 km/h και δεν έκανε καμία στάση. Αν ο συνολικός χρόνος του ταξιδιού ήταν 10 ώρες, να υπολογιστεί το μήκος της διαδρομής ΑΒ.

ΛΥΣΗ

Αν x km είναι η απόσταση ΑΒ, τότε ο ποδηλάτης χρειάστηκε $\frac{x}{25}$ ώρες για να πάει από το Α στο Β και $\frac{x}{20}$ ώρες για να επιστρέψει. Αφού ξεκουράστηκε και 1 ώρα, ο συνολικός χρόνος του ταξιδιού ήταν $\frac{x}{25}+\frac{x}{20}+1$.

Επειδή ο χρόνος αυτός είναι 10 ώρες, έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{x}{25}+\frac{x}{20}+1=10$$

Λύνουμε την εξίσωση και έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{x}{25}+\frac{x}{20}+1=10 &\Leftrightarrow 4x+5x+100=1000\\ &\Leftrightarrow 9x=900\\ &\Leftrightarrow x=100\end{aligned}$$

Άρα το μήκος της διαδρομής είναι 100 km.

Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού

Στη συνέχεια θα δούμε, με τη βοήθεια παραδειγμάτων, πώς μπορούμε να επιλύσουμε εξισώσεις οι οποίες δεν είναι μεν εξισώσεις 1ου βαθμού, αλλά, με κατάλληλη διαδικασία, ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{x^2}{x-1}-1=\frac{1}{x-1}.$$

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq 1$. Με αυτό τον περιορισμό έχουμε:

$$\frac{x^2}{x-1}-1=\frac{1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)\frac{x^2}{x-1}-(x-1)=(x-1)\frac{1}{x-1}$$
$$\Leftrightarrow x^2-x+1=1$$
$$\Leftrightarrow x^2-x=0$$
$$\Leftrightarrow x(x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow x=0,\ \text{αφού } x\neq 1.$$

Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Να λυθεί η εξίσωση

$$|2x-1|=|x+3|.$$

ΛΥΣΗ

Από τις ιδιότητες των απολύτων τιμών έχουμε:

$$|2x-1|=|x+3| \Leftrightarrow 2x-1=x+3 \ \text{ ή } \ 2x-1=-(x+3)$$

Όμως:

✓ $2x-1=x+3 \Leftrightarrow 2x-x=4 \Leftrightarrow x=4$

✓ $2x-1=-(x+3) \Leftrightarrow 2x+x=-3+1 \Leftrightarrow 3x=-2 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$.

Επομένως η εξίσωση έχει δυο λύσεις, τους αριθμούς 4 και $-\frac{2}{3}$.

ΣΧΟΛΙΟ

Με τον ίδιο τρόπο λύνουμε κάθε εξίσωση της μορφής $|f(x)|=|g(x)|$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο

Να λυθεί η εξίσωση

$$|2x-3|=3x-2.$$

ΛΥΣΗ

Επειδή το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι μη αρνητικό, για να έχει λύση η εξίσωση αυτή πρέπει και το δεύτερο μέλος της να είναι μη αρνητικό. Δηλαδή, πρέπει:

$$3x-2\geq 0 \qquad (1)$$

Με αυτό τον περιορισμό, λόγω των ιδιοτήτων των απόλυτων τιμών, έχουμε:

$$\begin{aligned}
|2x-3|=3x-2 &\Leftrightarrow 2x-3=3x-2 && \text{ή} \quad 2x-3=2-3x\\
&\Leftrightarrow 2x-3x=-2+3 && \text{ή} \quad 2x+3x=2+3\\
&\Leftrightarrow -x=1 && \text{ή} \quad 5x=5\\
&\Leftrightarrow x=-1 && \text{ή} \quad x=1
\end{aligned}$$

Από τις παραπάνω λύσεις δεκτή είναι μόνο η $x = 1$, διότι μόνο αυτή ικανοποιεί τον περιορισμό (1).

ΣΧΟΛΙΟ

Με τον ίδιο τρόπο λύνουμε εξισώσεις της μορφής $|f(x)| = g(x)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $4x-3(2x-1)=7x-42$

ii) $\dfrac{1-4x}{5}-\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{x-4}{20}+\dfrac{5}{4}$

iii) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{3}=\dfrac{x}{4}-\dfrac{x}{5}-\dfrac{49}{60}$

iv) $1,2(x+1)-2,5+1,5x=8,6.$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $2(3x-1)-3(2x-1)=4$

ii) $2x-\dfrac{5-x}{3}=-\dfrac{5}{3}+\dfrac{7x}{3}.$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$.

i) $(\lambda-1)x=\lambda-1$

ii) $(\lambda-2)x=\lambda$

iii) $\lambda(\lambda-1)x=\lambda-1$

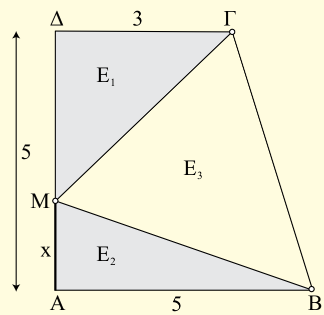
iv) $\lambda(\lambda-1)x=\lambda^2+\lambda.$

4. Στο διπλανό ορθογώνιο τραπέζιο να βρεθεί η θέση του σημείου Μ στην ΑΔ ώστε για τα εμβαδά

$E_1=(M\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma)$, $E_2=(M\overset{\Delta}{A}B)$ και $E_3=(M\overset{\Delta}{B}\Gamma)$ να ισχύει:

i) $E_1+E_2=E_3$

ii) $E_1=E_2.$



5. Από κεφάλαιο 4000 € ένα μέρος του κατατέθηκε σε μια τράπεζα προς 5% και το υπόλοιπο σε μια άλλη τράπεζα προς 3%. Ύστερα από 1 χρόνο εισπράχθηκαν συνολικά 175 € τόκοι. Ποιο ποσό τοκίστηκε προς 5% και ποιο προς 3%;

6. Να επιλυθούν οι παρακάτω τύποι ως προς την αναφερόμενη μεταβλητή:

i) $\nu = \nu_0 + \alpha t,\ \alpha \neq 0$ (ως προς το t) **ii)** $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ (ως προς το R_1).

7. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^2(x-4) + 2x(x-4) + (x-4) = 0$ **ii)** $(x-2)^2 - (2-x)(4+x) = 0$.

8. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x(x^2-1) - x^3 + x^2 = 0$ **ii)** $(x+1)^2 + x^2 - 1 = 0$.

9. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$ **ii)** $(x^2-4)(x-1) = (x^2-1)(x-2)$.

10. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ **ii)** $x^3 - 2x^2 - (2x-1)(x-2) = 0$.

11. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x^2-x}$ **ii)** $\frac{x+1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-2x+1} = 0$.

12. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$ **ii)** $\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-4}{x^2+2x}$

iii) $\frac{1}{x+2} = \frac{x}{x^2-4}$ **iv)** $\frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{x}{x+1}$.

13. Να βρείτε τρεις διαδοχικούς ακέραιους τέτοιους ώστε το άθροισμά τους να ισούται με το γινόμενό τους.

14. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $|2x-3| = 5$ **ii)** $|2x-4| = |x-1|$ **iii)** $|x-2| = 2x-1$ **iv)** $|2x-1| = x-2$.

15. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\dfrac{|x|+4}{3}-\dfrac{|x|+4}{5}=\dfrac{2}{3}$ **ii)** $\dfrac{2|x|+1}{3}-\dfrac{|x|-1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

16. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\left|\dfrac{3-x}{3+x}\right|=4$ **ii)** $|x-1||x-2|=|x-1|$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:

i) $(x+\alpha)^2-(x-\beta)^2=2\alpha(\alpha+\beta)$ **ii)** $\dfrac{x-\alpha}{\beta}=\dfrac{x-\beta}{\alpha}$

έχουν πάντα λύση, οποιοιδήποτε και αν είναι οι πραγματικοί αριθμοί α, β.

2. Ποιοι περιορισμοί πρέπει να ισχύουν για τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να έχει λύση η εξίσωση $\dfrac{x}{\alpha}-\dfrac{x}{\beta}=1$;

3. Πόσο καθαρό οινόπνευμα πρέπει να προσθέσει ένας φαρμακοποιός σε 200ml διάλυμα οινοπνεύματος περιεκτικότητας 15%, για να πάρει διάλυμα οινοπνεύματος περιεκτικότητας 32%;

4. Ένα αυτοκίνητο Α κινείται με 100km/h. Ένα δεύτερο αυτοκίνητο Β που κινείται με 120km/h προσπερνάει το Α. Σε πόσα λεπτά τα δυο αυτοκίνητα θα απέχουν 1km;

5. Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{x+\alpha}{x-\alpha}=\dfrac{x^2}{x^2-\alpha^2}$ για όλες τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

6. Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{x^3-8}{x-2}=x^2+4$.

7. Να λύσετε την εξίσωση $|2|x|-1|=3$.

8. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x^2-2x+1}=|3x-5|$.

3.2 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^ν = α$

• Έστω η εξίσωση $x^3 = 8$. Όπως αναφέραμε στον ορισμό της ν-οστής ρίζας μη αρνητικού αριθμού, η εξίσωση $x^3 = 8$ έχει ακριβώς μια θετική λύση, την $\sqrt[3]{8} = 2$. Η εξίσωση αυτή δεν έχει μη αρνητικές λύσεις, γιατί για κάθε $x \leq 0$ ισχύει $x^3 \leq 0$.

Επομένως η εξίσωση $x^3 = 8$ έχει ακριβώς μια λύση, την $\sqrt[3]{8}$.

Γενικότερα:

Η εξίσωση $x^ν = α$, με $\boldsymbol{α > 0}$ και **ν περιττό** φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση, την $\sqrt[ν]{α}$.

• Έστω η εξίσωση $x^4 = 16$. Όπως και προηγουμένως η εξίσωση αυτή έχει ακριβώς μια θετική λύση, την $\sqrt[4]{16} = 2$. Η εξίσωση αυτή όμως έχει ως λύση και την $-\sqrt[4]{16} = -2$, αφού $(-\sqrt[4]{16})^4 = (\sqrt[4]{16})^4 = 16$.

Επομένως η εξίσωση $x^4 = 16$ έχει ακριβώς δύο λύσεις, την $\sqrt[4]{16} = 2$ και την $-\sqrt[4]{16} = -2$.

Γενικότερα:

Η εξίσωση $x^ν = α$, με $\boldsymbol{α > 0}$ και **ν άρτιο** φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς δύο λύσεις, τις $\sqrt[ν]{α}$ και $-\sqrt[ν]{α}$.

• Έστω η εξίσωση $x^3 = -8$. Έχουμε διαδοχικά:

$$x^3 = -8 \Leftrightarrow -x^3 = 8 \Leftrightarrow (-x)^3 = 8 \Leftrightarrow -x = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{8} = -2.$$

Επομένως η εξίσωση αυτή έχει ακριβώς μια λύση, την $-\sqrt[3]{8} = -2$.

Γενικότερα:

Η εξίσωση $x^ν = α$, με $\boldsymbol{α < 0}$ και **ν περιττό** φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση, την $-\sqrt[ν]{|α|}$.

• Έστω η εξίσωση $x^4 = -4$. Επειδή για κάθε x ισχύει $x^4 \geq 0$, η εξίσωση είναι αδύνατη.

Γενικότερα:

Η εξίσωση $x^ν = α$, με $\boldsymbol{α < 0}$ και **ν άρτιο** φυσικό αριθμό, είναι αδύνατη.

Από τα παραπάνω συμπεράσματα και από το γεγονός ότι η εξίσωση $x^ν = α^ν$, με $ν \in \mathbb{N}^*$, έχει προφανή λύση τη $x = α$, προκύπτει ότι:

- **Αν ο ν <u>περιττός,</u> τότε η εξίσωση $x^ν = α^ν$ έχει μοναδική λύση, τη $x = α$.**
- **Αν ο ν <u>άρτιος,</u> τότε η εξίσωση $x^ν = α^ν$ έχει δύο λύσεις, τις $x_1 = α$ και $x_2 = -α$.**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να λυθεί η εξίσωση $x^4 + 8x = 0$.

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} x^4+8x=0 &\Leftrightarrow x(x^3+8)=0 \\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x^3=-8 \\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=-\sqrt[3]{8}=-2. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^3 - 125 = 0$ **ii)** $x^5 - 243 = 0$ **iii)** $x^7 - 1 = 0$.

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^3 + 125 = 0$ **ii)** $x^5 + 243 = 0$ **iii)** $x^7 + 1 = 0$.

3. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^2 - 64 = 0$ **ii)** $x^4 - 81 = 0$ **iii)** $x^6 - 64 = 0$.

4. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^5 - 8x^2 = 0$ **ii)** $x^4 + x = 0$ **iii)** $x^5 + 16x = 0$.

5. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει όγκο $81m^3$ και διαστάσεις x, x και 3x. Να βρείτε τις διαστάσεις του παραλληλεπιπέδου.

6. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $(x + 1)^3 = 64$ **ii)** $1 + 125x^3 = 0$ **iii)** $(x - 1)^4 - 27(x - 1) = 0$.

3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$

Η λύση πολλών προβλημάτων της Γεωμετρίας, της Φυσικής καθώς και άλλων επιστημών ανάγεται στην επίλυση μιας εξίσωσης της μορφής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \text{ με } \alpha \neq 0 \qquad (1)$$

η οποία λέγεται εξίσωση **δευτέρου βαθμού**.

Για παράδειγμα, έστω ο τύπος $S = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$, όπου S το διάστημα που διανύει κινητό σε χρόνο t, με αρχική ταχύτητα v_0 και επιτάχυνση γ. Αν θεωρήσουμε ως άγνωστο τον χρόνο t, τότε προκύπτει η εξίσωση:

$$\frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t - S = 0,$$

η οποία είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού.

Στη συνέχεια θα επιλύσουμε την εξίσωση δευτέρου βαθμού στη γενική της μορφή με τη μέθοδο της **«συμπλήρωσης του τετραγώνου».**

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 &\Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \qquad [\text{αφού } \alpha \neq 0]\\
&\Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x = -\frac{\gamma}{\alpha}\\
&\Leftrightarrow x^2 + 2x\cdot\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{\gamma}{\alpha}\\
&\Leftrightarrow x^2 + 2x\cdot\frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} = -\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2}\\
&\Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}
\end{aligned}$$

Αν θέσουμε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, τότε η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2} \qquad (2)$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- Αν **Δ> 0**, τότε έχουμε:

$$x + \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ ή } x + \frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

δηλαδή

$$x=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ ή } x=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Επομένως η εξίσωση (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), έχει δύο λύσεις άνισες, τις:

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ και } x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Για συντομία οι λύσεις αυτές γράφονται

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}.$$

- Αν $\mathbf{\Delta = 0}$, τότε η εξίσωση (2) γράφεται:

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=0 &\Leftrightarrow \left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)\cdot\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)=0\\ &\Leftrightarrow x+\frac{\beta}{2\alpha}=0 \quad \text{ή} \quad x+\frac{\beta}{2\alpha}=0\\ &\Leftrightarrow x=-\frac{\beta}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x=-\frac{\beta}{2\alpha}\end{aligned}$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η εξίσωση έχει **διπλή ρίζα** την $-\dfrac{\beta}{2\alpha}$.

- Αν $\mathbf{\Delta < 0}$, τότε η εξίσωση (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), δεν έχει πραγματικές ρίζες, δηλαδή είναι **αδύνατη** στο $\mathbb{R}$.

Η αλγεβρική παράσταση $\mathbf{\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma}$, από την τιμή της οποίας εξαρτάται το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$, ονομάζεται **διακρίνουσα** αυτής.

Τα παραπάνω συμπεράσματα συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$	Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$
$\Delta>0$	Έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.
$\Delta=0$	Έχει μια διπλή ρίζα τη $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$.
$\Delta<0$	Είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Για παράδειγμα

✓ Η εξίσωση $2x^2 - 3x + 1 = 0$ έχει $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 > 0$, οπότε έχει δυο ρίζες, τις

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{1}}{2\cdot 2} = 1 \text{ και } x_2 = \frac{3-\sqrt{1}}{2\cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

✓ Η εξίσωση $x^2 - 4x + 4 = 0$ έχει $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$, οπότε έχει μια διπλή ρίζα τη

$$x = \frac{-(-4)}{2\cdot 1} = 2.$$

Η παραπάνω εξίσωση λύνεται σύντομα ως εξής:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (διπλή ρίζα).}$$

✓ Η εξίσωση $2x^2 - 3x + 4 = 0$ έχει $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -23 < 0$, οπότε δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Στην περίπτωση που η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2, έχουμε:

$$x_1 + x_2 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ και}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(-\beta)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Αν με S συμβολίσουμε το άθροισμα $x_1 + x_2$ και με P το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$, τότε έχουμε τους τύπους:

$$S = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad P = \frac{\gamma}{\alpha}$$

που είναι γνωστοί ως τύποι του Vieta.

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με τη βοήθεια των τύπων του Vieta, μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 &\Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - (x_1 + x_2)\cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0 \end{aligned}$$

Η τελευταία μορφή της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ μας δίνει τη δυνατότητα να την κατασκευάσουμε, όταν γνωρίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της.

Για παράδειγμα, η εξίσωση με άθροισμα ριζών 3 και γινόμενο $\sqrt{2}$ είναι η $x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - 2(\sqrt{3}+1)x + 4\sqrt{3} = 0$.

ΛΥΣΗ

Η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = 4(\sqrt{3}+1)^2 - 4\cdot 4\sqrt{3} = 4[(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}+1] = 4(\sqrt{3}-1)^2$$

Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες, τις

$$x_{1,2} = \frac{2(\sqrt{3}+1) \pm \sqrt{4(\sqrt{3}-1)^2}}{2} = \frac{2\sqrt{3}+2 \pm 2(\sqrt{3}-1)}{2} = \begin{cases} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{cases}$$

2. Ένας βράχος βρίσκεται στην κορυφή της χαράδρας ενός ποταμού, η οποία έχει βάθος 300m. Πόσος χρόνος απαιτείται μέχρι τη στιγμή που ο βράχος θα αγγίξει το νερό του ποταμού, αν ο βράχος

i. πέσει από την κορυφή;

ii. εκσφενδονιστεί κατακόρυφα προς τα κάτω με ταχύτητα 50 m/sec;

Δίδεται ότι $g \simeq 10 m/sec^2$.

ΛΥΣΗ

i) Είναι γνωστό από τη Φυσική ότι το διάστημα S που διανύει ένα σώμα στην ελεύθερη πτώση σε χρόνο t sec είναι: $S = \frac{1}{2}gt^2$.

Επειδή S = 300m και $g \simeq 10$ m/sec^2, έχουμε:

$$\frac{1}{2}10t^2 = 300 \Leftrightarrow 5t^2 = 300 \Leftrightarrow t^2 = 60 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{60} \Leftrightarrow t \simeq \pm 7,75$$

Η αρνητική ρίζα δεν είναι αποδεκτή, διότι ο χρόνος στο συγκεκριμένο πρόβλημα δεν μπορεί να είναι αρνητικός. Άρα $t \simeq 7,75$ sec.

ii) Όταν το σώμα έχει αρχική ταχύτητα v_0, το διάστημα που διανύει σε χρόνο t sec είναι $S = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$.

Επειδή $v_0 = 50\frac{m}{sec}$ και $t > 0$ θα έχουμε:

$$\frac{1}{2}10t^2 + 50t = 300 \Leftrightarrow 5t^2 + 50t - 300 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 10t - 60 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-10+\sqrt{100+4\cdot 60}}{2} \simeq \frac{-10+18,43}{2} = 4,22 \text{ sec.}$$

Άρα, ο ζητούμενος χρόνος είναι περίπου 4,22 sec.

ΣΧΟΛΙΟ

Κατά την επίλυση ενός προβλήματος, όπως είδαμε και παραπάνω, δεν πρέπει να ξεχνάμε να ελέγχουμε αν οι λύσεις που βρήκαμε είναι εύλογες.

Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού

Στη συνέχεια θα δούμε, με τη βοήθεια παραδειγμάτων, πώς μπορούμε να επιλύσουμε εξισώσεις οι οποίες δεν είναι μεν 2ου βαθμού, αλλά, με κατάλληλη διαδικασία, ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\mathbf{x^2 - 2|x| - 3 = 0.}$$

ΛΥΣΗ

Επειδή $x^2 = |x|^2$, η εξίσωση γράφεται:

$$|x|^2 - 2|x| - 3 = 0.$$

Αν θέσουμε $|x| = \omega$, τότε η εξίσωση γίνεται

$$\omega^2 - 2\omega - 3 = 0.$$

Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες τις $\omega_1 = 3$ και $\omega_2 = -1$. Από αυτές δεκτή είναι μόνο η θετική, αφού $\omega = |x| \geq 0$. Επομένως $|x| = 3$, που σημαίνει $x = -3$ ή $x = 3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\mathbf{\frac{3x-1}{x-1} - \frac{2}{x} = \frac{2x^2+x-1}{x^2-x}}$$

ΛΥΣΗ

Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει $x - 1 \neq 0$ και $x^2 - x \neq 0$, δηλαδή $x \neq 0$ και $x \neq 1$. Με αυτούς τους περιορισμούς του x έχουμε:

$$\frac{3x-1}{x-1} - \frac{2}{x} = \frac{2x^2+x-1}{x^2-x} \Leftrightarrow x(x-1)\frac{3x-1}{x-1} - x(x-1)\frac{2}{x} = x(x-1)\frac{2x^2+x-1}{x(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow x(3x-1) - (x-1)2 = 2x^2 + x - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$. Από αυτές, λόγω του περιορισμού, δεκτή είναι μόνο η $x_2 = 3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\mathbf{2x^4 - 7x^2 - 4 = 0} \qquad (1)$$

ΛΥΣΗ

Αν θέσουμε $x^2 = y$ η εξίσωση γίνεται:

$$2y^2 - 7y - 4 = 0 \qquad (2)$$

Η εξίσωση $2y^2 - 7y - 4 = 0$ έχει ρίζες τις $y_1 = 4$ και $y_2 = -\frac{1}{2}$. Επειδή $y = x^2 \geq 0$, δεκτή είναι μόνο η $y_1 = 4$.

Επομένως, οι ρίζες της (1) είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 = 4$, δηλαδή οι $x_1 = -2$ και $x_2 = 2$.

ΣΧΟΛΙΟ

Η μέθοδος που ακολουθήσαμε στο παραπάνω παράδειγμα εφαρμόζεται και για την επίλυση κάθε εξίσωσης της μορφής:

$$\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0, \text{ με } \alpha \neq 0$$

Οι εξισώσεις της μορφής αυτής ονομάζονται **διτετράγωνες** εξισώσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:
i) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ **ii)** $x^2 - 6x + 9 = 0$ **iii)** $3x^2 + 4x + 2 = 0$.

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:
i) $x^2 - 1{,}69 = 0$ **ii)** $0{,}5x^2 - x = 0$ **iii)** $3x^2 + 27 = 0$.

3. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες:
i) $\lambda x^2 + 2x - (\lambda - 2) = 0$, $\lambda \neq 0$ **ii)** $\alpha x^2 + (\alpha + \beta)x + \beta = 0$, $\alpha \neq 0$.

4. Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $\mu x^2 + 2x + \mu = 0$, $\mu \neq 0$ έχει διπλή ρίζα.

5. Αν $\alpha \neq \beta$, να δείξετε ότι είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση $(\alpha^2 + \beta^2)x^2 + 2(\alpha + \beta)x + 2 = 0$. Να εξετάσετε την περίπτωση που είναι $\alpha = \beta$.

6. Να βρείτε την εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς

i) 2 και 3 **ii)** 1 και $\frac{1}{2}$ **iii)** $5-2\sqrt{6}$ και $5+2\sqrt{6}$.

7. Να βρείτε δυο αριθμούς, εφόσον υπάρχουν, που να έχουν

i) Άθροισμα 2 και γινόμενο -15.

ii) Άθροισμα 9 και γινόμενο 10.

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^2-(\sqrt{5}+\sqrt{3})x+\sqrt{15}=0$ **ii)** $x^2+(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}=0$.

9. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 + \alpha^2 = \beta^2 - 2\alpha x$, για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

10. Να βρείτε τις πλευρές ενός ορθογωνίου με περίμετρο 68cm και διαγώνιο 26cm.

11. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^2- 7|x| + 12 = 0$ **ii)** $x^2 + 2|x| - 35 = 0$ **iii)** $x^2- 8|x| + 12 = 0$.

12. Να λύσετε την εξίσωση $(x - 1)^2 + 4|x - 1| - 5 = 0$.

13. Να λύσετε την εξίσωση $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$.

14. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{13}{6}$ **ii)** $\frac{2}{x}+\frac{2x-3}{x-2}+\frac{2-x^2}{x^2-2x}=0$.

15. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^4 + 6x^2 - 40 = 0$ **ii)** $4x^4 + 11x^2 - 3 = 0$ **iii)** $2x^4 + 7x^2 + 3 = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται η εξίσωση $\alpha^2x^2 - 2\alpha^3x + \alpha^4 - 1 = 0$, με $\alpha \neq 0$.

i) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = 4\alpha^2$.

ii) Να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι $\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}$ και $\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha}$.

2. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (5-\sqrt{2})x + 6 - 3\sqrt{2} = 0$.

i) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (1+\sqrt{2})^2$.

ii) Να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι 3 και $2-\sqrt{2}$.

3. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $2x^2 + (\alpha - 9)x + \alpha^2 + 3\alpha + 4 = 0$ έχει διπλή ρίζα.

4. Αν ο αριθμός ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, να δείξετε ότι ο αριθμός $\dfrac{1}{\rho}$ είναι η ρίζα της εξίσωσης $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$.

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x + \dfrac{1}{\alpha} = \alpha + \dfrac{1}{x}, \quad \alpha \neq 0$

ii) $\dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{x} = \dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha, \beta \neq 0.$

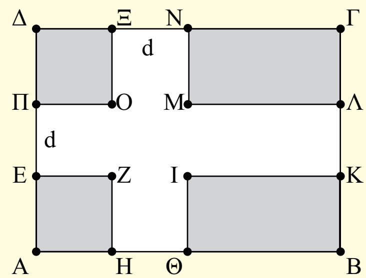
6. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x - 8 = 0$

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Αν η μια ρίζα της εξίσωσης ισούται με το τετράγωνο της άλλης, τότε να βρεθούν οι ρίζες και η τιμή του λ.

7. Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί ακέραιοι που να είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.

8. Η σημαία του διπλανού σχήματος έχει διαστάσεις 4m και 3m αντιστοίχως. Να βρείτε πλάτος d του σταυρού, αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του είναι ίσο με το εμβαδόν του υπόλοιπου μέρους της σημαίας.



9. Μια κατασκευαστική εταιρεία διαθέτει δυο μηχανήματα Α και Β. Το μηχάνημα Β χρειάζεται 12 ώρες περισσότερο από ό,τι το μηχάνημα Α για να τελειώσει ένα συγκεκριμένο έργο. Ο χρόνος που απαιτείται για να τελειώσει το έργο, αν χρησιμοποιηθούν και τα δυο μηχανήματα μαζί, είναι 8 ώρες. Να βρείτε το χρόνο που θα χρειαζόταν το κάθε μηχάνημα για να τελειώσει το έργο αυτό αν εργαζόταν μόνο του.

10. Είναι γνωστό ότι μια ρίζα της εξίσωσης $x^4 - 10x^2 + \alpha = 0$ είναι ο αριθμός 1. Να βρείτε το α και να λύσετε την εξίσωση.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Ι. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β και γ. Διαφορετικά να κυκλώσετε το γράμμα Ψ.

1. Η εξίσωση $(\alpha - 1)x = \alpha(\alpha - 1)$ έχει μοναδική λύση τη $x = \alpha$. Α Ψ

2. Η εξίσωση $(|x| + 1)(|x| + 2) = 0$ είναι αδύνατη. Α Ψ

3. Η εξίσωση $(|x| - 1)(|x| - 2) = 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες. Α Ψ

4. Η εξίσωση $(|x| - 1)(|x| + 2) = 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες. Α Ψ

5. Η εξίσωση $|x| = x - 2$ έχει μοναδική λύση. Α Ψ

6. Η εξίσωση $|x| = 2 - x$ έχει μοναδική λύση. Α Ψ

7. Αν οι συντελεστές α και γ της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ είναι ετερόσημοι, τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες. Α Ψ

8. Αν δύο εξισώσεις 2ου βαθμού έχουν τις ίδιες ρίζες, τότε οι συντελεστές των ίσων δυνάμεων του x των εξισώσεων αυτών είναι ίσοι. Α Ψ

9. Η εξίσωση $\alpha x^2 + 2x - \alpha = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. Α Ψ

10. Η εξίσωση $x^2 - 4\alpha x + 4\alpha^2 = 0$, με $\alpha \neq 0$, έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. Α Ψ

11. Η εξίσωση $\alpha^2 x^2 - 2\alpha x + 2 = 0$, με $\alpha \neq 0$, δεν έχει πραγματικές ρίζες. Α Ψ

12. Η εξίσωση $2x^2 + 3αx + α^2 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες. Α Ψ

13. Η εξίσωση $x^2 - \left(α + \frac{1}{α}\right)x + 1 = 0$, με $α \neq 0{,}1$ έχει δύο άνισες και αντίστροφες πραγματικές ρίζες. Α Ψ

14. Οι εξισώσεις $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 0$ και $x^2 - 3x + 2 = 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις. Α Ψ

15. Οι εξισώσεις $\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} = 5$ και $(2x^2 + 3x + 1) = 5(x^2 - 1)$ έχουν τις ίδιες λύσεις. Α Ψ

16. Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y που να έχουν άθροισμα $S = -10$ και γινόμενο $P = 16$. Α Ψ

17. Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y που να έχουν άθροισμα $S = 10$ και γινόμενο $P = 25$. Α Ψ

18. Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y που να έχουν άθροισμα $S = 2$ και γινόμενο $P = 2$. Α Ψ

II. Να εντοπίσετε το <u>λάθος</u> στους παρακάτω συλλογισμούς:

1. Η εξίσωση $(2x - 1)(x + 2) = (3 - 2x)(x + 2)$ γράφεται ισοδύναμα:
$(2x - 1)(x + 2) = (3 - 2x)(x + 2) \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 - 2x \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$.
Όμως και ο αριθμός $x = -2$ <u>επαληθεύει</u> τη δοθείσα εξίσωση.

2. Η εξίσωση $|2x - 1| = x - 2$ γράφεται ισοδύναμα:
$|2x - 1| = x - 2 \Leftrightarrow 2x - 1 = x - 2$ ή $2x - 1 = 2 - x \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 1$.

Όμως καμία από τις τιμές αυτές του x <u>δεν επαληθεύει</u> τη δοθείσα εξίσωση.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Από τα αρχαία χρόνια οι μαθηματικοί χρησιμοποίησαν διάφορες τεχνικές για να λύσουν μια εξίσωση 2ου βαθμού.

Οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποίησαν γεωμετρικές μεθόδους, ίσως λόγω των δυσκολιών που είχαν με τους άρρητους αριθμούς, αλλά και λόγω πρακτικών δυσκολιών που προέκυπταν από τα ελληνικά ψηφία.

Οι Ινδοί και οι Άραβες χρησιμοποίησαν μια μέθοδο όμοια με τη σημερινή διαδικασία «συμπλήρωσης τετραγώνου», περιγράφοντας όμως λεκτικά τον τρόπο εύρεσης των λύσεων. Αυτοί θεωρούσαν ως διαφορετικού τύπου κάθε μία από τις εξισώσεις

$$x^2 + px = q,\ x^2 - px = q,\ x^2 - px = -q.$$

Σήμερα όμως γράφουμε τις εξισώσεις αυτές με τη γενική μορφή

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

Ο σύγχρονος συμβολισμός άρχισε να εμφανίζεται περί το 1500 μ.Χ, και οι δυνατότητες χρησιμοποίησης αρνητικών ριζών και ακόμα μιγαδικών ριζών προτάθηκαν από τους Cardano και Girard. Η γεωμετρική παράσταση των αρνητικών ριζών από τον Descartes και των μιγαδικών αριθμών από τους Wessel, Argand και Gauss έκαμε τους αριθμούς αυτούς περισσότερο αποδεκτούς ως ρίζες μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης.
Όμως η ποικιλία των επιλύσεων που αναπτύχθηκε τα αρχαία χρόνια μας ενέπνευσε να αναπτύξουμε μερικούς τρόπους εξαγωγής του τύπου

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

που δίνει τις ρίζες της γενικής εξίσωσης 2ου βαθμού

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0.$$

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τρεις μεθόδους επίλυσης μίας εξίσωσης 2ου βαθμού.

Μέθοδος των Ινδών

Η επίλυση αυτή, που επινοήθηκε στην Ινδία, αποδίδεται στον Sridhara (1025 μ.Χ. περίπου).

Έχουμε διαδοχικά:
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$
$\alpha x^2 + \beta x = -\gamma$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με 4α και ύστερα προσθέτουμε το β^2 και στα δύο μέλη, για να προκύψει ένα «τέλειο» τετράγωνο στο αριστερό μέλος. Δηλαδή

$$4\alpha^2x^2 + 4\alpha\beta x = -4\alpha\gamma$$

$$4\alpha^2x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

$$(2\alpha x + \beta)^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

$$2\alpha x + \beta = \pm\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma},\ \text{εφόσον}\ \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0.$$

Έτσι προκύπτει ότι: $x = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$.

ΣΧΟΛΙΟ

Η απλότητα της μεθόδου των Ινδών χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι το κλάσμα δεν εμφανίζεται παρά μόνο στο τελευταίο βήμα.

Μέθοδος του Vieta

Η εξίσωση 2ου βαθμού $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ μπορεί να λυθεί ευκολότερα, αν δεν περιέχει τον πρωτοβάθμιο όρο βx, πράγμα που μπορεί εύκολα να επιτευχθεί με την αντικατάσταση

$$x = y - \frac{\beta}{2\alpha} \qquad (1)$$

Τότε η εξίσωση γίνεται: $\alpha\left(y - \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \beta\left(y - \dfrac{\beta}{2\alpha}\right) + \gamma = 0$ η οποία όταν απλοποιηθεί γίνεται:

$$\alpha y^2 + \frac{-\beta + 4\alpha\gamma}{4\alpha} = 0.$$

Οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι $y = \dfrac{\pm\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ εφόσον $\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$.

Για να βρούμε τις ρίζες της αρχικής εξίσωσης αντικαθιστούμε την παραπάνω τιμή του y στην (1) και έχουμε:

$$x = y - \frac{\beta}{2\alpha} = \pm\frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} - \frac{\beta}{2\alpha}$$

Οπότε
$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Η μέθοδος αυτή του Vieta είναι ενδιαφέρουσα, γιατί είναι ο προάγγελος της τεχνικής για την επίλυση της γενικής τριτοβάθμιας καθώς και της διτετράγωνης εξίσωσης. Για παράδειγμα, το πρώτο βήμα στην επίλυση της εξίσωσης $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$, είναι η αντικατάσταση $x = y - \dfrac{\beta}{3\alpha}$ που απαλλάσσει την εξίσωση από το δευτεροβάθμιο όρο.

Μέθοδος του Harriot

Ο μαθηματικός Thomas **Harriot** (1560-1621) εφάρμοσε τη μέθοδο της παραγοντοποίησης, για να βρει τις λύσεις μιας εξίσωσης 2ου βαθμού, στο μεγάλο έργο του για την άλγεβρα «Artis Analytical Praxis». Η τεχνική του είναι η εξής περίπου:

Υποθέτουμε ότι x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad \alpha \neq 0 \qquad (1).$$

Σχηματίζουμε τώρα μία εξίσωση με ρίζες x_1 και x_2. Αυτή είναι η $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ ή, ισοδύναμα, η

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0 \qquad (2)$$

Με διαίρεση των μελών της (1) με $\alpha \neq 0$, βρίσκουμε:

$$x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \qquad (3)$$

Επειδή οι εξισώσεις (2) και (3) είναι ίδιες, οι αντίστοιχοι συντελεστές πρέπει να είναι ίσοι. Επομένως:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \qquad (4)$$

Η ταυτότητα $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$ σε συνδυασμό με την (4) δίνει

$$x_1 - x_2 = \pm\frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{\alpha}, \ [\text{εφόσον } \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0\,] \qquad (5)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (4) και (5) έχουμε:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Είναι αρκετό να θεωρήσουμε μόνο τη θετική τετραγωνική ρίζα της (5).
Η αρνητική ρίζα απλώς εναλλάσσει τη διάταξη των x_1 και x_2.

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 4ο

4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

Οι ανισώσεις: $\alpha x+\beta>0$ και $\alpha x+\beta<0$

Γνωρίσαμε στο Γυμνάσιο τη διαδικασία επίλυσης μιας ανίσωσης της μορφής $\alpha x+\beta>0$ ή της μορφής $\alpha x+\beta<0$, με α και β συγκεκριμένους αριθμούς. Γενικότερα έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha x+\beta>0 &\Leftrightarrow \alpha x+\beta-\beta>-\beta\\ &\Leftrightarrow \alpha x>-\beta\end{aligned}$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\alpha>0$, τότε:

$$\begin{aligned}\alpha x>-\beta &\Leftrightarrow \frac{\alpha x}{\alpha}>\frac{-\beta}{\alpha}\\ &\Leftrightarrow x>\frac{-\beta}{\alpha}\end{aligned}$$

- Αν $\alpha<0$, τότε:

$$\begin{aligned}\alpha x>-\beta &\Leftrightarrow \frac{\alpha x}{\alpha}<\frac{-\beta}{\alpha}\\ &\Leftrightarrow x<\frac{-\beta}{\alpha}\end{aligned}$$

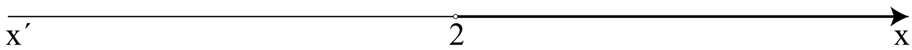
- Αν $\alpha=0$, τότε η ανίσωση γίνεται $0x>-\beta$, η οποία
  - ✓ αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αν είναι $\beta>0$, ενώ
  - ✓ είναι αδύνατη, αν είναι $\beta\leq 0$.

