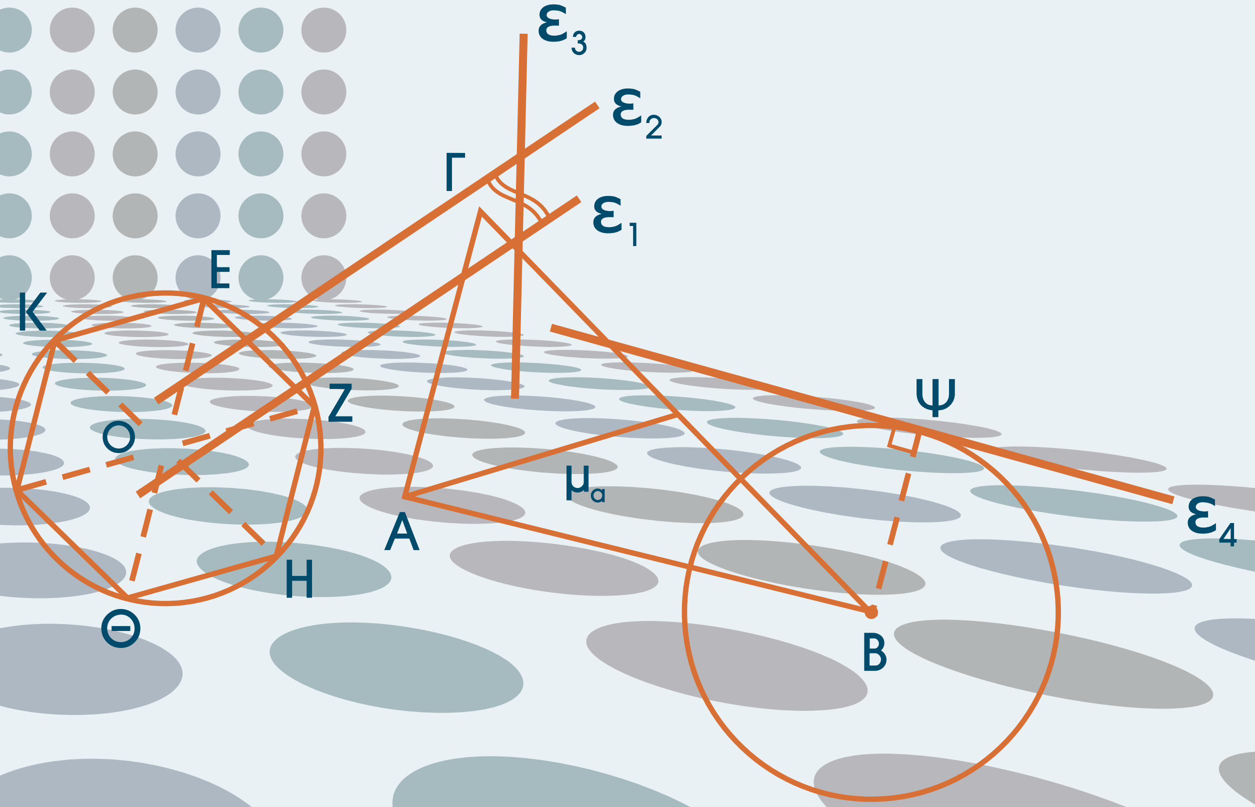
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Τεύχος Β΄



Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Τεύχος Β΄

ΑΡΓΥΡΟΠΟΥΛΟΣ ΗΛΙΑΣ
ΒΛΑΜΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΚΑΤΣΟΥΛΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ
ΜΑΡΚΑΤΗΣ ΣΤΥΛΙΑΝΟΣ
ΣΙΔΕΡΗΣ ΠΟΛΥΧΡΟΝΗΣ

ΑΝΑΔΟΧΟΣ ΕΡΓΟΥ:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΟΜΑΔΑ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ	**Αργυρόπουλος Ηλίας** *Διδάκτωρ Μαθηματικών Ε.Μ.Πολυτεχνείου, Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης*
	Βλάμος Παναγιώτης *Διδάκτωρ Μαθηματικών Ε.Μ.Πολυτεχνείου*
	Κατσούλης Γεώργιος *Μαθηματικός*
	Μαρκάτης Στυλιανός *Επίκουρος Καθηγητής Τομέα Μαθηματικών Ε.Μ.Πολυτεχνείου*
	Σίδερης Πολυχρόνης *Μαθηματικός, τ. Σχολικός Σύμβουλος*
ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ	**Βανδουλάκης Ιωάννης** *Διδάκτωρ Πανεπιστημίου Μ. Lomonosov Μόσχας Ιόνιο Πανεπιστήμιο*
ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ	**Δημητρίου Ελένη**
ΕΠΙΛΟΓΗ ΕΙΚΟΝΩΝ	**Παπαδοπούλου Μπία**
ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ ΣΕΛΙΔΟΠΟΙΗΣΗ	**Αλεξοπούλου Καίτη**

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η «Ευκλείδεια Γεωμετρία» έχει ένα διττό ρόλο να εκπληρώσει: να μυηθεί ο μαθητής στη συλλογιστική την οποία εκφράζει το αξεπέραστο λογικό-επαγωγικό σύστημα του Ευκλείδη και να ανταποκριθεί στις σύγχρονες εκπαιδευτικές επιταγές.

Το βιβλίο αυτό, σύμφωνο με τα πλαίσια συγγραφής που έθεσε το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, ευελπιστεί ότι θα οδηγήσει τους μαθητές του Λυκείου να γνωρίσουν την αυστηρή αλλά και λιτή μαθηματική γλώσσα, ελπίζοντας ότι θα συνεισφέρει στη μαθηματική παιδεία του τόπου, αναπτύσσοντας το ρεαλισμό της μαθηματικής λογικής και σκέψης.

Το έργο αυτό είναι αποτέλεσμα της συλλογικής προσπάθειας μιας ομάδας μαθηματικών, οι οποίοι αποδεχόμενοι την πρόσκληση του Δ.Σ. της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας εργάστηκαν συστηματικά για την πραγματοποίησή του.

Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε θερμά: το Δ.Σ. της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας για τη βοήθεια που μας πρόσφερε σε όλη τη διάρκεια της συγγραφής του έργου, τον Καθηγητή του Ε.Μ.Πολυτεχνείου κ. Ευγένιο Αγγελόπουλο για τις σημαντικές του παρατηρήσεις στη διαμόρφωση του βιβλίου και τα μέλη της επιτροπής κρίσης που με τις εύστοχες παρατηρήσεις τους βοήθησαν στην τελική μορφή αυτού του έργου.

Οι συγγραφείς

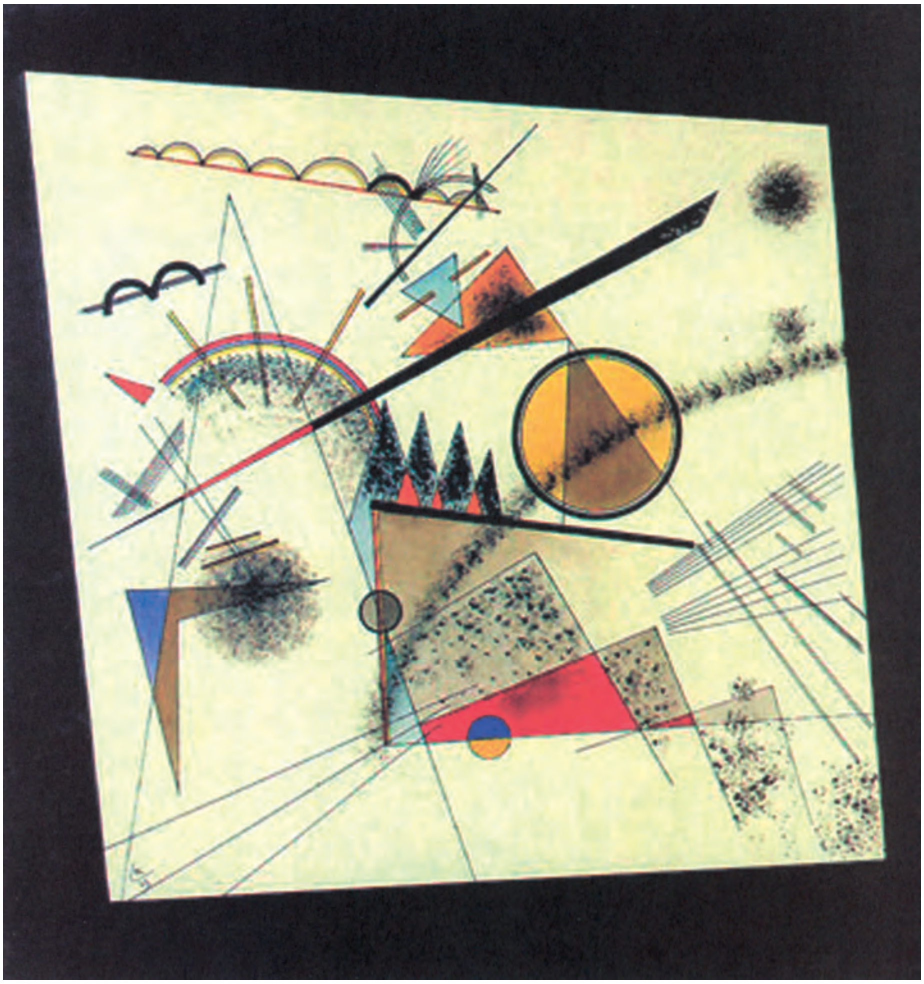
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε αρχικά τα ευθύγραμμα τμήματα. Θα εισαγάγουμε την έννοια του λόγου ευθύγραμμων τμημάτων, απ' όπου θα προκύψει η έννοια της μέτρησης και του μέτρου ευθύγραμμου τμήματος.

Στη συνέχεια θα αποδειχθούν οι βασικές προτάσεις του κεφαλαίου που είναι το θεώρημα του Θαλή και το θεώρημα των Διχοτόμων ενός τριγώνου.



Βασίλη Καντίνσκυ (Ρώσος, 1866 - 1944),
«Μέσα στο μαύρο τετράγωνο» 1923.

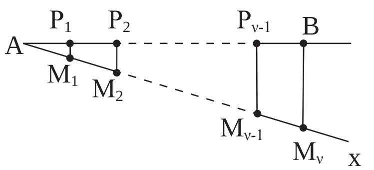
7.1 Εισαγωγή

Μέγεθος γενικά λέγεται οτιδήποτε επιδέχεται αύξηση ή ελάττωση. **Γεωμετρικά μεγέθη** λέγονται τα μεγέθη που εξετάζονται από τη Γεωμετρία. Τέτοια είναι τα ευθύγραμμα τμήματα, οι γωνίες, τα τόξα, οι επιφάνειες επίπεδων σχημάτων, οι όγκοι των στερεών κτλ.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τα απλούστερα γεωμετρικά μεγέθη, τα ευθύγραμμα τμήματα.

Αρχικά θα διαιρέσουμε δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα σε ν ίσα μέρη.

7.2 Διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος σε ν ίσα μέρη



Σχήμα 1

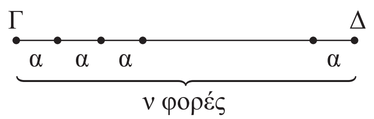
Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, το οποίο θέλουμε να διαιρέσουμε σε ν ίσα μέρη ($\nu \geq 2$).

Φέρουμε τυχαία ημιευθεία Αx, διαφορετική από την ΑΒ και παίρνουμε με το διαβήτη πάνω σε αυτή ν διαδοχικά ίσα τμήματα $AM_1 = M_1M_2 = ... = M_{\nu-1}M_\nu$.

Έπειτα φέρουμε το τμήμα $M_\nu B$ και από τα σημεία M_1, M_2, ..., $M_{\nu-1}$ φέρουμε παράλληλες προς τη $M_\nu B$ που τέμνουν το ΑΒ στα σημεία $P_1, P_2, ..., P_{\nu-1}$ αντίστοιχα. Οι παράλληλες αυτές, σύμφωνα με το θεώρημα ΙΙΙ, §5.6, ορίζουν ν ίσα τμήματα πάνω στην ΑΒ. Επομένως τα ν ίσα ευθύγραμμα τμήματα AP_1, P_1P_2, ..., $P_{\nu-1}B$ είναι τα ζητούμενα.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε, γενικά, το γινόμενο ευθύγραμμου τμήματος με οποιονδήποτε ρητό αριθμό και το λόγο δύο ευθύγραμμων τμημάτων.

7.3 Γινόμενο ευθύγραμμου τμήματος με αριθμό - Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων



Σχήμα 2

- Όπως είδαμε στην §2.8, αν ΑΒ = α ευθύγραμμο τμήμα και ν **φυσικός** αριθμός, ονομάζουμε γινόμενο του τμήματος ΑΒ επί το φυσικό αριθμό ν το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, το οποίο είναι το άθροισμα ν ευθύγραμμων τμημάτων ίσων προς το ΑΒ = α. Γράφουμε $\Gamma\Delta = \nu \cdot AB$.
- Αν χωρίσουμε, όπως παραπάνω, το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = α σε ν ίσα μέρη καθένα από τα ν ίσα τμήματα τα παριστάνουμε με $\frac{AB}{\nu}$ ή $\frac{1}{\nu} \cdot AB$. Ένα ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ λέγεται ***υποδιαίρεση*** (ή ***υποπολλαπλάσιο***) του ΑΒ αν

υπάρχει ένας φυσικός αριθμός ν ώστε $\text{ΕΖ} = \dfrac{\text{ΑΒ}}{\nu}$.

Σχήμα 3

- Αν μ είναι ένας θετικός ακέραιος και προσθέσουμε μ τέτοια τμήματα προκύπτει το τμήμα $\text{ΓΔ} = \mu\left(\dfrac{1}{\nu}\text{ΑΒ}\right) = \dfrac{\mu}{\nu}\text{ΑΒ}$.

  Ονομάζουμε λοιπόν ***γινόμενο*** του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ επί το **θετικό ρητό** αριθμό $q = \dfrac{\mu}{\nu}$ το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, το οποίο είναι το άθροισμα μ ευθύγραμμων τμημάτων ίσων με $\dfrac{1}{\nu}$ΑΒ.

  Γράφουμε $\text{ΓΔ} = q \cdot \text{ΑΒ}$.

  Ορίζουμε ότι το γινόμενο ευθύγραμμου τμήματος επί τον αριθμό $q = 0$ είναι το **μηδενικό** ευθύγραμμο τμήμα.

  Αποδεικνύεται ότι για ένα δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και ένα **θετικό άρρητο** αριθμό ρ υπάρχει πάντοτε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ τέτοιο, ώστε $\text{ΓΔ} = \rho \cdot \text{ΑΒ}$. Η κατασκευή όμως, τέτοιων ευθύγραμμων τμημάτων με τον κανόνα και το διαβήτη δεν είναι πάντοτε δυνατή.

ΣΧΟΛΙΟ

Η γραφή $\dfrac{Γ\Delta}{AB}$ δεν σημαίνει διαίρεση ευθύγραμμων τμημάτων αλλά είναι συμβολική γραφή της ισότητας $Γ\Delta = q \cdot AB$. Σημαίνει διαίρεση όταν τα θεωρήσουμε πάνω στην ίδια ευθεία.

- Έστω δύο μη μηδενικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ. Αν υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ και φυσικοί αριθμοί μ, ν τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\text{ΑΒ} = \nu \cdot \text{ΚΛ}$ και $\text{ΓΔ} = \mu \cdot \text{ΚΛ}$ τα δύο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται ***σύμμετρα***. Το ΚΛ λέγεται ***κοινό μέτρο*** των ΑΒ και ΓΔ.

  Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι αν τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είναι σύμμετρα, τότε θα υπάρχει ένας θετικός ρητός αριθμός $q = \dfrac{\mu}{\nu}$ τέτοιος, ώστε $\text{ΓΔ} = q \cdot \text{ΑΒ}$. Ο αριθμός q λέγεται ***λόγος*** των δύο τμημάτων και γράφεται με μορφή κλάσματος, δηλαδή $q = \dfrac{\text{ΓΔ}}{\text{ΑΒ}}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

*Το κοινό μέτρο δεν είναι μοναδικό γιατί κάθε υποδιαίρεση του ΚΛ είναι κοινό υποπολλαπλάσιο των ΑΒ και ΓΔ. Επίσης είναι φανερό ότι **δύο σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα είναι (ακέραια) πολλαπλάσια κάθε κοινού τους μέτρου.***

Δύο ευθύγραμμα τμήματα που δεν είναι σύμμετρα λέγονται ***ασύμμετρα***. Θα λέμε επίσης ότι ο λόγος τους είναι ***άρρητος*** αριθμός. Τέτοιες περιπτώσεις δεν είναι σπάνιες. Θα δούμε αργότερα ότι η πλευρά και η διαγώνιος ενός τετραγώνου δεν έχουν κοινό μέτρο.

7.4 Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα - Αναλογίες

Δύο ευθύγραμμα τμήματα α, γ λέγονται ***ανάλογα*** προς δύο άλλα ευθύγραμμα τμήματα β, δ όταν ο λόγος του α προς το β ισούται με το λόγο του γ προς το δ, δηλαδή όταν ισχύει: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ (1). Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει θετικός αριθμός λ, ώστε να ισχύει $\alpha=\lambda\cdot\beta$ και $\gamma=\lambda\cdot\delta$.

Η παραπάνω ισότητα (1) λέγεται ***αναλογία*** με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ και δ. Τα τμήματα α και β λέγονται ***ομόλογα*** ή ***αντίστοιχα***. Το ίδιο και τα γ και δ.

Τα α, δ λέγονται ***άκροι όροι***, ενώ τα β, γ ***μέσοι όροι*** της αναλογίας. Ο τέταρτος όρος δ της αναλογίας λέγεται και ***τέταρτη ανάλογος*** των α, β και γ.