Για παράδειγμα:

- Η ανίσωση $4x>8$ γράφεται:

$$4x>8\Leftrightarrow x>\frac{8}{4}\Leftrightarrow x>2.$$

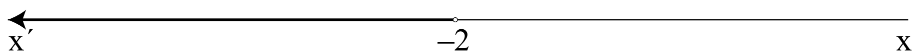
Επομένως η ανίσωση αυτή αληθεύει για x∈(2, +∞)



• Η ανίσωση −4x > 8 γράφεται:

$$-4x > 8 \Leftrightarrow x < -\frac{8}{4} \Leftrightarrow x < -2.$$

Επομένως η ανίσωση αυτή αληθεύει για x∈(−∞,−2).



• Η ανίσωση 0x > − 2 αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ενώ η ανίσωση 0x > 2 είναι αδύνατη.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

i) Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\mathbf{2(x+4)-(x+6)<12-x} \qquad \textbf{και} \qquad \mathbf{2x+\frac{x}{6}+\frac{5}{3}\geq 2(1+x)}$$

ii) Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων.

ΛΥΣΗ

i) Για την πρώτη ανίσωση έχουμε:

$$\begin{aligned} 2(x+4)-(x+6)<12-x &\Leftrightarrow 2x+8-x-6<12-x \\ &\Leftrightarrow 2x-x+x<12+6-8 \\ &\Leftrightarrow 2x<10 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x}{2}<\frac{10}{2} \\ &\Leftrightarrow x<5. \end{aligned}$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x < 5.

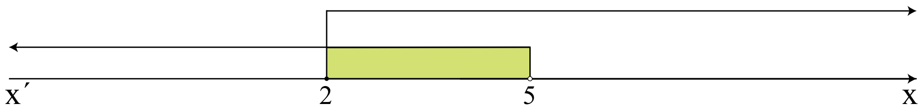
Για τη δεύτερη ανίσωση έχουμε:

$$\begin{aligned} 2x+\frac{x}{6}+\frac{5}{3}\geq 2(1+x) &\Leftrightarrow 12x+x+10\geq 12(1+x) \\ &\Leftrightarrow 12x+x+10\geq 12+12x \\ &\Leftrightarrow x\geq 2. \end{aligned}$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x ≥ 2.

ii) Επειδή η πρώτη ανίσωση αληθεύει για $x < 5$ και η δεύτερη για $x \geq 2$, οι ανισώσεις συναληθεύουν για κάθε πραγματικό αριθμό x με $2 \leq x < 5$, δηλαδή οι ανισώσεις συναληθεύουν όταν $x \in [2,5)$.

Για τον προσδιορισμό των κοινών λύσεων των δύο ανισώσεων μας διευκολύνει να παραστήσουμε τις λύσεις τους στον ίδιο άξονα (Σχήμα), απ' όπου προκύπτει ότι $2 \leq x < 5$.



Ανισώσεις με απόλυτες τιμές

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων της απόλυτης τιμής και της έννοιας της απόστασης δύο αριθμών, μπορούμε να επιλύουμε ανισώσεις που περιέχουν απόλυτες τιμές. Στη συνέχεια θα δούμε μερικά παραδείγματα επίλυσης τέτοιων ανισώσεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Να λυθεί η ανίσωση: $|x - 2| < 3$.

ΛΥΣΗ

Η επίλυση της ανίσωσης $|x - 2| < 3$, με τη βοήθεια της ιδιότητας

$$|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$$

γίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} |x-2| < 3 &\Leftrightarrow 2-3 < x < 2+3 \\ &\Leftrightarrow -1 < x < 5. \end{aligned}$$

Μπορούμε όμως να λύσουμε την παραπάνω ανίσωση και με τη βοήθεια της ιδιότητας

$$|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$$

ως εξής:

$$\begin{aligned} |x-2| < 3 &\Leftrightarrow -3 < x-2 < 3 \\ &\Leftrightarrow -3+2 < x-2+2 < 3+2 \\ &\Leftrightarrow -1 < x < 5. \end{aligned}$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για $x \in (-1,5)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Να λυθεί η ανίσωση: $|2x-1| > 5$.

ΛΥΣΗ

Από την ιδιότητα $|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho \quad ή \quad x > \rho$ έχουμε:

$$\begin{aligned} |2x-1| > 5 &\Leftrightarrow 2x-1 < -5 \quad ή \quad 2x-1 > 5 \\ &\Leftrightarrow 2x < -4 \quad ή \quad 2x > 6 \\ &\Leftrightarrow x < -2 \quad ή \quad x > 3 \end{aligned}$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για $x \in (-\infty,-2) \cup (3,+\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{2x+3}{4}<\dfrac{x}{6}$ **ii)** $\dfrac{x-12}{2}+\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{4}>x$ **iii)** $\dfrac{x-2}{2}+\dfrac{1-2x}{5}<\dfrac{x}{10}-\dfrac{2}{5}$.

2. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$3x-1<x+5 \;\text{ και }\; 2-\frac{x}{2}\le x+\frac{1}{2}.$$

3. Να εξετάσετε αν συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$x-\frac{1}{2}>\frac{x}{2}+1 \;\text{ και }\; x-\frac{1}{3}\le\frac{x}{3}-1.$$

4. Να βρείτε τα $x\in\mathbb{Z}$ για τα οποία συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$2x-\frac{x-1}{8}>x \;\text{ και }\; x-4+\frac{x+1}{2}<0.$$

5. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|x|<3$ **ii)** $|x-1|\le 4$ **iii)** $|2x+1|<5$.

6. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|x|\ge 3$ **ii)** $|x-1|>4$ **iii)** $|2x+1|\ge 5$.

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $|2x-6|=2x-6$ **ii)** $|3x-1|=1-3x$.

8. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{|x-1|-4}{2}+\dfrac{5}{3}<\dfrac{|x-1|}{3}$ **ii)** $\dfrac{|x|+1}{2}-\dfrac{2|x|}{3}>\dfrac{1-|x|}{3}$.

9. Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{x^2-6x+9}\le 5$.

10. Να βρείτε την ανίσωση της μορφής $|x-x_0|<\rho$, που έχει ως λύσεις τους αριθμούς του διαστήματος $(-7,3)$.

11. Η σχέση που συνδέει τους βαθμούς Κελσίου (^oC) με τους βαθμούς Φαρενάιτ (^oF) είναι η $F = \frac{9}{5}C + 32$. Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 41^oF μέχρι 50^oF. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε ^oC.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τις τιμές x για τις οποίες ισχύει:

i) $3 \leq 4x - 1 \leq 6$ **ii)** $-4 \leq 2 - 3x \leq -2$.

2. Να βρείτε τις τιμές x για τις οποίες ισχύει:

i) $2 \leq |x| \leq 4$ **ii)** $2 \leq |x - 5| \leq 4$.

3. Έστω A και B τα σημεία που παριστάνουν σε έναν άξονα τους αριθμούς -3 και 5 και M το μέσο του τμήματος AB.

i) Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο M;

ii) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x - 5| \leq |x + 3|$ και να βρείτε τις λύσεις της.

iii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας.

4. Έστω A και B τα σημεία που παριστάνουν σε έναν άξονα τους αριθμούς 1 και 7 και M το μέσο του τμήματος AB.

i) Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο M;

ii) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης $|x - 1| + |x - 7| = 6$ και να βρείτε τις λύσεις της.

iii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας, αφού προηγουμένως συντάξετε πίνακα προσήμου των παραστάσεων $x - 1$ και $x - 7$.

4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

Μορφές τριωνύμου

Η παράσταση $αx^2+βx+γ$, $α\neq 0$ λέγεται **τριώνυμο 2ου βαθμού** ή, πιο απλά, **τριώνυμο**. Η διακρίνουσα Δ της αντίστοιχης εξίσωσης $αx^2+βx+γ=0$ λέγεται και **διακρίνουσα του τριωνύμου**. Οι ρίζες της εξίσωσης $αx^2+βx+γ=0$, δηλαδή οι $x_1=\dfrac{-β+\sqrt{Δ}}{2α}$ και $x_2=\dfrac{-β-\sqrt{Δ}}{2α}$ ονομάζονται και **ρίζες του τριωνύμου**.

Το τριώνυμο $αx^2+βx+γ$, $α\neq 0$ μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} αx^2+βx+γ &= α\left(x^2+\frac{β}{α}x+\frac{γ}{α}\right)\\ &= α\left[x^2+2\cdot x\cdot\frac{β}{2α}+\left(\frac{β}{2α}\right)^2-\left(\frac{β}{2α}\right)^2+\frac{γ}{α}\right]\\ &= α\left[\left(x+\frac{β}{2α}\right)^2+\frac{4αγ-β^2}{4α^2}\right]. \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\boldsymbol{αx^2+βx+γ=α\left[\left(x+\frac{β}{2α}\right)^2-\frac{Δ}{4α^2}\right]} \qquad (1).$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- $\boldsymbol{Δ>0}$. Τότε ισχύει $Δ=(\sqrt{Δ})^2$, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} αx^2+βx+γ &= α\left[\left(x+\frac{β}{2α}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{Δ}}{2α}\right)^2\right]\\ &= α\left(x+\frac{β}{2α}-\frac{\sqrt{Δ}}{2α}\right)\left(x+\frac{β}{2α}+\frac{\sqrt{Δ}}{2α}\right)\\ &= α\left[x-\left(\frac{-β+\sqrt{Δ}}{2α}\right)\right]\left[x-\left(\frac{-β-\sqrt{Δ}}{2α}\right)\right]. \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\boldsymbol{αx^2+βx+γ=α(x-x_1)(x-x_2)},$$

όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου.

Άρα, όταν $\Delta > 0$, τότε το τριώνυμο μετατρέπεται σε γινόμενο του α επί δύο πρωτοβάθμιους παράγοντες.

- $\mathbf{\Delta = 0}$. Τότε από την ισότητα (1) έχουμε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2.$$

Άρα, όταν $\Delta = 0$, τότε το τριώνυμο μετατρέπεται σε γινόμενο του α επί ένα τέλειο τετράγωνο.

- $\mathbf{\Delta < 0}$. Τότε ισχύει $|\Delta| = -\Delta$, οπότε έχουμε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right].$$

Επειδή για κάθε $x \in R$, η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι θετική, το τριώνυμο δεν αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω συμπεράσματα για τις μορφές του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ με διακρίνουσα Δ έχουμε:

- Αν $\Delta > 0$, τότε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2),$$

όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου.

- Αν $\Delta = 0$, τότε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2.$$

- Αν $\Delta < 0$, τότε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right].$$

Για παράδειγμα:

✓ Το τριώνυμο $2x^2 + 3x - 2$ έχει $\Delta = 9 + 16 = 25 > 0$ και ρίζες $x_1 = \frac{1}{2}$ και $x_2 = -2$.
Επομένως:
$2x^2 + 3x - 2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 2) = (2x - 1)(x + 2).$

✓ Το τριώνυμο $\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2}$ έχει $\Delta = 9 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} = 0$ και $\frac{\beta}{2\alpha} = -3$. Επομένως:

$$\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{9}{2}=\frac{1}{2}(x-3)^2.$$

✓ Το τριώνυμο $2x^2-6x+5$ έχει $\Delta=-4<0$. Επομένως:

$$2x^2-6x+5=2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right].$$

Πρόσημο των τιμών του τριωνύμου

Για να μελετήσουμε το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$, θα χρησιμοποιήσουμε τις μορφές του ανάλογα με τη διακρίνουσα.

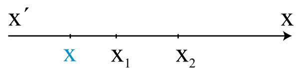
• Αν $\boldsymbol{\Delta>0}$, τότε, όπως είδαμε προηγουμένως, ισχύει:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)\qquad(1)$$

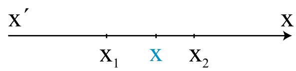
Υποθέτουμε ότι $x_1<x_2$ και τοποθετούμε τις ρίζες σε έναν άξονα.

Παρατηρούμε ότι:

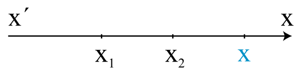
✓ Αν $x<x_1<x_2$ (Σχήμα), τότε $x-x_1<0$ και $x-x_2<0$, οπότε $(x-x_1)(x-x_2)>0$. Επομένως, λόγω της (1), το τριώνυμο είναι ομόσημο του α.



✓ Αν $x_1<x<x_2$ (Σχήμα), τότε $x-x_1>0$ και $x-x_2<0$, οπότε $(x-x_1)(x-x_2)<0$. Επομένως, λόγω της (1), το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α.



✓ Αν $x_1<x_2<x$ (Σχήμα), τότε $x-x_1>0$ και $x-x_2>0$, οπότε $(x-x_1)(x-x_2)>0$. Επομένως, λόγω της (1), το τριώνυμο είναι ομόσημο του α.



• Αν $\boldsymbol{\Delta=0}$, τότε ισχύει:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2.$$

Επομένως, το τριώνυμο είναι ομόσημο του α για κάθε πραγματικό $x\neq-\frac{\beta}{2\alpha}$, ενώ μηδενίζεται για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$.

• Αν **Δ < 0**, τότε ισχύει:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right].$$

Όμως η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι θετική για κάθε πραγματικό αριθμό x. Επομένως το τριώνυμο είναι ομόσημο του α σε όλο το $\mathbb{R}$.

Τα παραπάνω συνοψίζονται στον πίνακα:

Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ γίνεται:

- **Ετερόσημο του α** , μόνο όταν είναι $\Delta>0$ και για τις τιμές του x, που βρίσκονται **μεταξύ των ριζών**.
- **Μηδέν**, όταν η τιμή του x είναι κάποια από τις ρίζες του τριωνύμου.
- **Ομόσημο του α** σε κάθε άλλη περίπτωση.

Ανισώσεις της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$ ή $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0$

Τα προηγούμενα συμπεράσματα χρησιμοποιούνται στην επίλυση ανισώσεων της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$ ή $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0$, $\alpha\neq 0$, τις οποίες ονομάζουμε **ανισώσεις δευτέρου βαθμού**. Ο τρόπος επίλυσης αυτών φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Να λυθούν οι ανισώσεις

i) $2x^2-3x-2>0$ **ii) $2x^2-3x-2<0$**

ΛΥΣΗ

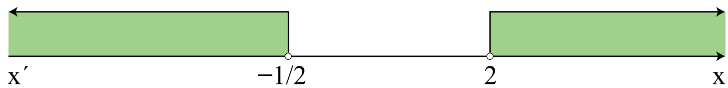
Ζητάμε τις τιμές του x, για τις οποίες το τριώνυμο $2x^2-3x-2$ είναι θετικό στην περίπτωση (i) και αρνητικό στην περίπτωση (ii).

Το τριώνυμο έχει ρίζες τους αριθμούς $-\frac{1}{2}$ και 2 και, επειδή $\alpha=2>0$, το πρόσημό του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

Από τον πίνακα αυτόν προκύπτει ότι:

i) Η ανίσωση $2x^2 - 3x - 2 > 0$ έχει λύσεις τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $x < -\frac{1}{2}$ ή $x > 2$, δηλαδή τα $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$. Οι λύσεις αυτές εποπτικά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



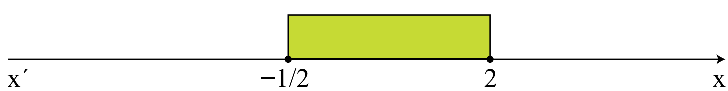
ii) Η ανίσωση $2x^2 - 3x - 2 < 0$ έχει λύσεις τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $-\frac{1}{2} < x < 2$, δηλαδή τα $x \in \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$. Οι λύσεις αυτές εποπτικά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Να λυθεί η ανίσωση $2x^2 - 3x - 2 \leq 0$.

ΛΥΣΗ

Ζητάμε τις τιμές του x, που είναι λύσεις της ανίσωσης $2x^2 - 3x - 2 < 0$ ή ρίζες της εξίσωσης $2x^2 - 3x - 2 = 0$. Επομένως σύμφωνα με το 1ο παράδειγμα οι λύσεις της ανίσωσης $2x^2 - 3x - 2 \leq 0$ είναι τα $x \in \mathbb{R}$, με $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2$, δηλαδή τα $x \in \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$. Οι λύσεις αυτές εποπτικά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο

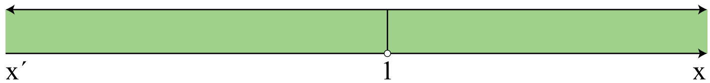
Να λυθούν οι ανισώσεις

i) $x^2 - 2x + 1 > 0$ **ii) $x^2 - 2x + 1 < 0$.**

ΛΥΣΗ

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - 2x + 1$ είναι $\Delta = 0$, οπότε έχει διπλή ρίζα τη $x = 1$. Άρα το τριώνυμο είναι ομόσημο του $\alpha = 1$, δηλαδή θετικό, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 1$.

Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης (i) είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί x, με $x \neq 1$, ενώ η ανίσωση (ii) είναι αδύνατη.
Οι λύσεις της (i) εποπτικά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4ο

Να λυθεί η ανίσωση $x^2 + x + 1 > 0$.

ΛΥΣΗ

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 + x + 1$ είναι $\Delta = -3 < 0$, οπότε το τριώνυμο είναι ομόσημο του $\alpha = 1$, δηλαδή θετικό, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθούν οι τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$x^2 - 4x - 5 < 0$ και $x^2 - x - 6 > 0$.

ΛΥΣΗ

Λύνουμε κάθε ανίσωση χωριστά και μετά βρίσκουμε τις κοινές λύσεις.
Έχουμε:

✓ $x^2 - 4x - 5 < 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+1) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 5$

✓ $x^2 - x - 6 > 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-3) > 0 \Leftrightarrow x < -2$ ή $x > 3$

Άρα οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (3,5)$.

2. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\alpha + 1)x + \alpha + 4 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Να βρεθεί η διακρίνουσα της εξίσωσης και να μελετηθεί το πρόσημό της.

ii) Για ποιες τιμές του α η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες;

iii) Για ποιες τιμές του α η εξίσωση έχει διπλή ρίζα;

iv) Για ποιες τιμές του α η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$;

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε:

$$\Delta = [-(\alpha+1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\alpha+4) = \alpha^2 - 2\alpha - 15.$$

Παρατηρούμε ότι η διακρίνουσα είναι ένα τριώνυμο του α με διακρίνουσα

$$\Delta' = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 64 > 0.$$

Επομένως η διακρίνουσα Δ έχει ρίζες:

$$\alpha_1 = \frac{2+8}{2} = 5 \quad \text{και} \quad \alpha_2 = \frac{2-8}{2} = -3.$$

και το πρόσημό της φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

α	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
Δ		+	0	−	0	+	

Από τον πίνακα αυτό προκύπτει ότι:

ii) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες αν $\Delta > 0$, δηλαδή αν $\alpha < -3$ ή $\alpha > 5$.

iii) Η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα αν $\Delta = 0$, δηλαδή αν $\alpha = -3$ ή $\alpha = 5$.

iv) Η εξίσωση είναι αδύνατη αν $\Delta < 0$, δηλαδή $-3 < \alpha < 5$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να μετατρέψετε σε γινόμενα παραγόντων τα τριώνυμα:

i) $x^2 - 3x + 2$ **ii)** $2x^2 - 3x - 2$.

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-3x-2}$ **ii)** $\dfrac{2x^2+8x-42}{x^2-49}$ **iii)** $\dfrac{4x^2-12x+9}{2x^2-5x+3}$.

3. Για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων:

i) $x^2 - 2x - 15$ **ii)** $4x^2 - 4x + 1$ **iii)** $x^2 - 4x + 13$.

4. Για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων:

i) $-x^2 + 4x - 3$ **ii)** $-9x^2 + 6x - 1$ **iii)** $-x^2 + 2x - 2$.

5. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $5x^2 \leq 20x$ **ii)** $x^2 + 3x \leq 4$.

6. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^2 - x - 2 > 0$ **ii)** $2x^2 - 3x - 5 < 0$.

7. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^2 + 4 > 4x$ **ii)** $x^2 + 9 \leq 6x$.

8. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^2 + 3x + 5 \leq 0$ **ii)** $2x^2 - 3x + 20 > 0$.

9. Να λύσετε την ανίσωση $-\frac{1}{4}(x^2 - 4x + 3) > 0$.

10. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $2x - 1 < x^2 - 4 < 12$.

11. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις $x^2 - 6x + 5 < 0$ και $x^2 - 5x + 6 > 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Να μετατρέψετε σε γινόμενα παραγόντων τις παραστάσεις:

$$\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2 \text{ και } \alpha^2 - \alpha\beta - 6\beta^2.$$

ii) Να απλοποιήσετε την παράσταση $\frac{\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2}{\alpha^2 - \alpha\beta - 6\beta^2}$.

2. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 + (2\beta - \alpha)x - \alpha\beta$.

3. Να απλοποιήσετε την παράσταση $\frac{x^2 - \alpha x + \beta x - \alpha\beta}{x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2}$.

4. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + 3\lambda x + \lambda + 5 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση:

i) έχει ρίζες ίσες **ii)** έχει ρίζες άνισες **iii)** είναι αδύνατη.

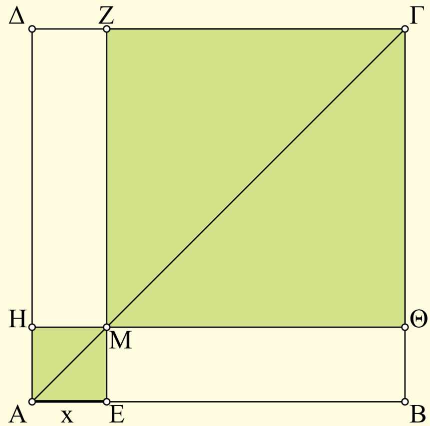
5. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ανίσωση $x^2 + 3\lambda x + \lambda > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

6. Δίνεται το τριώνυμο $(\lambda + 2)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda$, $\lambda \neq -2$.

i) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να λύσετε την ανίσωση $\Delta < 0$.

ii) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η ανίσωση $(\lambda + 2)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda < 0$, $\lambda \neq -2$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

7. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς ΑΒ = 3 και το Μ είναι ένα σημείο της διαγωνίου ΑΓ. Να βρείτε τις θέσεις του σημείου Μ πάνω στη διαγώνιο ΑΓ για τις οποίες το άθροισμα των εμβαδών των σκιασμένων τετραγώνων είναι μικρότερο από 5.



8. i) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 > 0$ για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha, \beta \neq 0$.

ii) Να καθορίσετε το πρόσημο της παράστασης $A = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 1$ για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta \neq 0$.

4.3 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟ & ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΗΛΙΚΟ

Πρόσημο γινομένου

Έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε ένα γινόμενο $P(x) = A(x) \cdot B(x) \cdot \ldots \cdot \Phi(x)$ ως προς το πρόσημό του, όπου οι παράγοντες $A(x)$, $B(x)$, … , $\Phi(x)$ είναι της μορφής $\alpha x + \beta$ (πρωτοβάθμιοι) ή της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (τριώνυμα).
Βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα χωριστά και στη συνέχεια το πρόσημο του $P(x)$, όπως φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ το πρόσημο του γινομένου

$$P(x) = (x-1)(x^2+x-6)(2x^2+x+1).$$

ΛΥΣΗ

Αρχικά βρίσκουμε το πρόσημο του κάθε παράγοντα χωριστά ως εξής:

✓ Επειδή

$$x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1,$$

το $x-1$ είναι θετικό για $x>1$, μηδέν για $x=1$ και αρνητικό για $x<1$.

✓ Επειδή

$$x^2+x-6\geq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -3 \text{ ή } x\geq 2,$$

το x^2+x-6 είναι θετικό για $x<-3$ και για $x>2$, μηδέν για $x=-3$ και για $x=2$ και αρνητικό για $-3<x<2$.

✓ Επειδή το $2x^2+x+1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 1-8=-7<0$, το τριώνυμο αυτό είναι θετικό για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ο προσδιορισμός, τώρα, του προσήμου του γινομένου $P(x)$ γίνεται με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα, εφαρμόζοντας τον κανόνα των προσήμων.

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+x-6		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$2x^2+x+1$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ώστε το γινόμενο $P(x)$ είναι θετικό για $-3<x<1$ και για $x>2$, ενώ είναι αρνητικό για $x<-3$ και για $1<x<2$. Τέλος είναι μηδέν για $x=-3$, για $x=1$ και για $x=2$.

Ανισώσεις της μορφής $A(x) \cdot B(x) \cdot \ldots \cdot \Phi(x) > 0$ (< 0)

Άμεση εφαρμογή των παραπάνω έχουμε στην επίλυση ανισώσεων της μορφής $A(x) \cdot B(x) \cdot \ldots \cdot \Phi(x) > 0$ (< 0), όπως είναι για παράδειγμα η ανίσωση

$$(x-1)(x^2+x-6)(2x^2+x+1) < 0$$

Προκειμένου να λύσουμε την ανίσωση αυτή, αρκεί να βρούμε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το γινόμενο $P(x) = (x-1)(x^2+x-6)(2x^2+x+1)$ είναι αρνητικό.

Από την πρώτη και την τελευταία γραμμή του πίνακα προσήμου του $P(x)$ διαπιστώνουμε ότι η ανίσωση αληθεύει όταν $x \in (-\infty, -3) \cup (1,2)$.

Ανισώσεις της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ (< 0)

Όπως γνωρίζουμε το πηλίκο και το γινόμενο δύο αριθμών είναι ομόσημα. Επομένως:

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) > 0 \quad \text{και} \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) < 0,$$

αφού καμία από τις λύσεις της $A(x) \cdot B(x) > 0$ και της $A(x) \cdot B(x) < 0$ δεν μηδενίζει το $B(x)$.

Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την ανίσωση

$$\frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{x^2+x-6} > 0.$$

Η ανίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με την

$$(x-1)(x^2+x-6)(2x^2+x+1) > 0,$$

δηλαδή με την $P(x) > 0$, η οποία, από τον πίνακα προσήμου του $P(x)$ αληθεύει όταν $x \in (-3,1) \cup (2, +\infty)$.

ΣΧΟΛΙΟ

Μία ανίσωση της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$ αληθεύει για εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύουν συγχρόνως

$$A(x) \cdot B(x) \geq 0 \text{ και } B(x) \neq 0.$$

Έστω για παράδειγμα η ανίσωση $\frac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4} \geq 0$. Έχουμε:

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4}\geq 0 \Leftrightarrow (x^2-4x+3)(x^2+3x-4)\geq 0 \text{ και } x^2+3x-4\neq 0.$$

Οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 4x + 3$ είναι οι 1 και 3, ενώ του τριωνύμου $x^2 + 3x - 4$ είναι οι 1 και -4.

Συντάσσουμε τον πίνακα προσήμου του γινομένου:

$$P(x)=(x^2-4x+3)(x^2+3x-4)$$

x	$-\infty$	-4		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3	+		+	0	−	0	+	
x^2+3x-4	+	0	−	0	+		+	
$P(x)$	+		−		−		+	

Άρα η ανίσωση αληθεύει όταν $x\in(-\infty, -4)\cup[3, +\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου

$$P(x)=(2-3x)(x^2-x-2)(x^2-x+1).$$

2. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου

$$P(x)=(-x^2+4)(x^2-3x+2)(x^2+x+1).$$

3. Να λύσετε την ανίσωση $(x-1)(x^2+2)(x^2-9)>0$.

4. Να λύσετε την ανίσωση $(3-x)(2x^2+6x)(x^2+3)\leq 0$.

5. Να λύσετε την ανίσωση $(2-x-x^2)(x^2+2x+1)\leq 0$.

6. Να λύσετε την ανίσωση $(x-3)(2x^2+x-3)(x-1-2x^2)>0$.

7. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\frac{x-2}{x+1}>0$ **ii)** $\frac{2x+1}{x-3}\leq 0.$

8. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2}\leq 0.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\frac{2x+3}{x-1}>4$ **ii)** $\frac{x-2}{3x+5}\leq 4.$

2. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{x^2-3x-10}{x-1}+2\leq 0.$

3. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\frac{x}{3x-5}\leq\frac{2}{x-1}$ **ii)** $\frac{x}{2x-1}\geq\frac{3}{x+2}.$

4. Να λύσετε την ανίσωση $\left|\frac{x+1}{x}\right|>2.$

5. Μία εταιρεία παράγει ηλεκτρικούς λαμπτήρες. Για ένα συγκεκριμένο τύπο λαμπτήρων το τμήμα έρευνας αγοράς της εταιρείας εκτιμά ότι αν η τιμή πώλησης των λαμπτήρων είναι x ευρώ ανά λαμπτήρα, τότε το εβδομαδιαίο κόστος Κ και τα αντίστοιχα έσοδα Ε (σε χιλιάδες ευρώ) δίνονται από τους τύπους $K = 7 - x$ και $E = 5x - x^2$. Να βρείτε τις τιμές πώλησης των λαμπτήρων για τις οποίες η εταιρεία έχει κέρδος.

6. Ένα φάρμακο είναι αποτελεσματικό αν η συγκέντρωσή του στο κυκλοφορικό σύστημα υπερβαίνει μία ορισμένη τιμή, που καλείται ελάχιστο θεραπευτικό επίπεδο.

Υποθέτουμε ότι η συγκέντρωση σ ενός φαρμάκου, t ώρες ύστερα από τη λήψη του, δίνεται από τον τύπο $\sigma=\frac{20t}{t^2+4}\,\text{mgr}/\text{lt}.$

Αν για το συγκεκριμένο φάρμακο το ελάχιστο θεραπευτικό επίπεδο είναι 4 mgr / lt, να βρείτε πότε η συγκέντρωσή του θα ξεπεράσει το επίπεδο σ.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 4ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

I. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

1. Αν η ανίσωση $-x^2 + 2x + \gamma \geq 0$ είναι αδύνατη τότε:

Α) $\gamma > -1$ **Β)** $\gamma = -1$ **Γ)** $\gamma < -1$ **Δ)** $\gamma \geq -1$.

2. Αν η ανίσωση $x^2 - 2x + \gamma > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

Α) $\gamma < 1$ **Β)** $\gamma = 1$ **Γ)** $\gamma > 1$ **Δ)** $\gamma \leq 1$.

3. Αν η ανίσωση $-2x^2 + 3\lambda x - \lambda^2 \leq 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

Α) $\lambda > 0$ **Β)** $\lambda < 0$ **Γ)** $\lambda = 1$ **Δ)** $\lambda = 0$.

4. Η εξίσωση $|x - 1| + |x - 5| = 4$ αληθεύει αν και μόνο αν:

Α) $x < 1$ **Β)** $x > 5$ **Γ)** $1 \leq x \leq 5$ **Δ)** $1 < x < 5$.

5. Η εξίσωση $|x - 1| = x - 1$:

Α) Είναι αδύνατη **Β)** Έχει μοναδική λύση τη $x = 1$

Γ) Έχει άπειρες λύσεις **Δ)** Είναι ταυτότητα.

II. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

1. Η ανίσωση $x^2 + \lambda x + \lambda^2 > 0$, με $\lambda \neq 0$, αληθεύει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Α Ψ

2. Η ανίσωση $\lambda^2 x^2 + 4\lambda x + 5 \leq 0$, με $\lambda \neq 0$, αληθεύει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Α Ψ

3. Οι ανισώσεις $x^2(x - 1) \geq 0$ και $x - 1 \geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις. Α Ψ

4. Οι ανισώσεις $x^2(x - 1) \leq 0$ και $x - 1 \leq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις. Α Ψ

5. Οι ανισώσεις $\frac{2x-1}{x+1} > 1$ και $2x - 1 > x + 1$ έχουν τις ίδιες λύσεις. Α Ψ

6. Οι ανισώσεις $\frac{x-1}{(x-2)^2} \geq 0$ και $x - 1 \geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις. Α Ψ

7. Οι ανισώσεις $\frac{x-1}{(x-2)^2} \geq 0$ και $(x - 1)(x - 2)^2 \geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις. Α Ψ

8. Οι ανισώσεις $\frac{x-2}{x-1} \geq 0$ και $(x - 2)(x - 1) \geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις. Α Ψ

9. Οι ανισώσεις $\frac{x-2}{x-1}<0$ και $(x-2)(x-1)<0$ έχουν τις ίδιες λύσεις. Α Ψ

10. Οι ανισώσεις $\frac{x+1}{x-1}<\frac{x+2}{x+1}$ και $(x+1)^2<(x-1)(x+1)$ έχουν τις ίδιες λύσεις. Α Ψ

III. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τα τριώνυμα της Α′ ομάδας με την ισοδύναμη μορφή του από τη Β′ ομάδα.

Α΄ ΟΜΑΔΑ	
1	$-2x^2+6x-4$
2	x^2-3x+2
3	$-x^2+3x-2$
4	$2x^2-6x+4$

Β΄ ΟΜΑΔΑ	
Α	$(x-1)(x-2)$
Β	$-(x-1)(x-2)$
Γ	$2(x-1)(x-2)$
Δ	$-2(x-1)(x-2)$

IV. Να εντοπίσετε το λάθος στους παρακάτω συλλογισμούς:

1. Η ανίσωση $(2x-6)(x-1)>0$ γράφεται ισοδύναμα:

$(2x-6)(x-1)>0 \Leftrightarrow 2x-6>0$ και $x-1>0 \Leftrightarrow x>3$ και $x>1 \Leftrightarrow x>3$.

Όμως ο αριθμός 0, αν και είναι μικρότερος του 3, επαληθεύει τη δοθείσα ανίσωση.

2. Η ανίσωση $x<\frac{4}{x}$ γράφεται ισοδύναμα:

$$x<\frac{4}{x}\Leftrightarrow x^2<4\Leftrightarrow x^2-4<0\Leftrightarrow -2<x<2.$$

Όμως ο αριθμός -1, αν και είναι μεταξύ του -2 και του 2, δεν επαληθεύει τη δοθείσα ανίσωση.

3. Η ανίσωση $(x+2)^2(x-1)\geq 0$ γράφεται ισοδύναμα:

$$(x+2)^2(x-1)\geq 0\Leftrightarrow x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1.$$

Όμως ο αριθμός -2, αν και είναι μικρότερος του 1, επαληθεύει τη δοθείσα ανίσωση.

ΠΡΟΟΔΟΙ

Κεφάλαιο 5ο

5.1 ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Η έννοια της ακολουθίας

Ας υποθέσουμε ότι καταθέτουμε στην τράπεζα ένα κεφάλαιο 10000 ευρώ με ανατοκισμό ανά έτος και με επιτόκιο 2%. Αυτό σημαίνει ότι σε ένα χρόνο οι τόκοι που θα αποδώσει το κεφάλαιο προστίθενται σε αυτό και το ποσό που προκύπτει ξανατοκίζεται για τον επόμενο χρόνο με το ίδιο επιτόκιο. Η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχιστεί όσα χρόνια θέλουμε. Επομένως, το κεφάλαιο των 10000 ευρώ θα γίνει:

Σε 1 χρόνο:

$10000 + 0{,}02 \cdot 10000 = 10000(1+0{,}02) = 10200$ ευρώ.

Σε 2 χρόνια:

$10000 \cdot 1{,}02 + 0{,}02 \cdot (10000 \cdot 1{,}02) = 10000 \cdot 1{,}02 \cdot (1+0{,}02) = 10000 \cdot (1{,}02)^2 = 10404$ ευρώ.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι το ποσό των 10000 ευρώ θα γίνει:

Σε 3 χρόνια $10000 \cdot (1{,}02)^3$ ευρώ, σε 4 χρόνια $10000 \cdot (1{,}02)^4$ ευρώ κτλ. και σε ν χρόνια θα γίνει $10000 \cdot (1{,}02)^\nu$ ευρώ.

Έτσι έχουμε τον πίνακα:

Χρόνια: ν	1	2	3	...	ν	...
Κεφάλαιο σε ν χρόνια	$10000 \cdot 1{,}02$	$10000 \cdot (1{,}02)^2$	$10000 \cdot (1{,}02)^3$	...	$10000 \cdot (1{,}02)^\nu$	...

Παρατηρούμε ότι κάθε θετικός ακέραιος ν αντιστοιχίζεται στον πραγματικό αριθμό $10000 \cdot (1{,}02)^\nu$.

Η παραπάνω αντιστοίχιση ονομάζεται ακολουθία πραγματικών αριθμών.

Γενικά **ακολουθία πραγματικών αριθμών** είναι μια αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών 1, 2, 3, …, ν, … στους πραγματικούς αριθμούς. Ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 1 καλείται **πρώτος όρος** της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με $\boldsymbol{\alpha_1}$, ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 2 καλείται **δεύτερος όρος** της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με $\boldsymbol{\alpha_2}$ κ.λπ. Γενικά ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ένας φυσικός αριθμός ν καλείται **ν-οστός** ή **γενικός όρος** της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με $\boldsymbol{\alpha_\nu}$.

Δηλαδή, $1\to \alpha_1$, $2\to \alpha_2$, $3\to \alpha_3$, …, $\nu\to \alpha_\nu$, … Την ακολουθία αυτή τη συμβολίζουμε (α_ν).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

i) Η αντιστοίχιση $1\to 1^2$, $2\to 2^2$, ... $\nu\to\nu^2$, ... είναι η ακολουθία (α_ν) με πρώτο όρο $\alpha_1=1^2$, δεύτερο όρο $\alpha_2=2^2$ κ.λπ. και γενικό όρο $\alpha_\nu=\nu^2$.

ii) Η ακολουθία (α_ν) με γενικό όρο $\alpha_\nu=(-1)^\nu$ έχει όρους: $\alpha_1=-1$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=-1$, …

iii) Η ακολουθία (α_ν) με ν-οστό όρο $\alpha_\nu=\dfrac{1}{\nu}$ έχει όρους: $\alpha_1=1$, $\alpha_2=\dfrac{1}{2}$, $\alpha_3=\dfrac{1}{3}$, …

Ακολουθίες που ορίζονται αναδρομικά

Στην ακολουθία $1^2, 2^2, 3^2, ..., \nu^2, ...$ ο γενικός της όρος $\alpha_\nu=\nu^2$ μας επιτρέπει να βρούμε τον οποιονδήποτε όρο της. Είναι π.χ. $\alpha_{20}=20^2=400$, $\alpha_{100}=100^2=10000$ κτλ.