Στην αναλογία $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}$ οι μέσοι όροι είναι ίσοι. Αυτή η αναλογία λέγεται ***συνεχής*** και ο β λέγεται ***μέση ανάλογος*** των α και γ. Το β λέγεται επίσης ***γεωμετρικός μέσος*** των α και γ. Συχνά είναι χρήσιμο να αντικαταστήσουμε μια αναλογία με μια ισοδύναμη έκφραση. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των αναλογιών, που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο, τις οποίες παίρνουμε χωρίς απόδειξη. Οι σπουδαιότερες από αυτές είναι οι εξής:

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\alpha\delta=\beta\gamma,\quad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}\Leftrightarrow\beta^2=\alpha\gamma$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\frac{\alpha\pm\beta}{\beta}=\frac{\gamma\pm\delta}{\delta},\quad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\alpha\pm\beta}=\frac{\gamma}{\gamma\pm\delta}$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\ldots=\frac{\kappa}{\lambda}=\frac{\alpha+\gamma+\ldots+\kappa}{\beta+\delta+\ldots+\lambda}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όταν εφαρμόζουμε ιδιότητες σε αναλογίες με όρους ευθύγραμμα τμήματα, θεωρούμε ότι έννοιες που δεν έχουν οριστεί για ευθύγραμμα τμήματα (π.χ. "πολλαπλασιασμός ευθύγραμμων τμημάτων"), αναφέρονται αποκλειστικά στα μήκη τους.

7.5 Μήκος ευθύγραμμου τμήματος

Όταν λέμε ότι θα **μετρήσουμε** ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σημαίνει ότι θα το συγκρίνουμε με ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, το οποίο παίρνουμε ως **μονάδα μέτρησης**. Η επιλογή της μονάδας μέτρησης είναι αυθαίρετη.

Στο 2ο κεφάλαιο αναφέραμε την έννοια του μήκους ευθύγραμμου τμήματος. Εδώ θα διατυπώσουμε τον ορισμό με τη βοήθεια του λόγου ευθύγραμμων τμημάτων.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- *Το μέτρο του τμήματος είναι μη αρνητικός αριθμός και θα συμβολίζεται όπως και το τμήμα. Έτσι,* ***με το σύμβολο ΑΒ θα εννοούμε και το μέτρο του τμήματος ΑΒ.***
- *Όσα αναφέραμε για το* ***λόγο*** *και το* ***μέτρο*** *τμήματος ισχύουν γενικά και για άλλα γεωμετρικά μεγέθη, όπως η γωνία, το τόξο κτλ.*

Ορισμός

Μέτρο ή μήκος **ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο λόγος του προς ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα, που παίρνουμε ως μονάδα μέτρησης.**

Άμεσες συνέπειες του ορισμού του μέτρου τμήματος είναι οι παρακάτω προτάσεις:

- Δύο ίσα τμήματα έχουν ίσα μέτρα και αντίστροφα, ως προς οποιαδήποτε μονάδα μέτρησης.
- Ο λόγος των μέτρων δύο τμημάτων, που μετρώνται με την ίδια μονάδα μέτρησης, ισούται με το λόγο των δύο τμημάτων και είναι ανεξάρτητος από τη μονάδα μέτρησης.

7.6 Διαίρεση τμημάτων εσωτερικά και εξωτερικά ως προς δοσμένο λόγο

Σχήμα 4

Είδαμε στην §7.2 πώς διαιρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα σε ν ίσα μέρη. Θα δούμε στη συνέχεια πότε ένα σημείο Μ διαιρεί ένα ευθύγραμμο τμήμα σε δοσμένο λόγο. Σε ευθεία xy δίνονται δύο ορισμένα σημεία Α και Β. Έστω σημείο Μ της ευθείας xy, διαφορετικό του Β. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1) Αν το Μ είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ τότε ο λόγος των αποστάσεών του από τα Α και Β ισούται με $\frac{MA}{MB}$. Λέμε ότι **το Μ *διαιρεί εσωτερικά* το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε λόγο λ, αν και μόνο αν** $\frac{\mathbf{MA}}{\mathbf{MB}} = \lambda$.
Για το σημείο Μ ισχύει η παρακάτω πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Το σημείο Μ είναι μοναδικό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν M′ εσωτερικό σημείο του AB ώστε $\frac{M'A}{M'B}=\lambda$, τότε έχουμε:

$$\frac{MA}{MB}=\frac{M'A}{M'B}\Leftrightarrow\frac{MA}{MA+MB}=\frac{M'A}{M'A+M'B}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{MA}{AB}=\frac{M'A}{AB}\Leftrightarrow MA=M'A,$$

οπότε το σημείο M ταυτίζεται με το σημείο M′.

Αν $\frac{MA}{MB}=\lambda$, τότε

$$\frac{MA}{MB}=\frac{\lambda}{1}\Leftrightarrow\frac{MA}{MA+MB}=\frac{\lambda}{\lambda+1}\Leftrightarrow \mathbf{MA}=\frac{\boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{\lambda+1}}\mathbf{AB}\ \text{ και}$$

$$MB=AB-MA=AB-\frac{\lambda}{\lambda+1}AB\Leftrightarrow \mathbf{MB}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda+1}}\mathbf{AB}.$$

2) Αν M σημείο στην προέκταση του ευθύγραμμου τμήματος AB, τότε πάλι ο λόγος των αποστάσεών του από τα A και B ισούται με $\frac{MA}{MB}$. Λέμε ότι **το M *διαιρεί εξωτερικά* το ευθύγραμμο τμήμα AB σε λόγο λ, αν και μόνο αν $\frac{MA}{MB}=\lambda$.** Ανάλογα αποδεικνύεται ότι και σε αυτή την περίπτωση, **το σημείο M είναι μοναδικό.**

Σχήμα 5

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

i) Αν $\lambda=1$, τότε προφανώς δεν υπάρχει σημείο M που να διαιρεί εξωτερικά το AB σε λόγο $\lambda=1$, αφού $MA\neq MB$. Στην περίπτωση αυτή το M είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος.

ii) Αν $\lambda>1$, τότε $\frac{MA}{MB}>1\Leftrightarrow MA>MB$, οπότε το M βρίσκεται στην προέκταση του AB, προς το μέρος του B (σχ.5). Στην περίπτωση αυτή έχουμε:

$$\frac{MA}{MB}=\lambda\Leftrightarrow\frac{MA}{MB}=\frac{\lambda}{1}\Leftrightarrow\frac{MA}{MA-MB}=\frac{\lambda}{\lambda-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{MA}{AB}=\frac{\lambda}{\lambda-1}\Leftrightarrow \mathbf{MA}=\frac{\boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{\lambda-1}}\mathbf{AB}\ \text{ και}$$

$$MB=MA-AB=\frac{\lambda}{\lambda-1}AB-AB\Leftrightarrow \mathbf{MB}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda-1}}\mathbf{AB}.$$

iii) Αν $\lambda<1$ τότε $\frac{MA}{MB}<1\Leftrightarrow MA<MB$, οπότε το M βρί-

Σχήμα 6

σκεται στην προέκταση του ΑΒ, προς το μέρος του Α (σχ.6). Όπως παραπάνω βρίσκουμε ότι

$$MA = \frac{\lambda}{1-\lambda}AB \text{ και } MB = \frac{1}{1-\lambda}AB.$$

iv) **Οριακές θέσεις**

α) Όταν το σημείο Μ τείνει στο Α, το τμήμα ΜΑ τείνει στο μηδενικό ευθύγραμμο τμήμα, οπότε ο λόγος λ τείνει στο μηδέν.

β) Όταν το σημείο Μ τείνει στο Β, το τμήμα ΜΒ τείνει στο μηδενικό ευθύγραμμο τμήμα, οπότε ο λόγος λ τείνει στο άπειρο.

γ) Όταν το σημείο Μ απομακρύνεται απεριόριστα, τα τμήματα ΜΑ και ΜΒ τείνουν να ταυτιστούν, οπότε ο λόγος λ τείνει στη μονάδα.

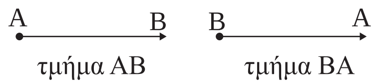
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Δεχόμαστε συμβατικά πως, όταν λέμε ότι το σημείο Μ διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε λόγο λ, εννοούμε $\frac{MA}{MB} = \lambda$ *και όχι* $\frac{MB}{MA} = \lambda$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

• *Αν Ο είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, τότε το σημείο Μ τέτοιο ώστε* $\frac{MA}{MB} = \lambda$ *βρίσκεται μεταξύ Ο και Α όταν* $\lambda < 1$ *και μεταξύ Ο και Β όταν* $\lambda > 1$.

• *Αν* $\frac{MB}{MA} = \lambda$, *λέμε ότι το Μ διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα ΒΑ σε λόγο λ.*
Δηλαδή θεωρούμε ότι τα άκρα Α και Β του τμήματος είναι ***διατεταγμένα***.
Ένα τέτοιο ευθύγραμμο τμήμα λέγεται ***προσανατολισμένο***.



Σχήμα 7

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Να ορίσετε τους παρακάτω λόγους:*

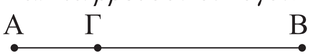
i) της υποτείνουσας ορθογώνιου τριγώνου προς την αντίστοιχη διάμεσο,

ii) μιας εγγεγραμμένης γωνίας προς την αντίστοιχη επίκεντρη,

iii) της διαμέτρου ενός κύκλου, προς την ακτίνα του,

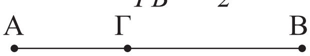
iv) μιας ορθής γωνίας προς μια γωνία ισόπλευρου τριγώνου.

2. *Στο παρακάτω σχήμα είναι* $AB = 10\alpha$ *και* $A\Gamma = 2\alpha$. *Να βρεθούν οι λόγοι:*



i) ΑΒ προς ΑΓ, *ii) ΑΓ προς ΑΒ,*
iii) ΒΓ προς ΑΒ, *iv) ΑΓ προς ΒΓ.*

3. *Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και σημείο του Γ έτσι ώστε* $\frac{A\Gamma}{\Gamma B} = \frac{1}{2}$.



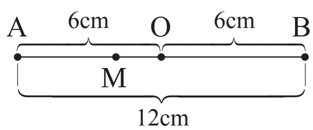
Τότε ο λόγος $\frac{B\Gamma}{AB}$ *είναι:*

i) 2 *ii) 3* *iii)* $\frac{3}{2}$ *iv)* $\frac{2}{3}$

v) κανένα από τα παραπάνω.

(Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας).

4. *Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα* $AB = 12$ *cm και το μέσο του Ο. Να βρεθεί σημείο Μ του ΑΟ, ώστε τα σημεία Μ και Β να διαιρούν εσωτερικά και εξωτερικά αντίστοιχα το τμήμα ΑΟ στον ίδιο λόγο.*



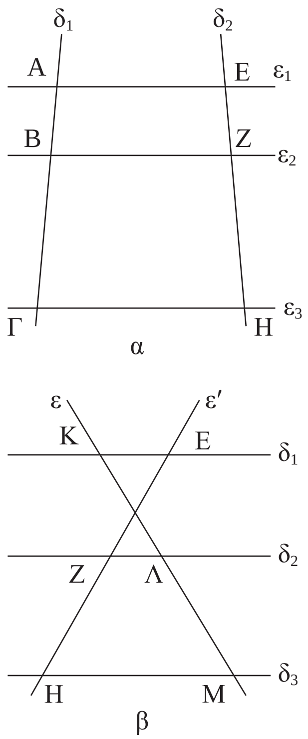
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Οι γωνίες ενός τριγώνου είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 4, 3, 2. Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου σε μοίρες.*

2. *Ο λόγος μιας γωνίας ω προς την παραπληρωματική της είναι $\frac{1}{3}$. Να βρεθεί η γωνία ω.*
3. *Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 6, 3, 4. Αν η περίμετρος του τριγώνου είναι 65cm, να βρεθούν τα μήκη των πλευρών του.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Οι εξωτερικές γωνίες ενός τριγώνου είναι ανάλογες των αριθμών 2, 3 και 4. Να υπολογισθούν οι εσωτερικές του γωνίες.*
2. *Σε ευθεία ε παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ, ώστε ΑΒ = 6cm, ΒΓ = 12cm, ΓΔ = 2cm. Να βρεθεί σημείο Μ του ΒΓ, το οποίο διαιρεί εσωτερικά τα τμήματα ΑΔ και ΒΓ στον ίδιο λόγο.*
3. *Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των αναλογιών, να διαιρέσετε δοσμένο τμήμα ΑΒ = α σε δύο τμήματα, τα οποία έχουν λόγο $\frac{3}{4}$.*



Σχήμα 8

7.7 Θεώρημα του Θαλή

Είδαμε στην §5.6 ότι αν παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες και ορίζουν **ίσα** τμήματα πάνω στη μία, θα ορίζουν ίσα τμήματα και πάνω στην άλλη. Τα παραπάνω γενικεύονται για οποιονδήποτε λόγο στο επόμενο θεώρημα που είναι γνωστό ως θεώρημα του Θαλή.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες τέμνουν δυο άλλες ευθείες, ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα.

Δηλαδή:

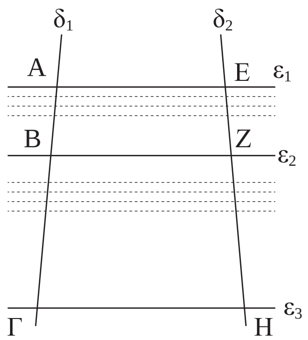
Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$, τότε $\frac{AB}{EZ} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{A\Gamma}{EH}$ **(σχ.8α).**

Αν $\delta_1 // \delta_2 // \delta_3$, τότε $\frac{K\Lambda}{EZ} = \frac{\Lambda M}{ZH} = \frac{KM}{EH}$ **(σχ.8β).**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Αν τα τμήματα ΑΒ και ΒΓ (σχ.9) είναι σύμμετρα, υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα μ τέτοιο, ώστε ΑΒ = κμ και ΒΓ = λμ (1), όπου κ, λ φυσικοί αριθμοί. Διαιρούμε το τμήμα ΑΒ σε κ τμήματα ίσα με το μ και το ΒΓ σε λ τμήματα ίσα με το μ.

Από τα σημεία που ορίζονται με τον παραπάνω τρόπο φέρουμε ευθείες παράλληλες προς την ε_1, οι οποίες τέμνουν τη δ_2. Επειδή τα τμήματα που ορίζονται πάνω στη δ_1 είναι ίσα μεταξύ τους, τότε και τα τμήματα που ορίζονται πάνω στη δ_2 θα είναι ίσα τμήματα, που το μήκος του καθενός ας είναι ν. Τότε θα έχουμε ΕΖ = κν και ΖΗ = λν (2).



Σχήμα 9

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι: $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{κμ}{λμ}=\frac{κ}{λ}$ και $\frac{ΕΖ}{ΖΗ}=\frac{κν}{λν}=\frac{κ}{λ}$, οπότε $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{ΕΖ}{ΖΗ}$ ή $\frac{ΑΒ}{ΕΖ}=\frac{ΒΓ}{ΖΗ}$ (3).

Από την αναλογία (3) παίρνουμε:

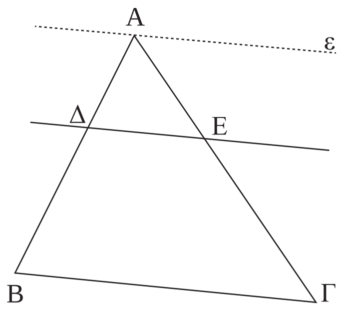
$$\frac{ΑΒ}{ΕΖ}=\frac{ΒΓ}{ΖΗ}=\frac{ΑΒ+ΒΓ}{ΕΖ+ΖΗ} \text{ ή } \frac{ΑΒ}{ΕΖ}=\frac{ΒΓ}{ΖΗ}=\frac{ΑΓ}{ΕΖ}.$$

ii) Αν τα τμήματα ΑΒ και ΒΓ είναι ασύμμετρα, ο λόγος $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}$ είναι ασύμμετρος αριθμός. Αποδεικνύεται ότι και σε αυτή την περίπτωση ισχύει η προηγούμενη αναλογία.

Ισχύει και το **αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή**.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Θεωρούμε δύο ευθείες $δ_1$ και $δ_2$ που τέμνουν δύο παράλληλες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ στα σημεία Α, Β και Ε, Ζ αντίστοιχα. Αν Γ και Η είναι σημεία των ευθειών $δ_1$ και $δ_2$ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{ΕΖ}{ΖΗ}$, τότε η ευθεία ΓΗ είναι παράλληλη προς τις $ε_1$ και $ε_2$ (σχ.9).



Σχήμα 10

ΠΟΡΙΣΜΑ

Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα και αντίστροφα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΔΕ//ΒΓ (σχ.10).

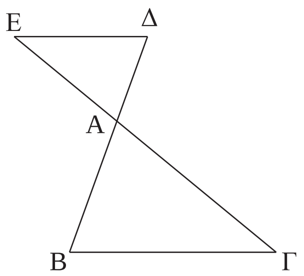
Φέρουμε από την κορυφή Α ευθεία ε//ΒΓ//ΔΕ, οπότε από το θεώρημα του Θαλή προκύπτει ότι

$$\frac{ΑΔ}{ΑΕ}=\frac{ΔΒ}{ΕΓ}.$$

Μια σημαντική εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή είναι το επόμενο θεώρημα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

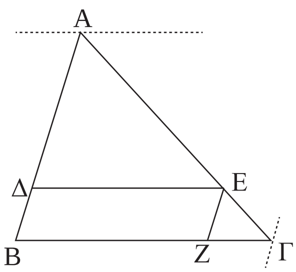
Το παραπάνω πόρισμα ισχύει και στην περίπτωση που η ΔΕ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.



Σχήμα 11

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.



Σχήμα 12

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΔΕ//ΒΓ (σχ.12). Θα αποδείξουμε ότι:

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΔΕ}{ΒΓ}.$$

Επειδή ΔΕ//ΒΓ, από το θεώρημα του Θαλή έχουμε

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ} \qquad (1).$$

Φέρουμε την ΕΖ παράλληλη της ΑΒ, οπότε το ΔΕΖΒ είναι παραλληλόγραμμο, άρα ΔΕ = ΒΖ (2).

Επειδή ΕΖ//ΑΒ, από το θεώρημα του Θαλή έχουμε

$$\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΒΖ}{ΒΓ} \text{ ή } \frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΔΕ}{ΒΓ} \qquad (3).$$

Από τις (1) και (3) προκύπτει ότι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΔΕ}{ΒΓ}$.

- Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Θαλή γίνονται ορισμένες γεωμετρικές κατασκευές. Δύο από τις σπουδαιότερες είναι τα παρακάτω προβλήματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

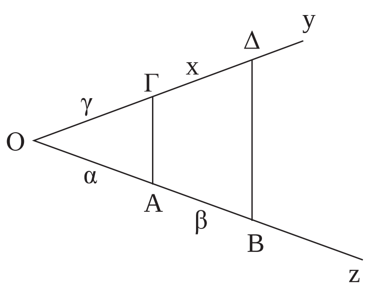
ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΕΤΑΡΤΗΣ ΑΝΑΛΟΓΟΥ

Αν δοθούν τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ, να κατασκευασθεί το τμήμα x, που ορίζεται από την αναλογία $\frac{α}{β}=\frac{γ}{x}$.

Λύση

Έστω μια γωνία zÔy. Πάνω στη μία πλευρά της Οz παίρνουμε διαδοχικά τα τμήματα ΟΑ = α, ΑΒ = β και πάνω στην Οy το τμήμα ΟΓ = γ. Από το Β φέρουμε την παράλληλη προς την ΑΓ, που τέμνει την Οy στο Δ. Τότε ΓΔ = x γιατί

$$\frac{ΟΑ}{ΑΒ}=\frac{ΟΓ}{ΓΔ} \text{ ή } \frac{α}{β}=\frac{γ}{x}.$$



Σχήμα 13

Είναι φανερό ότι με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζεται το τμήμα x αν $\frac{x}{α}=\frac{β}{γ}$ ή $\frac{α}{x}=\frac{β}{γ}$ ή $\frac{α}{β}=\frac{x}{γ}$,

αρκεί κάθε φορά να γράφουμε το x ως τέταρτο όρο της αναλογίας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΣΕ ΔΟΣΜΕΝΟ ΛΟΓΟ

Να διαιρεθεί ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, εσωτερικά και εξωτερικά, σε δοσμένο λόγο $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν γνωστά τμήματα.

Λύση

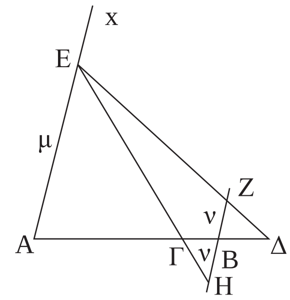
Από το Α φέρουμε μια ημιευθεία Αx, πάνω στην οποία παίρνουμε τμήμα ΑΕ = μ. Από το Β φέρουμε ευθεία παράλληλη της Αx και παίρνουμε πάνω σε αυτή εκατέρωθεν του Β τμήματα ΒΖ = ΒΗ = ν. Τα σημεία Γ και Δ στα οποία οι ευθείες ΕΗ και ΕΖ τέμνουν την ευθεία ΑΒ είναι τα ζητούμενα. Πράγματι, τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΓΗΒ έχουν ανάλογες πλευρές, οπότε:

$$\frac{ΓΑ}{ΓΒ} = \frac{ΑΕ}{ΒΗ} = \frac{\mu}{\nu}.$$

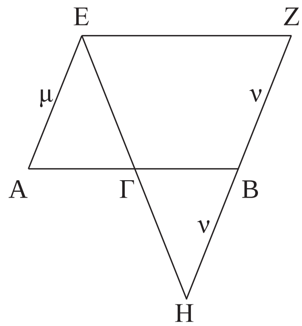
Όμοια τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΔΒΖ έχουν ανάλογες πλευρές, οπότε:

$$\frac{ΔΑ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΒΖ} = \frac{\mu}{\nu}.$$

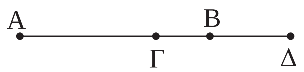
- Αν μ = ν, το τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε η ΕΖ **δε** δίνει σημείο Δ πάνω στην ΑΒ, ενώ το Γ είναι το **μέσο** του ΑΒ.



Σχήμα 14



Σχήμα 15



Σχήμα 16

Δύο σημεία Γ και Δ, που διαιρούν εσωτερικά και εξωτερικά το τμήμα ΑΒ στον ίδιο λόγο, λέγονται ***συζυγή αρμονικά*** των Α και Β (σχ.16).

Δηλαδή τα Γ και Δ είναι συζυγή αρμονικά των Α και Β, αν τα τέσσερα σημεία είναι συνευθειακά και

$$\frac{ΓΑ}{ΓΒ} = \frac{ΔΑ}{ΔΒ}.$$

Από τη σχέση αυτή παίρνουμε την αναλογία

$$\frac{ΓΑ}{ΔΑ} = \frac{ΓΒ}{ΔΒ} \quad ή \quad \frac{ΑΓ}{ΑΔ} = \frac{ΒΓ}{ΒΔ},$$

από την οποία προκύπτει ότι και τα Α και Β είναι συζυγή αρμονικά των Γ και Δ. Τα τέσσερα σημεία (Α, Β) και (Γ, Δ) λέμε ότι αποτελούν ***αρμονική τετράδα***.

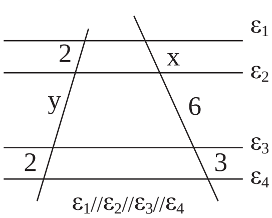
ΣΗΜΕΙΩΣΗ

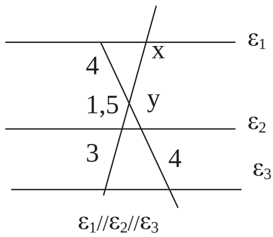
*Το Δ λέγεται **αρμονικό συζυγές** του Γ ως προς τα Α και Β. Όπως είδαμε παραπάνω, αν το Γ είναι το μέσο του ΑΒ, το Δ **δεν** υπάρχει.*

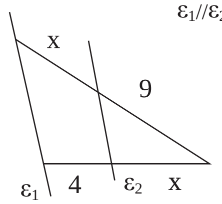
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

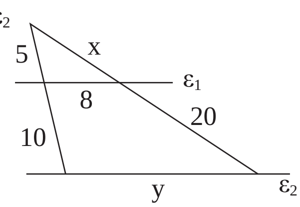
Ερωτήσεις Κατανόησης

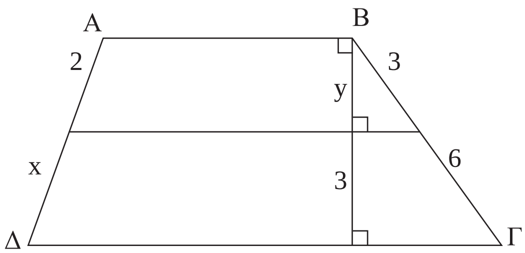
1. *Στα παρακάτω σχήματα να βρείτε τα x και y.*



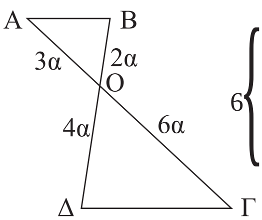


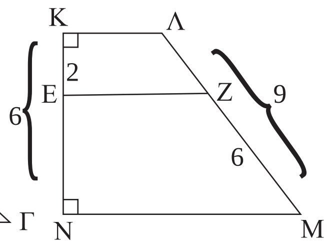






2. *Να δικαιολογήσετε γιατί ΑΒ//ΓΔ και ΕΖ//ΚΛ//ΜΝ στα παρακάτω σχήματα.*

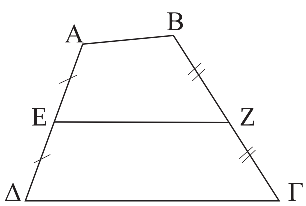




3. *Στο παρακάτω σχήμα είναι:*

i) $\dfrac{AE}{E\Delta} = \dfrac{BZ}{Z\Gamma}$ ☐ Σ ☐ Λ

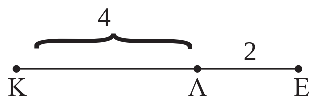
ii) ΕΖ//ΓΔ ☐ Σ ☐ Λ



Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις προηγούμενες σχέσεις και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

4. *Δίνεται τμήμα ΑΒ και δυο σημεία Γ και Δ ώστε $\dfrac{\Gamma A}{\Gamma B} = \dfrac{\Delta A}{\Delta B}$. Αρκεί η προηγούμενη σχέση ώστε τα Γ και Δ να είναι συζυγή αρμονικά των Α και Β;*

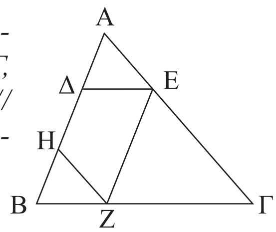
5. *Στο παρακάτω σχήμα είναι ΚΛ = 4, ΛΕ = 2. Να βρεθεί σημείο Ζ τέτοιο, ώστε τα σημεία (Ζ, Ε) να είναι συζυγή αρμονικά των (Κ, Λ).*



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Στο διπλανό σχήμα είναι ΔΕ//ΒΓ, ΕΖ//ΑΒ και ΖΗ//ΑΓ. Να αποδείξετε ότι*

$$\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{HB}{HA}.$$



2. *Από την κορυφή Α παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρουμε ευθεία ε η οποία τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ στο Ε, την πλευρά ΒΓ στο Ζ και την προέκταση της ΔΓ στο Η. Να αποδείξετε ότι*

i) $\dfrac{AZ}{AH} = \dfrac{AB}{\Delta H}$, *ii)* $AE^2 = EZ \cdot EH$.

3. *Οι μη παράλληλες πλευρές ΑΔ, ΒΓ τραπεζίου ΑΒΓΔ τέμνονται στο Ο. Η παράλληλη από το Β προς την ΑΓ τέμνει την ΑΔ στο Ε. Να αποδείξετε ότι το ΟΑ είναι μέσο ανάλογο των ΟΔ και ΟΕ.*

4. *Από σημείο Δ της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε την παράλληλη προς τη διάμεσό του ΑΜ, που τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι* $\dfrac{AE}{AZ} = \dfrac{AB}{A\Gamma}$.

5. *Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και σημείο Ε της διαγωνίου ΑΓ. Οι παράλληλες από το Ε προς τις ΒΓ, ΓΔ τέμνουν τις ΑΒ, ΑΔ στα Ζ και Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΖΗ//ΔΒ.*

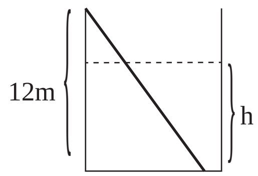
6. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ε της πλευράς ΒΓ, ώστε* $B\Delta = \Gamma E < \dfrac{B\Gamma}{2}$.

Οι παράλληλες από τα Δ και Ε προς τις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα τέμνουν την ΑΒ στο Ζ και την ΑΓ στο Η. Να αποδείξετε ότι ΖΗ//ΒΓ.

7. *Από τυχαίο σημείο Κ της διαμέσου ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΒ και ΑΓ, που τέμνουν τη ΒΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΜΔ = ΜΕ.*

8. *Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και Ε το μέσο της μικρής βάσης ΑΒ. Αν η ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και την προέκταση της ΓΒ στο Η, να αποδείξετε ότι τα Ζ, Η είναι συζυγή αρμονικά των Δ, Ε.*

9. *Δεξαμενή ύψους υ = 12m περιέχει νερό που φτάνει σε ύψος h. Ράβδος μήκους 15m τοποθετείται στη δεξαμενή, όπως στο παρακάτω σχήμα. Βγάζουμε τη ράβδο και παρατηρούμε ότι το τμήμα που βρέχτηκε έχει μήκος 10m. Μπορούμε να υπολογίσουμε το ύψος h του νερού;*



Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Αν τα Γ, Δ είναι συζυγή αρμονικά των Α, Β και Ο είναι το μέσο του ΑΒ, να αποδείξετε ότι τα Γ και Δ βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του Ο.*

2. *Να διαιρεθεί ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = α σε τμήματα x, y, ω τέτοια, ώστε 4x = 6y = 3ω.*

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R) και έστω Δ η τομή της διαμέτρου ΑΕ με τη ΒΓ. Αν Ζ και Η είναι οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΖΗ//ΒΓ.*

4. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ε της ΔΒ τέτοιο, ώστε* $ΔΕ = \frac{1}{5}ΔΒ$. *Αν η ΓΕ τέμνει την ΑΔ στο Ζ, να αποδείξετε ότι ΑΖ = 3ΔΖ.*

5. *Από την κορυφή Β παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρουμε ευθεία ε, που τέμνει την πλευρά ΑΔ στο Ε και την προέκταση της ΓΔ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι*

$$\frac{ΔΑ}{ΔΕ} - \frac{ΔΓ}{ΔΖ} = 1.$$

6. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε της ΒΓ ώστε ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ. Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει τη διάμεσο ΑΜ στο Κ. Να αποδείξετε ότι:*

i) Το Κ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

ii) ΚΕ//ΑΓ.

7. *Τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) οι διαγώνιες ΑΓ, ΒΔ τέμνονται στο Ο. Από το Ο φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΔ, ΒΓ που τέμνουν τη ΔΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΔΕ = ΓΖ.*

Σύνθετα Θέματα

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε* $\frac{ΔΑ}{ΔΒ} = \frac{ΕΓ}{ΕΑ}$.

Να αποδείξετε ότι τα μέσα Κ, Λ, Μ των ΑΒ, ΑΓ και ΔΕ αντίστοιχα, είναι συνευθειακά σημεία.

2. *Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε τυχαία ευθεία, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Ζ και Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΖΑ · ΗΓ = ΗΑ · ΖΒ.*

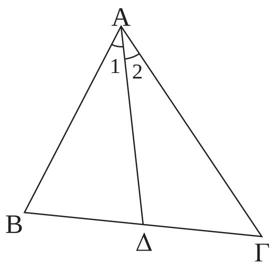
3. *Δίνεται ευθεία ε, τέσσερα διαδοχικά σημεία της Α, Γ, Β, Δ και σημείο Ο εκτός αυτής. Από το Β φέρουμε παράλληλη προς την ΟΑ, η οποία τέμνει τις ΟΓ, ΟΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα Γ, Δ είναι συζυγή αρμονικά των Α, Β, αν και μόνο αν ΒΕ = ΒΖ.*

4. *Αν ένα σημείο Δ χωρίζει εσωτερικά την πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ σε λόγο λ και ένα σημείο Ε χωρίζει εσωτερικά το ΑΔ σε λόγο κ, να υπολογισθεί ο λόγος στον οποίο χωρίζει η ευθεία ΒΕ την πλευρά ΑΓ.*

5. *Η εφαπτομένη ενός κύκλου σε σημείο του Μ τέμνει τις εφαπτόμενες στα άκρα Α, Β μιας διαμέτρου του ΑΒ, στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΒΓ, ΑΔ, να αποδείξετε ότι ΜΚ⊥ΑΒ.*

7.8 Θεωρήματα των διχοτόμων τριγώνου

Θα μελετήσουμε εδώ, ως εφαρμογές του θεωρήματος του Θαλή, βασικές ιδιότητες της εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου γωνίας τριγώνου.



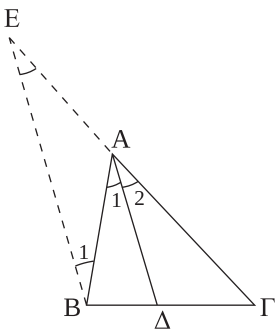
Σχήμα 17

ΘΕΩΡΗΜΑ (εσωτερικής διχοτόμου τριγώνου)

Η διχοτόμος μιας γωνίας τριγώνου διαιρεί την απέναντι πλευρά εσωτερικά σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών.

Δηλαδή, αν ΑΔ διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ, ισχύει

$$\frac{\mathbf{\Delta B}}{\mathbf{\Delta \Gamma}} = \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{A\Gamma}}.$$



Σχήμα 18

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ (σχ.18). Από το Β φέρουμε παράλληλη προς την ΑΔ, που τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο Ε. Από το θεώρημα του Θαλή στο τρίγωνο ΓΕΒ έχουμε $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AE}{A\Gamma}$ (1).

Για να αποδείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να αποδείξουμε ότι ΑΕ = ΑΒ. Πράγματι:

$\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ (εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ και ΒΕ),

$\hat{A}_2 = \hat{E}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΔ και ΒΕ),

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ΑΔ διχοτόμος),

οπότε $\hat{B}_1 = \hat{E}$ άρα ΑΕ = ΑΒ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$.

Επειδή το σημείο Δ που διαιρεί την πλευρά ΒΓ σε λόγο $\frac{AB}{A\Gamma}$ είναι μοναδικό, το θεώρημα ισχύει και αντίστροφα, δηλαδή:

Αν το Δ είναι σημείο της πλευράς ΒΓ και ισχύει $\frac{\mathbf{\Delta B}}{\mathbf{\Delta \Gamma}} = \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{A\Gamma}}$ τότε η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathbf{A}}$.

► Υπολογισμός των ευθύγραμμων τμημάτων, στα οποία διαιρεί η διχοτόμος την απέναντι πλευρά ως συνάρτηση των α, β, γ.

Στο σχ.18 θέλουμε να υπολογίσουμε τις αποστάσεις του Δ από τα Β και Γ.

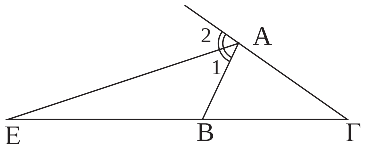
Η προηγούμενη αναλογία γράφεται:

$$\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{γ}{β} \quad ή \quad \frac{ΔΒ}{ΔΒ+ΔΓ}=\frac{γ}{β+γ} \quad ή \quad \frac{ΔΒ}{α}=\frac{γ}{β+γ}$$

οπότε $\mathbf{ΔΒ}=\dfrac{\boldsymbol{αγ}}{\boldsymbol{β+γ}}$. Όμοια βρίσκουμε $\mathbf{ΔΓ}=\dfrac{\boldsymbol{αβ}}{\boldsymbol{β+γ}}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ (εξωτερικής διχοτόμου τριγώνου)

Η διχοτόμος μιας εξωτερικής γωνίας τριγώνου τέμνει την προέκταση της απέναντι πλευράς σε ένα σημείο, το οποίο διαιρεί εξωτερικά την πλευρά αυτή σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών.