Υπάρχουν όμως και ακολουθίες που για το γενικό τους όρο είναι δύσκολο να βρεθεί ένας μαθηματικός τύπος.

Ας θεωρήσουμε π.χ. την ακολουθία (α_ν), της οποίας ο πρώτος όρος είναι το 1, ο δεύτερος όρος είναι επίσης το 1 και κάθε άλλος όρος, από τον τρίτο και μετά, είναι ίσος με το άθροισμα των δυο προηγούμενων όρων:

$$\alpha_1=1,\ \alpha_2=1,\ \alpha_{\nu+2}=\alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu$$

Έχουμε:

$$\alpha_3=1+1=2,\quad \alpha_4=2+1=3,\quad \alpha_5=3+2=5,\quad \alpha_6=5+3=8,\ \text{κτλ.}$$

Παρατηρούμε ότι μπορούμε με διαδοχικά βήματα να βρούμε τον οποιονδήποτε όρο της ακολουθίας. Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία (α_ν) είναι τελείως ορισμένη.

Λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) ορίζεται αναδρομικά και η ισότητα $\alpha_{\nu+2}=\alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu$ λέγεται **αναδρομικός τύπος** της ακολουθίας. Γενικότερα, για να ορίζεται μια ακολουθία αναδρομικά, απαιτείται να γνωρίζουμε:

i) Τον αναδρομικό της τύπο και

ii) Όσους αρχικούς όρους μας χρειάζονται, ώστε ο αναδρομικός τύπος να αρχίσει να δίνει όρους.

ΣΧΟΛΙΟ

Υπάρχουν ακολουθίες για τις οποίες μέχρι τώρα δε γνωρίζουμε ούτε έναν τύπο για το γενικό τους όρο ούτε έναν αναδρομικό τύπο. Μια τέτοια ακολουθία είναι π.χ. η ακολουθία των πρώτων αριθμών:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, ...$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Να γράψετε τους τέσσερις πρώτους όρους και τους 20ους όρους των ακολουθιών:

i) $\alpha_\nu = 2\nu^2 - 3$ **ii)** $\beta_\nu = \dfrac{(-1)^\nu}{2\nu - 1}$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε $\alpha_1 = 2\cdot 1^2 - 3 = -1$, $\alpha_2 = 2\cdot 2^2 - 3 = 5$,

$\alpha_3 = 2\cdot 3^2 - 3 = 15$, $\alpha_4 = 2\cdot 4^2 - 3 = 29$

και $\alpha_{20} = 2\cdot 20^2 - 3 = 797$.

ii) Έχουμε $\beta_1 = \dfrac{(-1)^1}{2\cdot 1 - 1} = -1$, $\beta_2 = \dfrac{(-1)^2}{2\cdot 2 - 1} = \dfrac{1}{3}$,

$\beta_3 = \dfrac{(-1)^3}{2\cdot 3 - 1} = -\dfrac{1}{5}$, $\beta_4 = \dfrac{(-1)^4}{2\cdot 4 - 1} = \dfrac{1}{7}$

και $\beta_{20} = \dfrac{(-1)^{20}}{2\cdot 20 - 1} = \dfrac{1}{39}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Δίνεται η ακολουθία με $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu^2 + 1$. Να βρεθούν οι πρώτοι τέσσερις όροι της ακολουθίας.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\alpha_1 = 2$

$\alpha_2 = \alpha_1^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$

$\alpha_3 = \alpha_2^2 + 1 = 5^2 + 1 = 26$

$\alpha_4 = \alpha_3^2 + 1 = 26^2 + 1 = 677$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο

Δίνεται η ακολουθία $\alpha_\nu = 3\nu+5$. Να οριστεί η ακολουθία αυτή και αναδρομικά.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = [3(\nu+1)+5] - (3\nu+5)$

$= 3\nu + 3 + 5 - 3\nu - 5$

$= 3$

Άρα $\alpha_{\nu+1} = 3 + \alpha_\nu$ που είναι ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας.

Επειδή $\alpha_1 = 3\cdot 1 + 5 = 8$, η ακολουθία ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$\alpha_1 = 8 \text{ και } \alpha_{\nu+1} = 3 + \alpha_\nu.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών:

i) $\alpha_\nu = 2\nu + 1$ **ii)** $\alpha_\nu = 2^\nu$ **iii)** $\alpha_\nu = \nu^2 + \nu$ **iv)** $\alpha_\nu = \dfrac{\nu^2 - 1}{\nu + 1}$

v) $\alpha_\nu = \left(-\dfrac{1}{10}\right)^{\nu-1}$ **vi)** $\alpha_\nu = 1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^\nu$ **vii)** $\alpha_\nu = |5 - \nu|$ **viii)** $\alpha_\nu = \eta\mu\dfrac{\nu\pi}{4}$

ix) $\alpha_\nu = \dfrac{2^\nu}{\nu^2}$ **x)** $\alpha_\nu = (-1)^{\nu+1} \cdot \dfrac{1}{\nu}$ **xi)** $\alpha_\nu = (-1)^{\nu+1}$.

2. Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών:

i) $\alpha_1 = 2, \ \alpha_{\nu+1} = \dfrac{1}{\alpha_\nu}$ **ii)** $\alpha_1 = 0, \ \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu^2 + 1$ **iii)** $\alpha_1 = 3, \ \alpha_{\nu+1} = 2(\alpha_\nu - 1)$.

3. Να ορίσετε αναδρομικά τις ακολουθίες:

i) $\alpha_\nu = \nu + 5$ **ii)** $\alpha_\nu = 2^\nu$ **iii)** $\alpha_\nu = 2^\nu - 1$ **iv)** $\alpha_\nu = 5\nu + 3$.

4. Να βρείτε το νο όρο των ακολουθιών:

i) $\alpha_1 = 1, \ \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 2$ **ii)** $\alpha_1 = 3, \ \alpha_{\nu+1} = 5\alpha_\nu$.

5.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

– Στην ακολουθία 1, 3, 5, 7, ... των περιττών αριθμών, κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του αριθμού 2. Δηλαδή για την ακολουθία αυτή ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+2 \quad \text{ή} \quad \alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=2$$

Η ακολουθία (α_ν) λέγεται **αριθμητική πρόοδος με διαφορά 2**.

– Στην ακολουθία 15, 10, 5, 0, −5, −10, ... κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του αριθμού −5. Δηλαδή για την ακολουθία αυτή ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu-5 \quad \text{ή} \quad \alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=-5$$

Όπως και προηγουμένως, η ακολουθία (α_ν) λέγεται **αριθμητική πρόοδος με διαφορά −5.**

Γενικότερα ορίζουμε ότι:

> Μια ακολουθία λέγεται **αριθμητική πρόοδος**, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με **ω** και τον λέμε **διαφορά της προόδου**.

Επομένως, η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\boxed{\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+\omega} \quad \text{ή} \quad \boxed{\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=\omega}$$

Αν σε μια αριθμητική πρόοδο γνωρίζουμε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά της ω, τότε ο αναδρομικός της τύπος $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+\omega$ μας επιτρέπει να βρούμε με διαδοχικά βήματα τον οποιονδήποτε όρο της.

Μπορούμε όμως να υπολογίσουμε κατευθείαν το ν$^{\text{ο}}$ όρο α_ν μιας αριθμητικής προόδου ως συνάρτηση των α_1, ω και ν ως εξής: Από τον ορισμό της αριθμητικής προόδου έχουμε:

$$\alpha_1 = \alpha_1$$
$$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega$$
$$\alpha_3 = \alpha_2 + \omega$$
$$\alpha_4 = \alpha_3 + \omega$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_{\nu-1} = \alpha_{\nu-2} + \omega$$
$$\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \omega$$

Προσθέτοντας κατά μέλη της ν αυτές ισότητες και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαγραφής, βρίσκουμε $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$.
Επομένως

Ο ν$^{\text{ος}}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega.$$

Έτσι π.χ. στην αριθμητική πρόοδο 3, 5, 7, 9, ..., η οποία έχει $\alpha_1 = 3$ και $\omega = 5 - 3 = 2$, ο ν$^{\text{ος}}$ όρος της είναι $\alpha_\nu = 3 + (\nu - 1)\cdot 2$. Επομένως ο 20$^{\text{ος}}$ όρος της είναι $\alpha_{20} = 3 + 19 \cdot 2 = 41$, ο 100$^{\text{ος}}$ όρος της είναι $\alpha_{100} = 3 + 99 \cdot 2 = 201$ κτλ.

Αριθμητικός μέσος

Αν πάρουμε τρεις διαδοχικούς όρους α, β, γ μιας αριθμητικής προόδου με διαφορά ω, τότε ισχύει:

$$\beta - \alpha = \omega \text{ και } \gamma - \beta = \omega, \text{ επομένως } \beta - \alpha = \gamma - \beta \quad \text{ή} \quad \beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

Αλλά και αντιστρόφως, αν για τρεις αριθμούς α, β, γ ισχύει $\beta = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$, τότε έχουμε:

$$2\beta = \alpha + \gamma \quad \text{ή} \quad \beta - \alpha = \gamma - \beta,$$

που σημαίνει ότι οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Ο β λέγεται **αριθμητικός μέσος** των α και γ.
Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

αν και μόνο αν ισχύει $\beta = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$.

Άθροισμα ν διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου

Ας θεωρήσουμε την αριθμητική πρόοδο 1, 2, 3, 4, ... και ας βρούμε το άθροισμα των 100 πρώτων όρων της

$$S_{100}=1+2+3+...+98+99+100$$

Αντί να προσθέσουμε τους αριθμούς αυτούς με τον συνήθη τρόπο, μπορούμε να βρούμε συντομότερα το άθροισμά τους ως εξής:
Γράφουμε δυο φορές το παραπάνω άθροισμα, αλλά με αντίθετη τη σειρά των προσθετέων και προσθέτουμε τις δυο ισότητες κατά μέλη:

$$S_{100}=1+2+3+...+98+99+100$$

$$S_{100}=100+99+98+...+3+2+1$$

$$2S_{100}=(1+100)+(2+99)+(3+98)+...+(98+3)+(99+2)+(100+1)$$

ή $2S_{100}=101+101+101+...+101+101+101$

ή $2S_{100}=100\cdot 101$, άρα $S_{100}=\dfrac{100\cdot 101}{2}=5050$

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τρόπο σε μια οποιαδήποτε αριθμητική πρόοδο, θα αποδείξουμε ότι:

Το άθροισμα των πρώτων ν όρων αριθμητικής προόδου (α_ν) με διαφορά ω είναι

$$S_\nu=\frac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ*

Έχουμε: $S_\nu=\alpha_1+(\alpha_1+\omega)+(\alpha_1+2\omega)+...+[\alpha_1+(\nu-2)\omega]+[\alpha_1+(\nu-1)\omega]$

και $S_\nu=\alpha_\nu+(\alpha_\nu-\omega)+(\alpha_\nu-2\omega)+...+[\alpha_\nu-(\nu-2)\omega]+[\alpha_\nu-(\nu-1)\omega]$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες έχουμε:

$$2S_\nu=(\alpha_1+\alpha_\nu)+(\alpha_1+\alpha_\nu)+(\alpha_1+\alpha_\nu)+...+(\alpha_\nu+\alpha_1)+(\alpha_\nu+\alpha_1)$$

ή $2S_\nu=\nu(\alpha_1+\alpha_\nu)$. Άρα $S_\nu=\dfrac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu)$.

Επειδή $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$, ο τύπος $S_\nu=\dfrac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu)$ γράφεται:

$$S_\nu=\frac{\nu}{2}[2\alpha_1+(\nu-1)\omega]$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Να βρεθεί το άθροισμα 7 + 10 + 13 + ... + 157.

ΛΥΣΗ

Πρόκειται για το άθροισμα διαδοχικών όρων μιας αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 7$, $\alpha_\nu = 157$ και $\omega = 3$. Για να το υπολογίσουμε, χρειαζόμαστε το πλήθος ν των προσθετέων. Από τον τύπο του $\nu^{ου}$ όρου $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ έχουμε

$$\begin{aligned} 157 = 7 + (\nu-1)3 &\Leftrightarrow 7 + (\nu-1)3 = 157 \\ &\Leftrightarrow 7 + 3\nu - 3 = 157 \\ &\Leftrightarrow 3\nu = 153 \\ &\Leftrightarrow \nu = 51 \end{aligned}$$

Επομένως το ζητούμενο άθροισμα είναι

$$S_{51} = \frac{51}{2}(7 + 157) = 4182.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Πόσοι όροι της αριθμητικής προόδου 52, 47, 42, ... έχουν άθροισμα ίσο με 90;

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\alpha_1 = 52$, $\omega = 47 - 52 = -5$ και $S_\nu = 90$.

Επειδή $S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega]$, έχουμε

$$\begin{aligned} 90 = \frac{\nu}{2}[2\cdot 52 + (\nu-1)(-5)] &\Leftrightarrow 90 = \frac{\nu}{2}(109 - 5\nu) \\ &\Leftrightarrow 5\nu^2 - 109\nu + 180 = 0 \\ &\Leftrightarrow \nu = \frac{9}{5} \quad \text{ή} \quad \nu = 20 \end{aligned}$$

Επειδή όμως $\nu \in \mathbb{N}^*$, συμπεραίνουμε ότι $\nu = 20$. Άρα 20 όροι της δοθείσης αριθμητικής προόδου έχουν άθροισμα ίσο με 90.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο

Ο $10^{ος}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου είναι ο 42 και ο $19^{ος}$ όρος της είναι ο 87. Να υπολογισθεί το άθροισμα των πρώτων 100 όρων της προόδου αυτής.

ΛΥΣΗ

Από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$ έχουμε $42 = \alpha_1 + 9\omega$ και $87 = \alpha_1 + 18\omega$.
Επομένως οι α_1 και ω είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} \alpha_1 + 9\omega = 42 \\ \alpha_1 + 18\omega = 87 \end{cases}$$

Από την επίλυση του συστήματος αυτού βρίσκουμε ότι είναι $\alpha_1 = -3$ και $\omega = 5$. Επομένως

$$\begin{aligned} S_{100} &= \frac{100}{2}[2(-3) + 99 \cdot 5] \\ &= 50(-6 + 495) \\ &= 24450 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε το ν<u>ο</u> όρο των αριθμητικών προόδων:

i) 7, 10, 13, … **ii)** 11, 13, 15, … **iii)** 5, 2, −1, …

iv) 2, $\frac{5}{2}$, 3, … **v)** −6, −9, −12, …

2. Να βρείτε το ζητούμενο όρο σε καθεμιά από τις αριθμητικές προόδους:

i) Τον α_{15} της −2, 3, 8, … **ii)** Τον α_{20} της 11, 18, 25, …

iii) Τον α_{30} της 4, 15, 26, … **iv)** Τον α_{35} της 17, 25, 33, …

v) Τον α_{50} της 1, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, ... **vi)** Τον α_{47} της $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4}$, 2, …

3. **i)** Αν ο 6ος όρος μιας αριθμητικής προόδου είναι 12 και ο 10ος όρος είναι 16, να βρείτε τον 1ο όρο και τη διαφορά της προόδου.

ii) Ομοίως, αν είναι $\alpha_5 = 14$ και $\alpha_{12} = 42$.

iii) Ομοίως, αν είναι $\alpha_3 = 20$ και $\alpha_7 = 32$.

4. **i)** Ο 5ος όρος μιας αριθμητικής προόδου είναι −5 και ο 15ος όρος της είναι −2. Να βρείτε τον 50ο όρο της προόδου.

ii) Αν σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_7 = 55$ και $\alpha_{22} = 145$, να βρείτε τον α_{18}.

5. **i)** Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 5$ ισούται με 97;

ii) Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 80$ και $\omega = -3$ ισούται με −97;

6. **i)** Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο των 10 και −40.

ii) Να βρείτε για ποια τιμή του x ο αριθμητικός μέσος των 5x + 1 και 11 είναι ο 3x − 2.

7. Αν δυο αριθμοί διαφέρουν κατά 10 και ο αριθμητικός τους μέσος είναι ο 25, να βρείτε τους δυο αυτούς αριθμούς.

8. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 40 όρων των αριθμητικών προόδων:
i) 7, 9, 11, ... **ii)** 0, 2, 4, ... **iii)** 6, 10, 14, ... **iv)** −7, −2, +3, ...

9. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 80 όρων των αριθμητικών προόδων:

i) 2, −1, −4, … **ii)** $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \ldots$

10. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:
i) 1+5+9 + ... + 197 **ii)** 9+12+15+ ... + 90 **iii)** −7−10−13− ... −109.

11. Πόσους πρώτους όρους πρέπει να πάρουμε από καθεμιά από τις παρακάτω αριθμητικές προόδους για να έχουν άθροισμα 180;
i) 4, 8, 12, ... **ii)** 5, 10, 15, ...

12. Μια στέγη σχήματος τραπεζίου έχει 15 σειρές κεραμίδια. Η πρώτη σειρά έχει 53 κεραμίδια και κάθε επόμενη σειρά έχει δυο κεραμίδια λιγότερα. Πόσα κεραμίδια έχει η 15η σειρά και πόσα κεραμίδια έχει συνολικά η στέγη;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Ο νος όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_\nu = 12 - 4\nu$. Να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος και να γράψετε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά της ω.

2. Να βρείτε το άθροισμα:
i) των πρώτων 200 περιττών αριθμών
ii) των πρώτων 300 θετικών άρτιων
iii) όλων των περιττών αριθμών μεταξύ 16 και 380.

3. Να βρείτε το άθροισμα:
i) των πολλαπλασίων του 5 μεταξύ 1 και 199
ii) των πολλαπλασίων του 3 μεταξύ 10 και 200.

4. Να βρείτε το άθροισμα:

i) των πρώτων 30 όρων της ακολουθίας $\alpha_\nu = 5\nu - 4$

ii) των πρώτων 40 όρων της ακολουθίας $\alpha_\nu = -5\nu - 3$.

5. Να βρείτε το άθροισμα των ακεραίων από 1 μέχρι 200 που δεν είναι πολλαπλάσια του 4 ή του 9.

6. Να βρείτε το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου 1, 3, 5, 7, ... που απαιτούνται, ώστε το άθροισμά του να ξεπερνάει το 4000.

7. Να συμπληρώσετε το διπλανό πίνακα, στον οποίο τα α_1, ω, ν, α_ν και S_ν ανήκουν σε κάθε γραμμή στην ίδια αριθμητική πρόοδο.

α_1	ω	ν	α_ν	S_ν
120	−10	12		
5		27	109	
	3	12		210
	2	16	−8	

8. Ένα ρολόι χτυπάει τις ακέραιες ώρες. Πόσα χτυπήματα ακούγονται σε ένα 24/ωρο;

9. Ένα στάδιο έχει 33 σειρές καθισμάτων. Στην κάτω-κάτω σειρά βρίσκονται 800 θέσεις και στην πάνω-πάνω σειρά βρίσκονται 4160 θέσεις. Το πλήθος των θέσεων αυξάνει από σειρά σε σειρά κατά τον ίδιο πάντα αριθμό θέσεων. Να βρείτε πόσες θέσεις έχει συνολικά το στάδιο και πόσες θέσεις έχει η μεσαία σειρά.

10. Μεταξύ των αριθμών 3 και 80 θέλουμε να βρούμε άλλους 10 αριθμούς που όλοι μαζί να είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου. Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί. **[Τέτοια προβλήματα λέγονται προβλήματα παρεμβολής όρων]**.

11. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $1+\frac{\nu-1}{\nu}+\frac{\nu-3}{\nu}+\ldots+\frac{1}{\nu}$.

12. Ένας αγρότης, για να κάνει μία γεώτρηση στο κτήμα του, συμφώνησε τα εξής με τον ιδιοκτήτη του γεωτρύπανου: Το 1ο μέτρο θα κοστίσει 20 ευρώ και αυξανομένου του βάθους, θα αυξάνεται και η τιμή κάθε μέτρου κατά 5 ευρώ. Ο αγρότης διαθέτει 4700 ευρώ. Σε πόσο βάθος μπορεί να πάει η γεώτρηση στο κτήμα του;

5.3 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

– Στην ακολουθία 3, 6, 12, 24, ... κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί 2. Δηλαδή για την ακολουθία αυτή ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot 2 \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = 2$$

Η ακολουθία (α_ν) λέγεται **γεωμετρική πρόοδος με λόγο 2**.

– Στην ακολουθία 27, −9, 3, −1, ... κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί $-\frac{1}{3}$. Δηλαδή για την ακολουθία αυτή ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu\left(-\frac{1}{3}\right) \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = -\frac{1}{3}$$

Όπως και προηγουμένως, η ακολουθία (α_ν) λέγεται **γεωμετρική πρόοδος με λόγο $-\frac{1}{3}$.**
Γενικότερα ορίζουμε ότι:

Μια ακολουθία λέγεται **γεωμετρική πρόοδος**, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με **λ** και τον λέμε **λόγο της προόδου**.
Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_ν) υποθέτουμε πάντα ότι $\alpha_1 \neq 0$, οπότε, αφού είναι και $\lambda \neq 0$, ισχύει **$\alpha_\nu \neq 0$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$**. Επομένως, η ακολουθία (α_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\boxed{\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \lambda} \quad \text{ή} \quad \boxed{\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda}$$

Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο γνωρίζουμε τον πρώτο όρο της α_1 και το λόγο της λ, τότε ο αναδρομικός της τύπος $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \lambda$ μας επιτρέπει να βρούμε με διαδοχικά βήματα τον οποιονδήποτε όρο της. Μπορούμε όμως να υπολογίσουμε κατευθείαν το νο όρο α_ν μιας γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση των α_1, λ και ν ως εξής:
Από τον ορισμό της γεωμετρικής προόδου έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_1 \\ \alpha_2 &= \alpha_1\lambda \\ \alpha_3 &= \alpha_2\lambda \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{\nu-1} &= \alpha_{\nu-2}\lambda \\ \alpha_\nu &= \alpha_{\nu-1}\lambda \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ν αυτές ισότητες και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαγραφής, βρίσκουμε $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1}$. Επομένως

Ο νος όρος μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ είναι

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$$

Έτσι π.χ. στη γεωμετρική πρόοδο 3, −6, 12, −24, ... η οποία έχει $\alpha_1 = 3$ και $\lambda = \frac{-6}{3} = -2$ ο $\nu^{ος}$ όρος της είναι $\alpha_\nu = 3 \cdot (-2)^{\nu-1}$. Επομένως ο $5^{ος}$ όρος της είναι $\alpha_5 = 3 \cdot (-2)^4 = 48$, ο δέκατος όρος της είναι $\alpha_{10} = 3 \cdot (-2)^9 = -1536$ κτλ.

Γεωμετρικός μέσος

Αν πάρουμε τρεις διαδοχικούς όρους α, β, γ μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ, τότε ισχύει

$$\frac{\beta}{\alpha} = \lambda \text{ και } \frac{\gamma}{\beta} = \lambda, \quad \text{επομένως} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} \text{ ή } \beta^2 = \alpha\gamma$$

Αλλά και αντιστρόφως, αν για τρεις αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$, τότε έχουμε $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$, που σημαίνει ότι οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου. Ο θετικός αριθμός $\sqrt{\alpha\gamma}$ λέγεται **γεωμετρικός μέσος** των α και γ.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

> Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$.

Άθροισμα ν διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου

Ας θεωρήσουμε τη γεωμετρική πρόοδο 1, 3, 9, 27, ... στην οποία είναι $\alpha_1=1$ και $\lambda = 3$, και ας βρούμε το άθροισμα S_7 των 7 πρώτων όρων της.
Έχουμε

$$S_7 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 \qquad (1)$$

Αντί να προσθέσουμε τους αριθμούς αυτούς με τον συνήθη τρόπο, μπορούμε να βρούμε συντομότερα το άθροισμά τους ως εξής: Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (1) με το λόγο $\lambda = 3$ και έχουμε

$$3S_7 = 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187 \qquad (2)$$

Αφαιρούμε από τα μέλη της (2) τα μέλη της (1) και έχουμε:

$$3S_7 - S_7 = 2187 - 1$$
$$2S_7 = 2186$$
$$S_7 = 1093$$

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τρόπο σε μια οποιαδήποτε γεωμετρική πρόοδο, θα αποδείξουμε ότι:

> Το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda \neq 1$ είναι $S_\nu = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $$S_\nu = \alpha_1 + \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \ldots + \alpha_1\lambda^{\nu-2} + \alpha_1\lambda^{\nu-1} \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (1) με το λόγο λ και έχουμε

$$\lambda S_\nu = \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \alpha_1\lambda^3 + \ldots + \alpha_1\lambda^{\nu-1} + \alpha_1\lambda^\nu \quad (2)$$

Αφαιρούμε από τα μέλη της (2) τα μέλη της (1) και έχουμε:

$$\lambda S_\nu - S_\nu = \alpha_1\lambda^\nu - \alpha_1$$

ή $$(\lambda - 1)S_\nu = \alpha_1(\lambda^\nu - 1)$$

Επομένως, αφού $\lambda \neq 1$, έχουμε:

$$S_\nu = \frac{\alpha_1\left(\lambda^\nu - 1\right)}{\lambda - 1}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στην περίπτωση που ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 1$, τότε το άθροισμα των όρων της είναι $S_\nu = \nu \cdot \alpha_1$, αφού όλοι οι όροι της προόδου είναι ίσοι με α_1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Να βρεθεί ο ν$^{\text{ος}}$ όρος μιας γεωμετρικής προόδου της οποίας ο 4$^{\text{ος}}$ όρος είναι $\frac{3}{4}$ και ο 9$^{\text{ος}}$ όρος της είναι $-\frac{3}{128}$.

ΛΥΣΗ

Έστω α_1 ο πρώτος όρος της γεωμετρικής προόδου και λ ο λόγος της. Τότε έχουμε:

$$\alpha_1\lambda^{4-1} = \alpha_1\lambda^3 = \frac{3}{4} \quad \text{και} \quad \alpha_1\lambda^{9-1} = \alpha_1\lambda^8 = -\frac{3}{128}$$

Επομένως $$\frac{\alpha_1\lambda^8}{\alpha_1\lambda^3} = \left(-\frac{3}{128}\right) : \frac{3}{4} \quad \text{ή} \quad \lambda^5 = -\frac{1}{32},$$

από την οποία προκύπτει ότι $\lambda = -\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = -\frac{1}{2}$.

Αντικαθιστούμε την τιμή αυτή του λ στην $\alpha_1\lambda^3 = \frac{3}{4}$ και έχουμε

$$\alpha_1\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{4} \text{ ή } \alpha_1 = -6.$$

Άρα ο ν$^{\text{ος}}$ όρος της γεωμετρικής προόδου, σύμφωνα με τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1}$, είναι

$$\alpha_\nu = (-6)\left(-\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Να υπολογιστεί το άθροισμα $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{256}$.

ΛΥΣΗ

Πρόκειται για το άθροισμα διαδοχικών όρων μιας γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1 = 1$ και $\lambda = \frac{1}{2}$.

Για να εφαρμόσουμε τον τύπο $S_\nu = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$, πρέπει να ξέρουμε το πλήθος ν των όρων.

Από τον τύπο όμως του ν$^{\text{ου}}$ όρου $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1}$ έχουμε: $\frac{1}{256} = 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}$ ή $\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}$ και επομένως $\nu - 1 = 8$ ή $\nu = 9$.

Άρα το ζητούμενο άθροισμα είναι:

$$S_9 = 1\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^9 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1 - \frac{1}{512}}{1 - \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{511}{512}}{\frac{1}{2}} = \frac{1022}{512} = \frac{511}{256}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε το ν$^{\text{ο}}$ όρο των γεωμετρικών προόδων:

i) 3, 6, 12, … **ii)** $\frac{2}{3}, 2, 6, \ldots$ **iii)** 9, 27, 81, …

iv) $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ **v)** 16, 8, 4, … **vi)** 18, 6, 2, …

vii) 1, 0,4, 0,16, … **viii)** −2, 4, −8, … **ix)** −3, 9, −27, …

2. Να βρείτε το ζητούμενο όρο σε καθεμιά από τις γεωμετρικές προόδους:

i) Τον α_9 της $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \ldots$ **ii)** Τον α_7 της 2, 6, 18, …

iii) Τον α_8 της 729, 243, … **iv)** Τον α_{10} της 1, −2, 4, …

v) Τον α_9 της $\frac{8}{27}, \frac{4}{9}, \frac{2}{3}, \ldots$

3. i) Να βρείτε τον 1$^{\text{ο}}$ όρο μιας γεωμετρικής προόδου, της οποίας ο 5$^{\text{ος}}$ όρος είναι $\frac{32}{3}$ και ο λόγος 2.

ii) Ομοίως, αν ο 4$^{\text{ος}}$ όρος είναι $\frac{27}{128}$ και ο λόγος $\frac{3}{4}$.

4. i) Να βρείτε το λόγο μιας γεωμετρικής προόδου της οποίας ο 3$^{\text{ος}}$ όρος είναι 12 και ο 6$^{\text{ος}}$ όρος είναι 96.

ii) Ομοίως, αν ο 2$^{\text{ος}}$ όρος είναι $\frac{8}{3}$ και ο 5$^{\text{ος}}$ όρος είναι $\frac{64}{81}$.

5. Να βρείτε:

i) τον α_{14} μιας γεωμετρικής προόδου με $\alpha_4 = 125$ και $\alpha_{10} = \frac{125}{64}$

ii) τον α_{21} μιας γεωμετρικής προόδου με $\alpha_{13} = \sqrt{2}$ και $\alpha_{23} = 32\sqrt{2}$.

6. Έστω η γεωμετρική πρόοδος 3, 6, 12, ... Να βρείτε το πλήθος των όρων της μέχρι και τον όρο που ισούται με 768.

7. **i)** Να βρείτε τον πρώτο όρο της γεωμετρικής προόδου 4, 8, 16, ... που υπερβαίνει το 2000.

ii) Να βρείτε τον πρώτο όρο της γεωμετρικής προόδου 128, 64, 32, ... που είναι μικρότερος του 0,25.

8. **i)** Να βρείτε το γεωμετρικό μέσο των αριθμών 5 και 20, καθώς και των $\frac{1}{\sqrt{3}}$ και $\sqrt{3}$

ii) Να βρείτε τον x ώστε οι αριθμοί x − 4, x + 1, x − 19 να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο.

9. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 10 όρων των γεωμετρικών προόδων

i) 1, 2, 4, … **ii)** 3, 9, 27, … **iii)** − 4, 8, −16, …

10. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

i) $2+8+32+...+8192$ **ii)** $4+2+1+...+\frac{1}{512}$ **iii)** $1+(-2)+4+...+256.$

11. Μια κοινωνία βακτηριδίων διπλασιάζεται σε αριθμό κάθε μια ώρα. Αν αρχικά υπάρχουν 3 βακτηρίδια, πόσα βακτηρίδια θα υπάρχουν ύστερα από 12 ώρες;

12. Μια μπάλα πέφτει από ύψος 60 μέτρων και αναπηδά σε έδαφος φθάνοντας κάθε φορά στο $\frac{1}{3}$ του ύψους της προηγούμενης αναπήδησης. Να βρείτε σε τι ύψος θα φθάσει στην 4η αναπήδηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Ο νος όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_\nu = 2^\nu \cdot \frac{1}{3^{\nu+1}}$. Να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να γράψετε τους α_1 και λ.

2. Για ποια τιμή του ν οι αριθμοί $\sqrt{\nu-5}$, $\sqrt[4]{10\nu+4}$, $\sqrt{\nu+2}$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου;

3. Να δείξετε ότι:

i) Τα τετράγωνα των όρων μιας γεωμετρικής προόδου σχηματίζουν επίσης γεωμετρική πρόοδο.

ii) Αν υψώσουμε κάθε όρο μιας γεωμετρικής προόδου στην k, τότε προκύπτει πάλι γεωμετρική πρόοδος.

4. Να βρείτε τη γεωμετρική πρόοδο, της οποίας το άθροισμα των δυο πρώτων όρων της είναι $3+\sqrt{3}$ και το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της είναι $4(3+\sqrt{3})$.

5. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων δέκα όρων της γεωμετρικής προόδου, στην οποία είναι $\alpha_2 + \alpha_6 = 34$ και $\alpha_3 + \alpha_7 = 68$.

6. Ο πληθυσμός μιας χώρας είναι 90 εκατομμύρια και παρουσιάζει ετήσια αύξηση 2%. Αν α_ν είναι ο πληθυσμός της χώρας ύστερα από ν χρόνια, να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο, καθώς και το γενικό όρο της ακολουθίας (α_ν).
– Ποιος θα είναι ο πληθυσμός της χώρας ύστερα από 10 χρόνια;
[Χρησιμοποιήστε υπολογιστή τσέπης].

7. Η ένταση του φωτός μειώνεται κατά 10%, όταν αυτό διέρχεται από ένα φίλτρο. Αν I_ν είναι η ένταση του φωτός, αφού διέλθει διαδοχικά μέσα από ν τέτοια φίλτρα, να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο, καθώς και το γενικό όρο της ακολουθίας (I_ν).
– Ποια θα είναι η ένταση του φωτός, αν διέλθει μέσα από 10 τέτοια φίλτρα και η αρχική ένταση είναι I_o;
[Χρησιμοποιήστε υπολογιστή τσέπης].

8. Σε ένα όργανο μουσικής ο τόνος C' έχει συχνότητα 261 Hz και η οκτάβα του C'' έχει διπλάσια συχνότητα. Ανάμεσα στους C' και C'' υπάρχουν 11 επιπλέον τόνοι, των οποίων οι συχνότητες σχηματίζουν με τις συχνότητες των C' και C''

13 διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Να υπολογίσετε:

i) το λόγο της προόδου,

ii) τη συχνότητα του πέμπτου τόνου.

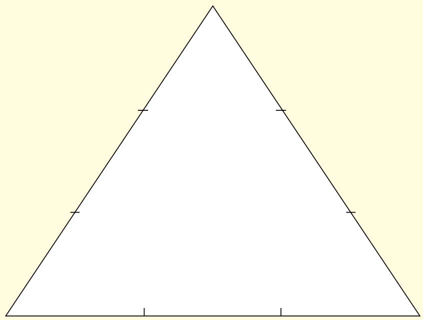
9. Το ψυγείο ενός φορτηγού περιέχει 40 lt νερό. Αδειάζουμε 4 lt νερό και το αντικαθιστούμε με αντιπυκτικό. Ύστερα αδειάζουμε 4 lt του μείγματος και το αντικαθιστούμε με αντιπυκτικό κ.ο.κ. Αν $D_ν$ είναι η ποσότητα του νερού στο ψυγείο, αφού εφαρμοσθεί η διαδικασία ν φορές, να βρείτε:

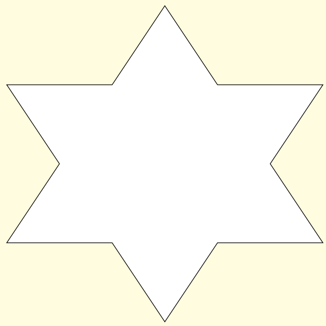
i) Έναν αναδρομικό τύπο της ακολουθίας $(D_ν)$.

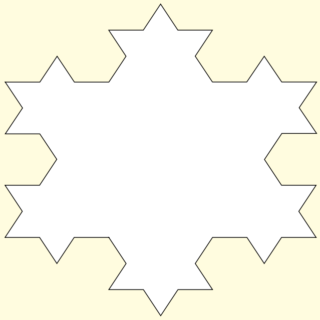
ii) Την ποσότητα του αντιπυκτικού στο ψυγείο, αφού εφαρμοσθεί η διαδικασία 7 φορές. [Χρησιμοποιήστε υπολογιστή τσέπης].

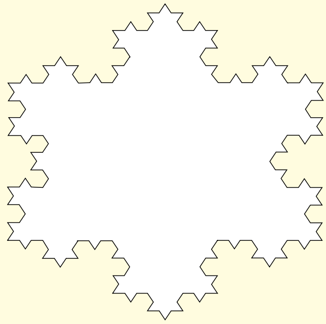
10. Λέγεται ότι ο εφευρέτης του σκακιού παρακλήθηκε από έναν Ινδό βασιλιά να ζητήσει όποια αμοιβή ήθελε για τη σπουδαία ιδέα του. Ο εφευρέτης ζήτησε να πάρει το ρύζι που θα μαζευόταν ως εξής: Στο 1ο τετραγωνάκι του σκακιού να έβαζε κάποιος έναν κόκκο ρυζιού, στο 2ο τετραγωνάκι 2 κόκκους, στο 3ο τετραγωνάκι 4 κόκκους, στο 5ο τετραγωνάκι 8 κόκκους κτλ.
Να βρείτε πόσοι τόνοι θα ήταν η ποσότητα αυτή του ρυζιού, αν 1 Kg ρυζιού έχει 20000 κόκκους.

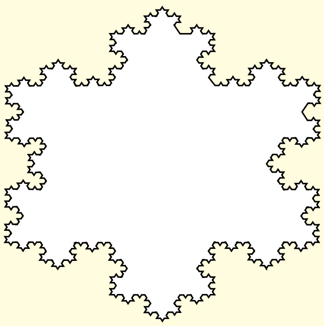
11. Κάθε πλευρά ενός ισόπλευρου τριγώνου χωρίζεται σε τρία ίσα τμήματα. Το μεσαίο τμήμα κάθε πλευράς αντικαθίσταται από τις δυο πλευρές ισόπλευρου τριγώνου. Στο σχήμα με μορφή αστεριού που προκύπτει αντικαθιστούμε πάλι το μεσαίο $\frac{1}{3}$ κάθε πλευράς με δυο πλευρές ισόπλευρου τριγώνου. Με ανάλογο τρόπο συνεχίζουμε για κάθε σχήμα που προκύπτει από τη διαδικασία αυτή.











i) Να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο και το γενικό όρο της ακολουθίας (S_ν) που εκφράζει το πλήθος των πλευρών κάθε σχήματος.

ii) Να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο και το γενικό όρο της ακολουθίας (U_ν) που εκφράζει την περίμετρο κάθε σχήματος, αν το αρχικό ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά ίση με 1.