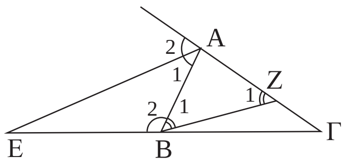


Σχήμα 19

Δηλαδή, αν η ΑΕ είναι εξωτερική διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ, ισχύει ότι:

$$\frac{\mathbf{ΕΒ}}{\mathbf{ΕΓ}}=\frac{\mathbf{ΑΒ}}{\mathbf{ΑΓ}}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 20

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και η εξωτερική διχοτόμος του ΑΕ (σχ.20). Από το Β φέρουμε παράλληλη προς την ΑΕ, που τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Από το θεώρημα του Θαλή στο τρίγωνο ΓΑΕ έχουμε

$$\frac{ΕΒ}{ΕΓ}=\frac{ΑΖ}{ΑΓ} \quad (1).$$

Για να αποδείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να αποδείξουμε ότι ΑΖ = ΑΒ. Πράγματι:

$\hat{Α}_1=\hat{Β}_1$ (εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΕ και ΒΖ),

$\hat{Α}_2=\hat{Ζ}_1$ (εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΕ και ΒΖ),

$\hat{Α}_1=\hat{Α}_2$ (ΑΕ εξωτερική διχοτόμος),

οπότε $\hat{Β}_1=\hat{Ζ}_1$ άρα ΑΕ = ΑΒ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\dfrac{ΕΒ}{ΕΓ}=\dfrac{ΑΒ}{ΑΓ}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το σημείο Ε βρίσκεται προς το μέρος της ***μικρότερης*** *πλευράς. Πράγματι αν $\beta > \gamma$ τότε $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ οπότε $\hat{\Gamma} = \varphi > 0$.*

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{A}_1 + \hat{B}_2 < 180°$.

Έχουμε $\hat{A}_1 = \dfrac{\hat{A}_{\varepsilon\xi}}{2} = \dfrac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2}$ και $\hat{B}_2 = 180° - \hat{B}$, οπότε

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_2 = 180° - \hat{B} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 180° - \left(\frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}\right) = 180° - \frac{\varphi}{2} < 180°.$$

Αν ΑΒ = ΑΓ, τότε το Ε ***δεν*** *υπάρχει. (Εφαρμογή 1 - §4.8)*

Το θεώρημα ισχύει και αντίστροφα, δηλαδή:

Αν το Ε είναι σημείο της προέκτασης της πλευράς ΒΓ και ισχύει $\dfrac{\text{ΒΕ}}{\text{ΕΓ}} = \dfrac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}}$, τότε η ΑΕ είναι η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\hat{\text{Α}}$.

► Υπολογισμός των ευθύγραμμων τμημάτων στα οποία διαιρεί η εξωτερική διχοτόμος την απέναντι πλευρά ως συνάρτηση των α, β, γ.

Στο σχ.20 θέλουμε να υπολογίσουμε τις αποστάσεις του Ε από τα Β και Γ.

Η προηγούμενη αναλογία γράφεται:

$$\frac{\text{ΕΒ}}{\text{ΕΓ}} = \frac{\gamma}{\beta} \quad \text{ή} \quad \frac{\text{ΕΒ}}{\text{ΕΓ}-\text{ΕΒ}} = \frac{\gamma}{\beta-\gamma} \quad \text{ή} \quad \frac{\text{ΕΒ}}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta-\gamma},$$

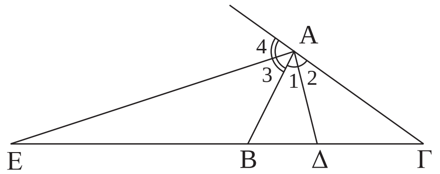
οπότε $\mathbf{ΕΒ} = \dfrac{\alpha\gamma}{\beta-\gamma}$. Όμοια βρίσκουμε ότι $\mathbf{ΕΓ} = \dfrac{\alpha\beta}{\beta-\gamma}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν Δ και Ε είναι τα ίχνη της εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$, τριγώνου ΑΒΓ, στην απέναντι πλευρά, θα είναι

$$\frac{ΔΒ}{ΔΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} \text{ και } \frac{ΕΒ}{ΕΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}, \text{ οπότε } \frac{ΔΒ}{ΔΓ} = \frac{ΕΒ}{ΕΓ}.$$

Δηλαδή τα ίχνη Δ και Ε των δύο διχοτόμων είναι σημεία ***συζυγή αρμονικά*** *ως προς τις κορυφές Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ.*



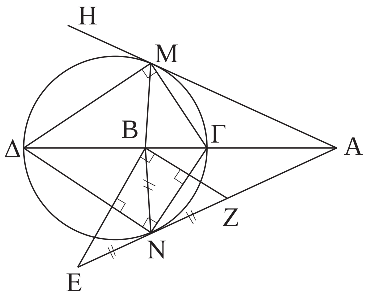
Σχήμα 21

7.9 Απολλώνιος Κύκλος

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που οι αποστάσεις τους από δύο ορισμένα σημεία Α και Β του επιπέδου έχουν γνωστό λόγο $\frac{\mu}{\nu} \neq 1$.

Λύση



Σχήμα 22

Έστω δύο δεδομένα σημεία Α, Β και Μ τυχαίο σημείο του τόπου με την ιδιότητα $\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$ (1).

Φέρουμε την εσωτερική διχοτόμο ΜΓ και την εξωτερική διχοτόμο ΜΔ του τριγώνου ΜΑΒ. Τότε

$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$ (2) και $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$ (3).

Δηλαδή, τα σημεία Γ και Δ είναι ορισμένα, αφού χωρίζουν το ΑΒ εσωτερικά και εξωτερικά σε λόγο $\frac{\mu}{\nu}$. Ακόμα είναι $\Gamma\hat{M}\Delta = 90°$, επειδή οι ΜΓ και ΜΔ είναι διχοτόμοι των δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών $A\hat{M}B$ και $B\hat{M}H$.

Άρα το Μ ανήκει σε κύκλο με διάμετρο το τμήμα ΓΔ.

Αντίστροφα: Έστω Ν ένα σημείο του κύκλου με διάμετρο το τμήμα ΓΔ. Τότε $\Gamma\hat{N}\Delta = 90°$. Θα αποδείξουμε ότι $\frac{NA}{NB} = \frac{\mu}{\nu}$.

Από το Β φέρουμε ΒΕ//ΓΝ, οπότε στο τρίγωνο ΑΒΕ είναι

$$\frac{NA}{NE} = \frac{\Gamma A}{\Gamma B} \text{ ή λόγω της (2) } \frac{NA}{NE} = \frac{\mu}{\nu} \quad (4).$$

Επίσης φέρουμε ΒΖ//ΔΝ, οπότε στο τρίγωνο ΑΔΝ είναι

$$\frac{NA}{NZ} = \frac{\Delta A}{\Delta B} \text{ ή λόγω της (3) } \frac{NA}{NZ} = \frac{\mu}{\nu} \quad (5).$$

Από τις σχέσεις (4) και (5) προκύπτει ότι $\frac{NA}{NE} = \frac{NA}{NZ}$, οπότε ΝΕ = ΝΖ, δηλαδή το Ν είναι μέσο του ΕΖ.

Επειδή $\Gamma\hat{N}\Delta = 90°$ και ΒΕ//ΓΝ, ΒΖ//ΔΝ, θα είναι και $E\hat{B}Z = 90°$, δηλαδή το τρίγωνο ΕΒΖ είναι ορθογώνιο στο $\hat{B}$ με διάμεσο ΒΝ, οπότε ΝΒ = ΝΕ = ΝΖ (6).

Από τις σχέσεις (4) και (6) έχουμε $\frac{NA}{NB} = \frac{\mu}{\nu}$.

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με διάμετρο ΓΔ.

Κατασκευή: Αν δοθούν τα σημεία Α και Β και ο λόγος $\frac{\mu}{\nu}$, διαιρούμε το τμήμα ΑΒ εσωτερικά και εξωτερικά σε λόγο $\frac{\mu}{\nu}$, όπως στο πρόβλημα 2, §7.7 και βρίσκουμε τα Γ και Δ. Στη συνέχεια γράφουμε τον κύκλο με διάμετρο ΓΔ.

Διερεύνηση: Αν είναι $\frac{\mu}{\nu} = 1$, τότε $\frac{MA}{MB} = 1$ ή ΜΑ = ΜΒ. Άρα το Μ ισαπέχει από τα Α και Β, οπότε ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

*Ο προηγούμενος γεωμετρικός τόπος λέγεται **Απολλώνιος κύκλος**, από το όνομα του Έλληνα μαθηματικού Απολλωνίου που πρώτος μελέτησε το θέμα.*

Γενικά υπάρχουν άπειροι απολλώνιοι κύκλοι ως προς δύο σημεία Α και Β. Για να ορισθεί κάποιος από αυτούς, όταν δοθούν τα Α και Β, χρειάζεται να δοθεί ο λόγος $\frac{\mu}{\nu}$ ή ένα από τα σημεία Γ, Δ, ή ισοδύναμα, ένα τυχαίο σημείο του απολλώνιου κύκλου, ώστε ο λόγος να είναι προσδιορισμένος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

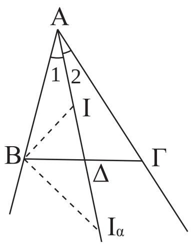
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να εξηγήσετε γιατί τα ίχνη Δ, Ε της εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$, τριγώνου ΑΒΓ, είναι συζυγή αρμονικά των Β και Γ.

2. Αν ΑΔ είναι η διχοτόμος τριγώνου ΑΒΓ και $ΔΒ = \frac{\gamma}{2}$, να δικαιολογήσετε γιατί $\beta + \gamma = 2\alpha$.

3. Τι ονομάζεται Απολλώνιος κύκλος ως προς δυο σημεία Α και Β; Πόσοι τέτοιοι Απολλώνιοι κύκλοι υπάρχουν; Με ποιους τρόπους μπορεί να ορισθεί κάποιος από αυτούς;

4. Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΔ η διχοτόμος, Ι το έγκεντρο και I_α το παράκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Τα σημεία (Α, Δ) και (Ι, I_α) αποτελούν αρμονική τετράδα; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



5. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που οι αποστάσεις τους από δύο ορισμένα σημεία Α και Β έχουν λόγο $\lambda = 1$ είναι:

i) Κύκλος διαμέτρου ΑΒ

ii) Η μεσοκάθετος του ΑΒ

iii) Το μέσο Μ του ΑΒ

iv) Κανένα από τα παραπάνω.

(Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας).

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Η διάμεσος ΑΜ και η διχοτόμος ΒΔ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο Ε. Να αποδείξετε ότι $\frac{ΑΕ}{ΕΜ} = 2\frac{ΑΔ}{ΔΓ}$.

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 6, ΒΓ = 10, ΑΓ=9. Αν ΑΔ, ΑΕ η εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, να υπολογισθεί το ΔΕ.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} > 90°$ και η διάμεσός του ΑΜ. Αν η διχοτόμος της γωνίας $Α\hat{Μ}Β$ τέμνει την ΑΒ στο Δ και την προέκταση της ΓΑ στο Ε, να αποδείξετε ότι $ΕΑ \cdot ΔΒ = ΕΓ \cdot ΑΔ$.

4. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ και οι διχοτόμοι των γωνιών $Α\hat{Μ}Β$ και $Α\hat{Μ}Γ$ τέμνουν τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΒΓ.

5. Αν ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι: $\frac{ΔΒ}{ΔΓ} \cdot \frac{ΕΓ}{ΕΑ} \cdot \frac{ΖΑ}{ΖΒ} = 1$.
Διατυπώστε και αποδείξτε ανάλογη πρόταση για τις εξωτερικές διχοτόμους.

6. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R). Αν Δ τυχαίο σημείο του τόξου ΒΓ και η ΑΔ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Ε, να αποδείξετε ότι $ΕΒ \cdot ΔΓ = ΕΓ \cdot ΔΒ$.

7. Σε ένα ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ φέρουμε τις εφαπτόμενες στα άκρα της διαμέτρου, καθώς και μία εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο του Ε, που τέμνει την ευθεία ΑΒ στο Ζ και τις άλλες δύο εφαπτόμενες στα Γ και Δ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Δ είναι συζυγή αρμονικά των Ε, Ζ.

8. Δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι 20m και 36m. Η διχοτόμος της γωνίας, η οποία περιέχεται μεταξύ των δύο αυτών πλευρών, διαιρεί την τρίτη πλευρά σε δύο μέρη, τα οποία διαφέρουν κατά 12m. Να υπολογισθεί η τρίτη πλευρά.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνονται οι διαδοχικές γωνίες $x\hat{O}y = y\hat{O}z = z\hat{O}t = 45°$ και τα σημεία Α, Δ των Οx, Οt αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΟΑ = ΟΔ. Αν Β, Γ είναι τα σημεία τομής της ΑΔ με τις Οy, Οz αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $AB^2 = B\Gamma \cdot A\Delta$.*
2. *Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε την παράλληλη στη διχοτόμο του ΑΔ, που τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα Ε, Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΒΕ = ΓΖ.*
3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του ΑΔ και το έγκεντρό του Ι.*
   i) Να υπολογισθεί ο λόγος $\frac{AI}{I\Delta}$, ως συνάρτηση των πλευρών α, β, γ του τριγώνου.
   ii) Αν β + γ = 2α και Κ το βαρύκεντρο του τριγώνου, τότε:
   α) ΙΚ//ΒΓ β) $ZE = \frac{\beta+\gamma}{3}$,
   όπου Ζ, Ε τα σημεία τομής των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα με την ευθεία ΙΚ.
4. *Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ ενός τριγώνου ΑΒΓ, τέμνουν τη διάμεσό του ΑΜ στα Δ και Ε αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\frac{A\Delta}{\Delta M} + \frac{AE}{EM} > 2$.*
5. *Οι μη παράλληλες πλευρές τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) τέμνονται στο Ο. Αν η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{O}B$ τέμνει τις ΑΒ, ΓΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*
   i) $Z\Delta \cdot B\Gamma = Z\Gamma \cdot A\Delta$,
   ii) $EA \cdot B\Gamma = EB \cdot A\Delta$.

Σύνθετα Θέματα

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Αν η κάθετη διάμετρος ΚΛ στη ΒΓ τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα Ε, Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα Ε, Ζ είναι συζυγή αρμονικά των Κ, Λ.*
2. *Αν οι διχοτόμοι δύο απέναντι γωνιών τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται πάνω στη διαγώνιο που ενώνει τις δύο άλλες κορυφές του, τότε είναι ΑΒ · ΓΔ = ΑΔ · ΒΓ. Να εξετασθεί αν ισχύει η αντίστροφη πρόταση.*
3. *Δίνεται τόξο $\overset{\frown}{AB}$ κύκλου (Ο, R). Να ορίσετε σημείο Μ του τόξου $\overset{\frown}{AB}$, τέτοιο ώστε $\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν δοσμένα τμήματα.*
4. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ των πλευρών του ΑΔ, ΑΒ αντίστοιχα, ώστε ΔΕ = ΒΖ. Αν Η είναι το σημείο τομής των ΒΕ και ΔΖ, να αποδείξετε ότι η ΓΗ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Gamma}\Delta$.*
5. *Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ = α, ύψος ΑΗ = υ και $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν δοσμένα τμήματα.*

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Δίνονται δύο κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) που εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Φέρουμε το κοινό εφαπτόμενο τμήμα τους ΔΕ και την ΑΒ κάθετη στη ΔΕ. Να αποδείξετε ότι*
$$AB = \frac{2R\rho}{R+\rho}.$$
2. *Μια μεταβλητή ευθεία ε διέρχεται από το βαρύκεντρο Θ ενός τριγώνου ΑΒΓ και τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ στα Δ, Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι*
$$\frac{\Delta B}{\Delta A} + \frac{E\Gamma}{EA} = 1.$$
3. *i) **Θεώρημα Μενελάου**. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε που τέμνει τις ευθείες ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ στα Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι*
$$\frac{\Delta A}{\Delta B} \cdot \frac{EB}{E\Gamma} \cdot \frac{Z\Gamma}{ZA} = 1.$$
   *ii) **Θεώρημα Ceva**. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ των ευθειών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ, αντίστοιχα. Αν οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ συντρέχουν, τότε ισχύει:*
$$\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} \cdot \frac{E\Gamma}{EA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = 1.$$
   Να εξετασθεί και για τα δύο θεωρήματα, αν ισχύει το αντίστροφο.

4. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ τέμνει τη ΒΔ στο Ε και τη ΒΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι*

$$\frac{EA}{EZ} - \frac{A\Gamma}{AB} = 1.$$

5. *Δίνεται κύκλος διαμέτρου ΑΒ και χορδή ΓΔ κάθετη στην ΑΒ. Αν Μ είναι σημείο της χορδής και οι ευθείες ΜΑ και ΜΒ τέμνουν τον κύκλο στα Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $EZ \cdot Z\Delta = E\Delta \cdot Z\Gamma$.*

6. *Αν τα σημεία (Α, Β) και (Γ, Δ) αποτελούν αρμονική τετράδα και το Β είναι μεταξύ των Γ, Δ, να αποδείξετε ότι:*

i) $OA^2 = O\Gamma \cdot O\Delta$, *όπου Ο το μέσο του ΑΒ.*

ii) $\dfrac{2}{AB} = \dfrac{1}{A\Gamma} + \dfrac{1}{A\Delta}$.

7. *Να κατασκευαστεί εσωτερική ημιευθεία Αx της γωνίας $\hat{A}$ τριγώνου ΑΒΓ τέτοια, ώστε αν Δ, Ε είναι οι προβολές των Β, Γ στην Αx αντίστοιχα, να είναι $\dfrac{A\Delta}{AE} = \dfrac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν είναι γνωστά τμήματα.*

8. *Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και σταθερό σημείο Α στο εσωτερικό της γωνίας. Να κατασκευασθεί ευθεία, που να διέρχεται από το Α και να τέμνει τις πλευρές της γωνίας στα σημεία Β και Γ, ώστε:*

i) *το Α να είναι μέσο του ΒΓ,*

ii) *να είναι* $AB = \dfrac{2}{3}B\Gamma$ *και*

iii) *να είναι* $\dfrac{AB}{A\Gamma} = \dfrac{\mu}{\nu}$, *όπου μ, ν είναι γνωστά τμήματα.*

9. *Δύο κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) τέμνονται στα σημεία Α και Α′. Να κατασκευασθεί ευθεία, που να διέρχεται από το Α και να τέμνει τους κύκλους στα σημεία Β και Γ, ώστε να είναι:*

i) $AB = A\Gamma$, *ii)* $\dfrac{AB}{A\Gamma} = \dfrac{3}{4}$.