5.4 ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ - ΙΣΕΣ ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ

Με τη βοήθεια των γεωμετρικών προόδων μπορούμε να λύσουμε προβλήματα οικονομικής φύσεως, που συχνά παρουσιάζονται στις συναλλαγές με πιστωτικούς οργανισμούς.

Ανατοκισμός

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Καταθέτουμε στην τράπεζα ένα κεφάλαιο α ευρώ με ετήσιο επιτόκιο ε%. Με τη συμπλήρωση ενός χρόνου οι τόκοι προστίθενται στο κεφάλαιο και το ποσό που προκύπτει είναι το νέο κεφάλαιο που τοκίζεται με το ίδιο επιτόκιο για τον επόμενο χρόνο. Αν η διαδικασία αυτή επαναληφθεί για ν χρόνια, να βρεθεί πόσα χρήματα θα εισπράξουμε στο τέλος του ν$^{\text{ου}}$ χρόνου.
(*Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ως πρόβλημα ανατοκισμού.*)

ΛΥΣΗ

Στο τέλος του 1$^{\text{ου}}$ χρόνου το κεφάλαιο α θα δώσει τόκο $\frac{\varepsilon}{100}\cdot\alpha$ και μαζί με τον τόκο θα γίνει

$$\alpha_1=\alpha+\frac{\varepsilon}{100}\alpha=\alpha\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right).$$

Στο τέλος του 2$^{\text{ου}}$ χρόνου το κεφάλαιο α_1 θα δώσει τόκο $\frac{\varepsilon}{100}\cdot\alpha_1$ και μαζί με τον τόκο θα γίνει

$$\alpha_2=\alpha_1+\frac{\varepsilon}{100}\alpha_1=\alpha_1\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right).$$

Στο τέλος του 3$^{\text{ου}}$ χρόνου το κεφάλαιο α_2 μαζί με τους τόκους θα γίνει

$$\alpha_3=\alpha_2\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right) \text{ κτλ.}$$

και γενικά στο τέλος του ν$^{\text{ου}}$ χρόνου το κεφάλαιο θα γίνει $\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)$.

Παρατηρούμε ότι τα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu$ είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1=\alpha\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)$ και $\lambda=1+\frac{\varepsilon}{100}$.

Άρα, σύμφωνα με τον τύπο του ν$^{\text{ου}}$ όρου γεωμετρικής προόδου, στο τέλος του ν$^{\text{ου}}$ χρόνου το κεφάλαιο α μαζί με τους τόκους θα γίνει $\alpha_\nu=\alpha\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu-1}$

$$\text{ή } \alpha_\nu=\alpha\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu}.$$

Αν θέσουμε $\frac{\varepsilon}{100}=\tau$, που είναι ο τόκος του ενός ευρώ σε ένα χρόνο, έχουμε τον τύπο

$$\alpha_\nu=\alpha(1+\tau)^\nu$$

που είναι γνωστός ως τύπος του ανατοκισμού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Καταθέτουμε με ανατοκισμό κεφάλαιο 10000 ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 2%. Να βρεθεί τι ποσό θα εισπράξουμε ύστερα από 10 χρόνια.

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τον τύπο $\alpha_\nu=\alpha(1+\tau)^\nu$, ύστερα από 10 χρόνια θα εισπράξουμε ποσό

$$\begin{aligned}\alpha_{10}=10000\cdot(1+0,02)^{10}&=10000\cdot(1,02)^{10}\\&=10000\cdot 1,218994\\&=12189,94\ \text{ ευρώ.}\end{aligned}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Τη δύναμη $(1,02)^{10}$ την υπολογίζουμε με τη βοήθεια πινάκων ή με έναν υπολογιστή τσέπης.

Ίσες καταθέσεις

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Καταθέτουμε σε μια τράπεζα στην αρχή κάθε χρόνου α ευρώ με ανατοκισμό και επιτόκιο ε%. Τι ποσό θα πάρουμε ύστερα από ν χρόνια;
(*Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ως πρόβλημα των ίσων καταθέσεων.*)

ΛΥΣΗ

Η 1^{η} κατάθεση θα ανατοκιστεί για ν χρόνια και επομένως, σύμφωνα με τον τύπο του ανατοκισμού, θα γίνει $\alpha(1+\tau)^\nu$, όπου $\tau=\frac{\varepsilon}{100}$.

Η 2^{η} κατάθεση θα ανατοκιστεί για ν − 1 χρόνια και επομένως θα γίνει $\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$ κτλ. και η ν^{η} κατάθεση θα τοκιστεί για 1 χρόνο και θα γίνει $\alpha(1+\tau)$. Συνεπώς ύστερα από ν χρόνια θα πάρουμε το ποσό

$$\begin{aligned}\Sigma &= \alpha(1+\tau)^{\nu} + \alpha(1+\tau)^{\nu-1} + \ldots + \alpha(1+\tau)\\ &= \alpha(1+\tau) + \alpha(1+\tau)^{2} + \ldots + \alpha(1+\tau)^{\nu}\\ &= \alpha(1+\tau)[1 + (1+\tau) + (1+\tau)^{2} + \ldots + (1+\tau)^{\nu-1}]\\ &= \alpha(1+\tau)\cdot\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{(1+\tau)\ \ -1}\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\Sigma = \alpha(1+\tau)\cdot\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}$$

Ο τύπος αυτός είναι γνωστός ως **τύπος των ίσων καταθέσεων**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στην αρχή κάθε χρόνου καταθέτουμε στην τράπεζα ποσό 10000 ευρώ με ανατοκισμό και με επιτόκιο 2%. Τι ποσό θα πάρουμε ύστερα από 10 χρόνια;

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τον τύπο $\Sigma = \alpha(1+\tau)\cdot\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}$, ύστερα από 10 χρόνια θα πάρουμε ποσό

$$\begin{aligned}\Sigma &= 10000\cdot(1+0,02)\cdot\frac{(1+0,02)^{10}-1}{0,02}\\ &= 10000\cdot 1,02\cdot\frac{(1,02)^{10}-1}{0,02}\\ &= 10000\cdot 1,02\cdot\frac{1,218994-1}{0,02}\\ &= 10000\cdot 11,168694 = \mathbf{111686,94}\ \text{ευρώ.}\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

Για την επίλυση των ασκήσεων να χρησιμοποιηθεί υπολογιστής τσέπης

1. Δανείζει κάποιος 5000 ευρώ με ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 5%. Πόσα χρήματα θα πάρει συνολικά ύστερα από 5 χρόνια;

2. Πόσα χρήματα πρέπει να τοκίσει κάποιος με ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 3% για να πάρει ύστερα από 10 χρόνια συνολικά 50000 ευρώ;

3. Ποιο είναι το επιτόκιο με το οποίο, κεφάλαιο 10000 ευρώ, ανατοκιζόμενο ανά έτος, γίνεται ύστερα από 5 χρόνια 12762 ευρώ;

4. Στην αρχή κάθε χρόνου και για 5 συνεχή χρόνια καταθέτουμε 5000 ευρώ με ανατοκισμό ανά έτος και με ετήσιο επιτόκιο 3%. Τι ποσό θα πάρουμε στο τέλος του 5ου έτους;

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Κεφάλαιο 6ο

6.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Εισαγωγή

Σε πολλά καθημερινά φαινόμενα εμφανίζονται δύο μεγέθη, τα οποία μεταβάλλονται έτσι, ώστε η τιμή του ενός να καθορίζει την τιμή του άλλου. Η διαδικασία με την οποία κάθε τιμή του ενός μεγέθους αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του άλλου μεγέθους, πολλές φορές περιγράφεται από ένα μαθηματικό τύπο, όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

1. Ο τόκος Τ σε ευρώ που αποδίδει κεφάλαιο 5000 ευρώ σε ένα έτος με ετήσιο επιτόκιο ε%, δίνεται κατά τα γνωστά από τον τύπο $T = 5000\frac{\varepsilon}{100}$. Ο τύπος αυτός περιγράφει μια διαδικασία, με την οποία κάθε τιμή του ε αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του Τ. Για παράδειγμα, αν ε = 3, τότε Τ = 150, ενώ αν ε = 5, τότε Τ = 250 κτλ.

2. Το διάστημα S σε km που διανύθηκε από ποδηλάτη σε χρονικό διάστημα 2h, με μέση ταχύτητα υ σε km/h, δίνεται από τον τύπο S = 2υ. Ο τύπος αυτός περιγράφει μια διαδικασία, με την οποία κάθε τιμή του υ αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του S. Για παράδειγμα, αν υ = 60, τότε S = 120, ενώ αν υ = 70, τότε S = 140 κτλ.

3. Το εμβαδό Ε ενός κύκλου ακτίνας ρ δίνεται από τον τύπο $E = \pi\rho^2$. Ομοίως και ο τύπος αυτός περιγράφει μια διαδικασία, με την οποία κάθε τιμή του ρ αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του Ε. Για παράδειγμα, αν ρ = 1, τότε Ε = π, ενώ, αν ρ = 2, τότε Ε = 4π κτλ.

Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις όπου η διαδικασία αντιστοίχισης ανάμεσα στις τιμές δύο μεγεθών δεν περιγράφεται ή έστω δεν γνωρίζουμε αν περιγράφεται από κάποιο τύπο. Για παράδειγμα:

✓ Οι ώρες της ημέρας και οι αντίστοιχες θερμοκρασίες τους.

✓ Οι μέρες του έτους και οι τιμές ενός ξένου νομίσματος (π.χ. του δολαρίου).

Παρατηρούμε ότι σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα υπάρχει κάποια διαδικασία, με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου Β. Μια τέτοια διαδικασία λέγεται συνάρτηση από το Α στο Β. Δηλαδή:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.

Το σύνολο **Α** λέγεται **πεδίο ορισμού** ή **σύνολο ορισμού** της f.
Οι συναρτήσεις παριστάνονται συνήθως με τα μικρά γράμματα f, g, h κτλ. του Λατινικού αλφαβήτου.
Αν με μια συνάρτηση f από το Α στο Β, το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$, τότε γράφουμε:

$$\mathbf{y = f(x)}$$

και διαβάζουμε «y ίσον f του x». Το $\boldsymbol{f(x)}$ λέγεται τότε **τιμή της $\boldsymbol{f}$ στο x**. Το γράμμα **x**, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του πεδίου ορισμού της f, ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το y, που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο x, ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

Το σύνολο, που έχει για στοιχεία του τις τιμές $f(x)$ για όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και το συμβολίζουμε με $\boldsymbol{f(A)}$.
Η παραπάνω συνάρτηση συμβολίζεται ως εξής:

$$f : A \to B$$

$$x \to f(x)$$

Έτσι π.χ. η συνάρτηση f, με την οποία κάθε μη αρνητικός αριθμός αντιστοιχίζεται στην τετραγωνική του ρίζα, συμβολίζεται ως εξής:

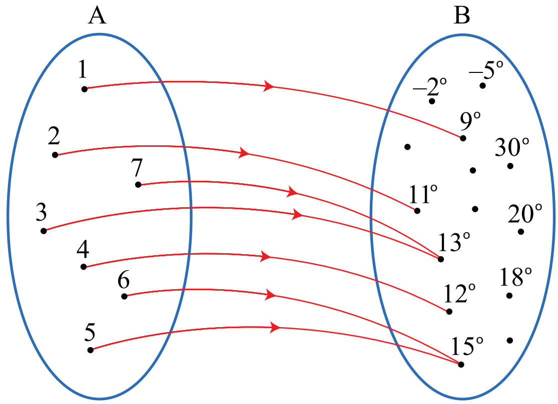
$$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

$$x \to \sqrt{x}$$

Για καλύτερη κατανόηση του παραπάνω ορισμού ας δούμε τα παραδείγματα που ακολουθούν:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Έστω $\boldsymbol{f}$ η συνάρτηση με την οποία κάθε ημέρα μιας ορισμένης εβδομάδας ενός μήνα αντιστοιχίζεται στην υψηλότερη θερμοκρασία της.



Για τη συνάρτηση αυτή, το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

ενώ το σύνολο τιμών το σύνολο

$$f(A) = \{9^o, 11^o, 12^o, 13^o, 15^o\} \subseteq B$$

Με αφορμή το παράδειγμα αυτό τονίζουμε τα ακόλουθα χαρακτηριστικά μιας συνάρτησης $f : A \rightarrow B$.

- Κάθε στοιχείο του Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του Β.
- Μερικά στοιχεία του Β μπορεί να μην αποτελούν τιμές της f (π.χ. 18^o).
- Δύο ή περισσότερα στοιχεία του Α μπορεί να αντιστοιχίζονται στο ίδιο στοιχείο του Β (π.χ. τα 3 και 7 αντιστοιχίζονται στο 13°).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

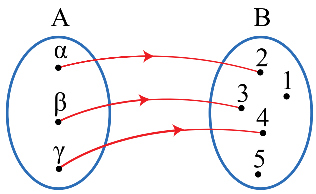
Θεωρούμε τα σύνολα Α = {α, β, γ} και Β = {1, 2, 3, 4, 5}, καθώς επίσης και τα παρακάτω σχήματα (βελοδιαγράμματα). Παρατηρούμε ότι:

✓ Το σχήμα (α) παριστάνει συνάρτηση, αφού κάθε στοιχείο του Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του Β.

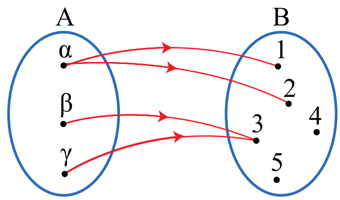
✓ Το σχήμα (β) δεν παριστάνει συνάρτηση, αφού το $\alpha \in A$ αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία του Β.

✓ Το σχήμα (γ) δεν παριστάνει συνάρτηση, αφού το $\gamma \in A$ δεν αντιστοιχίζεται σε κανένα στοιχείο του Β.

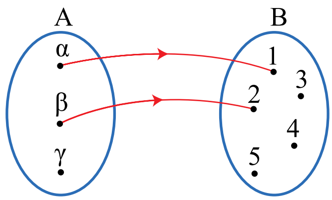
✓ Το σχήμα (δ) δεν παριστάνει συνάρτηση. Πρώτον διότι το $\gamma \in A$ δεν αντιστοιχίζεται σε κανένα στοιχείο του Β και δεύτερον διότι το $\alpha \in A$ αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία του Β.



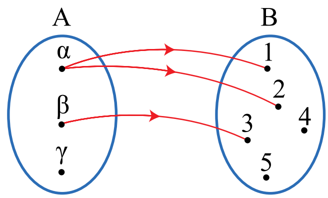
Σχήμα α΄



Σχήμα β΄



Σχήμα γ΄



Σχήμα δ΄

Συντομογραφία συνάρτησης

Είδαμε παραπάνω ότι, για να οριστεί μια συνάρτηση f, πρέπει να δοθούν τρία στοιχεία:

- Το πεδίο ορισμού της A
- Το σύνολο B και
- Το $f(\mathrm{x})$ για κάθε $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$

Οι συναρτήσεις, με τις οποίες θα ασχοληθούμε στο βιβλίο αυτό, είναι της μορφής $f\colon \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, όπου $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}$ και $\mathrm{B} \subseteq \mathbb{R}$, είναι δηλαδή, όπως λέμε, **πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής**.

Πολλές φορές αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση f δίνοντας μόνον τον τύπο με τον οποίο εκφράζεται το $f(\mathrm{x})$. Λέμε π.χ. δίνεται «η συνάρτηση f, με $f(\mathrm{x}) = \sqrt{1-4\mathrm{x}}$» ή, πιο σύντομα, «η συνάρτηση $f(\mathrm{x}) = \sqrt{1-4\mathrm{x}}$» ή, ακόμα, «η συνάρτηση $\mathrm{y} = \sqrt{1-4\mathrm{x}}$».

Σε μια τέτοια περίπτωση θα θεωρούμε **συμβατικά** ότι:

- Το πεδίο ορισμού A της f είναι το «ευρύτερο» από τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ στα οποία το $f(\mathrm{x})$ έχει νόημα.
- Το σύνολο B είναι ολόκληρο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Έτσι για τη συνάρτηση $f(\mathrm{x}) = \sqrt{1-4\mathrm{x}}$ το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο $\mathrm{A} = \left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$, αφού πρέπει $1-4\mathrm{x} \geq 0$, ενώ το σύνολο B είναι όλο το $\mathbb{R}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Πολλές φορές μια συνάρτηση περιγράφεται με έναν τύπο που έχει κλάδους, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{αν } x<0 \\ x-1, & \text{αν } x\geq 0 \end{cases}.$$

Για να υπολογίσουμε τις τιμές της f στα σημεία -1, 0 και 1 εργαζόμαστε ως εξής:

✓ Για $x=-1<0$, από τον κλάδο $f(x)=x^2+1$, έχουμε:

$$f(-1)=(-1)^2+1=1+1=2.$$

✓ Για $x=0$, από τον κλάδο $f(x)=x-1$, έχουμε:

$$f(0)=0-1=-1.$$

✓ Τέλος, για $x=1\geq 0$, από τον κλάδο $f(x)=x-1$, έχουμε:

$$f(1)=1-1=0.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Αν και, γενικά, χρησιμοποιούμε το γράμμα f για το συμβολισμό μιας συνάρτησης και το γράμμα x για το συμβολισμό του τυχαίου στοιχείου του πεδίου ορισμού της, ωστόσο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλα γράμματα.

Έτσι, για παράδειγμα, οι

$$f(x)=x^2-4x+7, \quad g(t)=t^2-4t+7 \quad \text{και} \quad h(s)=s^2-4s+7$$

ορίζουν την ίδια συνάρτηση.

Επομένως το x στον τύπο μιας συνάρτησης θα παίζει το ρόλο μιας «άδειας θέσης». Με αυτό το σκεπτικό, η παραπάνω συνάρτηση θα μπορούσε να έχει τη μορφή

$$f(\quad)=(\quad)^2-4(\quad)+7,$$

όπου οι παρενθέσεις έχουν πάρει τη θέση ενός γράμματος.

Έτσι για να υπολογίσουμε το $f(-2)$ απλά τοποθετούμε το -2 στις θέσεις, που ορίζουν οι παρενθέσεις:

$$\begin{aligned} f(-2)&=(-2)^2-4(-2)+7\\ &=4+8+7=19 \end{aligned}$$

Ομοίως, έχουμε

$$\begin{aligned} f(3x)&=(3x)^2-4(3x)+7\\ &=9x^2-12x+7 \end{aligned}$$

Υπάρχει όμως και μια παραπέρα απλοποίηση των εκφράσεών μας που σχετίζονται με συναρτήσεις. Πολλές φορές αντί να λέμε «η συνάρτηση $s=\frac{1}{2}gt^2$», θα λέμε «η συνάρτηση $s=\frac{1}{2}gt^2$», δηλαδή γράφουμε s υπονοώντας το s(t). Αυτή η απλοποίηση γίνεται συχνότατα σε διάφορες επιστήμες, που χρησιμοποιούν τη μαθηματική γλώσσα και τα μαθηματικά εργαλεία, όπως η φυσική, η χημεία κτλ. Συνήθως στις περιπτώσεις αυτές υπάρχει κάποιο πείραμα, όπου το t είναι η τιμή ενός μεγέθους, που υπεισέρχεται στο πείραμα, και το s(t) η αντίστοιχη τιμή κάποιου άλλου μεγέθους.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{1}{x-2}+\sqrt{x-1}.$$

ΛΥΣΗ

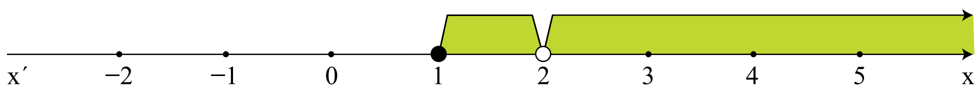
Η συνάρτηση f ορίζεται για εκείνα μόνο τα x για τα οποία ισχύει

$$x-2\neq 0 \quad \text{και} \quad x-1\geq 0$$

ή, ισοδύναμα, για

$$x\neq 2 \quad \text{και} \quad x\geq 1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A=[1,2)\cup(2,+\infty)$ (Σχήμα)



ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x)=\frac{4}{x-1}+5$ **ii)** $f(x)=\frac{x^2-16}{x^2-4x}$

iii) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ **iv)** $f(x)=\frac{1}{|x|+x}$.

2. Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}$ **ii)** $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

iii) $f(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$ **iv)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$.

3. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{αν } x<0 \\ 2x+3, & \text{αν } x\geq 0 \end{cases}.$$

Να βρείτε τις τιμές $f(-5), f(0)$ και $f(6)$.

4. Μια συνάρτηση f ορίζεται ως εξής:

"Σκέψου έναν φυσικό αριθμό, πρόσθεσε σ' αυτόν το 1, πολλαπλασίασε το άθροισμα με 4 και στο γινόμενο πρόσθεσε το τετράγωνο του αριθμού".

i) Να βρείτε τον τύπο της f και στη συνέχεια τις τιμές της για $x = 0$, $x =1$, $x = 2$ και $x = 3$. Τι παρατηρείτε;

ii) Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει

$$f(x) = 36,\ f(x) = 49,\ f(x) = 100 \text{ και } f(x) = 144.$$

5. Δίνονται οι συναρτήσεις:

i) $f(x)=\dfrac{4}{x-1}+5$ **ii)** $g(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-4x}$ και **iii)** $h(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

i) $f(x)=7$ **ii)** $g(x)=2$ και **iii)** $h(x)=\dfrac{1}{5}$.

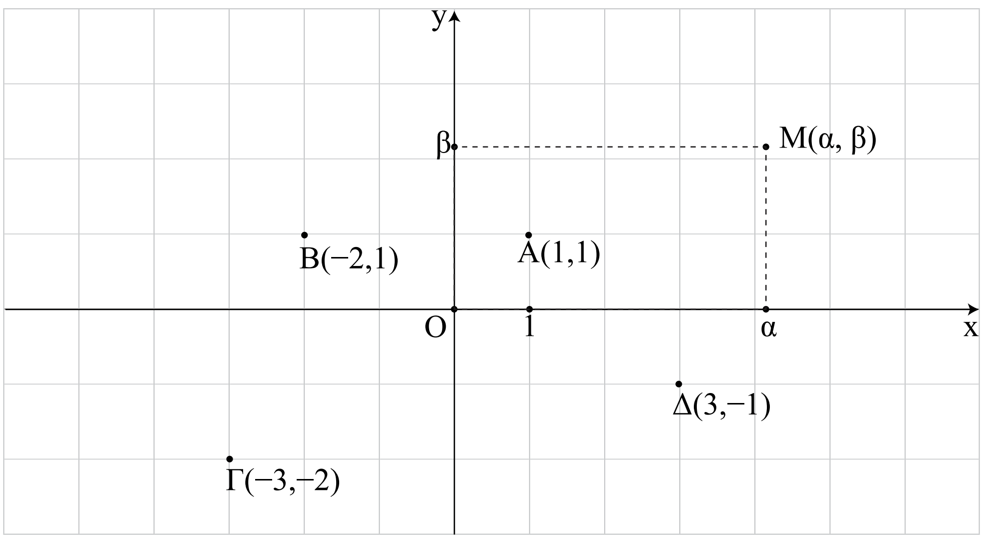
6.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Καρτεσιανές συντεταγμένες

Η παράσταση ενός σημείου του επιπέδου με ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών βοήθησε στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων με αλγεβρικές μεθόδους. Η παράσταση αυτή, όπως μάθαμε σε προηγούμενες τάξεις, γίνεται ως εξής:

Πάνω σε ένα επίπεδο σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ με κοινή αρχή ένα σημείο Ο. Από αυτούς ο οριζόντιος $x'x$ λέγεται **άξονας των τετμημένων** ή **άξονας των x**, ενώ ο κατακόρυφος $y'y$ **άξονας των τεταγμένων** ή **άξονας των y**.

Όπως είναι γνωστό, σε κάθε σημείο Μ του επιπέδου των αξόνων μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα διατεταγμένο ζεύγος (α, β) πραγματικών αριθμών και αντιστρόφως, σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος (α, β) πραγματικών αριθμών, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα μοναδικό σημείο Μ του επιπέδου, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Οι αριθμοί **α, β** λέγονται **συντεταγμένες** του Μ. Ειδικότερα ο **α** λέγεται **τετμημένη** και ο **β τεταγμένη** του σημείου Μ. Το σημείο Μ που έχει συντεταγμένες **α** και **β** συμβολίζεται με **Μ(α, β)** ή, απλά, με **(α, β)**.

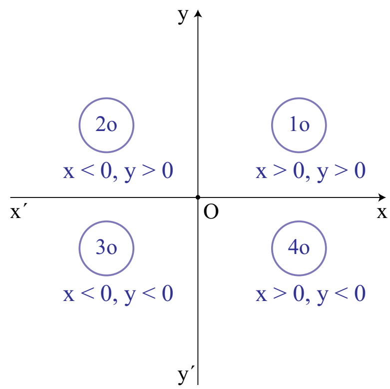
Επειδή η ιδέα της χρησιμοποίησης ζευγών για την παράσταση σημείων του επιπέδου ανήκει στον Καρτέσιο, το παραπάνω ζεύγος των αξόνων το λέμε **καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο** και το συμβολίζουμε Oxy, ενώ το επίπεδο στο οποίο ορίστηκε το σύστημα αυτό το λέμε **καρτεσιανό επίπεδο**. Αν επιπλέον οι μονάδες των αξόνων έχουν το ίδιο μήκος, το σύστημα Oxy λέγεται **ορθοκανονικό**.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

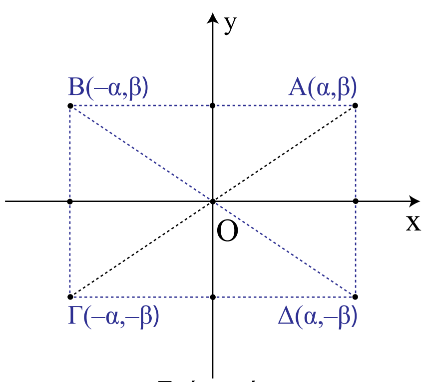
Στα επόμενα, εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά, όταν λέμε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, θα εννοούμε ορθοκανονικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σύστημα Oxy συντεταγμένων στο επίπεδο. Τότε:

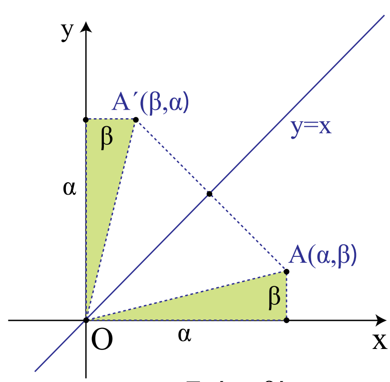
- Τα σημεία του άξονα $x'x$ και μόνο αυτά έχουν τεταγμένη ίση με το μηδέν, ενώ τα σημεία του άξονα $y'y$ και μόνο αυτά έχουν τετμημένη ίση με το μηδέν.
- Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα τεταρτημόρια, που είναι τα εσωτερικά των γωνιών $x\hat{O}y$, $y\hat{O}x'$, $x'\hat{O}y'$ και $y'\hat{O}x$ και ονομάζεται 1ο, 2ο, 3ο και 4ο, τεταρτημόριο, αντιστοίχως. Τα πρόσημα των συντεταγμένων των σημείων τους φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



- Αν $A(\alpha,\beta)$ είναι ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου, με τη βοήθεια της συμμετρίας ως προς άξονα και ως προς κέντρο, διαπιστώνουμε ότι:
  ✓ Το συμμετρικό του ως προς τον άξονα $x'x$ είναι το σημείο $\Delta(\alpha,-\beta)$, που έχει ίδια τετμημένη και αντίθετη τεταγμένη (Σχ. α').
  ✓ Το συμμετρικό του ως προς τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $B(-\alpha,\beta)$, που έχει ίδια τεταγμένη και αντίθετη τετμημένη (Σχ. α').
  ✓ Το συμμετρικό του ως προς την αρχή των αξόνων είναι το σημείο $\Gamma(-\alpha,-\beta)$, που έχει αντίθετες συντεταγμένες (Σχ. α′).
  ✓ Το συμμετρικό του ως προς τη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων είναι το σημείο $A'(\beta,\alpha)$ που έχει τετμημένη την τεταγμένη του A και τεταγμένη την τετμημένη του A (Σχ. β').



Σχήμα α΄



Σχήμα β΄

Απόσταση σημείων

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δύο σημεία αυτού. Θα δείξουμε ότι η απόστασή τους δίνεται από τον τύπο:

$$(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

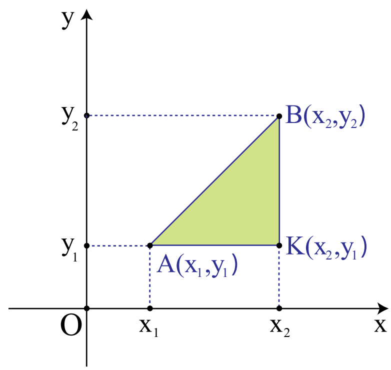
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $K\hat{A}B$ του διπλανού σχήματος έχουμε:

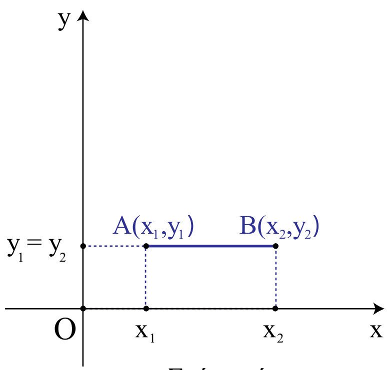
$$(AB)^2=(KA)^2+(KB)^2$$
$$=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2$$
$$=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

οπότε:

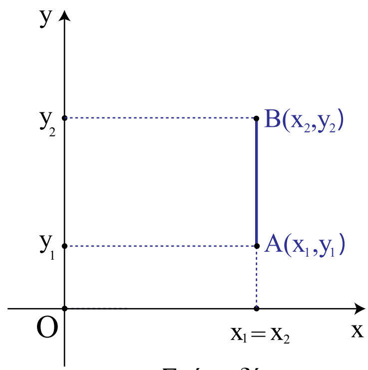
$$(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$



Ο παραπάνω τύπος ισχύει και στην περίπτωση που η AB είναι παράλληλη με τον άξονα x′x (Σχήμα γ′) ή παράλληλη με τον άξονα y′y (Σχήμα δ′).



Σχήμα γ΄



Σχήμα δ΄

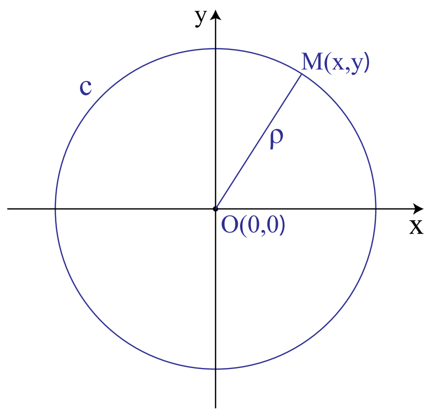
Για παράδειγμα, αν A(3,1), B(3,5) και Γ(−1,1) είναι οι κορυφές ενός τριγώνου $A\hat{B}\Gamma$, τότε θα είναι:

$$(AB)=\sqrt{(3-3)^2+(5-1)^2}=\sqrt{4^2}=4$$
$$(A\Gamma)=\sqrt{(-1-3)^2+(1-1)^2}=\sqrt{4^2}=4$$
$$(B\Gamma)=\sqrt{(-1-3)^2+(1-5)^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}.$$

Αφού, λοιπόν, είναι (ΑΒ) = (ΑΓ), το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ είναι ισοσκελές και επειδή επιπλέον ισχύει $(ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2 = 32 = (ΒΓ)^2$, το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ είναι και ορθογώνιο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω C ο κύκλος με κέντρο την αρχή Ο των αξόνων και ακτίνα ρ. Να αποδειχτεί ότι ένα σημείο Μ(x, y) ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν ισχύει $x^2 + y^2 = ρ^2$.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Είναι προφανές ότι ένα σημείο Μ(x,y) ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν ισχύει (ΟΜ) = ρ.

Όμως $(ΟΜ) = \sqrt{x^2 + y^2}$, οπότε έχουμε:

$$(ΟΜ) = ρ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = ρ \Leftrightarrow x^2 + y^2 = ρ^2$$

Επομένως το σημείο Μ (x,y) ανήκει στον κύκλο C (Ο,ρ), αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση

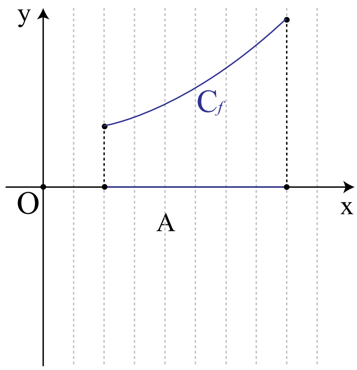
$$\mathbf{x^2 + y^2 = ρ^2} \qquad (1)$$

Η εξίσωση (1), που ικανοποιείται από τις συντεταγμένες των σημείων του κύκλου C (Ο, ρ) και μόνο από αυτές, λέγεται **εξίσωση του κύκλου με κέντρο Ο και ακτίνα ρ.**
Για παράδειγμα, η εξίσωση του κύκλου με κέντρο Ο και ακτίνα ρ = 1 είναι η $x^2 + y^2 = 1$.
Ο κύκλος αυτός λέγεται και **μοναδιαίος κύκλος**.

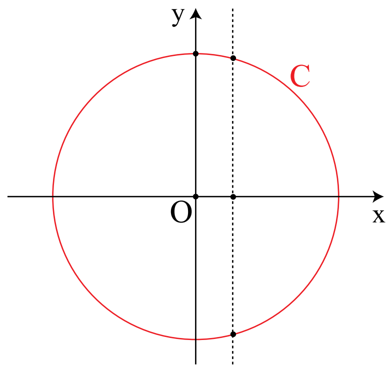
Γραφική παράσταση συνάρτησης

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α και Οxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων Μ(x, y) για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f. Η εξίσωση, λοιπόν, $y = f(x)$ επαληθεύεται από τα σημεία της C_f και μόνο από αυτά. Επομένως, η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f. Για το λόγο αυτό, τη γραφική παράσταση C_f της f τη συμβολίζουμε, πολλές φορές, απλά με την εξίσωσή της, δηλαδή με $y = f(x)$.

Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο (Σχ. α'). Έτσι, ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης (Σχ. β').

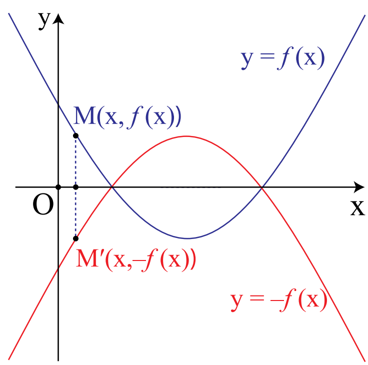


Σχήμα α΄



Σχήμα β΄

Όταν δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f μπορούμε, επίσης, να σχεδιάσουμε και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$, παίρνοντας τη συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα $x'x$ και τούτο διότι η γραφική παράσταση της $-f$ αποτελείται από τα σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των σημείων $M(x, f(x))$ της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα $x'x$.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g, που είναι ορισμένες σε όλο το $\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε τις τιμές της f στα σημεία:

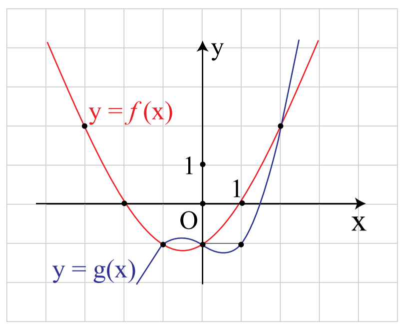
$$-3, -2, -1, 0, 1 \text{ και } 2$$

ii) Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$f(x) = 0,\ f(x) = 2 \text{ και } f(x) = g(x)$$

iii) Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$f(x) > 0 \text{ και } f(x) > g(x).$$



ΛΥΣΗ

i) Είναι:

$$f(-3)=2,\ f(-2)=0,\ f(-1)=-1,\ f(0)=-1,\ f(1)=0 \text{ και } f(2)=2.$$

ii) Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f και του άξονα $x'x$, δηλαδή οι αριθμοί $x_1=-2$ και $x_2=1$.

Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=2$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που έχουν τεταγμένη 2, δηλαδή οι αριθμοί $x_1=-3$ και $x_2=2$.

Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g, δηλαδή οι αριθμοί $x_1=-1$, $x_2=0$ και $x_3=2$.

iii) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)>0$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$, δηλαδή όλα τα $x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$.

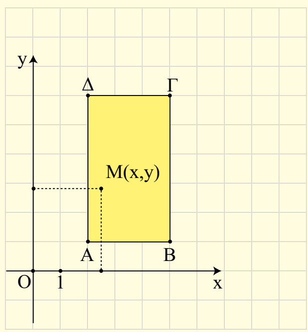
Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)>g(x)$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τη γραφική παράσταση της g, δηλαδή όλα τα $x\in(-\infty,-1)\cup(0,2)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να σημειώσετε σε ένα καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία:

$$A(-1,2),\ B(3,4),\ O(0,0),\ \Gamma(3,0),\ \Delta(0,-5) \text{ και } E(-2,-3).$$

2. Ένα σημείο $M(x,y)$ κινείται μέσα στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος. Ποιοι περιορισμοί ισχύουν για τα x, y;



3. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $A(-1,3)$,

i) ως προς τον άξονα $x'x$

ii) ως προς τον άξονα $y'y$

iii) ως προς τη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$

iv) ως προς την αρχή O των αξόνων.

4. Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων:

i) $O(0,0)$ και $A(4,-2)$

ii) $A(-1,1)$ και $B(3,4)$

iii) $A(-3,-1)$ και $B(1,-1)$

iv) $A(1,-1)$ και $B(1,4)$.

5. Να αποδείξετε ότι:

i) Τα σημεία Α(1,2), Β(4,−2) και Γ(−3,5) είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.

ii) Τα σημεία Α(1,−1), Β(−1,1) και Γ(4,2) είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου.

6. Να σχεδιάσετε το πολύγωνο με κορυφές τα σημεία:

$$A(2,5),\ B(5,1),\ \Gamma(2,-3),\ \Delta(-1,1)$$

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι αυτό είναι ρόμβος.

7. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε την τιμή του k για την οποία το σημείο Μ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

i) $f(x) = x^2 + k$, Μ(2,6)

ii) $g(x) = kx^3$, Μ(−2,8)

iii) $h(x) = k\sqrt{x+1}$, Μ(3,8).

8. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες.

i) $f(x) = x - 4$

ii) $g(x) = (x-2)(x-3)$

iii) $h(x) = (x-1)^2$

iv) $q(x) = x^2 + x + 1$

v) $\varphi(x) = x\sqrt{x-1}$

vi) $\psi(x) = x\sqrt{x^2-4}$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1$. Να βρείτε:

i) Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

ii) Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$.

10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 5x + 4$ και $g(x) = 2x - 6$. Να βρείτε:

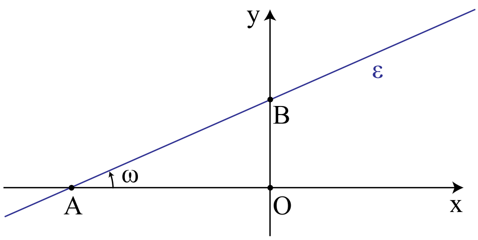
i) Τα κοινά σημεία των C_f και C_g.

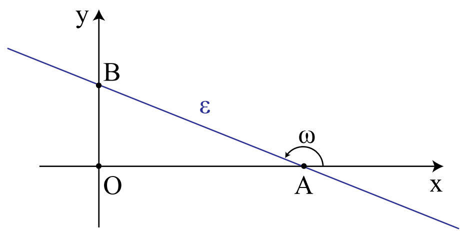
ii) Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g.

6.3 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = αx + β$

Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και ε μια ευθεία που τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο Α.





Τη γωνία ω που διαγράφει η ημιευθεία Αx, όταν στραφεί γύρω από το Α κατά τη *θετική φορά*[1] μέχρι να πέσει πάνω στην ευθεία ε, τη λέμε ***γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα x′x***. Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη προς τον άξονα x′x ή συμπίπτει με αυτόν, τότε λέμε ότι η ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα x′x γωνία $ω = 0°$. Σε κάθε περίπτωση για τη γωνία ω ισχύει

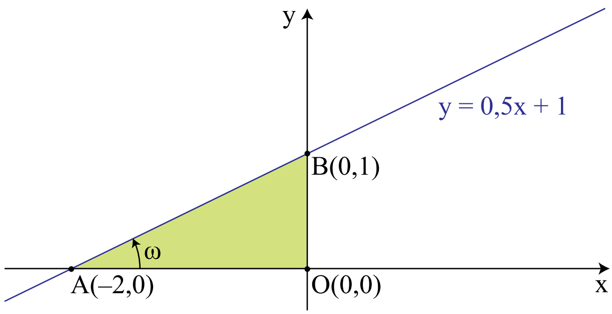
$$0° \leq ω < 180°.$$

Ως **συντελεστή διεύθυνσης** ή ως **κλίση** μιας ευθείας ε ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα x′x. Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας ε συμβολίζεται συνήθως με $λ_ε$ ή απλά με λ. Είναι φανερό ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε είναι θετικός, αν η γωνία ω είναι οξεία, αρνητικός, αν η γωνία ω είναι αμβλεία και μηδέν, αν η γωνία ω είναι μηδέν. Στην περίπτωση που η γωνία ω είναι ίση με 90°, δηλαδή όταν η ευθεία ε είναι κάθετη στον άξονα x′x, δεν ορίζουμε συντελεστή διεύθυνσης για την ε.

[1] Ως θετική φορά περιστροφής εννοούμε τη φορά κατά την οποία πρέπει να περιστραφεί ο ημιάξονας Ox για να συμπέσει με τον ημιάξονα Oy, αφού προηγουμένως διαγράψει γωνία 90°.

Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = 0{,}5x + 1$. Όπως πρακτικά διαπιστώσαμε στο Γυμνάσιο, η γραφική παράσταση της f είναι ευθεία γραμμή με εξίσωση $y = 0{,}5x+1$ (Σχήμα).



Η ευθεία αυτή:

✓ Τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(-2,0)$, αφού για $y = 0$ βρίσκουμε $x = -2$, και τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0,1)$, αφού για $x = 0$ βρίσκουμε $y = 1$ και

✓ Έχει κλίση:

$$\lambda = \varepsilon\varphi\omega = \frac{(OB)}{(OA)} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

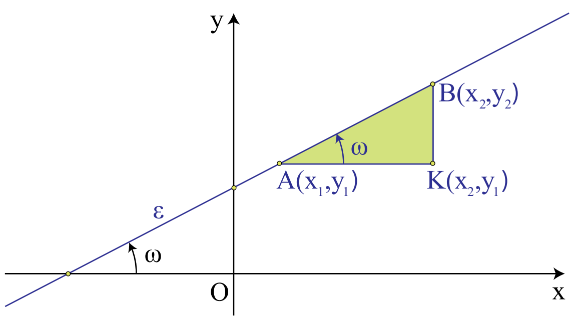
Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι η κλίση λ της ευθείας $y = 0{,}5x+1$ είναι ίση με το συντελεστή του x.

Γενικά, όπως θα αποδείξουμε στη Β′ Λυκείου, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$ είναι μία ευθεία, με εξίσωση $y = \alpha x + \beta$, η οποία τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $B(0,\beta)$ και έχει κλίση $\lambda = \alpha$. Είναι φανερό ότι:

- αν $\alpha > 0$, τότε $0° < \omega < 90°$
- αν $\alpha < 0$, τότε $90° < \omega < 180°$
- αν $\alpha = 0$, τότε $\omega = 0°$.

Στην περίπτωση που είναι $\alpha = 0$, η συνάρτηση παίρνει τη μορφή $f(x) = \beta$ και λέγεται **σταθερή συνάρτηση**, διότι η τιμή της είναι η ίδια για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο τυχαία σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ της ευθείας $y = \alpha x + \beta$.



Τότε θα ισχύει:

$$y_1 = αx_1 + β \quad \text{και} \quad y_2 = αx_2 + β,$$

οπότε θα έχουμε:

$$y_2 - y_1 = (αx_2 + β) - (αx_1 + β) = α(x_2 - x_1).$$

Επομένως θα είναι:

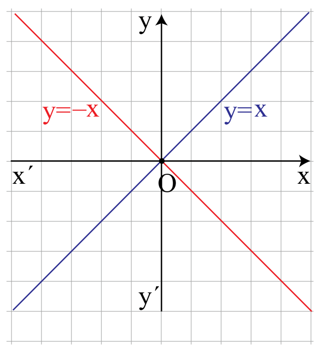
$$\boxed{α = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Για παράδειγμα, η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α(−1,3) και Β(3,6) έχει κλίση $α = \frac{6-3}{3-(-1)} = 0,75$. Επομένως, η ευθεία αυτή σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ω με $εφω = 0,75$, οπότε θα είναι $ω \simeq 36,87°$.

Η συνάρτηση $f(x) = αx$

Αν $β = 0$, τότε η f παίρνει τη μορφή $f(x) = αx$, οπότε η γραφική της παράσταση είναι η ευθεία $y = αx$ και περνάει από την αρχή των αξόνων. Ειδικότερα:

✓ Για $α = 1$ έχουμε την ευθεία $y = x$. Για τη γωνία ω, που σχηματίζει η ευθεία αυτή με τον άξονα $x'x$, ισχύει $εφω = α = 1$, δηλαδή $ω = 45°$. Επομένως η ευθεία $y = x$ είναι η διχοτόμος των γωνιών $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ των αξόνων.



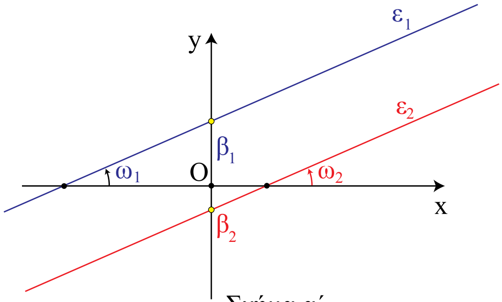
✓ Για $α = -1$ έχουμε την ευθεία $y = -x$. Για τη γωνία ω, που σχηματίζει η ευθεία αυτή με τον άξονα $x'x$, ισχύει $εφω = α = -1$, δηλαδή $ω = 135°$.
Επομένως η ευθεία $y = -x$ είναι η διχοτόμος των γωνιών $y\hat{O}x'$ και $y'\hat{O}x$ των αξόνων.

Σχετικές θέσεις δύο ευθειών

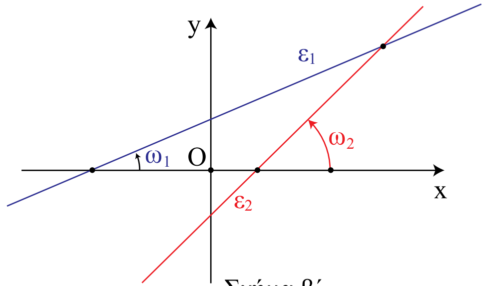
Ας θεωρήσουμε δύο ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ με εξισώσεις $y = α_1x + β_1$ και $y = α_2x + β_2$ αντιστοίχως και ας υποθέσουμε ότι οι ευθείες αυτές σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνίες $ω_1$ και $ω_2$ αντιστοίχως.

• Αν $α_1 = α_2$, τότε $εφω_1 = εφω_2$, οπότε $ω_1 = ω_2$ και άρα οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες ή συμπίπτουν. Ειδικότερα:
  ✓ Αν $α_1 = α_2$ και $β_1 \neq β_2$, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες (Σχ. α′), ενώ
  ✓ Αν $α_1 = α_2$ και $β_1 = β_2$, τότε οι ευθείες ταυτίζονται.

• Αν $\alpha_1 \neq \alpha_2$, τότε εφ$\omega_1 \neq$ εφω_2, οπότε $\omega_1 \neq \omega_2$ και άρα οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται. (Σχ. β′)



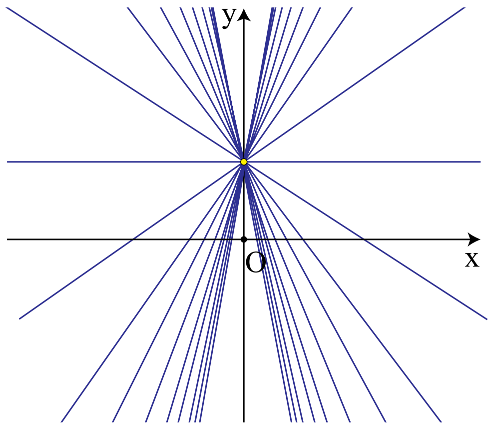
Σχήμα α΄



Σχήμα β΄

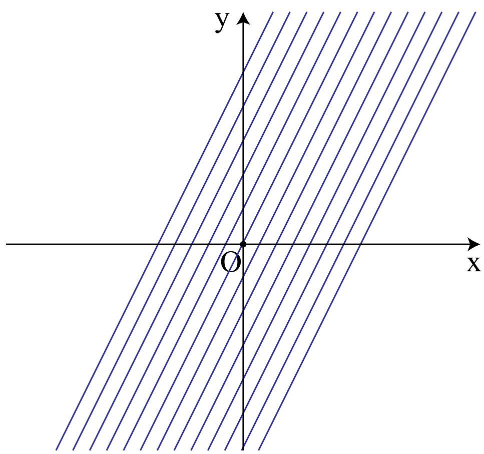
Σύμφωνα με τα παραπάνω συμπεράσματα:

• Οι ευθείες της μορφής $y = \alpha x + 1$, με $\alpha \in \mathbb{R}$, όπως είναι για παράδειγμα οι ευθείες: $y = x + 1$, $y = -x + 1$, $y = 2x + 1$ κτλ., διέρχονται όλες από το ίδιο σημείο, το σημείο 1 του άξονα $y'y$.



Γενικά, οι ευθείες της μορφής $y = \alpha x + \beta$, όπου β σταθερό και α μεταβλητό διέρχονται όλες από το σημείο β του άξονα $y'y$.

• Οι ευθείες της μορφής $y = 2x + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, όπως είναι για παράδειγμα οι ευθείες: $y = 2x$, $y = 2x - 1$, $y = 2x + 3$ κτλ., είναι παράλληλες μεταξύ τους, αφού έχουν όλες κλίση $\alpha = 2$.



Γενικά, οι ευθείες της μορφής $y = \alpha x + \beta$, όπου α σταθερό και β μεταβλητό, είναι όλες παράλληλες μεταξύ τους.

Η συνάρτηση $f(x) = |x|$

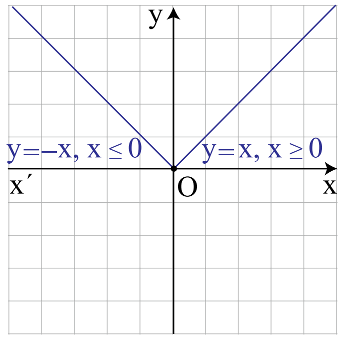
Σύμφωνα με τον ορισμό της απόλυτης τιμής έχουμε:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & αν\ x < 0 \\ x, & αν\ x \geq 0 \end{cases}$$

Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x|$ αποτελείται από τις δύο ημιευθείες:

✓ $y = -x$, με $x \leq 0$ και

✓ $y = x$, με $x \geq 0$ που διχοτομούν τις γωνίες $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y$ αντιστοίχως.



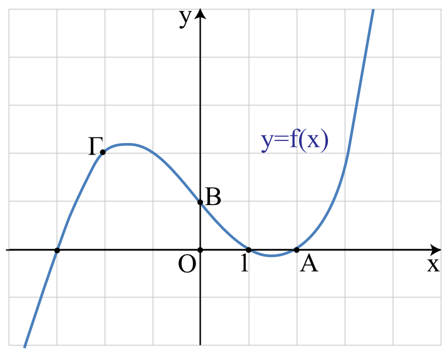
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης *f* που είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β και στη συνέχεια να δείξετε ότι η ευθεία αυτή διέρχεται και από το σημείο Γ.

ii) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση

$$f(x) > -0{,}5x + 1 .$$



ΛΥΣΗ

i) Η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση της μορφής $y = αx + β$ και επειδή διέρχεται από τα σημεία Α(2,0) και Β(0,1) θα ισχύει:

$$0 = α \cdot 2 + β \quad \text{και} \quad 1 = α \cdot 0 + β,$$

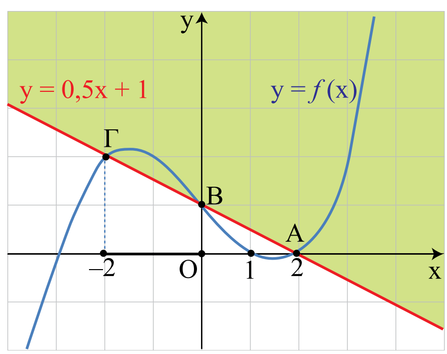
οπότε θα έχουμε:

$$α = -0{,}5 \text{ και } β = 1.$$

Άρα η εξίσωση της ΑΒ είναι:

$$y = -0{,}5 \cdot x + 1.$$

Για να δείξουμε τώρα ότι το σημείο Γ



ανήκει στην ευθεία ΑΒ, αρκεί να δείξουμε ότι το ζεύγος $(-2,2)$ των συντεταγμένων του επαληθεύει την εξίσωση αυτής, δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι $2 = -0{,}5 \cdot (-2) + 1$, που ισχύει.

ii) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > -0{,}5 \cdot x + 1$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από την ευθεία με εξίσωση $y = -0{,}5 \cdot x + 1$, δηλαδή πάνω από την ευθεία ΑΒ. Επομένως, η ανίσωση αυτή αληθεύει για $x \in (-2,0) \cup (2, +\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η ευθεία:

i) $y = x + 2$ **ii)** $y = \sqrt{3}x - 1$

iii) $y = -x + 1$ **iv)** $y = -\sqrt{3}x + 2$.

2. Να βρείτε την κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:

i) $A(1,2)$ και $B(2,3)$ **ii)** $A(1,2)$ και $B(2,1)$

iii) $A(2,1)$ και $B(-1,1)$ **iv)** $A(1,3)$ και $B(2,1)$.

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία:

i) Έχει κλίση $\alpha = -1$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0,2)$.

ii) Σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 45°$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0,1)$.

iii) Είναι παράλληλη με την ευθεία $y = 2x - 3$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$.

4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:

i) $A(1,2)$ και $B(2,3)$ **ii)** $A(1,2)$ και $B(2,1)$

iii) $A(2,1)$ και $B(-1,1)$ **iv)** $A(1,3)$ και $B(2,1)$.

5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας C σε βαθμούς Celsius και της θερμοκρασίας F σε βαθμούς Fahrenheit είναι η

$$C = \frac{5}{9}(F - 32).$$

Γνωρίζουμε ότι το νερό παγώνει σε 0°C ή 32°F και βράζει σε 100°C ή 212°F. Υπάρχει θερμοκρασία που να εκφράζεται και στις δύο κλίμακες με τον ίδιο αριθμό;

6. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -x+2, & \text{αν } x < 0 \\ 2, & \text{αν } 0 \le x < 1 \\ x+1, & \text{αν } 1 \le x \end{cases}$$

7. Στο διπλανό σχήμα δίνονται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$ και η ευθεία $y = x$.

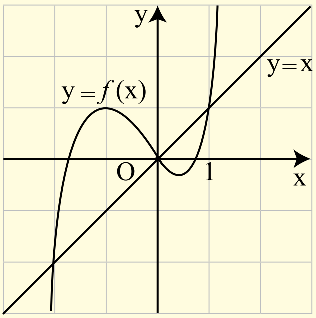
Να λύσετε γραφικά:

i) Τις εξισώσεις:

$f(x) = 1$ και $f(x) = x$.

ii) Τις ανισώσεις:

$f(x) < 1$ και $f(x) \ge x$.



8. i) Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = |x| \text{ και } g(x) = 1$$

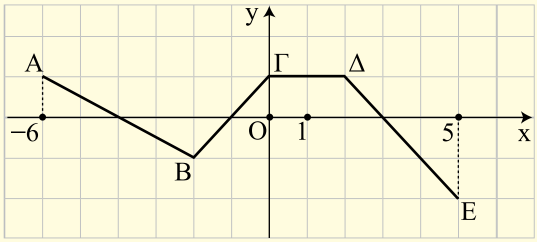
και με τη βοήθεια αυτών να λύσετε τις ανισώσεις:

$$|x| \le 1 \text{ και } |x| > 1.$$

ii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Η πολυγωνική γραμμή ΑΒΓΔΕ του παρακάτω σχήματος είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη στο διάστημα $[-6,5]$.



i) Να βρείτε την τιμή της συνάρτησης f σε κάθε ακέραιο $x\in[-6,5]$.

ii) Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$f(x)=0,\ f(x)=-1 \ \text{ και } \ f(x)=1$$

iii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΔ και στη συνέχεια να λύσετε γραφικά την ανίσωση

$$f(x)\leq 0{,}5\cdot x.$$

2. Μια φωτεινή ακτίνα κινείται κατά μήκος της ευθείας $y=1-x$ και ανακλάται στον άξονα $x'x$. Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας κατά μήκος της οποίας κινείται η ανακλώμενη ακτίνα.

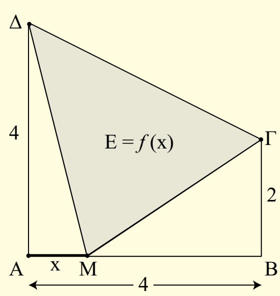
3. Σε μια δεξαμενή υπάρχουν 600 λίτρα βενζίνης. Ένα βυτιοφόρο που περιέχει 2000 λίτρα βενζίνης αρχίζει να γεμίζει τη δεξαμενή. Αν η παροχή του βυτιοφόρου είναι 100 λίτρα το λεπτό και η δεξαμενή χωράει όλη τη βενζίνη του βυτιοφόρου:

i) Να βρείτε τις συναρτήσεις που εκφράζουν, συναρτήσει του χρόνου t, την ποσότητα της βενζίνης:

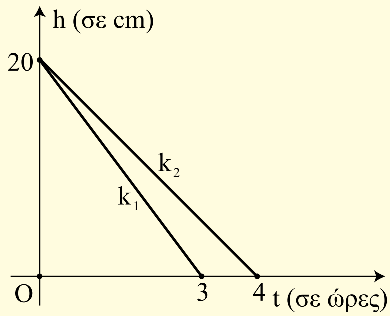
α) στο βυτιοφόρο και **β)** στη δεξαμενή.

ii) Να παραστήσετε γραφικά τις παραπάνω συναρτήσεις και να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το βυτιοφόρο και η δεξαμενή έχουν την ίδια ποσότητα βενζίνης.

4. Στο διπλανό σχήμα το σημείο Μ διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ από το Α προς το Β. Συμβολίζουμε με x το μήκος της διαδρομής ΑΜ του σημείου Μ και με $f(x)$ το εμβαδό του τριγώνου $\overset{\triangle}{\text{ΜΓΔ}}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης $E=f(x)$ και στη συνέχεια να την παραστήσετε γραφικά.



5. Δύο κεριά K_1 και K_2, ύψους 20cm το καθένα, άρχισαν να καίγονται την ίδια χρονική στιγμή και το πρώτο κερί κάηκε σε 3 ώρες, ενώ το δεύτερο κάηκε σε 4 ώρες. Τα ύψη των κεριών K_1 και K_2, συναρτήσει του χρόνου t, κατά το χρονικό διάστημα που καθένα από αυτά καιγόταν, παριστάνονται με τα ευθύγραμμα τμήματα k_1 και k_2 του παρακάτω σχήματος.



i) Να βρείτε τις συναρτήσεις $h = h_1(t)$ και $h = h_2(t)$ που εκφράζουν, συναρτήσει του χρόνου t, τα ύψη των κεριών K_1 και K_2 αντιστοίχως.

ii) Να βρείτε πότε το κερί K_2 είχε διπλάσιο ύψος από το κερί K_1.

iii) Να λύσετε το ίδιο πρόβλημα και στη γενική περίπτωση που το αρχικό ύψος των κεριών ήταν ίσο με υ. Τι παρατηρείτε;

6.4 ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ - ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Κατακόρυφη μετατόπιση καμπύλης

α) Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(\mathrm{x}) = |\mathrm{x}| + 1$. Επειδή

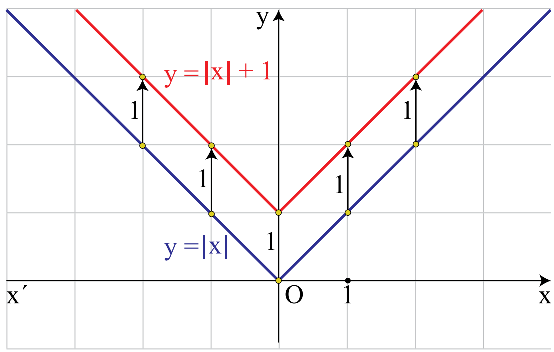
$$f(\mathrm{x}) = \begin{cases} -\mathrm{x}+1, & \text{αν} \quad \mathrm{x} < 0 \\ \mathrm{x}+1, & \text{αν} \quad \mathrm{x} \geq 0 \end{cases},$$

η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\mathrm{x}) = |\mathrm{x}| + 1$, θα αποτελείται από τις ημιευθείες

✓ $\mathrm{y} = -\mathrm{x} + 1$, με $\mathrm{x} \leq 0$ και

✓ $\mathrm{y} = \mathrm{x} + 1$, με $\mathrm{x} \geq 0$,

που έχουν αρχή το σημείο 1 του άξονα y′y και είναι παράλληλες με τις διχοτόμους των γωνιών x'Ôy και xÔy από τις οποίες, όπως είναι γνωστό, αποτελείται η γραφική παράσταση της $\varphi(\mathrm{x}) = |\mathrm{x}|$ (Σχήμα).



Επομένως, αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της $\varphi(\mathrm{x}) = |\mathrm{x}|$ κατακόρυφα[1] και προς τα πάνω κατά 1 μονάδα, τότε αυτή θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της $f(\mathrm{x}) = |\mathrm{x}| + 1$. Αυτό, άλλωστε, ήταν αναμενόμενο, αφού ισχύει:

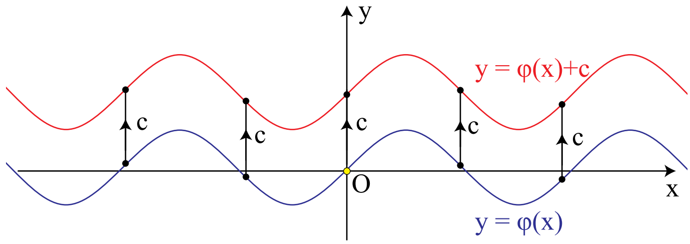
$$f(\mathrm{x}) = \varphi(\mathrm{x}) + 1, \text{ για κάθε } \mathrm{x} \in \mathbb{R},$$

που σημαίνει ότι για κάθε $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$ το $f(\mathrm{x})$ είναι κατά 1 μονάδα μεγαλύτερο του $\varphi(\mathrm{x})$.

Γενικά:

> Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με:
>
> $$f(\mathrm{x}) = \varphi(\mathrm{x}) + \mathrm{c}, \text{ όπου } \mathrm{c} > 0,$$
>
> προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα πάνω** (Σχήμα α').

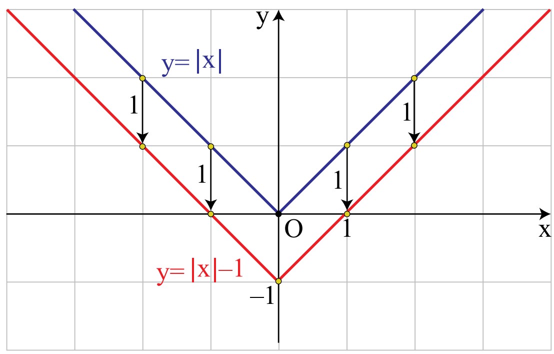
[1]Δηλαδή παράλληλα με τον άξονα y'y.



Σχήμα α΄

β) Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=|x|-1$. Επειδή

$$f(x)=\begin{cases}-x-1, & \text{αν } x<0\\ x-1, & \text{αν } x\geq 0\end{cases},$$



η γραφική παράσταση της $f(x)=|x|-1$, θα αποτελείται από τις ημιευθείες

- ✓ $y=-x-1$, με $x\leq 0$ και
- ✓ $y=x-1$, με $x\geq 0$,

που έχουν αρχή το σημείο -1 του άξονα $y'y$ και είναι παράλληλες με τις διχοτόμους των γωνιών $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y$ από τις οποίες αποτελείται η γραφική παράσταση της $\varphi(x)=|x|$ (Σχήμα).

Επομένως, αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)=|x|$ κατακόρυφα και προς τα κάτω κατά 1 μονάδα, τότε αυτή θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της $f(x)=|x|-1$. Αυτό, άλλωστε, ήταν αναμενόμενο, αφού ισχύει:

$$f(x)=\varphi(x)-1, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

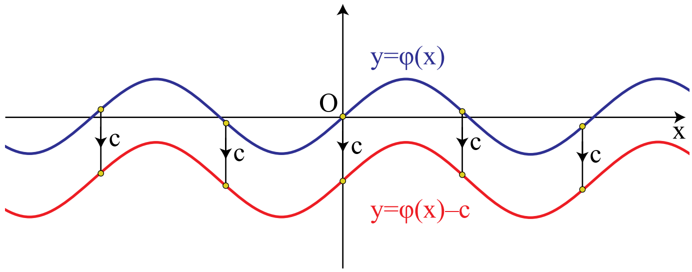
που σημαίνει ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ το $f(x)$ είναι κατά 1 μονάδα μικρότερο του $\varphi(x)$.

Γενικά:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με:

$$f(x)=\varphi(x)-c, \text{ όπου } c>0,$$

προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα κάτω** (Σχήμα β′).



Σχήμα β΄

Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

α) Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=|x-1|$. Επειδή

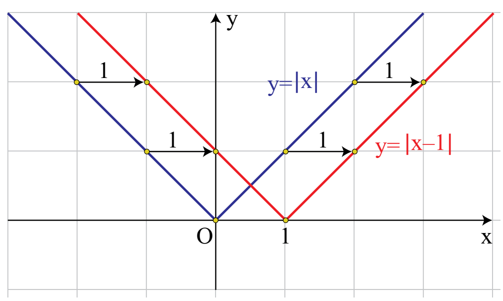
$$f(x)=\begin{cases}-x+1, & \text{αν} \quad x<1 \\ x-1, & \text{αν} \quad x\geq 1\end{cases},$$

η γραφική παράσταση της $f(x)=|x-1|$, θα αποτελείται από τις ημιευθείες

✓ $y=-x+1$, με $x\leq 1$ και

✓ $y=x-1$, με $x\geq 1$,

που έχουν αρχή το σημείο 1 του άξονα x′x και είναι παράλληλες με τις διχοτόμους των γωνιών $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y$ από τις οποίες αποτελείται η γραφική παράσταση της $\varphi(x)=|x|$ (Σχήμα).



Επομένως, αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)=|x|$ οριζόντια[2] και προς τα δεξιά κατά 1 μονάδα, τότε αυτή θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της $f(x)=|x-1|$. Αυτό, άλλωστε, ήταν αναμενόμενο, αφού ισχύει

$$f(x)=\varphi(x-1), \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

που σημαίνει ότι η τιμή της $f(x)=|x-1|$ στη θέση x είναι ίδια με την τιμή της $\varphi(x)=|x|$ στη θέση $x-1$.

[2] Δηλαδή παράλληλα με τον άξονα x′x .

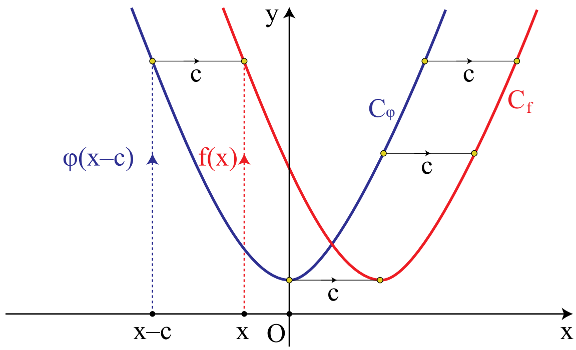
Γενικά:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με:

$$f(\mathrm{x}) = \varphi(\mathrm{x} - \mathrm{c}),\ \text{όπου } \mathrm{c} > 0,$$

προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα δεξιά** (Σχήμα γ′).

Πράγματι· επειδή $f(\mathrm{x}) = \varphi(\mathrm{x} - \mathrm{c})$, η τιμή της f στη θέση x είναι ίδια με την τιμή της φ στη θέση x – c, που βρίσκεται c μονάδες αριστερότερα της θέσης x. Άρα, η γραφική παράσταση της f θα βρίσκεται c μονάδες δεξιότερα της γραφικής παράστασης της φ (Σχήμα γ′).



Σχήμα γ΄

β) Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(\mathrm{x}) = |\mathrm{x}+1|$. Επειδή

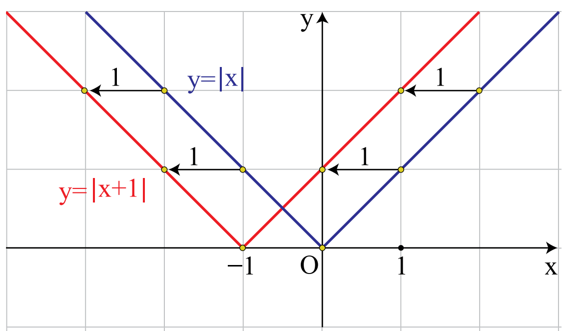
$$f(\mathrm{x}) = \begin{cases} -\mathrm{x} - 1, & \text{αν } \mathrm{x} < -1 \\ \mathrm{x} + 1, & \text{αν } \mathrm{x} \geq -1 \end{cases},$$

η γραφική παράσταση της $f(\mathrm{x}) = |\mathrm{x}+1|$, θα αποτελείται από τις ημιευθείες

✓ $\mathrm{y} = -\mathrm{x} - 1$, με $\mathrm{x} \leq -1$ και

✓ $\mathrm{y} = \mathrm{x} + 1$, με $\mathrm{x} \geq -1$,

που έχουν αρχή το σημείο –1 του άξονα x′x και είναι παράλληλες με τις διχοτόμους των γωνιών $\mathrm{x'}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{y}$ και $\mathrm{x}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{y}$ από τις οποίες αποτελείται η γραφική παράσταση της $\varphi(\mathrm{x}) = |\mathrm{x}|$ (Σχήμα).



Επομένως, αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της $\varphi(\mathrm{x}) = |\mathrm{x}|$ οριζόντια και προς τα αριστερά κατά 1 μονάδα, τότε αυτή θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της $f(\mathrm{x}) = |\mathrm{x}+1|$. Αυτό, άλλωστε, ήταν αναμενόμενο, αφού ισχύει

$$f(x) = \varphi(x+1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

που σημαίνει ότι η τιμή της $f(x) = |x+1|$ στη θέση x είναι ίδια με την τιμή της $\varphi(x) = |x|$ στη θέση x + 1.

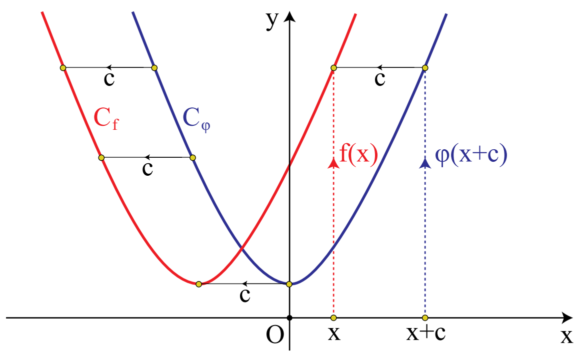
Γενικά:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με:

$$f(x) = \varphi(x+c), \text{ όπου } c > 0,$$

προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα αριστερά** (Σχήμα δ').

Πράγματι· επειδή $f(x) = \varphi(x+c)$, η τιμή της f στη θέση x είναι ίδια με την τιμή της φ στη θέση x + c, που βρίσκεται c μονάδες δεξιότερα της θέσης x. Άρα, η γραφική παράσταση της f θα βρίσκεται c μονάδες αριστερότερα της γραφικής παράστασης της φ (Σχήμα δ′).



Σχήμα δ΄

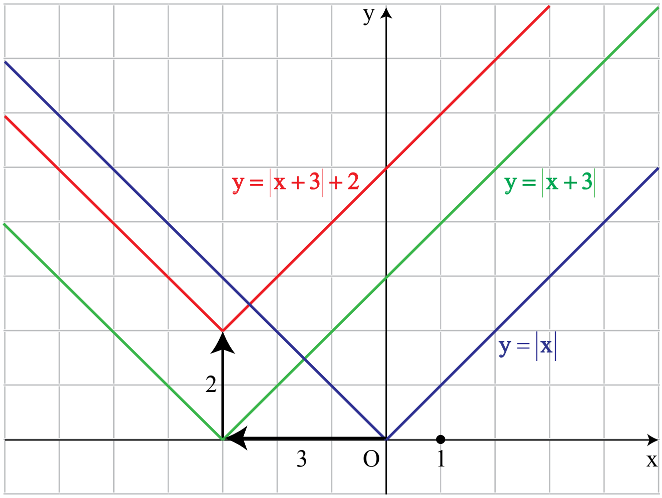
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x) = |x+3|+2$.

ΛΥΣΗ

Αρχικά χαράσσουμε την $y = |x+3|$, που όπως είδαμε προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y = |x|$ κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά. Στη συνέχεια χαράσσουμε την $y = |x+3| + 2$, που όπως είδαμε προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $y = |x+3|$ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.

Επομένως, η γραφική παράσταση της $f(x)=|x+3|+2$ προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της συνάρτησης $y=|x|$, μιας οριζόντιας κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω (Σχήμα).



ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Με ανάλογο τρόπο, δουλεύουμε για να παραστήσουμε γραφικά τις συναρτήσεις της μορφής:

$$f(x)=\varphi(x\pm c)\pm d, \quad \text{με } c,\, d>0$$

Δηλαδή, αξιοποιούμε τόσο την οριζόντια όσο και την κατακόρυφη μετατόπιση καμπύλης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:
$\varphi(x)=|x|$, $f(x)=|x|+2$ και $g(x)=|x|-2$.

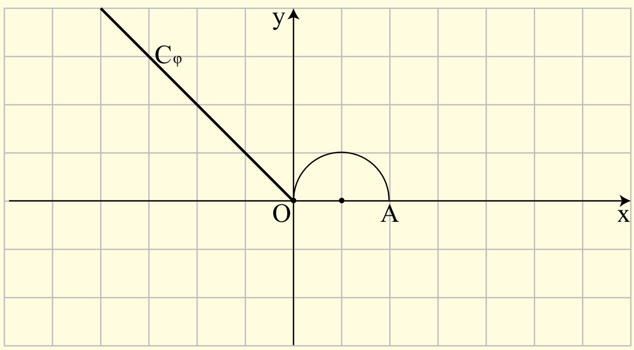
2. Ομοίως για τις συναρτήσεις:

$\varphi(x)=|x|$, $h(x)=|x+2|$ και $q(x)=|x-2|$.

3. Ομοίως για τις συναρτήσεις:

$\varphi(x)=|x|$, $F(x)=|x+2|+1$ και $G(x)=|x-2|-1$.

4. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης φ που αποτελείται από τη διχοτόμο της δεύτερης γωνίας των αξόνων και από το ημικύκλιο που ανήκει στο 1ο τεταρτημόριο και έχει διάμετρο που ορίζουν τα σημεία Ο(0,0) και Α(2,0).



Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=\varphi(x)+2$ και $g(x)=\varphi(x)-2$

ii) $h(x)=\varphi(x+3)$ και $q(x)=\varphi(x-3)$

iii) $F(x)=\varphi(x+3)+2$ και $G(x)=\varphi(x-3)-2$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=2x^2-1$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ:

i) κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.

ii) κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και κατά 2 μονάδες προς τα κάτω.

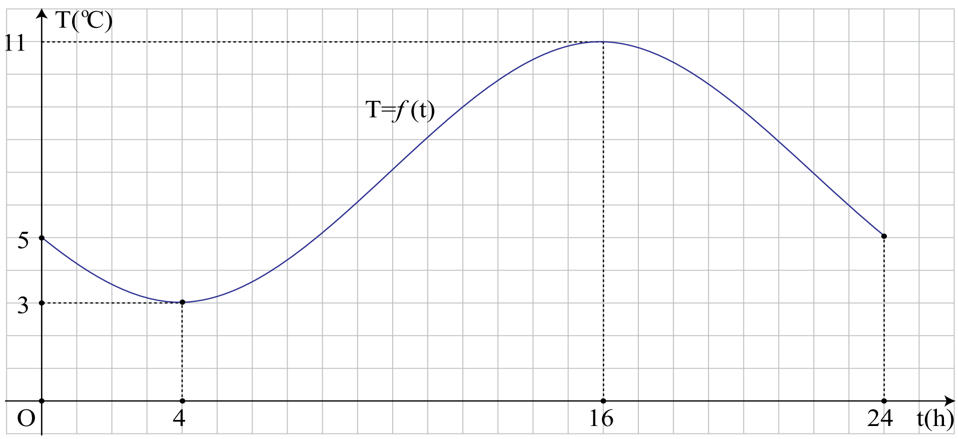
iii) κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.

iv) κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και κατά 2 μονάδες προς τα κάτω.

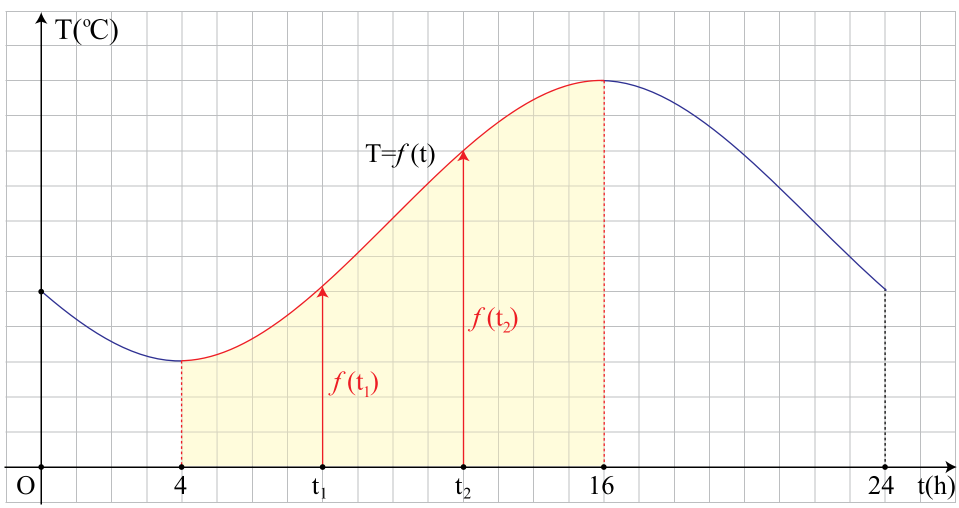
6.5 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ - ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μονοτονία συνάρτησης

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T = f(t)$ που εκφράζει τη θερμοκρασία T ενός τόπου συναρτήσει του χρόνου t κατά το χρονικό διάστημα από τα μεσάνυχτα μιας ημέρας ($t = 0$) μέχρι τα μεσάνυχτα της επόμενης μέρας ($t = 24$).



α) Παρατηρούμε ότι στο διάστημα [4,16] η γραφική παράσταση της θερμοκρασίας ανέρχεται.



Αυτό σημαίνει ότι στο διάστημα αυτό, με την πάροδο του χρόνου, η θερμοκρασία αυξάνεται, δηλαδή για οποιαδήποτε $t_1, t_2 \in [4,16]$ με $t_1 < t_2$ ισχύει:

$$f(t_1) < f(t_2)$$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση $T = f(t)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [4,16].
Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ γράφουμε $\boldsymbol{f \uparrow \Delta}$.

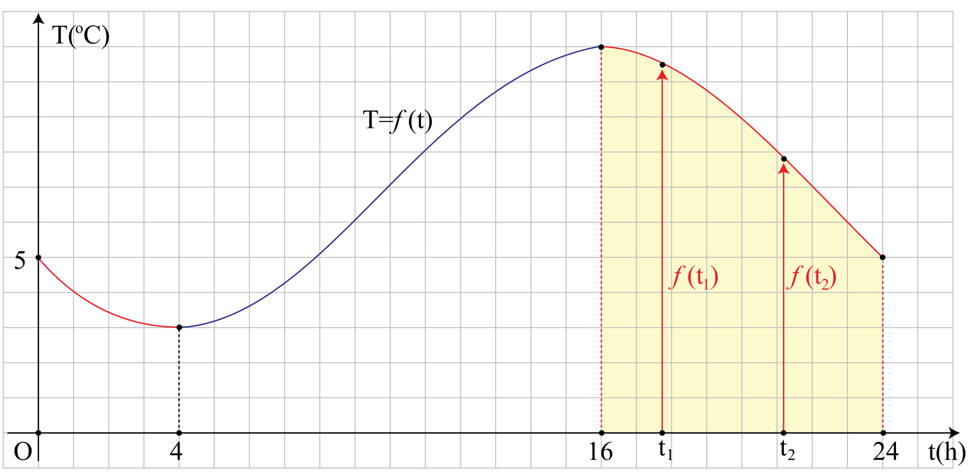
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 2x - 3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι· έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \\ &\Rightarrow 2x_1 - 3 < 2x_2 - 3 \\ &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

Γενικά:

Η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x) = \alpha x + \beta}$, με $\boldsymbol{\alpha > 0}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Στο ίδιο σχήμα, παρατηρούμε επιπλέον ότι στο διάστημα [16,24] η γραφική παράσταση της θερμοκρασίας κατέρχεται.



Αυτό σημαίνει ότι στο διάστημα αυτό, με την πάροδο του χρόνου, η θερμοκρασία μειώνεται, δηλαδή για οποιαδήποτε $t_1, t_2 \in [16, 24]$ με $t_1 < t_2$ ισχύει:

$$f(t_1) > f(t_2)$$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση $T = f(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [16,24].

Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ γράφουμε $\boldsymbol{f \downarrow \Delta}$.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = -2x + 5$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι· έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow -2x_1 > -2x_2 \\ &\Rightarrow -2x_1 + 5 > -2x_2 + 5 \\ &\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

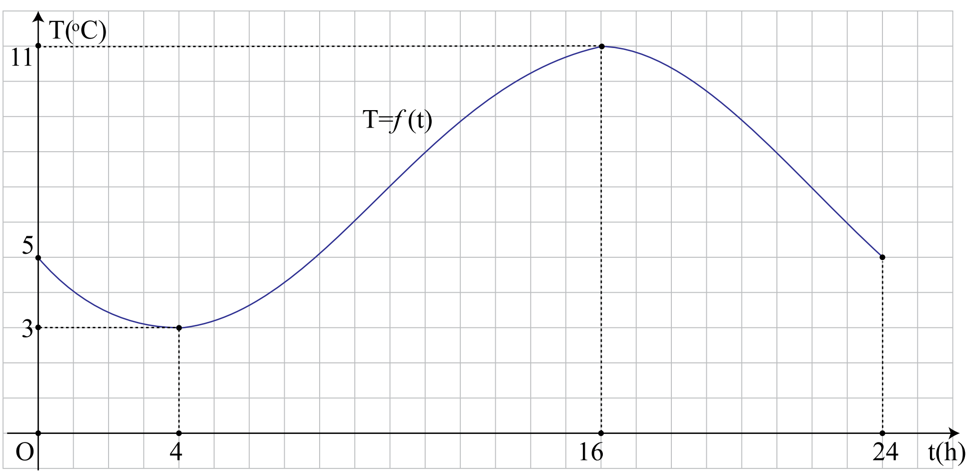
Γενικά:

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha < 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Μια συνάρτηση που είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ λέγεται **γνησίως μονότονη** στο Δ.

Ελάχιστο και μέγιστο συνάρτησης

Ας θεωρήσουμε και πάλι τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $T = f(t)$.



Παρατηρούμε ότι:

α) Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ η θερμοκρασία του τόπου παίρνει την ελάχιστη τιμή της, που είναι η $f(4) = 3$ βαθμοί Κελσίου. Δηλαδή ισχύει:

$$f(t) \geq f(4) = 3, \qquad \text{για κάθε } t \in [0,24]$$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση $T = f(t)$ παρουσιάζει στο $t = 4$ ελάχιστο, το $f(4) = 3$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο** όταν:

$$f(x) \geq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A$$

Το $x_0 \in A$ λέγεται **θέση ελαχίστου,** ενώ το $f(x_0)$ **ολικό ελάχιστο** ή απλώς **ελάχιστο** της συνάρτησης f και το συμβολίζουμε με **min *f*(x)**.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = 3x^4 + 1$. Επειδή

$$x^4 \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

θα είναι

$$3x^4 \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

οπότε θα έχουμε

$$3x^4 + 1 \geq 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως:

$$f(x) \geq f(0), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα, η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 1$.

β) Τη χρονική στιγμή $t_2 = 16$ η θερμοκρασία του τόπου παίρνει τη μέγιστη τιμή της, που είναι η $T(16) = 11$ βαθμοί Κελσίου. Δηλαδή ισχύει:

$$f(t) \leq f(16) = 11, \text{ για κάθε } t \in [0,24].$$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση $T = f(t)$ παρουσιάζει στο $t = 16$ μέγιστο, το $f(16) = 11$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο** όταν

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A$$

Το $x_0 \in A$ λέγεται **θέση μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **ολικό μέγιστο** ή απλώς **μέγιστο** της f και το συμβολίζουμε με $\max f(x)$.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = -3x^4 + 1$. Επειδή

$$x^4 \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

θα είναι

$$-3x^4 \leq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

οπότε θα έχουμε

$$-3x^4 + 1 \leq 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως:

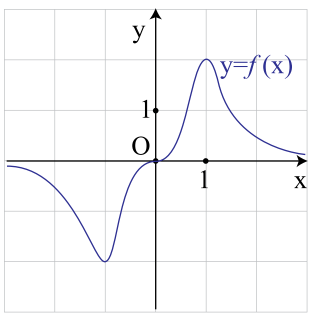
$$f(x) \leq f(0), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα, η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 1$.

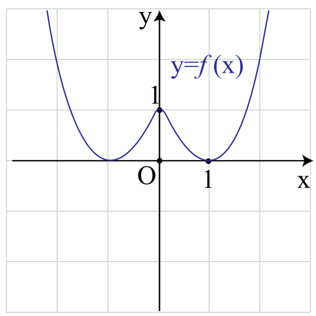
Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης λέγονται **ολικά ακρότατα** αυτής.

ΣΧΟΛΙΟ

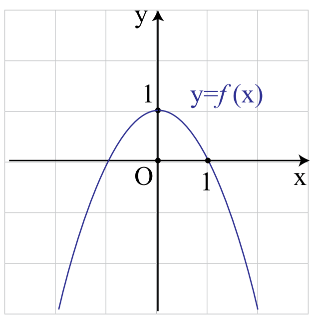
Μια συνάρτηση ενδέχεται να έχει και μέγιστο και ελάχιστο (Σχ. α) ή μόνο ελάχιστο (Σχ. β′) ή μόνο μέγιστο (Σχ. γ′) ή να μην έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο (Σχ. δ′).



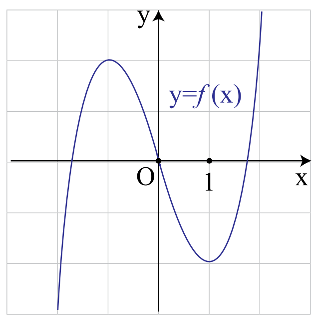
Σχήμα α΄



Σχήμα β΄



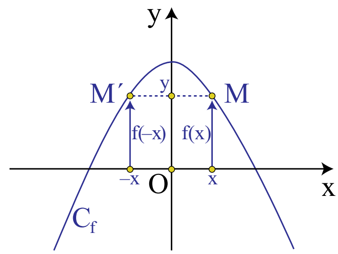
Σχήμα γ΄



Σχήμα δ΄

Άρτια συνάρτηση

α) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f που έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y′y, αφού το συμμετρικό κάθε σημείου της C_f ως προς τον άξονα y′y ανήκει στη C_f.



Επειδή, όμως, το συμμετρικό του τυχαίου σημείου Μ(x,y) της C_f ως προς τον άξονα y′y είναι το σημείο Μ′(−x,y) και επειδή τα σημεία Μ(x,y) και Μ′(−x,y) ανήκουν στη C_f, θα ισχύει $y = f(x)$ και $y = f(-x)$, οπότε θα έχουμε:

$$f(-x) = f(x)$$

Η συνάρτηση f με την παραπάνω ιδιότητα λέγεται **άρτια**. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, θα λέγεται **άρτια**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = f(x)$$

Η γραφική παράσταση μιας **άρτιας** συνάρτησης έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα y′y.

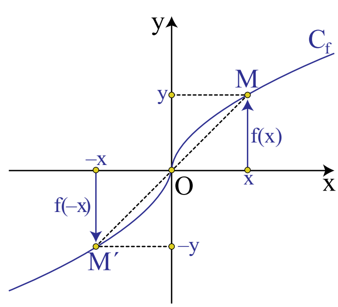
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 2x^4 - x^2 + 1$ είναι άρτια συνάρτηση, αφού έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(-x) = 2(-x)^4 - (-x)^2 + 1 = 2x^4 - x^2 + 1 = f(x)$$

Συνεπώς, η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y′y.

Περιττή συνάρτηση

β) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f που έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.
Παρατηρούμε ότι η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, αφού το συμμετρικό κάθε σημείου της C_f ως προς την αρχή των αξόνων ανήκει στη C_f.



Επειδή, όμως, το συμμετρικό του τυχαίου σημείου M(x,y) της C_f ως προς την αρχή των αξόνων είναι το σημείο $M'(-x, -y)$ και επειδή τα σημεία M(x,y) και $M'(-x, -y)$ ανήκουν στη C_f, θα ισχύει $y = f(x)$ και $-y = f(-x)$, οπότε θα έχουμε:

$$f(-x) = -f(x).$$

Η συνάρτηση f με την παραπάνω ιδιότητα λέγεται **περιττή**. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, θα λέγεται **περιττή**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = -f(x)$$

Η γραφική παράσταση μιας **περιττής** συνάρτησης έχει **κέντρο συμμετρίας** την αρχή των αξόνων.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - x$ είναι περιττή συνάρτηση, διότι έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(-x) = 2(-x)^3 - (-x) = -2x^3 + x = -f(x)$$

Συνεπώς, η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Ο όρος "άρτια" προέκυψε αρχικά από το γεγονός ότι οι συναρτήσεις $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$ κτλ., που έχουν άρτιο εκθέτη, έχουν άξονα συμμετρίας τον άξονα y′y, είναι δηλαδή άρτιες συναρτήσεις, ενώ ο όρος "περιττή" προέρχεται από το γεγονός ότι οι συναρτήσεις $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$ κτλ., που έχουν περιττό εκθέτη, έχουν κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, είναι δηλαδή περιττές συναρτήσεις.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

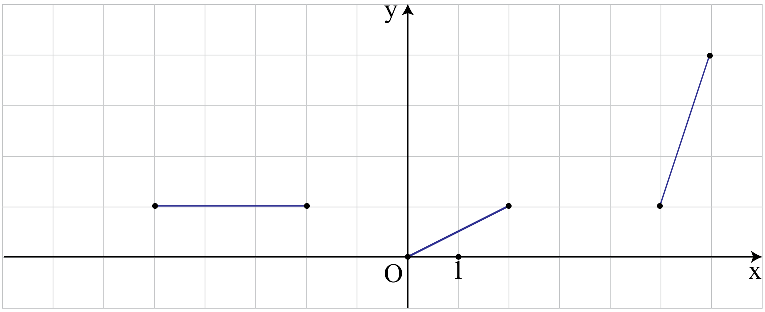
Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης f που έχει πεδίο ορισμού το διάστημα [–6,6].

Να χαραχθούν και τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής:

α) Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f:

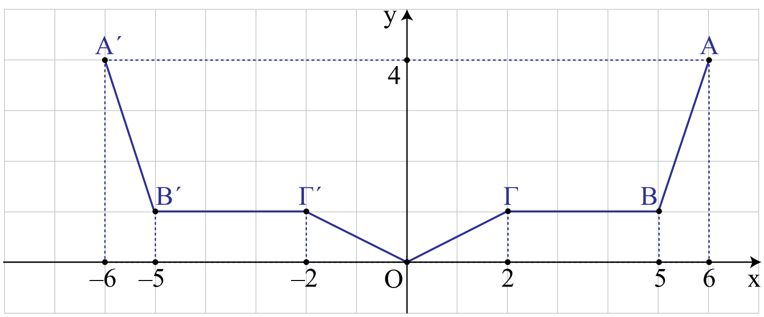
i) είναι γνησίως αύξουσα
ii) είναι γνησίως φθίνουσα
iii) είναι σταθερή.

β) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της *f*, καθώς επίσης οι θέσεις των ακροτάτων αυτών.



ΛΥΣΗ

Επειδή η συνάρτηση f είναι άρτια, η γραφική της παράσταση θα έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y′y. Επομένως, αν πάρουμε τα συμμετρικά ως προς τον άξονα y′y των δοθέντων τμημάτων της γραφικής παράστασης της f, θα έχουμε ολόκληρη τη γραφική παράσταση της f, που είναι η πολυγωνική γραμμή Α′Β′Γ′ΟΓΒΑ (Σχήμα).



Από την παραπάνω γραφική παράσταση προκύπτει ότι:

α) Η συνάρτηση f:

i) είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[0,2]$ και $[5,6]$.

ii) είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[-2,0]$ και $[-6,-5]$, τα οποία είναι συμμετρικά ως προς το Ο των διαστημάτων $[0,2]$ και $[5,6]$ αντιστοίχως στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα.

iii) είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $[-5,-2]$ και $[2,5]$ τα οποία είναι συμμετρικά μεταξύ τους ως προς το Ο.

β) Η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με 4 και παρουσιάζεται όταν το x πάρει τις τιμές −6 και 6. Δηλαδή ισχύει:

$$\max f(x) = f(-6) = f(6) = 4$$

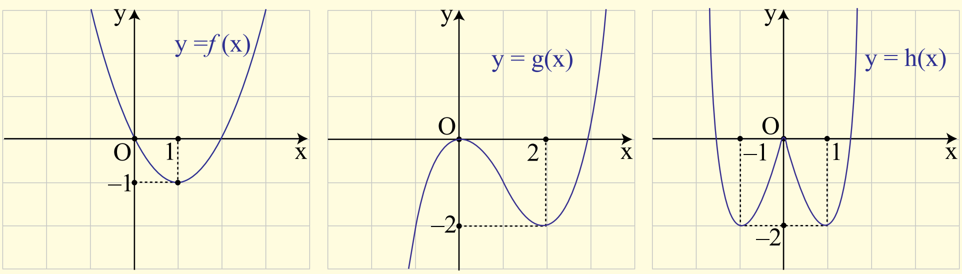
Η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με 0 και παρουσιάζεται όταν το x πάρει την τιμή 0. Δηλαδή ισχύει:

$$\min f(x) = f(0) = 0.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι:

α) γνησίως αύξουσα και **β)** γνησίως φθίνουσα.



2. Να προσδιορίσετε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων της προηγούμενης άσκησης, καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.

3. Να δείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 10$ παρουσιάζει ελάχιστο για x = 3.

ii) Η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ παρουσιάζει μέγιστο για x = 1.

4. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές:

i) $f_1(x) = 3x^2 + 5x^4$ **ii)** $f_2(x) = 3|x| + 1$ **iii)** $f_3(x) = |x+1|$

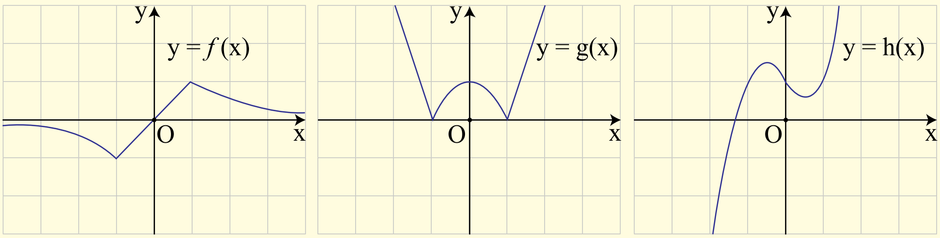
iv) $f_4(x) = x^3 - 3x^5$ **v)** $f_5(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$ **vi)** $f_6(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

5. Ομοίως για τις συναρτήσεις:

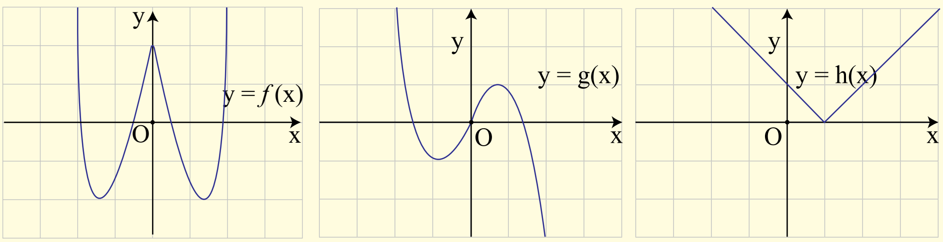
i) $f_1(x)=\dfrac{1}{|x|}$ **ii)** $f_2(x)=\sqrt{x-2}$ **iii)** $f_3(x)=|x-1|-|x+1|$

iv) $f_4(x)=\dfrac{x+\dfrac{1}{x}}{x^2+1}$ **v)** $f_5(x)=\sqrt{|x|}$ **vi)** $f_6(x)=\sqrt{1-x^2}$.

6. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω γραμμές είναι γραφικές παραστάσεις άρτιας και ποιες περιττής συνάρτησης.

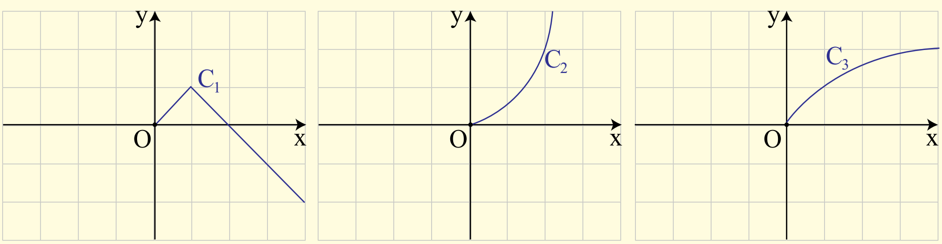


7. Ομοίως για τις παρακάτω γραμμές.



8. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω γραμμές ώστε να παριστάνουν γραφικές παραστάσεις

α) Άρτιας συνάρτησης και **β)** Περιττής συνάρτησης.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 6ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

I) Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

1. Υπάρχει συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(1,2) και Β(1,3). Α Ψ

2. Οι ευθείες $y = \alpha^2 x - 2$ και $y = -x + 1$ τέμνονται. Α Ψ

3. Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε η $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα. Α Ψ

4. Μία γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει το πολύ μία ρίζα. Α Ψ

5. Υπάρχει γνησίως μονότονη συνάρτηση που διέρχεται από τα σημεία Α(1,2), Β(2,1) και Γ(3,3). Α Ψ

6. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και έχει ρίζα τον αριθμό 1, τότε θα ισχύει $f(0) < 0$. Α Ψ

7. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(1,2) και Β(2,5), τότε η f είναι γνησίως αύξουσα. Α Ψ

8. Αν η μέγιστη τιμή μιας συνάρτησης f είναι ίση με 1, τότε η εξίσωση $f(x) = 2$ είναι αδύνατη. Α Ψ

9. Η συνάρτηση $f:[-1,2]\to\mathbb{R}$ με $f(x) = 3x^2$ είναι άρτια. Α Ψ

10. Αν μια συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή και έχει ρίζα τον αριθμό ρ, τότε θα έχει ρίζα και τον αριθμό −ρ. Α Ψ

11. Αν μία συνάρτηση f είναι άρτια, τότε η f δεν είναι γνησίως μονότονη. Α Ψ

12. Αν μία συνάρτηση f είναι άρτια, τότε η $-f$ είναι περιττή. Α Ψ

II) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση για την παρακάτω συνάρτηση *f*.

Η συνάρτηση f, της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\varphi(x) = 3x^4$, μιας οριζόντιας κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω, έχει τύπο:

Α) $f(x)=3(x-1)^4+2$ **Β)** $f(x)=3(x-1)^4-2$

Γ) $f(x)=3(x+1)^4+2$ **Δ)** $f(x)=3(x+1)^4-2$.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η ιδέα της χρησιμοποίησης διατεταγμένων ζευγών για τα σημεία ενός επιπέδου και της περιγραφής καμπύλων με εξισώσεις, ανήκει στον Rene Descartes (1596-1650) και στον Pierre de Fermat (1601-1665).

Ο Descartes (Καρτέσιος) γεννήθηκε στη La Haye (σημερινή Ντερκατ) της Touraine και πέθανε στη Στοκχόλμη. Σε ηλικία 10 χρόνων εγγράφηκε στο Βασιλικό Κολλέγιο της La Fleche, όπου δίδασκαν Ιησουίτες. Από εκείνη τη στιγμή αρχίζει και το ενδιαφέρον του για τα μαθηματικά. Στη ζωή του υπήρξε φιλόσοφος, αλλά ένα μεγάλο μέρος του χρόνου του το διέθετε για τα μαθηματικά.

Τα αποτελέσματα και οι μέθοδοί του, που δημοσίευσε το 1637 στο βιβλίο του Le Geometrie, δημιούργησαν ένα νέο κλάδο των μαθηματικών που αργότερα ονομάστηκε Αναλυτική Γεωμετρία.

Ο Καρτέσιος διείδε τη δύναμη της Άλγεβρας για τη λύση γεωμετρικών προβλημάτων και η σκέψη του αντιπροσώπευε μια ριζική απόκλιση από τη μέχρι τότε επικρατούσα άποψη για τη Γεωμετρία. Ο όρος «Καρτεσιανές συντεταγμένες» οφείλεται στο όνομά του.

Ο Fermat, που έζησε στην Toulouse της νότιας Γαλλίας, αν και ήταν νομικός στο επάγγελμα, υπήρξε ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς του 17ου αιώνα.

Τις ιδέες του για συντεταγμένες στη Γεωμετρία, τυποποίησε στις αρχές του 1629 και τις κυκλοφόρησε με αλληλογραφία, αλλά δεν δημοσιεύτηκαν πριν από το 1679. Ο Fermat συνέδεσε το όνομά του με τον ισχυρισμό:

«Για κάθε $\nu > 2$ είναι αδύνατο να βρούμε θετικούς ακέραιους α, β, γ που να ικανοποιούν τη σχέση $\alpha^\nu = \beta^\nu + \gamma^\nu$».

που είναι γνωστός ως το «τελευταίο θεώρημα του Fermat». Τον ισχυρισμό του αυτόν έγραψε ο Fermat στο περιθώριο ενός βιβλίου του προσθέτοντας και τα εξής:

«Έχω βρει μια πραγματικά θαυμάσια απόδειξη την οποία το περιθώριο αυτό είναι πολύ στενό για να χωρέσει».

Ο ισχυρισμός αυτός του Fermat αποδείχτηκε αληθής το 1994 από τον Άγγλο μαθηματικό A. Wiles, αφού υπήρξε για 350 χρόνια ένα από τα διασημότερα άλυτα προβλήματα της Θεωρίας Αριθμών.

ΜΕΛΕΤΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Κεφάλαιο 7ο

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε πώς, με τη βοήθεια των πληροφοριών που αποκτήσαμε μέχρι τώρα, μπορούμε να χαράξουμε με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων

$$f_1(x) = \alpha x^2, \quad f_2(x) = \alpha x^3, \quad f_3(x) = \frac{\alpha}{x} \quad \text{και} \quad f_4(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma.$$

Η πορεία την οποία ακολουθούμε λέγεται **μελέτη συνάρτησης** και περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα:

1. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

2. Προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης.

3. Μελετούμε τη "συμπεριφορά" της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της ("οριακές τιμές" κτλ.).

4. Συντάσσουμε έναν πίνακα τιμών της συνάρτησης και, με τη βοήθεια αυτού και των προηγούμενων συμπερασμάτων, χαράσσουμε τη γραφική της παράσταση.

ΣΧΟΛΙΟ

Όπως είναι γνωστό, αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A είναι <u>*άρτια*</u>, τότε η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y′y, ενώ αν είναι <u>*περιττή*</u>, έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων. Επομένως, για τη μελέτη μιας τέτοιας συνάρτησης αρκεί να περιοριστούμε στα $x \in A$, με $x \geq 0$ και να χαράξουμε τη γραφική της παράσταση στο σύνολο αυτό. Στη συνέχεια θα πάρουμε το συμμετρικό της καμπύλης που χαράξαμε ως προς τον άξονα y′y αν η συνάρτηση είναι άρτια και ως προς την αρχή των αξόνων αν η συνάρτηση είναι περιττή και θα βγάλουμε τα σχετικά συμπεράσματα. Γι' αυτό, συνήθως, πριν προχωρήσουμε στα βήματα 2 έως 4, ελέγχουμε από την αρχή αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.

7. 1 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f(x) = \alpha x^2$

Η συνάρτηση $g(x) = x^2$

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και είναι άρτια, διότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$g(-x) = (-x)^2 = x^2 = g(x)$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της g έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y′y. Άρα, σύμφωνα με όσα αναφέραμε προηγουμένως, αρχικά θα μελετήσουμε και θα παραστήσουμε γραφικά την g στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Έχουμε λοιπόν:

- **Μονοτονία:** Έστω τυχαία $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε θα είναι $x^2_1 < x^2_2$, οπότε θα έχουμε $g(x_1) < g(x_2)$. Άρα η συνάρτηση $g(x) = x^2$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
- **Ακρότατα:** Για κάθε $x \in [0, +\infty)$ ισχύει:

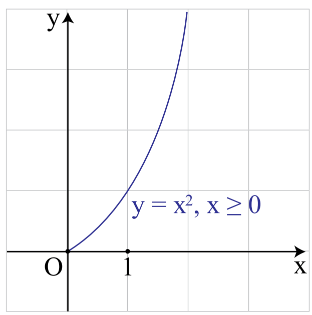
  $$g(x) = x^2 \geq 0 = g(0)\ .$$

  Άρα η συνάρτηση g παρουσιάζει στο $x_0 = 0$ ελάχιστο, το $g(0) = 0$.

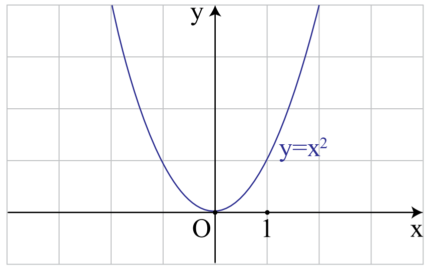
- ***Συμπεριφορά της g για "μεγάλες" τιμές του x:*** Ας θεωρήσουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών της g για "πολύ μεγάλες" τιμές του x:

x	10^{10}	10^{20}	10^{50}	10^{100}	10^{1000}	...	$\to +\infty$
$g(x) = x^2$	10^{20}	10^{40}	10^{100}	10^{200}	10^{2000}	...	$\to +\infty$

Παρατηρούμε ότι, καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα, ή όπως λέμε "**τείνει στο** $+\infty$", το x^2 αυξάνεται και αυτό απεριόριστα και μάλιστα γρηγορότερα και άρα "**τείνει στο** $+\infty$". Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της g προεκτείνεται απεριόριστα προς τα πάνω, καθώς το x απομακρύνεται προς το $+\infty$.



Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω και παίρνοντας έναν πίνακα τιμών της g για μη αρνητικές τιμές του x, μπορούμε να χαράξουμε τη γραφική της παράσταση στο διάστημα $[0, +\infty)$.

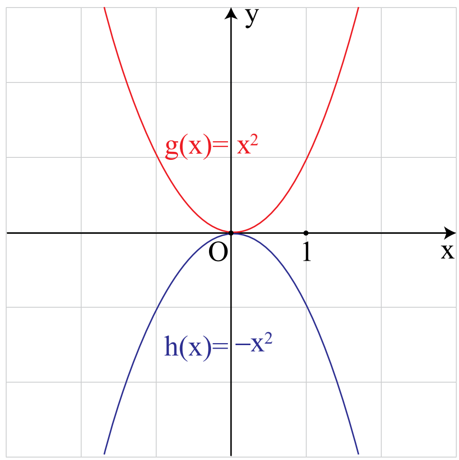


Αν τώρα πάρουμε το συμμετρικό της παραπάνω καμπύλης ως προς τον άξονα y′y, τότε θα έχουμε τη γραφική παράσταση της $g(x) = x^2$ σε όλο το $\mathbb{R}$, από την οποία συμπεραίνουμε ότι:

Η συνάρτηση $g(x)=x^2$:

- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
- Παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$, το $g(0) = 0$.
- Έχει γραφική παράσταση που προεκτείνεται απεριόριστα προς τα πάνω, καθώς το x τείνει είτε στο $-\infty$, είτε στο $+\infty$.

Η συνάρτηση $h(x) = -x^2$



Ας θεωρήσουμε τώρα τη συνάρτηση $h(x)=-x^2$.
Παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$h(x)=-g(x)$$

Άρα, όπως μάθαμε στην §4.2, η γραφική παράσταση της $h(x)=-x^2$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της $g(x) = x^2$ ως προς τον άξονα x'x.

Επομένως η συνάρτηση $h(x)=-x^2$:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.
- Παρουσιάζει μέγιστο για $x = 0$, το $h(0) = 0$.
- Έχει γραφική παράσταση που προεκτείνεται απεριόριστα προς τα κάτω, καθώς το x τείνει είτε στο $-\infty$ είτε στο $+\infty$.

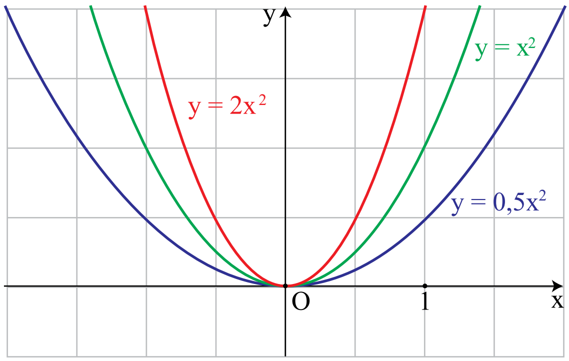
Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $\boldsymbol{\alpha > 0}$, τότε εργαζόμαστε όπως εργαστήκαμε για τη συνάρτηση $g(x)=x^2$ και καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα. Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)=\alpha x^2$ $\alpha>0$	$+\infty$	↘	**0** **min**	↗	$+\infty$

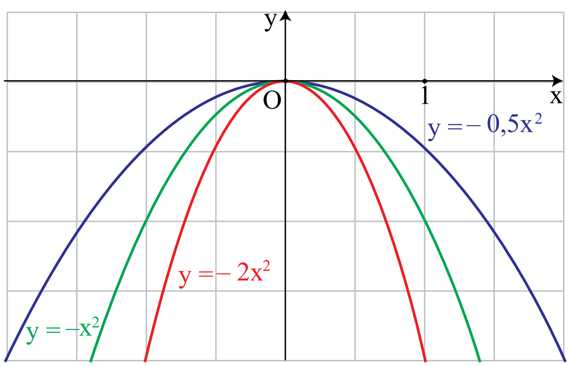
Στο σχήμα που ακολουθεί δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2$ για $\alpha = 0{,}5$, $\alpha = 1$ και $\alpha = 2$.



- Αν **$\alpha < 0$**, τότε εργαζόμαστε όπως εργαστήκαμε για τη συνάρτηση $h(x) = -x^2$ και καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα. Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)=\alpha x^2$ $\alpha<0$	$-\infty$	↗	**max** **0**	↘	$-\infty$

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2$ για $\alpha = -0{,}5$, $\alpha = -1$, $\alpha = -2$.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2$, με $\alpha \neq 0$, είναι μια καμπύλη που λέγεται **παραβολή** με **κορυφή** την αρχή των αξόνων και **άξονα συμμετρίας** τον άξονα $y'y$.

Στα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι:

✓ Όταν το α είναι θετικό, τότε η παραβολή είναι "ανοικτή" προς τα πάνω, ενώ όταν το α είναι αρνητικό, τότε η παραβολή είναι "ανοικτή" προς τα κάτω.