10. *Αν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ είναι οι διχοτόμοι ενός τριγώνου ΑΒΓ και Ι είναι το έγκεντρο του τριγώνου, να αποδείξετε ότι*

$$\frac{IA}{I\Delta} + \frac{IB}{IE} + \frac{I\Gamma}{IZ} \geq 6.$$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

1. *Να αποδείξετε το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή.*

2. *Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ και τυχαίο σημείο Α του επιπέδου, διαφορετικό των Β και Γ. Να κατασκευάσετε τον Απολλώνιο κύκλο ως προς τα Β και Γ, ο οποίος διέρχεται από το Α.*

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Να εξετάσετε αν τα Β και Γ ανήκουν στον ίδιο Απολλώνιο κύκλο ως προς τα Δ και Α. Να κατασκευάσετε τον παραπάνω κύκλο και να βρείτε το λόγο $\dfrac{M\Delta}{MA}$ ως συνάρτηση των πλευρών α, β, γ του τριγώνου, όπου Μ τυχαίο σημείο του κύκλου.*

ΕΡΓΑΣΙΑ

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και σημείο Γ της ευθείας ΑΒ. Να βρεθεί το αρμονικό συζυγές του Γ ως προς τα Α και Β (δύο περιπτώσεις).

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Μέτρηση

Στα πρώτα στάδια ανάπτυξης της κοινωνίας η μέτρηση γινόταν «με το μάτι», αφού το μέτρο δεν είχε διακριθεί ως ανεξάρτητη ιδιότητα ενός αντικειμένου. Στην πορεία ανάπτυξης της κοινωνίας, όταν τέτοιου είδους «ποιοτικά» μέτρα κρίθηκαν ανεπαρκή, εμφανίσθηκαν κάποια φυσικά μέτρα, που ήταν συνήθως μέρη του ανθρώπινου σώματος, όπως το μήκος του ποδιού, το πλάτος της παλάμης κ.ά. Για την ύπαρξη τέτοιων μέτρων μαρτυρούν και οι ονομασίες των μέτρων μήκους που διατηρήθηκαν μέχρι σήμερα, όπως «πόδι», «δάκτυλος», «παλάμη» κ.ά. Τα μέτρα αυτά χρησιμοποιούνταν αρχικά για τον προσδιορισμό της ισότητας των μετρούμενων μεγεθών ή της ισοδυναμίας των σχημάτων. Το μέτρο ενός μεγέθους A ήταν το πλησιέστερο ακέραιο πολλαπλάσιο της μονάδας E.

Η ανάγκη για πιο ακριβείς μετρήσεις οδήγησε στη χρήση υποδιαιρέσεων της μονάδας μέτρου. Έτσι εμφανίστηκαν τα πρώτα «συγκεκριμένα κλάσματα», ως μέρη των συγκεκριμένων μέτρων από όπου προήλθαν. Η ιστορική διαδικασία γένεσης των συγκεκριμένων κλασμάτων ως αποτέλεσμα της ανάγκης μέτρησης επιβεβαιώνεται από την ανομοιομορφία του συμβολισμού των κλασμάτων αυτού του τύπου. Στη Βαβυλώνα τα σύμβολα για το 1/2, το 1/3 και το 2/3 είναι ταυτόχρονα και σύμβολα δοχείων, δηλαδή συγκεκριμένων μέτρων όγκου. Στην αρχαία Αίγυπτο διακρίνονται τα *φυσικά κλάσματα* (1/2, 1/3, 1/4 και 2/3), που διαμορφώθηκαν από άμεσες πρακτικές ανάγκες και έχουν ιδιάζουσα ονοματολογία και ιερογλυφικό συμβολισμό, και τα *αλγοριθμικά κλάσματα*, που ήταν της μορφής 1/ν, και εμφανίσθηκαν ως προϊόν μαθηματικής επεξεργασίας.

Η ανεξαρτητοποίηση του κλάσματος από το συνυφασμένο πεδίο μεγεθών ήταν πολύ πιο αργή από τη διαμόρφωση της έννοιας του φυσικού αριθμού. Δεν έγινε γρήγορα αντιληπτό ότι οι αριθμητικές ιδιότητες των κλασμάτων δεν εξαρτώνται από τις ιδιότητες του πεδίου μεγεθών, στο οποίο ανήκουν.

Η πρώτη Ελληνική θεωρία μέτρησης. Μία από τις σημαντικές διαφορές της Ελληνικής μαθηματικής παράδοσης από την Αιγυπτιακή και τη Βαβυλωνιακή είναι ότι τα προβλήματα της μέτρησης συνεχών μεγεθών τίθενται σε νέα θεωρητική βάση. Οι μαθηματικοί αρχίζουν να αναζητούν μεθόδους μέτρησης με βάση κάποια αφηρημένη μονάδα μέτρου μήκους, επιφανείας ή όγκου. Και εδώ δεν εννοούμε εμπειρικές μεθόδους (προσεγγιστικού) προσδιορισμού του μέτρου που να ικανοποιούν πρακτικές ανάγκες. Απαιτείται η απόδειξη της ύπαρξης ενός τέτοιου μέτρου. Η νέα αυτή προσέγγιση απαιτούσε την εισαγωγή νέων θεωρητικών εννοιών και νέων τρόπων συλλογισμού. Κάθε συγκεκριμένο είδος μεγεθών είναι συνυφασμένο με ορισμένο τρόπο σύγκρισης των φυσικών αντικειμένων ή σωμάτων. Τα ευθύγραμμα τμήματα, π.χ. μπορούν να συγκριθούν με τη βοήθεια της έννοιας της «εφαρμογής» του ενός επί του άλλου, η οποία οδηγεί στην έννοια του μήκους: δύο ευθύγραμμα τμήματα έχουν το ίδιο μήκος αν με τη μεταφορά του ενός επί του άλλου «εφαρμόζουν», ενώ το ένα υπολείπεται του άλλου τότε το πρώτο είναι μικρότερο του δεύτερου. Τα βάρη είναι μεγέθη άλλου είδους. Δεν έχει νόημα το ερώτημα αν το βάρος του σώματος είναι μεγαλύτερο, ίσο, ή μικρότερο από το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος. Έτσι, τα μήκη, τα εμβαδά, οι όγκοι, είναι διαφορετικά είδη μεγεθών. Το πρόβλημα της μέτρησης ενός μεγέθους A με τη βοήθεια της μονάδας E συνίσταται αρχικά, στην αρχαία Ελλάδα στο να βρεθεί πόσες φορές περιέχεται η μονάδα στο A, δηλαδή ζητείται ο αριθμός α τέτοιος, ώστε $A = \alpha E$, όπου A και E είναι μεγέθη του αυτού είδους. Ένα μέγεθος Χ είναι κοινό μέτρο δύο μεγεθών Α και Β, όταν περιέχεται ακέραιο αριθμό φορών στα μεγέθη αυτά, δηλ. $Α = αΧ$, $Β = βΧ$. Τότε τα μεγέθη λέγονται *σύμμετρα*.

Οι αρχαίοι Έλληνες γεωμέτρες είχαν βρει μια αποτελεσματική διαδικασία με την οποία μπορούσαν να βρουν το κοινό μέτρο δύο μεγεθών Α και Β, αν υπάρχει. Πρόκειται για τη διαδικασία της *ανθυφαίρεσης* ή *ανταναίρεσης* (γνωστής σήμερα ως *αλγόριθμος του Ευκλείδη*), η οποία εκτίθεται στις δύο πρώτες προτάσεις του Βιβλίου VII των «Στοιχείων» του Ευκλείδη. Αν υποθέσουμε ότι $Α > Β$, τότε αφαιρούμε το Β από το Α όσες φορές γίνεται. Αν δεν περισσεύει υπόλοιπο, τότε το Β μετρά ακριβώς το Α και είναι το κοινό μέτρο. Ειδεμή έχουμε υπόλοιπο $Β_1$, με $Β > Β_1$. Εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία στα Β, $Β_1$. Αν δεν προκύπτει υπόλοιπο, το $Β_1$ είναι το κοινό μέτρο, ειδεμή έχουμε ένα νέο υπόλοιπο $Β_2$. Αν η επανάληψη αυτής της διαδικασίας τερματιστεί σε κάποιο B_ν που μετρά ακριβώς το A_ν τότε το B_ν είναι το ζητούμενο κοινό μέτρο. Αν ο αλγόριθμος δεν τερματίζεται τα δύο μεγέθη είναι *ασύμμετρα*. Πιθανότατα στο Θεαίτητο να ανήκει η ιδέα να εφαρμοστεί η ανθυφαίρεση ως κριτήριο ασυμμετρίας δύο τμημάτων. Το κριτήριο αυτό αποδεικνύεται στην Πρόταση 2 του Βιβλίου Χ των «Στοιχείων».

Η ανακάλυψη ότι *δεν υπάρχει κοινό μέτρο της διαγωνίου και της πλευράς του τετραγώνου* αποδίδεται στον Πυθαγόρα. Το πώς ακριβώς έγινε αυτή η ανακάλυψη παραμένει θέμα ανοικτό για το οποίο έχουν προταθεί ποικίλες ερμηνείες. Όμως η ανακάλυψη αυτή, καθώς και η δυσκολία λύσης του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου (βλ. *Τα μη επιλύσιμα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας*) έδωσαν νέα ώθηση στα μαθηματικά των μετρούμενων μεγεθών.

Η γενική θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου. Η ύπαρξη ασύμμετρων μεγεθών οδήγησε στη διατύπωση μιας νέας θεωρίας από τον Εύδοξο τον Κνίδιο που εκτίθεται στο Βιβλίο V των «Στοιχείων» του Ευκλείδη. Η *νέα θεωρία των αναλογιών* στηρίζεται στη γενική έννοια του μεγέθους, περιλαμβάνοντας έτσι και τους αριθμούς και τα άλλα συνεχή μεγέθη (μήκη, επιφάνειες, όγκοι). Η έννοια αυτή εισάγεται αξιωματικά με τη βοήθεια των *Κοινών Εννοιών* στο Βιβλίο Ι που ορίζουν τις σχέσεις ισότητας και ανισότητας.

Ο Εύδοξος ορίζει πότε δύο ζεύγη Αρχιμήδειων μεγεθών α, β και γ, δ έχουν τον ίδιο λόγο με τη βοήθεια των πολλαπλασίων αυτών των μεγεθών, δηλαδή όταν: 1) $\mu\alpha > \nu\beta$ και $\mu\gamma > \nu\delta$ ή 2) $\mu\alpha = \nu\beta$ και $\mu\gamma = \nu\delta$, ή 3) $\mu\alpha < \nu\beta$ και $\mu\gamma < \nu\delta$. Στην περίπτωση αυτή τα μεγέθη α, β, γ, δ λέγονται *ανάλογα*. Η σχέση της αναλογίας είναι σχέση τύπου ισότητας, δηλαδή συμμετρική και μεταβατική, και έτσι τα ζεύγη μεγεθών διαμερίζονται σε κλάσεις ισοδυναμίας ζευγών που έχουν τον ίδιο λόγο. Έτσι, ο λόγος μπορεί να εισαχθεί ως το κοινό χαρακτηριστικό που έχουν τα ζεύγη μεγεθών μιας κλάσης.

Η γενική θεωρία των αναλογιών αποτελεί τη βάση της μεθόδου της *εξάντλησης*, η οποία εφαρμόστηκε από τους αρχαίους Έλληνες στη μέτρηση (μη στοιχειωδών) επιφανειών και όγκων. Στηρίζεται στην ιδέα ότι αν από κάποιο μέγεθος αφαιρέσουμε περισσότερο από το μισό, από το υπόλοιπο επίσης κ.ο.κ., τότε μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων παίρνουμε υπόλοιπο μικρότερο από οποιοδήποτε δεδομένο μέγεθος («Στοιχεία», Βιβλίο Χ, Πρόταση 1). Με άλλα λόγια, η διαφορά ανάμεσα σε μια μεταβλητή ποσότητα που τείνει σε ένα όριο, και στο όριο αυτό, μπορεί να γίνει όσο μικρή θέλουμε με υποδιπλασιασμό της. Με τη βοήθεια της μεθόδου της εξάντλησης ο Εύδοξος απέδειξε τα παρακάτω θεωρήματα:

1. Τα εμβαδά δύο κύκλων έχουν λόγο ίσο προς το λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους.
2. Ο όγκος πυραμίδας ισούται με το 1/3 του όγκου του πρίσματος με την ίδια βάση και ύψος.
3. Ο όγκος του κώνου ισούται με το 1/3 του όγκου του κυλίνδρου με την ίδια βάση και ύψος.

Με την ίδια μέθοδο ο Αρχιμήδης βρήκε ένα πλήθος νέων εμβαδών και όγκων, όπως το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου και κώνου, το εμβαδόν της επιφάνειας σφαίρας, τον όγκο της σφαίρας κ.ά.

Αρχιμήδεια και μη Αρχιμήδεια μεγέθη. Για να ισχύει η θεωρία των αναλογιών πρέπει να ορίζεται ο λόγος ανάμεσα στα συγκρινόμενα μεγέθη α, β. Αυτό εξασφαλίζεται αν υπάρχουν ακέραιοι μ και ν τέτοιοι, ώστε $\mu\alpha > \beta$ και $\nu\beta > \alpha$ («Στοιχεία», Βιβλίο V, Ορισμός 4). Η συνθήκη αυτή ονομάζεται σήμερα *αξίωμα του Ευδόξου* (ή, συχνότερα, *αξίωμα Αρχιμήδη - Ευδόξου*). Τα μεγέθη για τα οποία ικανοποιείται το αξίωμα αυτό λέγονται σήμερα *Αρχιμήδεια*.

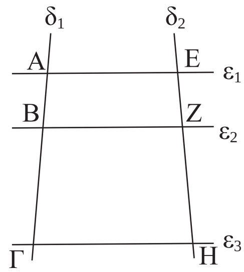
Ας σημειωθεί πως μη Αρχιμήδεια μεγέθη ήταν γνωστά στην Ελληνική αρχαιότητα, όπως οι λεγόμενες *κερατοειδείς γωνίες*. Πρόκειται για τη γωνία που σχηματίζεται π.χ. από το τόξο περιφέρειας και την εφαπτομένη στο ένα άκρο της, δηλαδή το μέρος του επιπέδου που περιέχεται μεταξύ του τόξου και της εφαπτομένης στο σημείο επαφής. Οσοδήποτε και αν μεγαλώσει μια τέτοια γωνία δεν μπορεί ποτέ να υπερβεί τη γωνία που σχηματίζεται από την εφαπτομένη και οποιαδήποτε τέμνουσα του τόξου στο σημείο τομής. Ένα τέτοιο μέγεθος *α*, το οποίο πολλαπλασιαζόμενο επί οποιονδήποτε πεπερασμένο αριθμό *ν* παραμένει μικρότερο του μεγέθους *β*, ονομάζεται *ενεργεία απειροστό* ως προς το *β*, ή αντίθετα, το *β* λέγεται *ενεργεία άπειρο* μέγεθος ως προς το *α*.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

- Μέγεθος λέγεται οτιδήποτε επιδέχεται αύξηση ή ελάττωση. Στη Γεωμετρία έχουμε τα ***γεωμετρικά μεγέθη***.
- Ένα ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ λέγεται ***υποδιαίρεση*** του ΑΒ, αν υπάρχει ένας φυσικός αριθμός ν, ώστε $ΓΔ = \frac{AB}{ν}$.
- Ένα ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ λέγεται ***γινόμενο*** του ΑΒ επί το ***θετικό ρητό*** αριθμό $q = \frac{μ}{ν}$ $(μ > 0, ν > 0)$, αν είναι άθροισμα μ ευθύγραμμων τμημάτων ίσων με $\frac{AB}{ν}$.
- Αν για δυο μη μηδενικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ υπάρχει ρητός $q = \frac{μ}{ν}$ τέτοιος, ώστε $ΓΔ = qAB$, τα δύο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται ***σύμμετρα*** και ο αριθμός $q = \frac{ΓΔ}{AB}$ λέγεται ***λόγος*** των δύο τμημάτων.
- Μια κοινή υποδιαίρεση $ΚΛ = \frac{AB}{ν} = \frac{ΓΔ}{μ}$ λέγεται και ***κοινό μέτρο*** των ΑΒ και ΓΔ. Δύο σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα είναι ακέραια πολλαπλάσια κάθε κοινού τους μέτρου.
- Δύο ευθύγραμμα τμήματα που δεν είναι σύμμετρα λέγονται ***ασύμμετρα*** και ο λόγος τους είναι ένας ***άρρητος*** αριθμός.

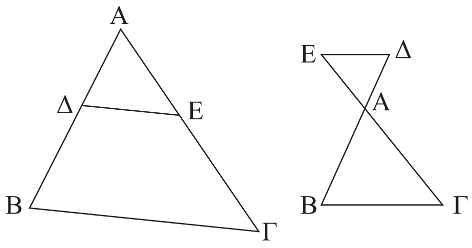
  Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ, λέγονται ***ανάλογα*** προς τα τμήματα β, δ όταν είναι $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$.
- ***Αναλογία*** τμημάτων λέγεται κάθε ισότητα της μορφής $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$, όπου α, β, γ, δ είναι ευθύγραμμα τμήματα.
- ***Μέτρο*** ενός ευθύγραμμου τμήματος α είναι ο λόγος του α προς ένα άλλο τμήμα που παίρνουμε αυθαίρετα ως ***μονάδα μέτρησης***. Έτσι:
  - Δύο ίσα τμήματα έχουν ίσα μέτρα και αντίστροφα.
  - Ο λόγος των μέτρων δύο τμημάτων, που μετρώνται με την ίδια μονάδα μέτρησης, ισούται με το λόγο των δύο τμημάτων.
- Αν για τα διαφορετικά συνευθειακά σημεία Α, Β, Μ ισχύει $\frac{MA}{MB} = λ$, τότε λέμε ότι το ***Μ διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ*** σε λόγο λ.
  - Το Μ διαιρεί ***εσωτερικά*** ή ***εξωτερικά*** το τμήμα ΑΒ σε λόγο λ, αν το Μ είναι αντίστοιχα μεταξύ των Α και Β ή στην προέκταση του ΑΒ.
  - Το σημείο Μ που διαιρεί ή εσωτερικά ή εξωτερικά το τμήμα ΑΒ σε λόγο λ είναι ***μοναδικό***.
- **Θεώρημα Θαλή**
  - **Τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες:**

  Αν $ε_1 // ε_2 // ε_3$, τότε $\frac{AB}{EZ} = \frac{BΓ}{ZH} = \frac{AΓ}{EH}$.