✓ Καθώς η $|\alpha|$ μεγαλώνει, η παραβολή γίνεται όλο και πιο "κλειστή", δηλαδή "πλησιάζει" τον άξονα $y'y$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

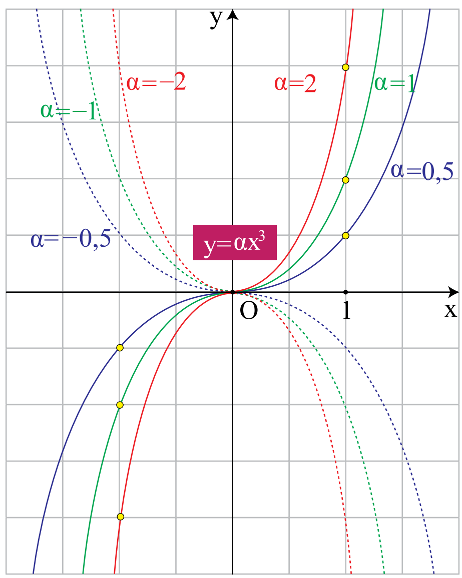
Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $h(x) = \alpha x^3$.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση $h(x) = \alpha x^3$, με $\alpha \neq 0$, είναι περιττή, διότι:

$$h(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -h(x)$$

Επομένως, αρκεί να τη μελετήσουμε και να την παραστήσουμε γραφικά στο διάστημα $[0, +\infty)$ και στη συνέχεια να βγάλουμε τα σχετικά συμπεράσματα για όλο το $\mathbb{R}$.
Αν εργαστούμε με τρόπο ανάλογο με εκείνο με τον οποίο εργαστήκαμε για τη μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2$, συμπεραίνουμε ότι:

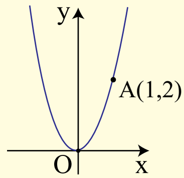


Η συνάρτηση $h(x) = \alpha x^3$, με $\alpha \neq 0$:

- Αν $\alpha > 0$,
  ✓ Είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
  ✓ Έχει γραφική παράσταση που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και εκτείνεται απεριόριστα προς τα πάνω, όταν το x τείνει στο $+\infty$ και απεριόριστα προς τα κάτω όταν το x τείνει στο $-\infty$.
- Αν $\alpha < 0$,
  ✓ Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
  ✓ Έχει γραφική παράσταση που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και εκτείνεται απεριόριστα προς τα κάτω, όταν το x τείνει στο $+\infty$ και απεριόριστα προς τα πάνω όταν το x τείνει στο $-\infty$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής του διπλανού σχήματος.



2. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i) $\varphi(x) = 0,5x^2$, $f(x) = 0,5x^2 + 2$ και $g(x) = 0,5x^2 - 3$

ii) $\psi(x) = -0,5x^2$, $h(x) = -0,5x^2 - 2$ και $q(x) = -0,5x^2 + 3$.

3. Ομοίως τις συναρτήσεις:

i) $\varphi(x) = 0,5x^2$, $f(x) = 0,5(x - 2)^2$ και $g(x) = 0,5(x + 2)^2$

ii) $\psi(x) = -0,5x^2$, $h(x) = -0,5(x - 2)^2$ και $q(x) = -0,5(x + 2)^2$.

4. i) Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = x^2 \quad \text{και} \quad g(x) = 1$$

και με τη βοήθεια αυτών να λύσετε τις ανισώσεις:

$$x^2 \leq 1 \quad \text{και} \quad x^2 > 1.$$

ii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα προηγούμενα συμπεράσματα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = x\,|\,x\,|.$$

2. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

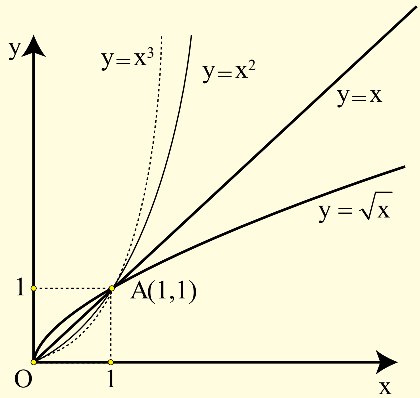
και με τη βοήθεια αυτής να βγάλετε τα συμπεράσματα τα σχετικά με τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f.

3. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$f(x) = x, \qquad g(x) = x^2,$

$h(x) = x^3$ και $\varphi(x) = \sqrt{x}$

στο διάστημα $[0, +\infty)$, τις οποίες χαράξαμε με τη βοήθεια Η/Υ.

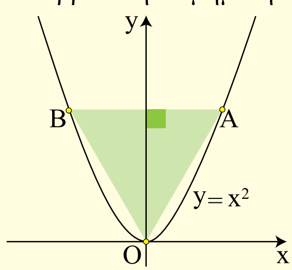


i) Να διατάξετε από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη τις τιμές x, x^2, x^3 και $\sqrt{x}$ των συναρτήσεων f, g, h και φ:

α) για $0 < x < 1$ και β) για $x > 1$.

ii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξατε προηγουμένως.

4. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $\overset{\Delta}{OAB}$ είναι ισόπλευρο. Να βρεθεί η τετμημένη του σημείου Α.



7.2 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f(x)=\frac{\alpha}{x}$

Η συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{x}$

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{x}$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και είναι περιττή, διότι για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ ισχύει:

$$g(-x)=\frac{1}{-x}=-g(x)$$

Επομένως, η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων. Γι’ αυτό αρχικά θα τη μελετήσουμε και θα την παραστήσουμε γραφικά στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Έχουμε λοιπόν:

- ***<u>Μονοτονία:</u>*** Έστω τυχαία $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$. Τότε θα ισχύει $\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}$, οπότε θα έχουμε $g(x_1)>g(x_2)$. Άρα η συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.
- ***<u>Πρόσημο των τιμών της g:</u>*** Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $g(x)=\frac{1}{x}>0$.
  Επομένως, στο διάστημα $(0,+\infty)$ η γραφική παράσταση της g θα βρίσκεται πάνω από τον άξονα των x.
- ***<u>Συμπεριφορά της g για "μικρές" τιμές του x:</u>*** Ας θεωρήσουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών της g για "πολύ μικρές" τιμές του x:

x	10^{-10}	10^{-20}	10^{-50}	10^{-100}	10^{-1000}	....	$\to 0$
$g(x)=\frac{1}{x}$	10^{10}	10^{20}	10^{50}	10^{100}	10^{1000}	....	$\to +\infty$

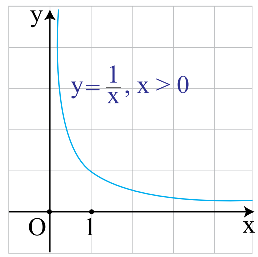
Παρατηρούμε ότι, καθώς το x μειώνεται απεριόριστα και παίρνει τιμές οσοδήποτε κοντά στο 0 ή, όπως λέμε, ***"τείνει στο 0"***, το $\frac{1}{x}$ αυξάνεται απεριόριστα και ***τείνει στο*** $+\infty$***.*** Αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x "πλησιάζει" το 0 από τα δεξιά, η γραφική παράσταση της g τείνει να συμπέσει με τον ημιάξονα Oy. Γι’ αυτό ο άξονας y′y λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της *g* προς τα πάνω.

- **<u>Συμπεριφορά της g για "μεγάλες" τιμές του x:</u>** Ας θεωρήσουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών της g για "πολύ μεγάλες" τιμές του x:

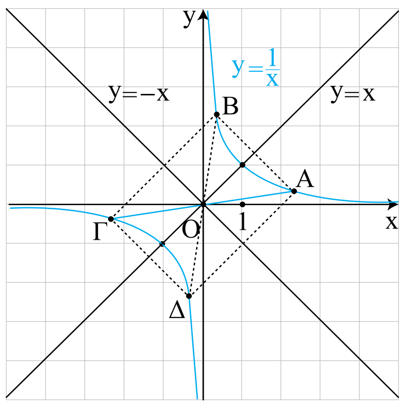
x	10^{10}	10^{20}	10^{50}	10^{100}	10^{1000}	....	$\to +\infty$
$g(x)=\frac{1}{x}$	10^{-10}	10^{-20}	10^{-50}	10^{-100}	10^{-1000}	....	$\to 0$

Παρατηρούμε ότι, καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα και ***τείνει στο*** $+\infty$***,*** το $\frac{1}{x}$ μειώνεται απεριόριστα και ***τείνει στο 0***. Αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x "απομακρύνεται" προς το $+\infty$, η γραφική παράσταση της g τείνει να συμπέσει με τον ημιάξονα Ox. Γι' αυτό ο άξονας x′x λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της g προς τα δεξιά.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω και παίρνοντας έναν πίνακα τιμών της g για θετικές τιμές του x, μπορούμε να χαράξουμε τη γραφική της παράσταση στο διάστημα $(0, +\infty)$.



Αν τώρα πάρουμε το συμμετρικό της παραπάνω καμπύλης ως προς την αρχή των αξόνων, τότε θα έχουμε τη γραφική παράσταση της $g(x)=\frac{1}{x}$ σε όλο το $\mathbb{R}^*$, από την οποία συμπεραίνουμε ότι:



Η συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{x}$:

- Είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0, +\infty)$.
- Έχει γραφική παράσταση η οποία:
  - ✓ αποτελείται από δύο κλάδους, έναν στο 1ο και έναν στο 3ο τεταρτημόριο,
  - ✓ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων,
  - ✓ έχει άξονες συμμετρίας τις ευθείες $y = x$ και $y = -x$, που διχοτομούν τις γωνίες των αξόνων και τέλος

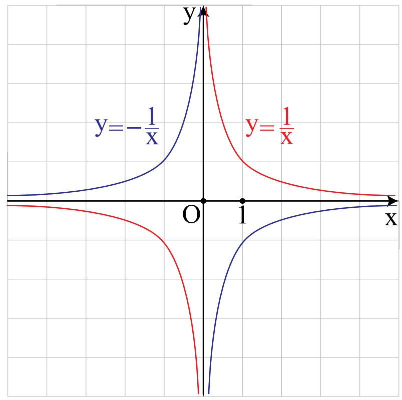
✓ έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα x′x και κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα y′y.

Η συνάρτηση $h(x) = -\frac{1}{x}$

Ας θεωρήσουμε τώρα τη συνάρτηση $h(x) = -\frac{1}{x}$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$h(x) = -g(x).$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της $h(x) = -\frac{1}{x}$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της $g(x) = \frac{1}{x}$ ως προς τον άξονα x′x, οπότε η συνάρτηση $h(x) = -\frac{1}{x}$:



- Είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.
- Έχει γραφική παράσταση η οποία:

  ✓ αποτελείται από δύο κλάδους, έναν στο 2ο και έναν στο 4ο τεταρτημόριο,

  ✓ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων,

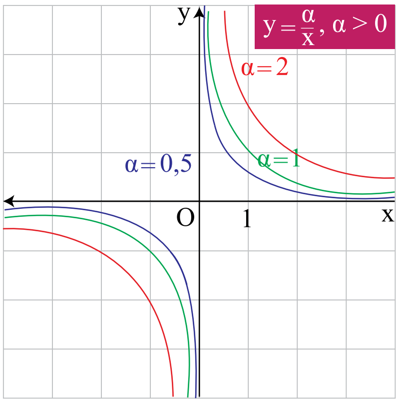
  ✓ έχει άξονες συμμετρίας τις ευθείες $y = x$ και $y = -x$, που διχοτομούν τις γωνίες των αξόνων και τέλος

  ✓ έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα x′x και κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα y′y.

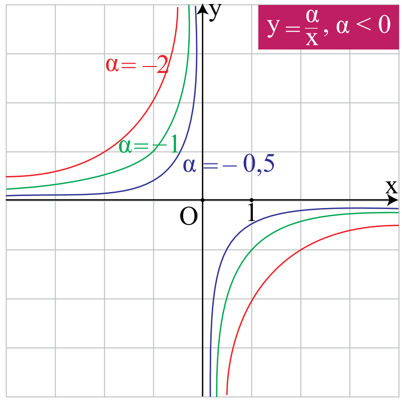
Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x}$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν **α > 0**, τότε εργαζόμαστε όπως εργαστήκαμε για τη συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{x}$ και καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα.
  Στο σχήμα α′ δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της $f(x) = \frac{\alpha}{x}$ για $\alpha = 0{,}5$, $\alpha = 1$ και $\alpha = 2$.



Σχήμα α΄



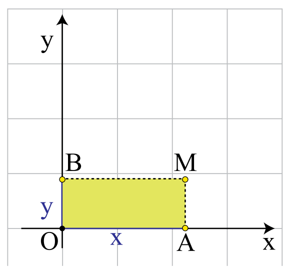
Σχήμα β΄

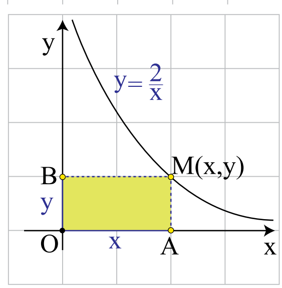
• Αν **α < 0**, τότε εργαζόμαστε όπως εργαστήκαμε για τη συνάρτηση $h(x)=-\frac{1}{x}$ και καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα.
Στο σχήμα β′ δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της $f(x)=\frac{α}{x}$ για α = −0,5 , α = −1 και α = −2.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{α}{x}$, με α ≠ 0, λέγεται **ισοσκελής υπερβολή** με **κέντρο** την αρχή των αξόνων και **ασύμπτωτες** τους άξονες x′x και y′y.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στο διπλανό σχήμα το σημείο Μ κινείται στο 1ο τεταρτημόριο του συστήματος συντεταγμένων, έτσι ώστε το εμβαδόν του ορθογώνιου ΟΑΜΒ να παραμένει σταθερό και ίσο με 2τ.μ. Να αποδειχτεί ότι το σημείο Μ διαγράφει τον έναν κλάδο μιας ισοσκελούς υπερβολής.





ΛΥΣΗ

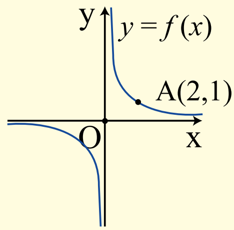
Αν με x συμβολίσουμε το μήκος και με y το πλάτος του ορθογωνίου, επειδή το εμβαδόν του είναι ίσο με 2τμ, θα ισχύει xy = 2 και x, y > 0, οπότε θα έχουμε:

$$y=\frac{2}{x},\ \text{με}\ x>0$$

Άρα το σημείο Μ θα διαγράφει τον κλάδο της υπερβολής $y=\frac{2}{x}$ που βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής του διπλανού σχήματος.



2. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i) $\varphi(x)=\frac{1}{x}$, $\quad f(x)=\frac{1}{x}+2$ $\quad$ και $\quad g(x)=\frac{1}{x}-3$

ii) $\psi(x)=-\frac{1}{x}$, $\quad h(x)=-\frac{1}{x}-2$ $\quad$ και $\quad q(x)=-\frac{1}{x}+3$.

3. Ομοίως τις συναρτήσεις:

i) $\varphi(x)=\frac{1}{x}$, $\quad f(x)=\frac{1}{x-2}$ $\quad$ και $\quad g(x)=\frac{1}{x+3}$

ii) $\psi(x)=-\frac{1}{x}$, $\quad h(x)=-\frac{1}{x-2}$ $\quad$ και $\quad q(x)=-\frac{1}{x+3}$.

4. i) Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\frac{1}{x}$ και $g(x)=1$ και με τη βοήθεια αυτών να λύσετε γραφικά τις ανισώσεις:

$$\frac{1}{x}\leq 1 \quad \text{και} \quad \frac{1}{x}>1$$

ii) Να επιβεβαιώσετε και αλγεβρικά τα παραπάνω συμπεράσματα.

5. Ομοίως για τις συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{x}$ και $g(x)=x^2$ και τις ανισώσεις:

$$\frac{1}{x}\leq x^2 \quad \text{και} \quad \frac{1}{x}>x^2$$

6. Οι κάθετες πλευρές ΑΒ και ΑΓ ενός ορθογώνιου τριγώνου $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ μεταβάλλονται έτσι, ώστε το εμβαδόν του να παραμένει σταθερό και ίσο με 2 τετραγωνικές μονάδες. Να εκφράσετε το μήκος y της ΑΓ συναρτήσει του μήκους x της ΑΒ και στη συνέχεια να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή.

7.3 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f(x) = αx^2 + βx + γ$

Θα μελετήσουμε αρχικά τη συνάρτηση $g(x) = 2x^2 + 12x + 20$ που είναι ειδική περίπτωση της $f(x) = αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$.
Για τη μελέτη της συνάρτησης g μετασχηματίζουμε τον τύπο της ως εξής:

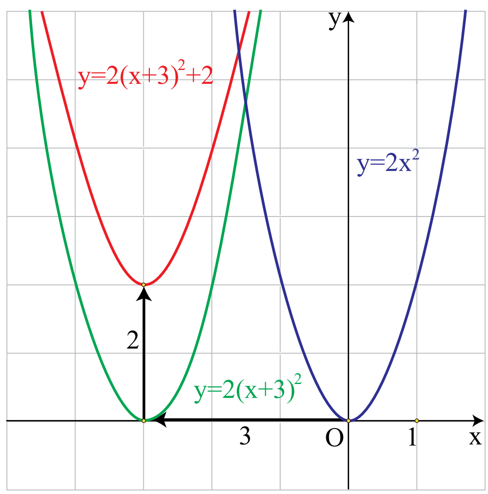
$$\begin{aligned} g(x) = 2x^2 + 12x + 20 &= 2(x^2 + 6x + 10) \\ &= 2[x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 10] \\ &= 2[(x+3)^2 + 1] \\ &= 2(x+3)^2 + 2 \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε

$$g(x) = 2(x+3)^2 + 2$$

Επομένως, για να παραστήσουμε γραφικά την g, χαράσσουμε πρώτα την $y = 2(x + 3)^2$ που προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y = 2x^2$ κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά, και στη συνέχεια χαράσσουμε την $y = 2(x + 3)^2 + 2$ που προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $y = 2(x + 3)^2$ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.

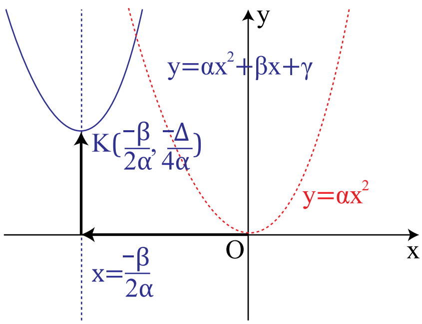
Άρα, η γραφική παράσταση της $g(x) = 2(x + 3)^2 + 2$ προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της παραβολής $y = 2x^2$, μιας οριζόντιας κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω. Είναι δηλαδή μια παραβολή ανοικτή προς τα άνω με κορυφή το σημείο $K(-3,2)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -3$.

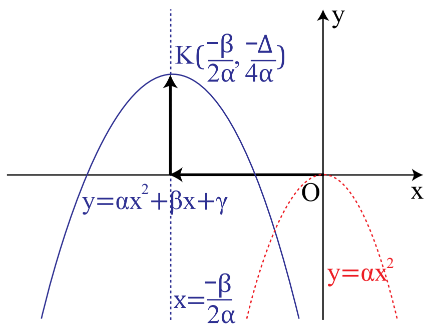


Θα μελετήσουμε τώρα τη συνάρτηση $f(x) = αx^2 + βx + γ$, με $α \neq 0$. Όπως είδαμε στην §3.2 (μορφές τριωνύμου), η $f(x)$ παίρνει τη μορφή:

$$f(x)=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha}$$

Επομένως η γραφική της παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της παραβολής $y=\alpha x^2$, μιας οριζόντιας και μιας κατακόρυφης, έτσι ώστε η κορυφή της να συμπέσει με το σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$. Συνεπώς είναι και αυτή μια **παραβολή**, που έχει **κορυφή** το σημείο $\mathbf{K\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)}$ και **άξονα συμμετρίας** την ευθεία $\mathbf{x=-\frac{\beta}{2\alpha}}$.





Άρα, η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$:

- Αν $\alpha>0$,

  ✓ Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$.

  ✓ Παρουσιάζει ελάχιστο για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$, το $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)=-\frac{\Delta}{4\alpha}$.

Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$\frac{-\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ $\alpha>0$	$+\infty$ ↘	$\frac{-\Delta}{4\alpha}$ min	↗ $+\infty$

• Αν $\alpha < 0$, η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$:

✓ Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$

✓ Παρουσιάζει μέγιστο για $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$, το $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$.

Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στον πίνακα.

x	$-\infty$	$\frac{-\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ $\alpha < 0$	$-\infty$ ↗	$\frac{-\Delta}{4\alpha}$ max	↘ $-\infty$

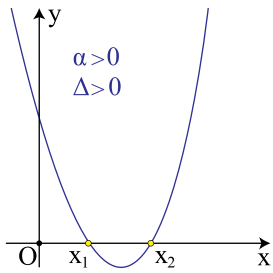
Τέλος η γραφική παράσταση της f είναι μια **παραβολή** που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0, \gamma)$, διότι $f(0) = \gamma$, ενώ για τα σημεία τομής της με τον άξονα $x'x$ παρατηρούμε ότι:

• Αν $\Delta > 0$, το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει δύο ρίζες x_1 και x_2 και επομένως η παραβολή $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία, τα $A(x_1,0)$ και $B(x_2,0)$ (Σχ. α′).

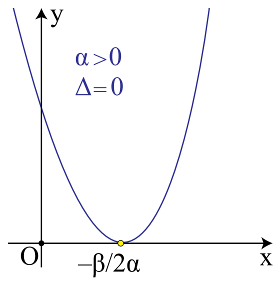
• Αν $\Delta = 0$, το τριώνυμο έχει διπλή ρίζα την $-\frac{\beta}{2\alpha}$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η παραβολή εφάπτεται του άξονα $x'x$ στο σημείο $A\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, 0\right)$ (Σχ. β').

• Αν $\Delta < 0$, το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες. Επομένως η παραβολή δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$ (Σχ. γ').

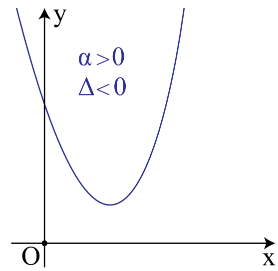
Η γραφική παράσταση της f εξαρτάται από το πρόσημο των α και Δ και φαίνεται κατά περίπτωση στα παρακάτω σχήματα:



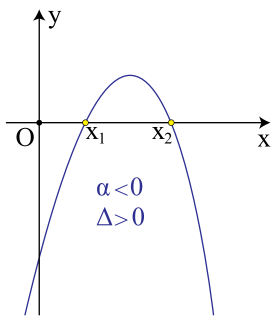
Σχήμα α΄



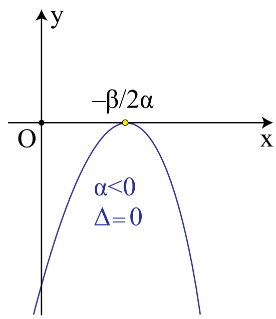
Σχήμα β΄



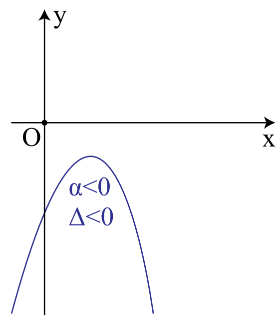
Σχήμα γ΄



Σχήμα α΄



Σχήμα β΄



Σχήμα γ΄

Τα συμπεράσματα της §3.2 για το πρόσημο του τριωνύμου προκύπτουν άμεσα και με τη βοήθεια των παραπάνω γραφικών παραστάσεων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση

$$f(x)=x^2-4x+3.$$

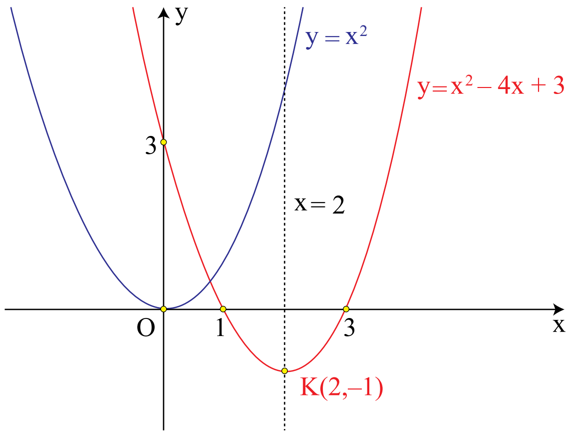
ΛΥΣΗ

Για τη συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+3$ είναι

$$\alpha=1>0,\ \frac{-\beta}{2\alpha}=2 \quad \text{και} \quad \frac{-\Delta}{4\alpha}=f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right)=f(2)=-1.$$

Επομένως έχουμε τον πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)=x^2-4x+3$	$+\infty$ ↘	-1 min	↗ $+\infty$



Δηλαδή η συνάρτηση f,

✓ Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$,

✓ Παρουσιάζει για $x = 2$ ελάχιστο, το $f(2) = -1$.

Επιπλέον, η γραφική παράσταση της f είναι μια παραβολή η οποία:

✓ Έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 2$ και

✓ Τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες 1 και 3 αντιστοίχως, που είναι οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 4x + 3$, και τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Να γράψετε τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ στη μορφή $f(x) = \alpha(x-p)^2 + q$ και στη συνέχεια να βρείτε με ποια οριζόντια και ποια κατακόρυφη μετατόπιση η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2x^2$ θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της f.

ii) Να κάνετε το ίδιο και για τη συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + 8x - 9$, θεωρώντας ως g την $g(x) = -2x^2$.

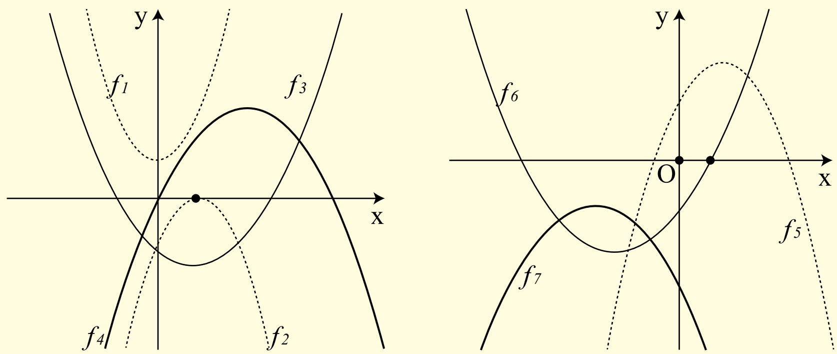
2. Να βρείτε τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων:

α) $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$ και **β)** $g(x) = -3x^2 - 5x + 2$.

3. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

α) $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$ και **β)** $g(x) = -2x^2 + 8x - 9$.

4. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις επτά τριωνύμων, δηλαδή συναρτήσεων της μορφής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Να συμπληρώσετε τις στήλες του πίνακα που ακολουθεί με το πρόσημο των συντελεστών και της διακρίνουσας των αντίστοιχων τριωνύμων.



Τριώνυμο	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
α	+						
β	0						
γ	+						
Δ	−						

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται η παραβολή $y = x^2 + (k+1)x + k$. Να καθορίσετε τις τιμές του k, για τις οποίες η παραβολή:

i) Εφάπτεται του άξονα x′x.

ii) Έχει τον y'y άξονα συμμετρίας.

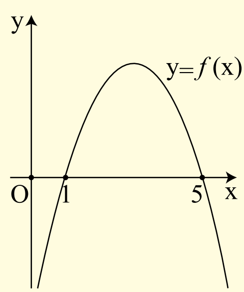
iii) Έχει για κορυφή ένα σημείο με τεταγμένη –4. Ποια είναι η τετμημένη της κορυφής;

2. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση ενός τριωνύμου $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Να βρείτε:

i) Το πρόσημο του α.

ii) Το πρόσημο της διακρίνουσας Δ και

iii) Τους συντελεστές του τριωνύμου, αν δίνεται ότι β = 6.

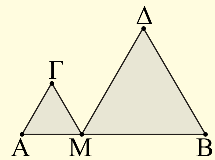


3. Οι διαστάσεις x,y ενός ορθογωνίου μεταβάλλονται, έτσι ώστε η περίμετρός του να παραμένει σταθερή και ίση με 20 μ.

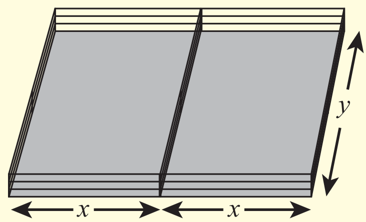
i) Να εκφράσετε το y συναρτήσει του x και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο Ε = f(x) που δίνει το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου συναρτήσει του x.

ii) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν μεγιστοποιείται για x = 5 και να βρείτε τη μέγιστη τιμή του.

4. Ένα σημείο Μ κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 6cm. Με πλευρές τα ΜΑ και ΜΒ κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα. Για ποια θέση του Μ το άθροισμα των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ελάχιστο;



5. Ένας κτηνοτρόφος έχει σύρμα 200m και θέλει να περιφράξει δύο συνεχόμενους ορθογώνιους υπαίθριους χώρους με διαστάσεις x και y, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Για ποιες τιμές των x και y το εμβαδόν και των δύο χώρων μεγιστοποιείται;



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

I) Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

1. Αν η παραβολή $y = αx^2$, $α \neq 0$ διέρχεται από το σημείο Α(1,2), τότε βρίσκεται στο 3ο και 4ο τεταρτημόριο. Α Ψ

2. Αν το τριώνυμο $f(x) = αx^2 + βx + γ$, $α \neq 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1 = -1$ και $x_2 = 3$, τότε έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία x = 1. Α Ψ

3. Για οποιουσδήποτε α, β$\in\mathbb{R}^*$ η παραβολή $y = αx^2$ και η υπερβολή $y = \frac{β}{x}$ έχουν ένα και μοναδικό κοινό σημείο. Α Ψ

4. Η υπερβολή $y = \frac{1}{x}$ και η ευθεία $y = -x$ τέμνονται. Α Ψ

ΙΙ. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω δύο περιπτώσεις με τα σύμβολα της ισότητας ή της ανισότητας.

1. Αν το τριώνυμο $f(x)=2x^2+\beta x+\gamma$ έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1=-1$ και $x_2=3$, τότε θα ισχύει:

$$f(-5)\ \dots\ 0,\quad f(1)\ \dots\ 0,\quad f(5)\ \dots\ 0,\quad \gamma\ \dots\ 0,\quad \beta\ \dots\ -4.$$

2. Αν το τριώνυμο $f(x)=-x^2+\beta x+\gamma$ έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1=-3$ και $x_2=1$, θα ισχύει:

$$f(-5)\ \dots\ 0,\quad f(-2)\ \dots\ 0,\quad f(5)\ \dots\ 0,\quad \gamma\ \dots\ 0,\quad \beta\ \dots\ -2.$$

ΙΙΙ. Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Αν $\alpha=2$ και το τριώνυμο f έχει κορυφή το σημείο Κ $(1,-3)$, τότε

Α) $f(x)=2(x-1)^2+3$ **Β)** $f(x)=2(x-1)^2-3$

Γ) $f(x)=2(x+1)^2+3$ **Δ)** $f(x)=2(x+1)^2-3$.

2. Αν $f(1)<0$, $f(3)>0$ και $f(5)<0$, τότε

Α) $\Delta=0$ και $\alpha>0$ **Β)** $\Delta>0$ και $\alpha>0$ **Γ)** $\Delta>0$ και $\alpha<0$.

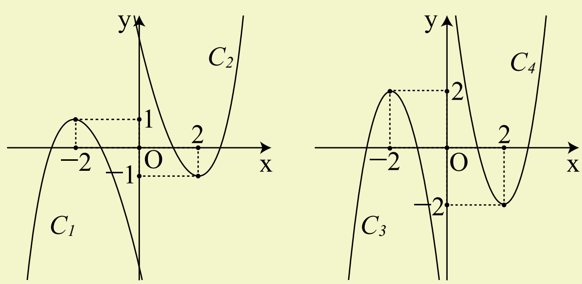
3. Αν το τριώνυμο έχει κορυφή το σημείο $K(1,2)$ και $\alpha>0$, τότε:

Α) $\Delta>0$ **Β)** $\Delta=0$ **Γ)** $\Delta<0$ **Δ)** $\gamma<0$.

4. Αν το τριώνυμο έχει κορυφή το σημείο $K(1,0)$, τότε

Α) $\beta=0$ **Β)** $\Delta<0$ **Γ)** $\Delta>0$ **Δ)** $\Delta=0$.

IV. Οι παρακάτω καμπύλες C_1, C_2, C_3 και C_4 είναι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f_1(x)=x^2-4x+\gamma_1$, $f_2(x)=2x^2-8x+\gamma_2$, $f_3(x)=-x^2-4x+\gamma_3$ και $f_4(x)=-2x^2-8x+\gamma_4$, όχι όμως με την ίδια σειρά. Να αντιστοιχίσετε καθεμιά από τις παραπάνω συναρτήσεις με τη γραφική της παράσταση.



f_1	f_2	f_3	f_4

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. i) Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=\frac{1}{2}\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right].$$

ii) Να αποδείξετε ότι για όλους τους α, β, γ $\in\mathbb{R}$ ισχύει

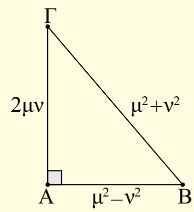
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha.$$

Πότε ισχύει ισότητα;

2. Λέμε ότι μια τριάδα θετικών ακεραίων (β, γ, α) είναι ***πυθαγόρεια τριάδα*** όταν $\beta^2+\gamma^2=\alpha^2$, δηλαδή όταν οι β, γ, α είναι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου.

i) Αν (β, γ, α) είναι μια πυθαγόρεια τριάδα και κ είναι ένας θετικός ακέραιος, να αποδείξετε ότι και η τριάδα (κβ, κγ, κα) είναι επίσης πυθαγόρεια τριάδα.

ii) Αν μ και ν θετικοί ακέραιοι με μ > ν, να δείξετε ότι η τριάδα $(\mu^2-\nu^2,\ 2\mu\nu,\ \mu^2+\nu^2)$ είναι πυθαγόρεια τριάδα. Στη συνέχεια να συμπληρώσετε τον πίνακα με τις πυθαγόρειες τριάδες που αντιστοιχούν στις τιμές των μ και ν που δίνονται στις δυο πρώτες στήλες:



μ	ν	$\mu^2-\nu^2$	$2\mu\nu$	$\mu^2+\nu^2$
2	1			
3	1			
3	2			
5	2			
5	3			
4	1			

3. A) Να αποδείξετε ότι $\alpha\beta\leq\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$. Τι σημαίνει η ανισότητα αυτή για ένα ορθογώνιο με διαστάσεις α και β ; Πότε ισχύει η ισότητα;

B) Με τη βοήθεια της παραπάνω ανισότητας (ή και με άλλο τρόπο), να αποδείξετε ότι:

i) Από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο Ρ το τετράγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

ii) Από όλα τα ορθογώνια με σταθερό εμβαδό Ε το τετράγωνο έχει την ελάχιστη περίμετρο.

4. Δίνεται η εξίσωση $3(x+1)-\alpha x=4,\ \ \alpha\in\mathbb{R}$.

i) Να λύσετε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$.

ii) Για ποιες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ η εξίσωση έχει λύση μεγαλύτερη του 1;

5. Δίνεται η εξίσωση $\lambda^2(x-1)+3\lambda=x+2,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda-1)(\lambda+1)x=(\lambda-1)(\lambda-2).$$

ii) Να λύσετε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

iii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό $\frac{1}{4}$.

6. Από τη φυσική γνωρίζουμε ότι στην κατακόρυφη βολή ενός σώματος με αρχική ταχύτητα v_0, το ύψος h του σώματος συναρτήσει του χρόνου t της κίνησης του δίνεται από τον τύπο $h(t)=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$, όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Α. Αν $v_0=60\text{m}/\sec$ και $g\simeq 10\text{m}/\sec^2$:

i) Να βρείτε πότε το σώμα θα φθάσει σε ύψος h =180 μέτρα.

ii) Να βρείτε πότε το σώμα θα βρεθεί σε ύψος h =100 μέτρα.
Ποια είναι η ερμηνεία των προηγούμενων απαντήσεων;

Β. Στη γενική περίπτωση όπου $h(t)=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$, με τα v_0 και g σταθερά, να βρείτε τη συνθήκη που πρέπει να ισχύει, ώστε το σώμα να φθάσει σε δεδομένο ύψος h_0.

7. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

$$f(x)=|x|-2 \ \text{ και }\ g(x)=2-|x|$$

και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g.

8. Α) Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x)=|x-1| \ \text{ και }\ g(x)=|x-3|$$

και με τη βοήθεια αυτών να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης

$$|x-1|<|x-3|.$$

Β) Στη συνέχεια να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα προηγούμενα συμπεράσματα.

9. Α) Σε ένα καρτεσιανό επίπεδο να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x)=|x|,\ g(x)=|x|-3 \text{ και } h(x)=||x|-3|.$$

Β) Με τη βοήθεια των παραπάνω γραφικών παραστάσεων να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων του συστήματος

$$\begin{cases} y=||x|-3| \\ y=\alpha \end{cases}$$

για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$.

10. Σε ένα επίπεδο σχεδιάζουμε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy.

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση $y^2-x^2=0$ παριστάνει τις διχοτόμους δ_1 και δ_2 των γωνιών των αξόνων τις οποίες και να σχεδιάσετε.

ii) Ποια είναι η απόσταση ενός σημείου Μ(x, y) του επιπέδου από το σημείο Κ (α, 0) του άξονα x′x; Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$(x-\alpha)^2+y^2=1,\ \alpha\in\mathbb{R}$$

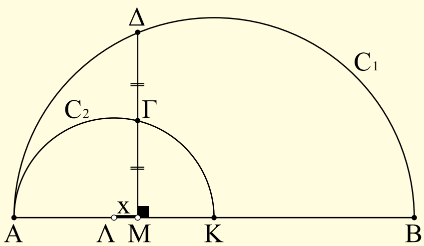
παριστάνει στο επίπεδο κύκλο C με κέντρο Κ και ακτίνα 1.
Σχεδιάστε τον κύκλο για μια τιμή του α.

iii) Με τη βοήθεια των παραπάνω γραφικών παραστάσεων να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων του συστήματος

$$\begin{cases} y^2-x^2=0 \\ (x-\alpha)^2+y^2=1 \end{cases}$$

για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$.

11. Στο διπλανό σχήμα τα C_1 και C_2 είναι ημικύκλια με κέντρα Κ και Λ και ακτίνες R_1 = 6cm και R_2 = 3cm αντιστοίχως, ενώ το Μ είναι ένα σημείο της διακέντρου ΚΛ και η ΜΔ είναι κάθετη στην ΚΛ. Να βρείτε το μήκος x του τμήματος ΛΜ, αν γνωρίζουμε ότι το σημείο Γ είναι μέσο του ΜΔ.