  Αντίστροφο: Αν $ε_1 // ε_2$ και $\frac{AB}{BΓ} = \frac{EZ}{ZH}$, τότε $ΓH // ε_1 // ε_2$.

– **Στο τρίγωνο**



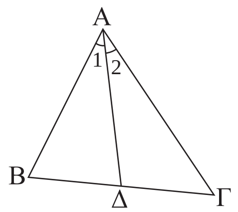
Αν ΔΕ//ΒΓ, τότε $\frac{Α\Delta}{ΑΕ} = \frac{\Delta Β}{ΕΓ}$ και $\frac{Α\Delta}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{\Delta Ε}{ΒΓ}$.

Αντίστροφο: Αν $\frac{Α\Delta}{ΑΕ} = \frac{\Delta Β}{ΕΓ}$, τότε ΔΕ//ΒΓ.

- **Γεωμετρικές κατασκευές**
  – Κατασκευή τετάρτης αναλόγου
  – Διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος εσωτερικά και εξωτερικά σε δοσμένο λόγο
- **Συζυγή αρμονικά**

  Δύο σημεία Γ και Δ που διαιρούν εσωτερικά και εξωτερικά το τμήμα ΑΒ στον ίδιο λόγο, λέγονται συζυγή αρμονικά των Α και Β.
- **Θεωρήματα διχοτόμων**

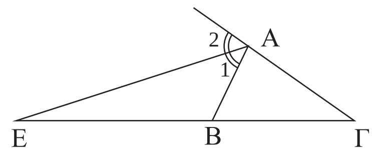
Εσωτερικής διχοτόμου



ΑΔ διχοτόμος ⇔ $\frac{\Delta Β}{\Delta Γ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$

$\Delta Β = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$, $\Delta Γ = \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$

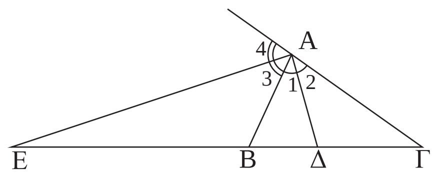
Εξωτερικής διχοτόμου



ΑΕ εξωτ. διχοτόμος ⇔ $\frac{ΕΒ}{ΕΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$

$ΕΒ = \frac{\alpha\gamma}{\beta-\gamma}$, $ΕΓ = \frac{\alpha\beta}{\beta-\gamma}$

- Τα ίχνη Δ και Ε της εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας $\hat{Α}$, τριγώνου ΑΒΓ, είναι σημεία συζυγή αρμονικά ως προς τα Β και Γ.



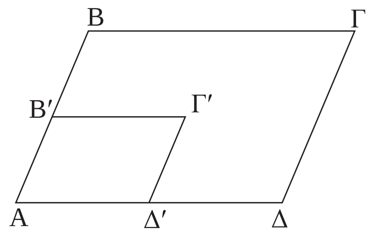
- ***Απολλώνιος κύκλος*** ως προς τα σημεία Α και Β λέγεται κάθε κύκλος διαμέτρου ΓΔ, όπου τα Γ και Δ είναι συζυγή αρμονικά των Α και Β.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

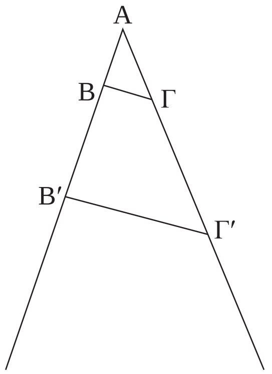
ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό μελετώνται οι ιδιότητες των όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων και ειδικότερα των όμοιων τριγώνων για τα οποία διατυπώνονται κατάλληλα κριτήρια ομοιότητας. Η ομοιότητα επεκτείνεται στο σύνολο των στοιχείων των ευθύγραμμων σχημάτων ενώ δίνονται πρακτικές εφαρμογές σε πραγματικά προβλήματα και σημειώνεται ότι αποτελεί βασικό συνδετικό κρίκο Άλγεβρας και Γεωμετρίας. Τέλος, παρουσιάζεται η στενή σχέση της ομοιότητας με την τριγωνομετρία.

Ναός στο Khajuraho της Βορειοκεντρικής Ινδίας, 10ος - 11ος αιώνας.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

8.1 Όμοια ευθύγραμμα σχήματα

Ας θεωρήσουμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και από τα μέσα Β′ και Δ′ των πλευρών ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα, ας φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΔ και ΑΒ, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ′. Τότε το παραλληλόγραμμο ΑΒ′Γ′Δ′ έχει τις γωνίες του ίσες με τις αντίστοιχες γωνίες του ΑΒΓΔ, ενώ ισχύει ότι

$$\frac{ΑΒ'}{ΑΒ}=\frac{Β'Γ'}{ΒΓ}=\frac{Γ'Δ'}{ΓΔ}=\frac{ΑΔ'}{ΑΔ}=\frac{1}{2}.$$

Ας θεωρήσουμε κατόπιν ένα τρίγωνο ΑΒΓ και ας προεκτείνουμε τις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ προς τα σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Θεωρούμε σημείο Β′ στην προέκταση της ΑΒ, έτσι ώστε ΑΒ′ = 3ΑΒ. Από το Β′ φέρουμε παράλληλη προς την τρίτη πλευρά ΒΓ, που τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο σημείο Γ′.

Τότε παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒ′Γ′ έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, ενώ επιπλέον ισχύει ότι

$$\frac{ΑΒ'}{ΑΒ}=\frac{ΑΓ'}{ΑΓ}=\frac{Β'Γ'}{ΒΓ}=3.$$

Τα δύο παραλληλόγραμμα, όπως και τα δύο τρίγωνα που κατασκευάσθηκαν προηγουμένως λέγονται ***όμοια***, ενώ ο λόγος των ομόλογων πλευρών τους (δηλαδή των πλευρών που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες) λέγεται ***λόγος ομοιότητας***. Γενικότερα για τα όμοια ευθύγραμμα σχήματα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

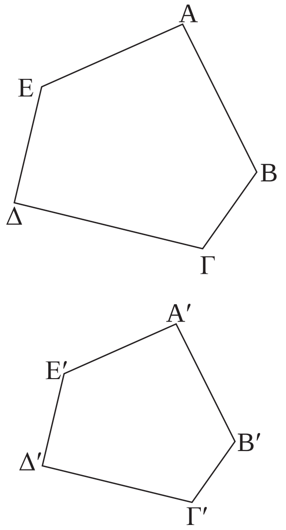
Ορισμός

Δύο ευθύγραμμα σχήματα λέγονται όμοια, αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που σχηματίζονται από ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Ο λόγος των ομόλογων πλευρών δύο ευθύγραμμων σχημάτων λέγεται λόγος ομοιότητας αυτών και συμβολίζεται με λ. Η ομοιότητα μεταξύ δύο ευθύγραμμων σχημάτων συμβολίζεται με $\approx$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους.



Σχήμα 3

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας θεωρήσουμε δύο όμοια ευθύγραμμα σχήματα ΑΒΓΔΕ και Α′Β′Γ′Δ′Ε′ (ανάλογα αποδεικνύεται για ευθύγραμμα σχήματα με περισσότερες κορυφές). Λόγω της ομοιότητας θα έχουμε ότι

$$\frac{Α'Β'}{ΑΒ}=\frac{Β'Γ'}{ΒΓ}=\frac{Γ'Δ'}{ΓΔ}=\frac{Δ'Ε'}{ΔΕ}=\frac{Ε'Α'}{ΕΑ}=λ,$$

και από τις ιδιότητες των αναλογιών, το άθροισμα των αριθμητών προς το άθροισμα των παρονομαστών ισούται με λ, δηλαδή:

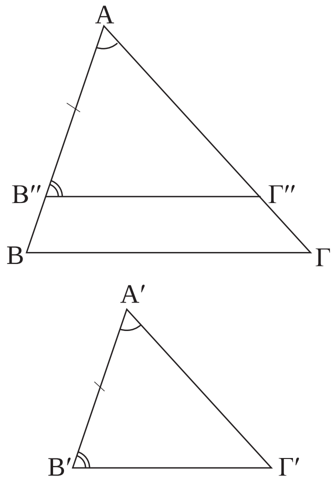
$$\frac{Α'Β'+Β'Γ'+Γ'Δ'+Δ'Ε'+Ε'Α'}{ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΕ+ΕΑ}=λ.$$

8.2 Κριτήρια ομοιότητας

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με την ομοιότητα των τριγώνων, καθώς αποδεικνύεται (εφαρμογή 3) ότι δύο όμοια ευθύγραμμα σχήματα χωρίζονται σε ισάριθμα όμοια τρίγωνα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι (1ο Κριτήριο Ομοιότητας)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.



Σχήμα 4

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας θεωρήσουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ με $\hat{Α}=\hat{Α}'$, $\hat{Β}=\hat{Β}'$, οπότε και $\hat{Γ}=\hat{Γ}'$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι $Α'Β'<ΑΒ$, επομένως υπάρχει σημείο Β″ στην ΑΒ τέτοιο, ώστε $ΑΒ''=Α'Β'$. Από τη Β″ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Γ″. Τότε τα τρίγωνα ΑΒ″Γ″και ΑΒΓ είναι όμοια, αφού ισχύει ότι Β″Γ″//ΒΓ, οπότε $\frac{ΑΒ''}{ΑΒ}=\frac{ΑΓ''}{ΑΓ}=\frac{Β''Γ''}{ΒΓ}$ και η $\hat{Α}$ είναι κοινή, ενώ $\hat{Β}''=\hat{Β}$ οπότε και $\hat{Γ}''=\hat{Γ}$.

Όμως τα τρίγωνα ΑΒ″Γ″ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα, καθώς έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες. Συνεπώς τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι όμοια.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

i) Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια, όταν έχουν μία οξεία γωνία τους ίση.

ii) Όλα τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους.

iii) Δύο ισοσκελή τρίγωνα, τα οποία έχουν μία αντίστοιχη γωνία ίση, είναι όμοια.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ (2ο Κριτήριο Ομοιότητας)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι όμοια.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ (σχ.4) έτσι, ώστε $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $A'B' < AB$, επομένως θα υπάρχει σημείο Β″ στην ΑΒ, με $AB'' = A'B'$. Από το Β″ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Γ″. Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒ″Γ″ και ΑΒΓ είναι όμοια. Επειδή $AB\Gamma \approx AB''\Gamma''$ είναι

$$\frac{AB''}{AB} = \frac{A\Gamma''}{A\Gamma} \quad \text{ή} \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A\Gamma''}{A\Gamma}.$$

Όμως, από την υπόθεση ισχύει ότι $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma}$.

Επομένως καταλήγουμε ότι $\frac{A\Gamma''}{A\Gamma} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma}$ ή $A\Gamma'' = A'\Gamma'$.

Τελικά τα τρίγωνα ΑΒ″Γ″ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα, καθώς έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες.

ΣΧΟΛΙΟ

Το θεώρημα που εκφράζει ότι δύο όμοια τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και το Πυθαγόρειο θεώρημα αποτελούν τους βασικούς συνδετικούς κρίκους της Γεωμετρίας με την Άλγεβρα. Η σύνδεση της Γεωμετρίας με την Άλγεβρα είναι ιδιαίτερα εποικοδομητική, καθώς μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε την εποπτεία της Γεωμετρίας σε αλγεβρικά προβλήματα και την ευχέρεια των πράξεων της Άλγεβρας σε γεωμετρικά προβλήματα. Τα όμοια τρίγωνα και το Πυθαγόρειο θεώρημα αποτέλεσαν τα θεμέλια της Τριγωνομετρίας. Χρησιμοποιώντας όμοια τρίγωνα μπορούμε να υπολογίσουμε τις διαστάσεις ενός αντικειμένου μετρώντας τις διαστάσεις ενός μικρότερου μοντέλου του. Το μοντέλο αυτό θα έχει τις ίδιες γωνίες με το αρχικό, επομένως οι διαστάσεις του αρχικού προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις αντίστοιχες διαστάσεις του μοντέλου με το λόγο ομοιότητας των δύο σχημάτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ (3ο Κριτήριο Ομοιότητας)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ (σχ.4), ώστε

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma}.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $A'B' < AB$, επομένως θα υπάρχει σημείο Β″ στην ΑΒ, με $AB'' = A'B'$. Από το Β″ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Γ″, οπότε τα τρίγωνα ΑΒ″Γ″ και ΑΒΓ είναι όμοια.

Επειδή $AB\Gamma \approx AB''\Gamma''$ είναι

$$\frac{AB''}{AB} = \frac{A\Gamma''}{A\Gamma} = \frac{B''\Gamma''}{B\Gamma} \quad \text{ή} \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A\Gamma''}{A\Gamma} = \frac{B''\Gamma''}{B\Gamma}.$$

Όμως από την υπόθεση έχουμε ότι

$$\frac{Α'Β'}{ΑΒ} = \frac{Α'Γ'}{ΑΓ} = \frac{Β'Γ'}{ΒΓ}.$$

Επομένως προκύπτει ότι

$$\frac{ΑΓ''}{ΑΓ} = \frac{Α'Γ'}{ΑΓ} \quad \text{και} \quad \frac{Β''Γ''}{ΒΓ} = \frac{Β'Γ'}{ΒΓ},$$

οπότε $ΑΓ'' = Α'Γ'$ και $Β''Γ'' = Β'Γ'$.

Άρα τα τρίγωνα $ΑΒ''Γ''$ και $Α'Β'Γ'$ είναι ίσα γιατί έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

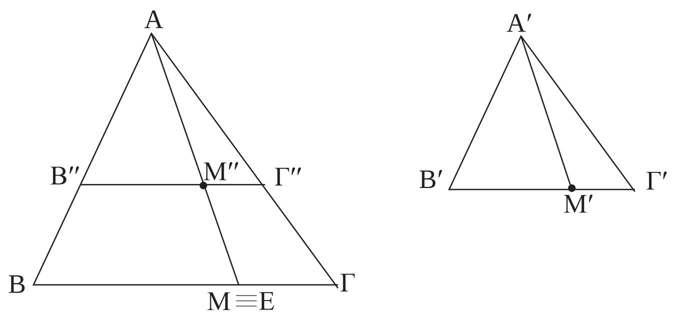
Ας θεωρήσουμε δύο όμοια τρίγωνα ΑΒΓ, Α′Β′Γ′ με λόγο ομοιότητας λ και σημεία Μ της ΒΓ, Μ′ της Β′Γ′ τέτοια, ώστε $\frac{ΒΜ}{ΜΓ} = \frac{Β'Μ'}{Μ'Γ'}$.
Τότε ισχύει ότι $\frac{ΑΜ}{Α'Μ'} = \frac{ΒΜ}{Β'Μ'} = \frac{ΓΜ}{Γ'Μ'} = λ$.

Απόδειξη

Έστω ότι $Α'Β' < ΑΒ$, οπότε θα υπάρχει σημείο Β″ της ΑΒ τέτοιο, ώστε $ΑΒ'' = Α'Β'$ και σημείο Γ″ της ΑΓ τέτοιο, ώστε $ΑΓ'' = Α'Γ'$, με $Β''Γ''//ΒΓ$. Έστω σημείο Μ″ της Β″Γ″ τέτοιο, ώστε $Β''Μ'' = Β'Μ'$.

Προεκτείνουμε την ΑΜ″ ώστε να τμήσει τη ΒΓ σε σημείο Ε. Τότε τα τρίγωνα ΑΒ″Μ″ και ΑΒΕ είναι όμοια, οπότε

$$\frac{ΑΒ''}{ΑΒ} = \frac{Β''Μ''}{ΒΕ} = \frac{ΑΜ''}{ΑΕ} \quad ή \quad λ = \frac{Β'Μ'}{ΒΕ} = \frac{Α'Μ'}{ΑΕ}.$$



Σχήμα 5

Όμοια έχουμε ότι $λ = \frac{Μ'Γ'}{ΕΓ} = \frac{Α'Μ'}{ΑΕ}$.

Οπότε $\frac{Β'Μ'}{Μ'Γ'} = \frac{ΒΕ}{ΕΓ} = \frac{ΒΜ}{ΜΓ}$, συνεπώς τα Ε και Μ ταυτίζονται.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

i) Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων υψών τους.

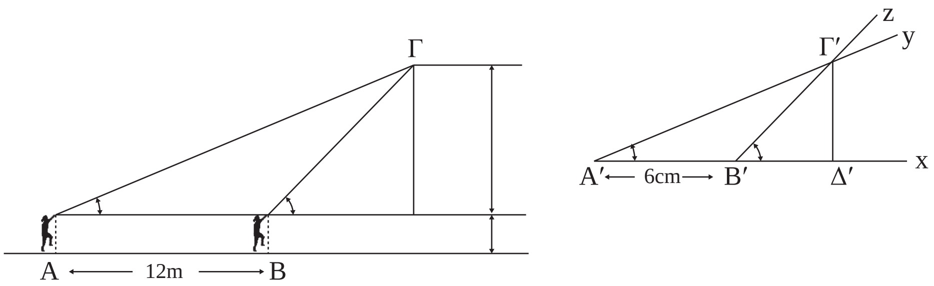
ii) Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων διχοτόμων τους.

iii) Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων διαμέσων τους.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Πόσο ύψος έχει το σχολείο σας;

Λύση



Σχήμα 6

Ένας μαθητής βλέπει την κορυφή Γ του σχολείου από δύο σημεία Α και Β στο έδαφος (σχ.6). Χρησιμοποιώντας έναν εξάντα (βλ. επόμενη παράγραφο) μετράει τις γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ με τις οποίες φαίνεται το σχολείο, π.χ. $\hat{A} = 19°$ και $\hat{B} = 43°$.

Κατόπιν μετράει την απόσταση από το σημείο Α ως το Β, π.χ. ΑΒ = 12 μέτρα. Η μέτρηση των γωνιών έγινε από κάποια απόσταση από το έδαφος ίση με το ύψος του μαθητή, ας υποθέσουμε ότι έχει ύψος 1,8 μέτρα. Για να υπολογίσουμε το ύψος του σχολείου κατασκευάζουμε σε μία κόλλα χαρτί το αντίστοιχο μοντέλο. Θεωρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα $A'B' = 6$ cm. Προεκτείνουμε την $A'B'$ προς το μέρος του B' και σχηματίζουμε στο ίδιο ημιεπίπεδο δύο γωνίες $x\hat{A}'y = 19°$ και $x\hat{B}'z = 43°$. Οι ημιευθείες $A'y$ και $B'z$ τέμνονται στο σημείο $Γ'$. Από το σημείο $Γ'$ φέρουμε την κάθετη $Γ'Δ'$ στην $A'B'$ και έχουμε κατασκευάσει το μοντέλο μας. Μετράμε ότι το $Γ'Δ'$ ισούται με 3,3 cm.

Ο λόγος ομοιότητας είναι $λ = \dfrac{AB}{A'B'} = 200$.

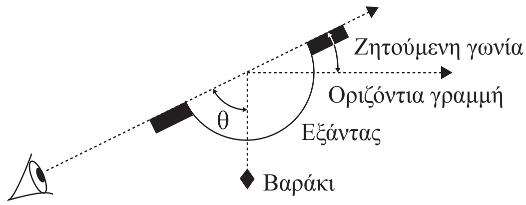
Επομένως το πραγματικό μήκος του ΓΔ είναι $ΓΔ = λΓ'Δ' = 6{,}6$ μέτρα. Προσθέτοντας και το ύψος του μαθητή, έχουμε ότι το πραγματικό ύψος του σχολείου είναι 8,4 μέτρα.

ΣΧΟΛΙΟ

Με τη χρήση της ομοιότητας μπορούμε να μετρήσουμε μήκη ευθύγραμμων τμημάτων που είναι απρόσιτα.

Ο ΕΞΑΝΤΑΣ

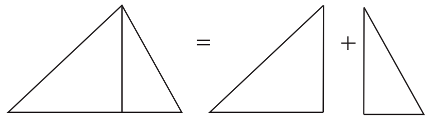
Το διπλανό σχήμα εκφράζει τη λειτουργία του εξάντα, δηλαδή μας παρουσιάζει έναν απλό μηχανισμό για να μετράμε τις γωνίες υπό τις οποίες φαίνεται ένα σχήμα. Για να κατασκευασθεί χρειάζεται ένα ίσιο ξύλο, ένα μοιρογνωμόνιο, μία χορδή (κιθάρας) ή πετονιά, ένα βαράκι (νήμα της στάθμης) και δύο ανθρώπους, έναν για να βλέπει το αντικείμενο και έναν για να διαβάζει τη μέτρηση.



Σχήμα 7

ΣΧΟΛΙΟ

Παλιά οι μαθηματικοί συνειδητοποίησαν ότι για να επιλύουν τέτοιου είδους προβλήματα ήταν αρκετό να έχουν έναν πίνακα με τρίγωνα και τις διαστάσεις τους, οπότε θα αρκούσε να μελετούν τον πίνακα παρά να κατασκευάζουν μοντέλα των τριγώνων που προέκυπταν από φυσικά προβλήματα.

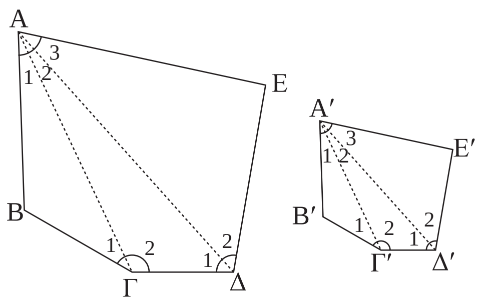


Σχήμα 8

Παρατήρησαν ότι αρκεί ο πίνακας αυτός να έχει μόνο ορθογώνια τρίγωνα αφού κάθε τρίγωνο διαμερίζεται σε δύο ορθογώνια (σχ.8). Ένας τέτοιος πίνακας είναι οι τιμές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων: τα ημίτονα και συνημίτονα των γωνιών ενός ορθογώνιου τριγώνου με υποτείνουσα 1. Πρακτικά τα αποτελέσματα από την τριγωνομετρία είναι ακριβέστερα από αυτά που προκύπτουν από μέτρηση και κατασκευή μοντέλου, όπως προηγουμένως. Ωστόσο οι τριγωνομετρικοί πίνακες δεν είναι τίποτε άλλο, παρά πίνακες όμοιων τριγώνων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Να αποδείξετε ότι δύο όμοια ευθύγραμμα σχήματα χωρίζονται σε ισάριθμα όμοια τρίγωνα.



Σχήμα 9

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε την εφαρμογή για δύο πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ και Α′Β′Γ′Δ′Ε′, καθώς η απόδειξη είναι ανάλογη για κάθε πολύγωνο.

Ας υποθέσουμε ότι τα δύο πεντάγωνα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ. Από τις κορυφές Α, Α′ των πενταγώνων φέρουμε τις διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ και Α′Γ′, Α′Δ′ αντίστοιχα, οπότε κάθε πεντάγωνο χωρίσθηκε σε τρία τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ και Α′Β′Γ′, Α′Γ′Δ′, Α′Δ′Ε′ αντίστοιχα.

Τότε έχουμε ότι $ΑΒΓ \approx Α'Β'Γ'$ και $ΑΔΕ \approx Α'Δ'Ε'$. Επομένως, θα είναι και $\hat{Γ}_1 = \hat{Γ}'_1$ και $\dfrac{ΑΓ}{Α'Γ'} = λ$. Τότε όμως θα έχουμε ότι $\hat{Γ}_2 = \hat{Γ}'_2$ (αφού $\hat{Γ} = \hat{Γ}'$) και $\dfrac{ΓΔ}{Γ'Δ'} = λ$.

Επομένως και τα τρίγωνα ΑΓΔ και Α′Γ′Δ′ θα είναι όμοια.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4η

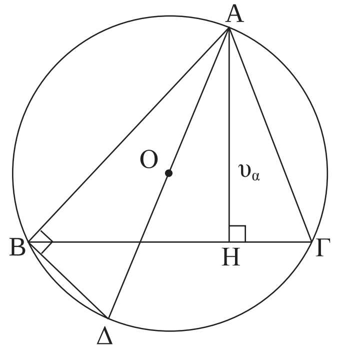
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του $υ_α$=ΑΗ. Να αποδείξετε ότι βγ = 2R$υ_α$, όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

Απόδειξη

Θεωρούμε τη διάμετρο ΑΔ. Τα τρίγωνα ΑΗΓ και ΑΒΔ είναι όμοια, αφού $\hat{Β} = \hat{Η} = 1∟$ και $\hat{Γ} = \hat{Δ}$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

Επομένως είναι

$$\frac{ΑΗ}{ΑΒ} = \frac{ΑΓ}{ΑΔ} \quad ή \quad βγ = 2Rυ_α .$$



Σχήμα 10

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{Α}$ = 1 ∟ , τότε είναι $βγ = αυ_α = 2Rυ_α$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

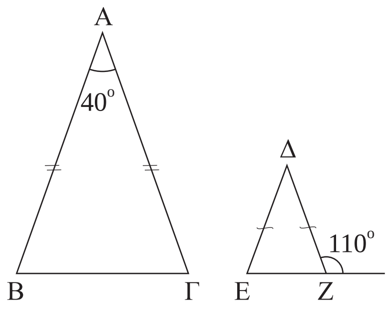
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *i) Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε είναι όμοια;*

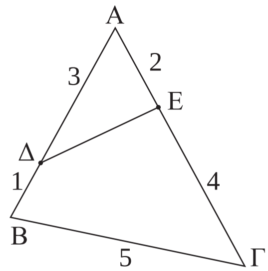
ii) Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια με ένα τρίτο τρίγωνο, τότε είναι και μεταξύ τους όμοια;

2. *Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντα όμοια;*

3. *Στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒ = 3ΔΕ. Να βρεθεί ο λόγος* $\frac{ΕΖ}{ΒΓ}$.

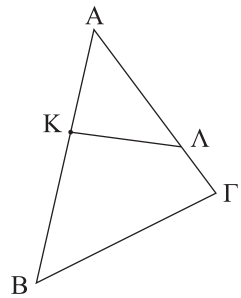


4. *Στο παρακάτω σχήμα να βρεθεί το μήκος του ΔΕ.*

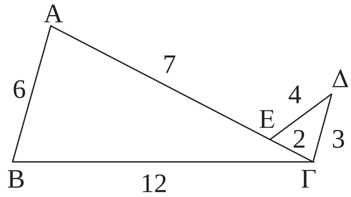


5. *Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι 3cm, 4cm και 5cm. Ένα τρίγωνο όμοιο με αυτό έχει περίμετρο 24cm. Ποια είναι τα μήκη των πλευρών του;*

6. *Αν στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΒΚΛΓ είναι εγγράψιμο, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΚΛ είναι όμοια; Ποιες είναι οι ομόλογες πλευρές τους;*



7. *Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.*



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 1∟). Από τυχαίο σημείο Δ της ΑΓ φέρουμε ΔΕ⊥ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:*

i) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ είναι όμοια,

ii) ΑΓ·ΕΔ = ΑΒ· ΕΓ.

2. *Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε $ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΒ$ και $ΓΕ = \frac{2}{3}ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι:*

i) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια,

ii) ΒΓ = 3ΔΕ.

3. *Μία μεταλλική πλάκα έχει σχήμα ορθογώνιου τριγώνου με πλευρές α, β, γ. Η πλάκα θερμαίνεται και από τη διαστολή αυξάνεται κάθε πλευρά της κατά το $\frac{1}{15}$ της. Θα παραμείνει ορθογώνιο τρίγωνο το σχήμα της πλάκας;*

4. *Ένα δέντρο ρίχνει κάποια στιγμή σε οριζόντιο έδαφος σκιά μήκους 24m. Στο ίδιο σημείο, την ίδια στιγμή, μια κατακόρυφη ράβδος μήκους 2m ρίχνει σκιά μήκους 3m. Να βρεθεί το ύψος του δέντρου.*

5. *Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:*

i) $ΑΔ^2 = ΔΒ \cdot ΔΓ$,

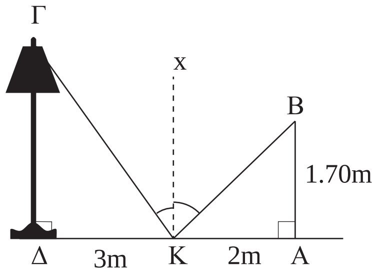
ii) $ΑΒ^2 = ΒΔ \cdot ΒΓ$,

iii) $ΑΒ \cdot ΑΓ = ΑΔ \cdot ΒΓ$.

6. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R) και οι ευθείες Αx και Αy που σχηματίζουν ίσες γωνίες με τις ΑΒ και ΑΓ και τέμνουν τη ΒΓ και τον κύκλο αντίστοιχα στα Δ και Ε. Να αποδείξετε ότι $ΑΔ \cdot ΑΕ = ΑΒ \cdot ΑΓ$.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Ο παρατηρητής ΑΒ βλέπει το φως του λαμπτήρα Γ μέσα από τον καθρέπτη Κ. Να υπολογίσετε το ύψος του φανοστάτη ΔΓ, όταν είναι ΔΚ=3m, ΑΚ=2m και το ύψος του παρατηρητή 1,70m. (Είναι γνωστό από τη Φυσική ότι η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης).*



2. *Να αποδείξετε ότι:*

i) δύο παραλληλόγραμμα είναι όμοια, αν δύο διαδοχικές πλευρές του ενός είναι ανάλογες προς δύο διαδοχικές πλευρές του άλλου και οι γωνίες των πλευρών αυτών είναι ίσες,

ii) δύο ορθογώνια με ίση τη γωνία των διαγωνίων τους είναι όμοια.

3. *Θεωρούμε τους κύκλους (O_1, R_1) και (O_2, R_2) που τέμνονται στα σημεία Α και Β. Αν οι εφαπτόμενες στο Α τέμνουν τους κύκλους στα $Α_1$ και $Α_2$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $ΑΒ^2 = ΒΑ_1 \cdot ΒΑ_2$.*

4. *Αν ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι τα ύψη και Η το ορθόκεντρο τριγώνου ΑΒΓ να αποδείξετε ότι*

$$ΗΔ \cdot ΗΑ = ΗΒ \cdot ΗΕ = ΗΓ \cdot ΗΖ.$$

5. *Από το μέσο Μ του τόξου $\overset{\frown}{ΑΒ}$ φέρουμε τις χορδές ΜΔ και ΜΖ, που τέμνουν τη χορδή ΑΒ στα Δ' και Ζ' αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι*

$$ΜΔ \cdot ΜΔ' = ΜΖ \cdot ΜΖ'.$$

6. *Σε ορθογώνιο τραπέζιο ($\hat{A} = \hat{Δ}$ = 1∟) οι διαγώνιοι είναι κάθετες. Να αποδείξετε ότι το ύψος του είναι μέσο ανάλογο των βάσεων.*

Σύνθετα Θέματα

1. *Να αποδείξετε ότι δύο τραπέζια με ανάλογες βάσεις και τις προσκείμενες σε δύο ομόλογες βάσεις τους γωνίες ίσες μία προς μία, είναι όμοια.*
2. *Έστω δοσμένη γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο Μ. Ο τυχαίος κύκλος που διέρχεται από τα Ο και Μ τέμνει τις πλευρές Οx, Οy στα Β και Γ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι $\frac{MB}{M\Gamma} = \frac{d}{d'}$, όπου d, d' είναι οι αποστάσεις του Μ από τις Οx, Οy, αντίστοιχα.*
3. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1$L) και το ύψος του ΑΔ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει το ΑΔ στο Ζ και η διχοτόμος της $\Delta\hat{A}B$ τέμνει τη ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι ΖΕ//ΑΒ.*
4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 1$L και το ύψος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι $A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma$.*
5. *Η διχοτόμος ΑΔ ενός τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Ε. Να αποδείξετε ότι:*
   i) $AB \cdot A\Gamma = A\Delta \cdot AE$,
   ii) $EB^2 = EA \cdot E\Delta$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Έστω δοσμένος κύκλος (Ο, R) και σημείο Α στο εξωτερικό του κύκλου. Από το Α φέρουμε την εφαπτομένη ΑΤ και την τέμνουσα ΑΒΓ. Να αποδειχθεί ότι $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{TB^2}{T\Gamma^2}$.*
2. *Από σημείο Α φέρουμε τις εφαπτόμενες ΑΒ και ΑΓ κύκλου (Ο, R) και τυχαία τέμνουσα ΑΔΕ. Να αποδειχθεί ότι $B\Delta \cdot \Gamma E = BE \cdot \Gamma\Delta$.*
3. *Αν Ε, Ζ είναι οι προβολές των κορυφών Β, Γ ενός τριγώνου ΑΒΓ (με $\beta \neq \gamma$) στη διχοτόμο του ΑΔ να αποδείξετε ότι τα Ε, Ζ είναι συζυγή αρμονικά των Α, Δ.*
4. *Σε κάθε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ να αποδειχθεί ότι οι αποστάσεις τυχαίου σημείου της διαγωνίου ΑΓ από τις πλευρές ΑΒ και ΑΔ είναι αντιστρόφως ανάλογες προς τις πλευρές αυτές.*
5. *Αν Μ τυχαίο σημείο κύκλου (Ο, R), να αποδείξετε ότι:*
   i) η απόσταση d του Μ από χορδή ΑΒ του κύκλου είναι $d = \frac{MA \cdot MB}{2R}$,
   ii) η απόσταση d' του Μ από την εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο Α του κύκλου είναι $d' = \frac{MA^2}{2R}$,
   iii) αν d, d_1, d_2 οι αποστάσεις του Μ από μία χορδή ΓΔ του κύκλου και από τις εφαπτόμενες στα Γ, Δ αντίστοιχα, τότε $d^2 = d_1 \cdot d_2$.
6. ***Θεώρημα Πτολεμαίου:*** *Σε κάθε εγγράψιμο τετράπλευρο το άθροισμα των γινομένων των απέναντι πλευρών είναι ίσο με το γινόμενο των διαγωνίων του.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

1. *Να κατασκευασθούν δύο τετράπλευρα των οποίων οι πλευρές είναι παράλληλες μία προς μία, αλλά δεν είναι όμοια.*
2. *Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Να κατασκευασθεί τετράπλευρο Α'Β'Γ'Δ' το οποίο να αποτελείται από τρίγωνα ίσα με τα τρίγωνα στα οποία χωρίζει η διαγώνιος ΑΓ το ορθογώνιο έτσι, ώστε το Α'Β'Γ'Δ' να μην είναι όμοιο με το ΑΒΓΔ.*

Εργασία

Κατασκευάστε έναν εξάντα και υπολογίστε το ύψος μίας πολυκατοικίας στη γειτονιά σας ακολουθώντας τη διαδικασία της εφαρμογής 2.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Όμοια ευθύγραμμα σχήματα

- **Ανάλογες πλευρές**
- **Ίσες γωνίες**

- Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους.