12. Θεωρούμε έναν άξονα x'x και παίρνουμε πάνω σ' αυτόν τα σταθερά σημεία Α(−1), Β(1) και ένα μεταβλητό σημείο Μ(x). Θέτουμε

$$f(x)=(MA)+(MB) \text{ και } g(x)=|(MA)-(MB)|.$$

i) Να αποδείξετε ότι:

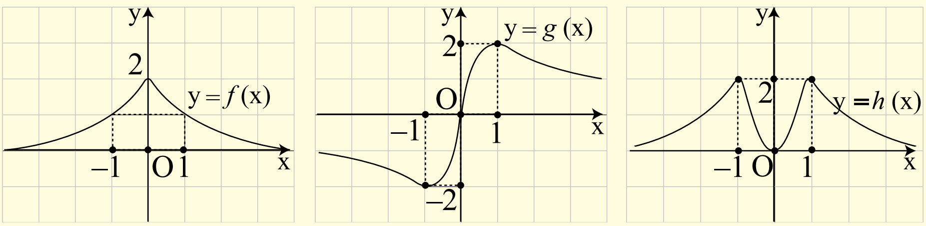
$$f(\mathrm{x}) = |\mathrm{x}+1| + |\mathrm{x}-1| \ \text{ και } \ \mathrm{g}(\mathrm{x}) = \big||\mathrm{x}+1| - |\mathrm{x}-1|\big|.$$

ii) Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις f και g.

iii) Να βρείτε με τη βοήθεια των παραπάνω γραφικών παραστάσεων την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή (εφόσον υπάρχουν) των συναρτήσεων f και g, καθώς και τις θέσεις στις οποίες παρουσιάζονται.

13. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(\mathrm{x}) = \frac{2}{\mathrm{x}^2+1}, \qquad \mathrm{g}(\mathrm{x}) = \frac{4\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2+1} \quad \& \quad \mathrm{h}(\mathrm{x}) = \frac{4\mathrm{x}^2}{\mathrm{x}^4+1}$$



i) Από τις γραφικές παραστάσεις να βρείτε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων f, g, h, καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.

ii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα προηγούμενα συμπεράσματα.

14. Α) Δίνεται η συνάρτηση $f(\mathrm{x}) = \sqrt{\mathrm{x}}$.

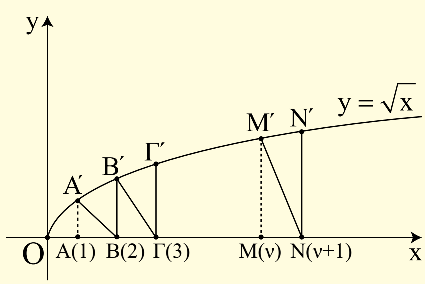
i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

ii) Να αποδείξετε ότι αν το σημείο Μ(α, β) ανήκει στη γραφική παράσταση της f, το σημείο Μ′(β, α) ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2$.

iii) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε πρώτα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g και στη συνέχεια, με τη βοήθεια του προηγούμενου ερωτήματος, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Ποιο είναι το είδος της μονοτονίας και ποιο το ακρότατο της συνάρτησης f;

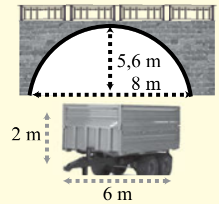
Β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\mathrm{h}(\mathrm{x}) = \sqrt{|\mathrm{x}|}$ είναι άρτια και στη συνέχεια να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(\mathrm{x}) = \sqrt{\mathrm{x}}$.

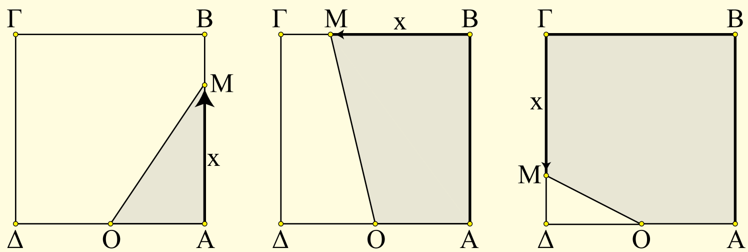


Αν Α′, Β′, Γ′ , …, Μ′, Ν′ είναι τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες 1, 2, 3,…, ν, ν + 1 αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{ΒΑ'Β'}$, $\overset{\Delta}{ΓΒ'Γ'}$, ..., $\overset{\Delta}{ΝΜ'Ν'}$ είναι ισοσκελή.

15. Μία γέφυρα έχει ένα παραβολικό τόξο του οποίου το πλάτος είναι 8m και ύψος είναι 5,6m. Κάτω από τη γέφυρα θέλει να περάσει γεωργικό μηχάνημα του οποίου η καρότσα έχει πλάτος 6m και ύψος 2m. Μπορεί το μηχάνημα να περάσει;



16. Δίνεται ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά 20cm και το μέσον Ο της ΑΔ . Ένα κινητό σημείο Μ ξεκινά από το Α και, διαγράφοντας την πολυγωνική γραμμή ΑΒΓΔ, καταλήγει στο Δ.



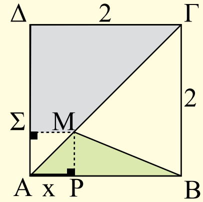
Αν με x συμβολίσουμε το μήκος της διαδρομής που έκανε το κινητό Μ και με $f(x)$ το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου,

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης *f*.

ii) Να παραστήσετε γραφικά την *f*.

iii) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία ισχύει $f(x) = 120\ cm^2$.

17. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 2 μ. και το Μ είναι ένα σημείο της διαγωνίου ΑΓ με (ΑΡ) = x. Συμβολίζουμε με $f(x)$ το εμβαδόν του τριγώνου ΜΑΒ και με g (x) το εμβαδόν του τραπεζίου ΜΓΔΣ.



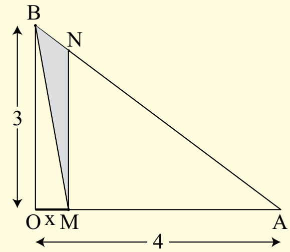
i) Να αποδείξετε ότι

$f(x) = x,\ 0 \leq x \leq 2$ και $g(x) = -0,5x^2 + 2,\ 0 \leq x \leq 2.$

ii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες τα δύο εμβαδά είναι ίσα.

iii) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις *f* και *g* και να βρείτε, με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, με προσέγγιση την τιμή του x για την οποία τα δύο εμβαδά είναι ίσα.

18. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο, το Μ είναι τυχαίο σημείο της ΟΑ και ΜΝ//ΟΒ. Αν (ΟΑ) = 4, (ΟΒ) = 3 και (ΟΜ) = x, και Ε(x) είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΒΜΝ,

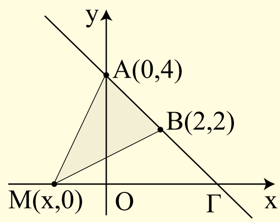


i) Να αποδείξετε ότι

$$(MN)=\frac{3(4-x)}{4} \quad \text{και} \quad E(x)=-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{2}x.$$

ii) Να βρείτε τη θέση του Μ για την οποία το εμβαδόν Ε(x) μεγιστοποιείται. Ποια είναι η μέγιστη τιμή του Ε(x).

19. Σε ένα καρτεσιανό επίπεδο θεωρούμε τα σημεία Α(0,4) και Β(2,2), καθώς και το σημείο Μ(x,0) που κινείται κατά μήκος του άξονα x′x.



i) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ στο οποίο τέμνει η ευθεία ΑΒ τον άξονα x′x.

ii) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου $M\overset{\Delta}{A}B$ συναρτήσει της τετμημένης x του σημείου Μ και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή.

20. Σε ένα τμήμα ΑΒ = 10km μιας λεωφόρου πέφτει συνεχώς χιόνι και το ύψος του χιονιού αυξάνεται 1cm την ώρα. Όταν αρχίζει η χιονόπτωση ένα εκχιονιστικό μηχάνημα αρχίζει από το άκρο Α να καθαρίζει το χιόνι κινούμενο κατά μήκος του δρόμου με ταχύτητα 10km/h. Μόλις φτάσει στο Β γυρίζει και καθαρίζει το δρόμο αντιστρόφως από το Β προς το Α και συνεχίζει με τον ίδιο τρόπο.

i) Να σχεδιάσετε ένα διάγραμμα για το ύψος του χιονιού στο Α, παραβλέποντας το χρόνο στροφής στα Α και Β.

ii) Να κάνετε το ίδιο για το ύψος του χιονιού στο μέσο Μ του ΑΒ.

21. Έστω ο δειγματικός χώρος Ω = {0, 1, 2, 3, ..., 100}. Δίνονται και οι πιθανότητες $P(\kappa)=\frac{1}{2^{\kappa}}$, κ = 1, 2, ..., 100. Να υπολογίσετε την πιθανότητα P(0).

22. Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων και Α, Β υποσύνολα του Ω. Υποθέτουμε ότι $P(A')\leq 0{,}28$ και $P(B')\leq 0{,}71$. Να αποδείξετε ότι **i)** $P(A\cap B)\geq 1{,}01-P(A\cup B)$ και **ii)** $A\cap B\neq\varnothing$.

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

§1.1

Α΄ Ομάδας

1-5. Να χρησιμοποιήσετε δενδροδιαγράμματα.

6. i) Ασυμβίβαστα
ii) Δεν είναι ασυμβίβαστα
iii) Δεν είναι ασυμβίβαστα
iv) Ασυμβίβαστα.

7. {ααα, αακ, ακα, ακκ, καα, κακ, κκα, κκκ}.

Β΄ Ομάδας

1. Ω={αα, αβα, αββ, βαα, βαβ, ββ}.

2. Να βρείτε το δειγματικό χώρο και τα ενδεχόμενα με τη βοήθεια πίνακα διπλής εισόδου.

§1.2

Α΄ Ομάδας

1. i) $\frac{1}{13}$ **ii)** $\frac{12}{13}$.

2. $\frac{1}{4}$.

3. i) $\frac{15}{40}$ **ii)** $\frac{25}{40}$ **iii)** $\frac{25}{40}$.

4. $\frac{9}{30}$.

5. i) $\frac{3}{11}$ **ii)** $\frac{8}{11}$.

6. i) 50% **ii)** 30%.

7. $\frac{11}{30}$.

8. $\frac{2}{3}$.

9. 0,4.

10. $\frac{3}{4}$.

11. $P(A\cup B)\leq P(A)+P(B)\Leftrightarrow$
$P(A)+P(B)-P(A\cap B)\leq P(A)+P(B)$
κτλ.

12. 65%.

13. α) 14% β) 12%.

14. 10%.

Β΄ Ομάδας

1. i) $\kappa+\lambda-\mu$
ii) $1-\kappa-\lambda+\mu$
iii) $\kappa+\lambda-2\mu$.

2. 55%.

3. $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$.

4. Αν $P(A)=x$, τότε $P(A')=1-x$ κτλ.

5. Να λάβετε υπόψη ότι $A\cap B\subseteq A$ και $P(A\cup B)\leq 1$.

6. Να λάβετε υπόψη ότι $P(A')=1-P(A)$ και $P(A\cup B)\leq 1$.

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

§2.1

Α΄ Ομάδας

1. ii) 1.

2. 1.

3. i) 4.000 **ii)** 9.999 **iii)** 3

4. ii) 4.

5. ii) 1.

7. $7\cdot 2^{\nu}$.

Β΄ Ομάδας

1. i) $\alpha-1$
ii) $\frac{\alpha+2}{\alpha+1}$.

2. i) $(\alpha-1)^2$ ii) 1.

3. i) x^2y^2
ii) $\frac{xy}{x-y}$.

4. 1.

§2.2

Α΄ Ομάδας

1. i) Πάρτε τη διαφορά
ii) Πάρτε τη διαφορά.
2. Άθροισμα τετραγώνων.
3. i) 2, −1 **ii)** 1, −2.
4. i) 9, 8 και 10.
ii) −0,9 και −0,7.
iii) $\frac{45}{54}$ και $\frac{46}{53}$
iv) 48,34 και 50,32.
5. i) 10,2 και 16,2
ii) 6,38 και 15,68.
6. Απαλοιφή παρονομαστών.
7. $5 - x < 0$.

Β΄ Ομάδας

1. i) Απαλοιφή παρονομαστών
ii) απαλοιφή παρονομαστών.
2. Πάρτε τη διαφορά.
3. Εκτέλεση πράξεων.
4. i) Πολλαπλασιάστε με το 2
ii) πολλαπλασιάστε με το 2.

§2.3

Α΄ Ομάδας

1. i) $\pi - 3$
ii) $4 - \pi$
iii) 1
iv) 0.
2. 1.
3. i) −1 **ii)** 1.
4. 1.
5. 2 ή 0 ή −2.
6. i) $d(2{,}37, D) \leq 0{,}005$
ii) 2,365 και 2,375.

Β΄ Ομάδας

1. Χρησιμοποιήστε τριγωνική ανισότητα.
3. i) $x = y = 0$
ii) $x \neq 0$ ή $y \neq 0$.
4. i) $\frac{\alpha}{\beta} < 1 < \frac{\beta}{\alpha}$.
ii) Αρκεί να δειχθεί $1 - \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\beta}{\alpha} - 1$.
5. i) 9,5 έως 10,5
ii) 15,2 έως 16,8
iii) 3,8π έως 4,2π.

§2.4

Α΄ Ομάδας

1. i) 10
ii) 2
iii) $\frac{1}{10}$.
2. i) $4 - \pi$
ii) 20
iii) $|x - 1|$
iv) $\frac{|x|}{2}$.
10. i) $\frac{10 + 2\sqrt{3}}{11}$
ii) $4(\sqrt{7} + \sqrt{5})$
iii) $13 + 2\sqrt{42}$.

Β΄ Ομάδας

2. ii) Χρησιμοποιήστε το ερώτημα (i).
3. i) $\frac{25}{6}$
ii) $\frac{(\alpha + 1)^2}{\alpha}$.

3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

§3.1

Α' Ομάδας

1. i) 5
ii) −1
iii) −7
iv) $\frac{11}{3}$.

2. **i)** Αδύνατη **ii)** ταυτότητα.

3. **i)** Αν $\lambda \neq 1$, τότε $x = 1$,
αν $\lambda = 1$, ταυτότητα.

ii) Αν $\lambda \neq 2$, τότε $x = \frac{\lambda}{\lambda - 2}$,
αν $\lambda = 2$, αδύνατη.

iii) Αν $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$, τότε $x = \frac{1}{\lambda}$,
αν $\lambda = 0$, αδύνατη,
αν $\lambda = 1$, ταυτότητα.

iv) Αν $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$, τότε $x = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}$,
αν $\lambda = 0$, ταυτότητα,
αν $\lambda = 1$, αδύνατη.

4. **i)** $x = 2{,}5$ **ii)** $x = \frac{15}{8}$.

5. 2.750 και 1.250.

6. **i)** $t = \frac{v - v_0}{\alpha}$ **ii)** $R_1 = \frac{R_2 R}{R_2 - R}$.

7. **i)** 4 και −1 **ii)** 2 και −1.

8. **i)** 0 και 1 **ii)** −1 και 0.

9. **i)** 2 και 1 **ii)** 1 και 2.

10. **i)** 2, 1 και −1 **ii)** 2 και 1.

11. **i)** −1 **ii)** αδύνατη.

12. **i)** αδύνατη
ii) $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$ και $x \neq -2$
iii) αδύνατη
iv) $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 1$ και $x \neq -1$.

13. (−1, 0, 1), (1, 2, 3) και (−3, −2, −1).

14. **i)** 4 και −1 **ii)** 3 και $\frac{5}{3}$ **iii)** 1
iv) αδύνατη.

15. **i)** −1 και 1 **ii)** αδύνατη.

16. **i)** −5 και $-\frac{9}{5}$ **ii)** 1 και 3.

Β΄ Ομάδας

2. $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$.

3. 50 ml.

4. 3 λεπτά.

5. Αν $\alpha \neq 0$, τότε $x = -\frac{\alpha}{2}$, αν $\alpha = 0$,
τότε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$.

6. $x = 0$.

7. −2 και 2.

8. 2 και $\frac{3}{2}$.

§3.2

Α΄ Ομάδας

1. **i)** 5 **ii)** 3 **iii)** 1.

2. **i)** −5 **ii)** −3 **iii)** −1.

3. **i)** 8 και −8 **ii)** 3 και −3 **iii)** 2 και −2.

4. **i)** 0 και 2 **ii)** 0 και −1 **iii)** 0.

5. 3, 3 και 9.

6. **i)** 3 **ii)** $-\frac{1}{5}$ **iii)** 1 και 4.

§3.3

Α΄ Ομάδας

1. **i)** $\frac{3}{2}$ και 1 **ii)** 3 **iii)** αδύνατη.

2. **i)** 1,3 και −1,3 **ii)** 0 και 2 **iii)** αδύνατη.

3. **i)** $\Delta = 4(\lambda - 1)^2$ **ii)** $\Delta = (\alpha - \beta)^2$.

4. 1 και −1.

5. $\Delta = -4(\alpha - \beta)^2$.

6. **i)** $x^2 - 5x + 6 = 0$
ii) $2x^2 - 3x + 1 = 0$
iii) $x^2 - 10x + 1 = 0$.

7. **i)** 5 και −3
ii) $\frac{9 + \sqrt{41}}{2}$ και $\frac{9 - \sqrt{41}}{2}$.

8. **i)** $\sqrt{5}$ και $\sqrt{3}$ **ii)** 1 και $-\sqrt{2}$.

9. $-(\alpha + \beta)$ και $(\beta - \alpha)$.

10. 24 και 10.

11. **i)** 3, −3, 4 και −4 **ii)** 5 και −5
iii) 6, −6, 2, και −2.

12. 0 και 2.

13. 1, $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ και $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

14. **i)** 2 και −3 **ii)** −1.

15. **i)** 2 και −2
ii) $-\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2}$ **iii)** αδύνατη.

Β΄ Ομάδας

3. -7 και 1.

4. Θέτουμε όπου x το $\frac{1}{\rho}$.

5. i) α και $-\frac{1}{\alpha}$ **ii)** β και $\frac{\alpha^2}{\beta}$.

6. i) $\Delta = 4\lambda^2+32$ **ii)** -2 και 4, $\lambda=-1$.

7. 3, 4 και 5.

8. 1.

9. 12 ώρες, 24 ώρες.

10. $\alpha=9$, ρίζες είναι οι: 3, -3, 1 και -1.

4ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

§4.1

Α΄ Ομάδας

1. i) $x<-\frac{3}{10}$ **ii)** αδύνατη **iii)** $x\in\mathbb{R}$.

2. i) $1\le x<3$.

3. Όχι.

4. 0, 1 και 2.

5. i) $x\in(-3,3)$
ii) $x\in[-3,5]$
iii) $x\in(-3,2)$.

6. i) $x\in(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$
ii) $x\in(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$
iii) $x\in(-\infty,-3]\cup[2,+\infty)$.

7. i) $x\ge 3$ **ii)** $x\le\frac{1}{3}$.

8. i) $x\in(-1,3)$ **ii)** $x\in\mathbb{R}$.

9. $x\in[-2,8]$.

10. $|x+2|<5$.

11. $[5,10]$.

Β΄ Ομάδας

1. i) $x\in\left[1,\frac{7}{4}\right]$ **ii)** $x\in\left[\frac{4}{3},2\right]$.

2. i) $x\in[-4,-2]\cup[2,4]$
ii) $x\in[1,3]\cup[7,9]$.

3. i) 1 **iii)** $x\ge 1$.

4. i) 4 **iii)** $1\le x\le 7$.

§4.2

Α΄ Ομάδας

1. i) $(x-1)(x-2)$ **ii)** $(2x+1)(x-2)$.

2. i) $\frac{x-1}{2x+1}$ **ii)** $\frac{2(x-3)}{x-7}$ **iii)** $\frac{2x-3}{x-1}$.

3. i) $x^2-2x-15>0$, για $x\in(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$
ii) $4x^2-4x+1=(2x-1)^2$
iii) $x^2-4x+3>0$ για $x\in\mathbb{R}$.

4. i) $-x^2+4x-3>0$ για $x\in(1,3)$
ii) $-9x^2+6x-1=-(3x-1)^2$
iii) $-x^2+2x-2<0$ για $x\in\mathbb{R}$.

5. i) $x\in[0,4]$ **ii)** $x\in[-4,1]$.

6. i) $x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$
ii) $x\in\left(-1,\frac{5}{2}\right)$.

7. i) $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 2$ **ii)** $x=3$.

8. i) Αδύνατη **ii)** $x\in\mathbb{R}$.

9. $x\in(1,3)$.

10. $x\in(-4,-1)\cup(3,4)$.

11. $x\in(1,2)\cup(3,5)$.

Β΄ Ομάδας

1. i) $(\alpha-\beta)(\alpha+2\beta)$, $(\alpha+2\beta)(\alpha-3\beta)$
ii) $\frac{\alpha-\beta}{\alpha-3\beta}$, $\alpha\neq 3\beta$ και $\alpha\neq-2\beta$.

2. $(2x-\alpha)(x+\beta)$.

3. $\frac{x+\beta}{x-2\alpha}$, $x\neq\alpha$ και $x\neq 2\alpha$.

4. i) 4 **ii)** $\lambda<0$ ή $\lambda>4$ **iii)** $0<\lambda<4$.

5. $0<\lambda<\frac{4}{9}$.

6. i) $\Delta = -8\lambda^2 - 24\lambda$, $\lambda < -3$ ή $\lambda > 0$

ii) $\lambda < -3$.

7. Το Μ βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία που τριχοτομούν την ΑΓ.

8. ii) $A > 0$ με α, β ομόσημους,

$A < 0$ με α, β ετερόσημους.

§4.3

Α΄ Ομάδας

1.

x	$-\infty$		-1		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
P(x)		+	0	−	0	+	0	−	

2.

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
P(x)		−	0	+	0	−	0	−	

3. $x \in (-3,1) \cup (3,+\infty)$.

4. $x \in [-3,0] \cup [3,+\infty)$.

5. $x \in (-\infty,-2] \cup \{-1\} \cup [1,+\infty)$.

6. $x \in \left(-\infty,-\frac{3}{2}\right) \cup (1,3)$.

7. i) $x \in (-\infty,-1) \cup (2,+\infty)$

ii) $x \in \left[-\frac{1}{2},3\right)$.

8. $x \in (-2,-1] \cup (1,2]$.

Β΄ Ομάδας

1. i) $x \in \left(1,\frac{7}{2}\right)$

ii) $x \in (-\infty,-2] \cup \left(-\frac{5}{3},+\infty\right)$.

2. $x \in (-\infty,-3] \cup (1,4]$.

3. i) $x \in \left(1,\frac{5}{3}\right) \cup [2,5]$

ii) $x \in (-\infty,-2) \cup \left(\frac{1}{2},1\right] \cup [3,+\infty)$.

4. $x \in \left(-\frac{1}{3},0\right) \cup (0,1)$.

5. $1,59 < x < 4,41$.

6. $1 < t < 4$.

5ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

§5.1

Α΄Ομάδας

1. i) 3, 5, 7, 9, 11 **ii)** 2, 4, 8, 16, 32

iii) 2, 6, 12, 20, 30 **iv)** 0, 1, 2, 3, 4

v) 1, −0,1, 0,01, −0,001, 0,0001

vi) $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{8}, \frac{15}{16}, \frac{33}{32}$

vii) 4, 3, 2, 1, 0

viii) $\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ix) $2, 1, \frac{8}{9}, 1, \frac{32}{25}$

x) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

xi) 1, −1, 1, −1, 1.

2. i) $2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2$

ii) 0, 1, 2, 5, 26 **iii)** 3, 4, 6, 10, 18.

3. i) $\alpha_1 = 6$ και $\alpha_{\nu+1} = 1 + \alpha_\nu$

ii) $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu$

iii) $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu + 1$

iv) $\alpha_1 = 8$ και $\alpha_{\nu+1} = 5 + \alpha_\nu$

4. i) $\alpha_\nu = 2\nu - 1$ **ii)** $\alpha_\nu = 3 \cdot 5^{\nu-1}$

§5.2

Α΄Ομάδας

1. i) $\alpha_\nu = 3\nu + 4$

ii) $\alpha_\nu = 2\nu + 9$

iii) $\alpha_\nu = -3\nu + 8$

iv) $\alpha_\nu = \frac{1}{2}\nu + \frac{3}{2}$

v) $\alpha_\nu = 3\nu - 3$.

2. **i)** $\alpha_{15}=68$ **ii)** $\alpha_{20}=144$
iii) $\alpha_{30}=323$
iv) $\alpha_{35}=289$ **v)** $\alpha_{50}=\frac{101}{3}$
vi) $\alpha_{47}=35$

3. **i)** $\alpha_1=7,\ \omega=1$ **ii)** $\alpha_1=2,\ \omega=4$
iii) $\alpha_1=14,\ \omega=3$.

4. **i)** $\alpha_{50}=8{,}5$ **ii)** $\alpha_{18}=121$.
5. **i)** Ο 20^{ος} όρος **ii)** ο 6^{ος} όρος.
6. **i)** −15 **ii)** $x=16$.
7. **i)** 20 και 30.
8. **i)** 1840 **ii)** 1560 **iii)** 3360 **iv)** 3620.
9. **i)** −9320 **ii)** 2080.
10. **i)** 4950 **ii)** 1386 **iii)** −2030.
11. **i)** 9 όρους **ii)** 8 όρους.
12. **i)** 53,585.

Β΄ Ομάδας

1. Πάρτε τη διαφορά $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu$, $\alpha_1=8$, $\omega=-4$.
2. **i)** 40000 **ii)** 90300 **iii)** 36036.
3. **i)** 3900 **ii)** 6615.
4. **i)** 2205 **ii)** −4220.
5. S = (1+2+...+200) − (4+8 + ... + 200) − (9 + 18 +...+ 198) + (36 + 72 +...+ 180) = 13263
6. Απαιτούνται τουλάχιστον 20 πρώτοι όροι.
7. 1η γραμμή: 10, 780
2η γραμμή: 4, 1539
3η γραμμή: 1, 34
4η γραμμή: −38, −368
8. 78 το 12/ωρο και άρα 156 το 24/ωρο
9. 81840, 2480.
10. 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66, 73.
11. $\frac{\nu+1}{2}$.
12. 40m βάθος.

§5.3

Α΄ Ομάδας

1. **i)** $\alpha_\nu=3\cdot 2^{\nu-1}$ **ii)** $\alpha_\nu=2\cdot 3^{\nu-2}$
iii) $\alpha_\nu=3^{\nu+1}$ **iv)** $\alpha_\nu=\frac{1}{2^{\nu+1}}$
v) $\alpha_\nu=\frac{1}{2^{\nu-5}}$ **vi)** $\alpha_\nu=\frac{2}{3^{\nu-3}}$
vii) $\alpha_\nu=(0,4)^{\nu-1}$ **viii)** $\alpha_\nu=(-2)^\nu$
ix) $\alpha_\nu=(-3)^\nu$.

2. **i)** $\alpha_9=64$ **ii)** $\alpha_7=1458$
iii) $\alpha_8=\frac{1}{3}$ **iv)** $\alpha_{10}=-512$
v) $\alpha_9=\left(\frac{3}{2}\right)^5$.

3. **i)** $\alpha_1=\frac{1}{3}$ **ii)** $\alpha_1=1$.
4. **i)** $\lambda=2$ **ii)** $\lambda=\frac{2}{3}$.
5. **i)** $\alpha_{14}=\frac{1000}{8192}$ **ii)** $\alpha_{21}=16\sqrt{2}$.
6. 9 όροι.
7. **i)** Ο 10ος όρος **ii)** Ο 11ος όρος.
8. **i)** 10,1 **ii)** $x=3$.
9. **i)** 1023 **ii)** 8572 **iii)** 1364.
10. **i)** 10922 **ii)** $\simeq 8$ **iii)** 171.
11. 12288.
12. $\simeq 0{,}74$m.

Β΄ Ομάδας

1. Πάρτε το λόγο $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$.
2. $\nu=14$.
3. **i)** Σχηματίζουν γεωμετρική πρόοδο με 1ο όρο α_1^2 και λόγο λ^2
ii) Σχηματίζουν γεωμετρική πρόοδο με 1ο όρο α_1^k και λόγο λ^k.
4. $\alpha_1=\sqrt{3},\ \lambda=\sqrt{3}$
ή $\alpha_1=-(3+2\sqrt{3}),\ \lambda=-\sqrt{3}$.
5. 1023.

6. $\alpha_{\nu+1} = 1{,}02 \cdot \alpha_\nu$,
$\simeq 109{,}8$ εκατομμύρια.

7. $I_{\nu+1} = 0{,}9 \cdot I_\nu$, $\simeq 0{,}35 \cdot I_0$.

8. i) $\lambda = \sqrt[12]{2}$, **ii)** $261 \cdot \sqrt[12]{2^5}$.

9. i) $D_{\nu+1} = 0{,}9 D_\nu$ **ii)** $\simeq 20{,}87$ lt.

10. $9{,}223 \cdot 10^{11}$ τόνοι.

11. i) $S_\nu = 3 \cdot 4^{\nu-1}$ **ii)** $U_\nu = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\nu-1}$.

§5.4

Α΄ Ομάδας

1. 6381,4 ευρώ.

2. 37.204,87 ευρώ.

3. 5%.

4. 27342,05 ευρώ.

6ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

§6.1

Α΄ Ομάδας

1. i) $\mathbb{R} - \{1\}$ **ii)** $\mathbb{R} - \{0, 4\}$
iii) $\mathbb{R}$ **iv)** $(0, +\infty)$.

2. i) $[1, 2]$ **ii)** $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
iii) $[1, 3]$ **iv)** $[0, 1) \cup (1, +\infty)$.

3. –125, 3, 15.

4. i) $f(x) = (x+2)^2, \quad x \in \mathbb{N}$
ii) 4, 5, 8, 10.

5. i) $x = 3$ **ii)** αδύνατο
iii) $x = 2$ ή $x = -2$.

§6.2

Α΄ Ομάδας

2. $2 < x < 5$ και $1 < y < 6$.

3. i) $(-1, -3)$ **ii)** $(1, 3)$
iii) $(3, -1)$ **iv)** $(1, -3)$.

4. i) $2\sqrt{5}$ **ii)** 5 **iii)** 4 **iv)** 5.

5. i) $AB = A\Gamma$
ii) $(B\Gamma)^2 = (AB)^2 + (A\Gamma)^2$.

6. $(AB) = (B\Gamma) = (\Gamma\Delta) = (\Delta A) = 5$.

7. i) 2 **ii)** –1 **iii)** 4.

8. i) $(4, 0)$, $(0, -4)$
ii) $(2, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 6)$
iii) $(1, 0)$, $(0, 1)$ **iv)** $(0, 1)$
v) $(1, 0)$ **vi)** $(-2, 0)$, $(2, 0)$.

9. i) $(0, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$
ii) $x < -1$ ή $x > 1$.

10. i) $(2, -2)$, $(5, 4)$ **ii)** $2 < x < 5$.

§6.3

Α΄ Ομάδας

1. i) 45° **ii)** 60° **iii)** 135° **iv)** 120°.

2. i) 1 **ii)** –1 **iii)** 0 **iv)** –2.

3. i) $y = -x + 2$ **ii)** $y = x + 1$
iii) $y = 2x - 1$.

4. i) $y = x + 1$ **ii)** $y = -x + 3$
iii) $y = 1$ **iv)** $y = -2x + 5$.

5. -40°C.

6. Αποτελείται από την ημιευθεία $y = -x + 2$, $x \le 0$, το ευθύγραμμο τμήμα $y = 2$, $0 \le x \le 1$ και την ημιευθεία $y = x + 1$, $x \ge 1$.

7. i) –1, 1 και –2, 0, 1
ii) $x \in (-\infty, 1) - \{-1\}$,
$x \in [-2, 0] \cup [1, +\infty)$.

8. i) $x \in [-1, 1]$, $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Β΄ Ομάδας

1. i) $f(-6) = 1$, $f(-5) = \frac{1}{2}$, $f(-4) = 0$,
$f(-3) = -\frac{1}{2}$, $f(-2) = -1$, $f(-1) = 0$,
$f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 0$,
$f(4) = -1$, $f(5) = -2$
ii) $f(x) = 0 : -4, -1, 3$
$f(x) = -1 : -2, 4$
$f(x) = 1 : x \in [0, 2] \cup \{-6\}$
iii) $y = 0{,}5 \cdot x$, $x \in [2, 5] \cup \{-2\}$.

2. $y = x - 1$, $x \ge 1$.

3. i) $B(t) = 2000 - 100t$, $0 \le t \le 20$,

$\Delta(t) = 600 + 100t,\ 0 \le t \le 20,$

ii) $t = 7$ min.

4. $f(x) = -x + 8,\ 0 \le x \le 4.$

5. i) $h_1(t) = -\dfrac{20}{3}t + 20,\ \ 0 \le t \le 3,$

$h_2(t) = -5t + 20,\ 0 \le t \le 4,$

ii) 2,4h **iii)** 2,4h.

§6.4

A΄ Ομάδας

5. i) $2(x-2)^2$ **ii)** $2(x-3)^2 - 3$

iii) $2(x+2)^2$ **iv)** $2(x+3)^2 - 3.$

§6.5

A΄ Ομάδας

1. $f\downarrow(-\infty,1],\ f\uparrow[1,+\infty),\ g\uparrow(-\infty,0],$
$g\downarrow[0,2],\ \ g\uparrow[2,+\infty),\ h\downarrow(-\infty,-1],$
$h\uparrow[-1,0],\ h\downarrow[0,1],\ h\uparrow[1,+\infty).$

2. $f(1) = -1$ ολικό ελάχιστο,
η g δεν έχει ολικά ακρότατα,
$h(-1) = -2,\ \ h(1) = -2$ ολικό ελάχιστο.

3. i) Αρκεί $f(x) \ge f(3)$
ii) Αρκεί $g(x) \le g(1)$.

4. i) Άρτια **ii)** άρτια **iii)** τίποτα
iv) περιττή **v)** τίποτα **vi)** περιττή.

5. i) Άρτια **ii)** τίποτα **iii)** περιττή
iv) περιττή **v)** άρτια **vi)** άρτια.

6. i) Περιττή **ii)** άρτια **iii)** τίποτα.

7. i) Άρτια **ii)** περιττή **iii)** τίποτα.

7ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

§7.1

A΄ Ομάδας

1. $y = 2x^2$.

4. $x^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1,\ x^2 > 1 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 1$.

B΄ Ομάδας

2. $f\downarrow(-\infty,0],\ \ f\uparrow[0,+\infty),\ \ f(0) = 0,$ ελάχιστο.

3. i) α) $x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$

β) $x^3 > x^2 > x > \sqrt{x}$.

4. $\sqrt{3}$.

§7.2

A΄ Ομάδας

1. $y = \dfrac{2}{x}$. **4.** $\dfrac{1}{x} \le 1 \Leftrightarrow x < 0$ ή $x \ge 1$,

$\dfrac{1}{x} > 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$

5. $\dfrac{1}{x} \le x^2 \Leftrightarrow x < 0$ ή $x \ge 1$, $\dfrac{1}{x} > x^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0 < x < 1$

6. $y = \dfrac{4}{x}$.

§7.3

A΄ Ομάδας

1. i) $y = 2\cdot(x-1)^2 + 3$
ii) $y = -2\cdot(x-2)^2 - 1.$

2. α) $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{3}{2}$ ελάχιστο

β) $g\left(-\dfrac{5}{6}\right) = \dfrac{49}{12}$ μέγιστο.

B΄ Ομάδας

1. i) 1 **ii)** −1 **iii)** −3, 5.

2. i) $\alpha < 0$ **ii)** $\Delta > 0$ **iii)** $\alpha = -1,\ \ \gamma = -5.$

3. i) $f(x) = -x^2 + 10x$ **ii)** $f(5) = 25.$

4. i) $E = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(x^2 - 6x + 18)$
ii) $MA = MB$.

5. 30, 40.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

2. ii)

3	4	5
8	6	10
5	12	13
21	20	29
16	30	34
15	8	17

4. ii) $2 < \alpha < 3$.

5. iii) $\lambda = 3$ ή $\lambda = 1$.

6. A) i) $t = 6$ **ii)** $t_1 = 2$, $t_2 = 10$.

7. $E = 8$ τ.μ.

8. $x < 2$.

9. B) Αν $\alpha < 0$, αδύνατο, αν $\alpha = 0$, δύο λύσεις, αν $0 < \alpha < 3$ τέσσερις λύσεις, αν $\alpha = 3$ τρεις λύσεις, αν $\alpha > 3$ δύο λύσεις.

10. iii) Αν $\alpha = \pm\sqrt{2}$ δύο λύσεις, αν $0 < \alpha < \sqrt{2}$ ή $-\sqrt{2} < \alpha < 0$, τέσσερις λύσεις, αν $\alpha = \pm 1$ τρεις λύσεις, αν $\alpha < -\sqrt{2}$ ή $\alpha > \sqrt{2}$ αδύνατο.

11. $x = 1$.

12. iii) f: ελάχιστο 2, g: ελάχιστο 0, μέγιστο 2.

15. Ναι.

16. i) $f(x) = \begin{cases} 5x, 0 \le x \le 20 \\ 10x - 100, 20 \le x \le 40 \\ 5x + 100, 40 \le x \le 60 \end{cases}$

iii) $x = 22$.

17. ii) $x = \sqrt{5} - 1$.

18. ii) $x = 2$, $E = 1,5$ τ.μ.

19. i) 4, 0 **ii)** $E(x) = |x - 4|$.

21. Να λάβετε υπόψη ότι $P(0) + P(1) + \ldots + P(100) = 1$.

22. i) $P(A') = 1 - P(A)$ κτλ.

ii) Να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής.

ΑΝΑΘΕΩΡΗΜΕΝΗ ΕΚΔΟΣΗ
22-0284

Κωδικός Βιβλίου: 0-22-0284
ISBN 978-960-06-2294-2

ΙΤΥΕ ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ
ινστιτούτο τεχνολογίας υπολογιστών & εκδόσεων

(01) 000000 0 22 0284 6