Κριτήρια Ομοιότητας τριγώνων

- **Δύο ίσες γωνίες**
- **Δύο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες**
- **Τρεις πλευρές ανάλογες**

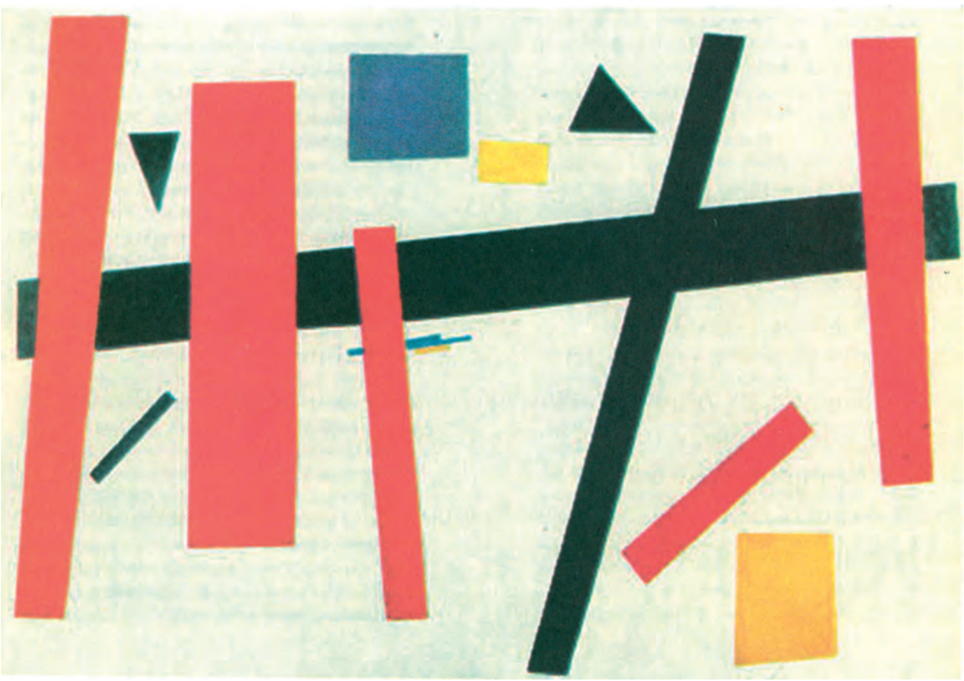
- Σε δύο όμοια τρίγωνα ο λόγος δύο ομόλογων στοιχείων τους ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Το κεφάλαιο αυτό ασχολείται ουσιαστικά με τον προσδιορισμό των στοιχείων του τριγώνου αν είναι γνωστές οι πλευρές, καθώς και με μετρικές σχέσεις στον κύκλο. Στις μετρικές σχέσεις στο τρίγωνο παρουσιάζεται το Πυθαγόρειο θεώρημα και η γενίκευσή του με άμεση εφαρμογή στον προσδιορισμό του είδους του τριγώνου ως προς τις γωνίες του –ακόμα και στον προσδιορισμό των γωνιών του, αν χρησιμοποιήσουμε τον ισοδύναμο νόμο των συνημιτόνων– καθώς και των υψών του τριγώνου. Κατόπιν υπολογίζονται οι διάμεσοι με τα δύο θεωρήματα των διαμέσων.

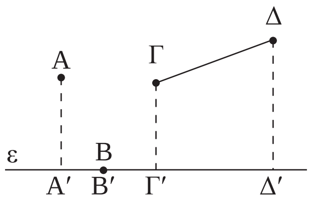
Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με το θεώρημα τεμνουσών από το οποίο προκύπτουν οι μετρικές σχέσεις σε κύκλο.



Κάζιμιρ Μαλέβιτς (Ρώσος, 1878 - 1935), «Υπέρτατο», πριν το 1915.

Μετρικές σχέσεις στο τρίγωνο

9.1 Ορθές προβολές



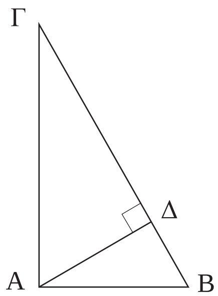
Σχήμα 1

Ας θεωρήσουμε μία ευθεία ε και ένα σημείο Α που δεν ανήκει σε αυτή. Το ίχνος Α′ της καθέτου που φέρουμε από το Α προς την ε το λέμε ***ορθή προβολή*** ή απλώς ***προβολή*** του Α στην ευθεία ε. Αν το σημείο είναι σημείο της ευθείας, π.χ. το Β, τότε ως προβολή του Β′ πάνω στην ε θεωρούμε το ίδιο το Β. Τέλος ορθή προβολή του τμήματος ΓΔ πάνω στην ευθεία ε λέμε το τμήμα Γ′Δ′ που έχει ως άκρα τις ορθές προβολές Γ′, Δ′ των άκρων Γ, Δ, αντίστοιχα, του τμήματος ΓΔ πάνω στην ε.

9.2 Το Πυθαγόρειο θεώρημα

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.



Σχήμα 2

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω λοιπόν ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και Δ η προβολή της κορυφής Α στην υποτείνουσα ΒΓ. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\mathbf{AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta}$ **και** $\mathbf{A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta}$.

Για την πρώτη σχέση αρκεί να αποδείξουμε ότι $\dfrac{AB}{B\Delta} = \dfrac{B\Gamma}{AB}$, δηλαδή ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΑ είναι όμοια, το οποίο ισχύει αφού $\hat{A} = \hat{\Delta} = 1\llcorner$ και η $\hat{B}$ είναι κοινή. Όμοια αποδεικνύεται και η σχέση $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.

Διαιρώντας τις $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$ και $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$ κατά μέλη προκύπτει το εξής πόρισμα:

ΠΟΡΙΣΜΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ (Πυθαγόρειο)

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θέλουμε δηλαδή (σχ.2) να αποδείξουμε ότι

$$\mathbf{AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2 \text{ ή } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2}$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα έχουμε:

$$AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta \quad \text{και} \quad A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta.$$

Με πρόσθεση των ισοτήτων κατά μέλη προκύπτει ότι:

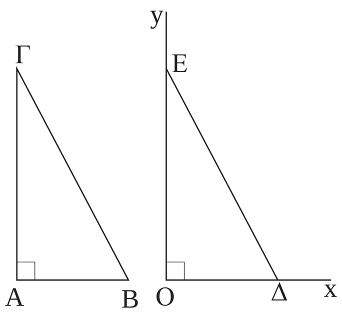
$$AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot B\Delta + B\Gamma \cdot \Gamma\Delta =$$

$$B\Gamma(B\Delta + \Gamma\Delta) = B\Gamma \cdot B\Gamma = B\Gamma^2.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ (Αντίστροφο του Πυθαγορείου)

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$, τότε $\hat{A} = 1\llcorner$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 3

Πάνω στις πλευρές Οx, Oy ορθής γωνίας $x\hat{O}y$ θεωρούμε αντίστοιχα τμήματα ΟΔ = ΑΒ και ΟΕ = ΑΓ. Επειδή το τρίγωνο ΟΔΕ είναι ορθογώνιο σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα και την υπόθεση, έχουμε

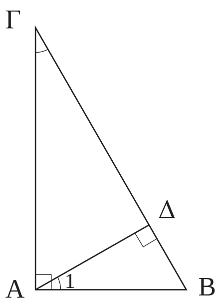
$$\Delta E^2 = O\Delta^2 + OE^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2.$$

Άρα ΔΕ = ΒΓ. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΟΔΕ είναι ίσα, γιατί έχουν και τις τρεις πλευρές ίσες, οπότε θα είναι $\hat{A} = \hat{O} = 1\llcorner$, που είναι το ζητούμενο.

ΘΕΩΡΗΜΑ IV

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 4

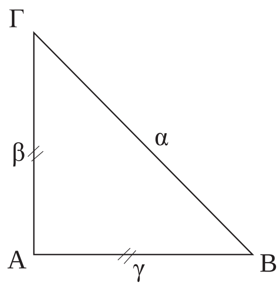
Έστω ΑΔ το ύψος του ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ (σχ.4), που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Θα αποδείξουμε ότι

$$\mathbf{A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma}$$

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΑΔ είναι όμοια, αφού είναι ορθογώνια και $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ ως συμπληρωματικές της $\hat{B}$. Επομένως, οι πλευρές τους είναι ανάλογες, δηλαδή $\dfrac{A\Delta}{B\Delta} = \dfrac{\Delta\Gamma}{A\Delta}$, οπότε $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, τότε $\alpha = \sqrt{2}\beta$.



Σχήμα 5

Απόδειξη

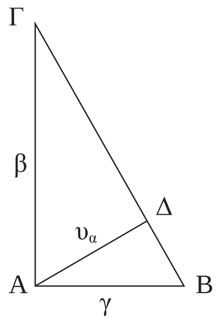
Πράγματι, με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ΑΒΓ παίρνουμε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 = 2\beta^2$ ή $\alpha = \sqrt{2}\beta$.

ΣΧΟΛΙΟ

Η εφαρμογή αυτή αποδεικνύει την ύπαρξη τμημάτων με άρρητο λόγο. Είναι αξιοσημείωτο ότι ενώ είναι αδύνατη η μέτρηση με το υποδεκάμετρο τμημάτων άρρητου μήκους, ωστόσο είναι ακριβής ο προσδιορισμός τους με γεωμετρικές κατασκευές.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Αν ΑΔ είναι το ύψος ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, τότε ισχύει $\dfrac{1}{\beta^2} + \dfrac{1}{\gamma^2} = \dfrac{1}{\upsilon_\alpha^2}$.



Σχήμα 6

Απόδειξη

Επειδή $\alpha\upsilon_\alpha = \beta\gamma$, έχουμε ότι $\dfrac{1}{\beta^2} + \dfrac{1}{\gamma^2} = \dfrac{\beta^2+\gamma^2}{(\beta\gamma)^2} = \dfrac{\alpha^2}{(\alpha\upsilon_\alpha)^2} = \dfrac{1}{\upsilon_\alpha^2}$.

Παρατήρηση: Υπενθυμίζουμε ότι σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$=90°) ισχύει: ΑΒ · ΑΓ = ΑΔ · ΒΓ $\Leftrightarrow$ $\beta \cdot \gamma = \alpha \cdot \upsilon_\alpha$. (Βλ. Εφαρμογή 4, σελ. 178)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 1∟) έχει ΑΒ = 6 και ΑΓ = 8. Ποιο το μήκος της διαμέσου ΑΜ;*

2. *Αν ο λόγος των κάθετων πλευρών ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι 4, τότε ο λόγος των προβολών τους στην υποτείνουσα είναι:*

α. 2 β. 4 γ. 16 δ. $\frac{1}{4}$

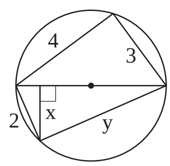
Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. *Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές ίσες με 9 cm και 12 cm. Η πλευρά ισόπλευρου τριγώνου που έχει ίση περίμετρο με το ορθογώνιο τρίγωνο είναι:*

α. 10 cm β. 12 cm γ. 13 cm δ. 14 cm.

Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

4. *Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τα x και y.*



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 1∟) φέρουμε το ύψος ΑΔ. Αν είναι ΑΒ = 3 και ΑΓ = 4, να υπολογιστούν τα μήκη των τμημάτων ΒΓ, ΒΔ, ΔΓ και ΑΔ.*

2. *Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ* ($\hat{A} = 1\llcorner$) *είναι* $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ *τότε ο λόγος* $\frac{\beta}{\gamma}$ *είναι ίσος με:*

α. $\frac{1}{2}$ β. 1 γ. $\sqrt{3}$ δ. 2 ε. 3

Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ* ($\hat{A} = 1\llcorner$) *φέρουμε το ύψος ΑΔ. Αν είναι* $AB = 5$ *και* $B\Delta = \frac{25}{13}$, *να διατάξετε κατά αύξουσα σειρά μήκους τα τμήματα: ΑΓ, ΒΓ, ΓΔ και ΑΔ.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο, που έχει πλευρές* $\alpha = \kappa^2+\lambda^2$, $\beta = 2\kappa\lambda$ *και* $\gamma = \kappa^2 - \lambda^2$, *όπου κ, λ θετικοί ακέραιοι με* $\kappa > \lambda$, *είναι ορθογώνιο.*

2. *Αν ΑΕ, ΑΖ είναι αντίστοιχα οι προβολές δύο χορδών ΑΓ και ΑΔ ενός κύκλου σε μία διάμετρό του ΑΒ, να αποδείξετε ότι* $AZ \cdot A\Gamma^2 = AE \cdot A\Delta^2$.

3. *Αν Δ είναι μέσο της κάθετης πλευράς ΑΓ ενός ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ* ($\hat{A} = 1\llcorner$) *και Ε η προβολή του στη ΒΓ, τότε να αποδείξετε ότι* $E\Gamma^2 + AB^2 = EB^2$. *Στη συνέχεια διατάξτε κατά αύξουσα σειρά μήκους τα τμήματα ΔΒ, ΕΒ, ΕΓ.*

4. *Δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ'* ($\hat{A} = \hat{A}' = 1\llcorner$) *έχουν* $\mu_\beta = \mu_{\beta'}$ *και* $\mu_\gamma = \mu_{\gamma'}$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha = \alpha'$ ii) $\beta = \beta'$.

Τι συμπεραίνετε για τα ΑΒΓ και Α'Β'Γ';

5. *Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρουμε το ύψος του ΒΕ. Να αποδείξετε ότι* $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 3BE^2+2AE^2+\Gamma E^2$.

Σύνθετα Θέματα

1. *Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ* ($\hat{A} = 1\llcorner$) *και το ύψος του ΑΔ. Αν Ε, Ζ είναι οι προβολές του Δ πάνω στις ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*

i) $\frac{AB^3}{A\Gamma^3} = \frac{BE}{\Gamma Z}$ ii) $A\Delta^3 = B\Gamma \cdot \Delta E \cdot \Delta Z$.

2. *Δίνονται δύο κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) που εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Αν ΒΓ είναι το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα τους και (Ο, σ) ο κύκλος που εφάπτεται στους (Κ, R), (Λ, ρ) και στη ΒΓ, να αποδείξετε ότι:*

i) $B\Gamma = 2\sqrt{R\rho}$ ii) $\frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$.

3. *Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ με* $\hat{A} = \hat{B} = 1\llcorner$. *Αν Μ, Ν τα μέσα των διαγωνίων ΒΔ, ΑΓ αντίστοιχα και Κ το σημείο τομής της ΑΜ με τη ΒΓ να αποδείξετε ότι:*

i) *το ΑΒΚΔ είναι ορθογώνιο,*

ii) $\Delta\Gamma^2 - AB^2 = 4MN^2$.

4. *Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ* ($\hat{A} = 90°$) *να αποδείξετε ότι* $2\mu_\alpha^2 \geq \beta\gamma$.

5. *Θεωρούμε κύκλο (Ο, R), διάμετρό του ΑΒ και μία χορδή του ΓΔ που τέμνει την ΑΒ στο Ε και σχηματίζει με αυτή γωνία 45°. Να αποδείξετε ότι*

$$E\Gamma^2 + E\Delta^2 = 2R^2.$$

6. *Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ* ($\hat{A} = 1\llcorner$) *και το ύψος του ΑΔ. Αν x, y και ω είναι αντίστοιχα τα μήκη οποιωνδήποτε ομόλογων γραμμικών στοιχείων των τριγώνων (π.χ. διαμέσων, υψών, ακτίνων εγγεγραμμένων κύκλων κτλ.) ΔΑΒ, ΔΑΓ και ΑΒΓ, τότε* $x^2 + y^2 = \omega^2$.

9.3 Γεωμετρικές κατασκευές

Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος και του θεωρήματος IV αντιμετωπίζουμε τα παρακάτω βασικά προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών ευθύγραμμων τμημάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Αν α, β είναι γνωστά τμήματα, να κατασκευάσετε το τμήμα k, που ορίζεται από την ισότητα: i) $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, ii) $k = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$.

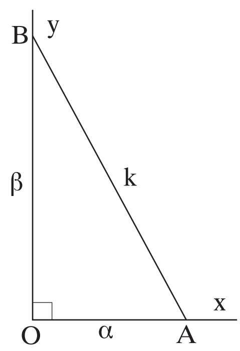
Λύση

i) Η δοσμένη ισότητα γράφεται ισοδύναμα $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$, οπότε το ζητούμενο τμήμα k είναι υποτείνουσα ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες πλευρές α, β.

Επομένως, αν πάνω στις κάθετες πλευρές (σχ.7) Οx, Οy μίας ορθής γωνίας $x\hat{O}y$ πάρουμε αντίστοιχα τα σημεία Α, Β, ώστε ΟΑ = α και ΟΒ = β, τότε

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

και επομένως το τμήμα ΑΒ είναι το ζητούμενο τμήμα k. Είναι φανερό ότι το τμήμα k κατασκευάζεται για οποιαδήποτε τμήματα α, β.



Σχήμα 7

ii) Η δοσμένη ισότητα γράφεται ισοδύναμα $k^2 = \alpha^2 - \beta^2$ η οποία σημαίνει ότι το ζητούμενο τμήμα k είναι η μία κάθετη πλευρά ορθογώνιου τριγώνου με υποτείνουσα α και άλλη κάθετη πλευρά το β. Η κατασκευή είναι όμοια της i).

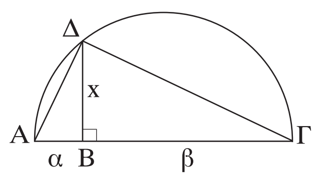
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Αν α, β είναι γνωστά τμήματα, να κατασκευάσετε το τμήμα x , που ορίζεται από την ισότητα $x = \sqrt{\alpha\beta}$. Το τμήμα x είναι η *μέση ανάλογος* των α, β.

Λύση

Η δοσμένη ισότητα γράφεται ισοδύναμα $x^2 = \alpha\beta$ η οποία σημαίνει ότι το x είναι το ύψος του ορθογώνιου τριγώνου, που χωρίζει την υποτείνουσα σε δύο τμήματα ίσα με α και β αντίστοιχα.

Παίρνουμε επομένως σε μία ευθεία διαδοχικά τα τμήματα ΑΒ = α και ΒΓ = β (σχ.8). Γράφουμε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΓ και στο Β υψώνουμε κάθετο στην ΑΓ, που τέμνει το ημικύκλιο στο Δ. Σχηματίζουμε το τρίγωνο ΔΑΓ το οποίο είναι ορθογώνιο ($\hat{\Delta} = 1$L).



Σχήμα 8

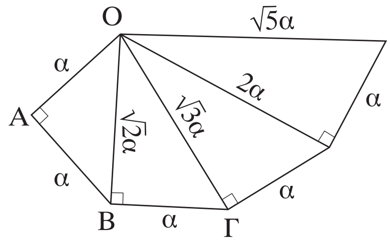
Επομένως έχουμε $\Delta B^2 = AB \cdot B\Gamma = \alpha\beta$ και κατά συνέπεια το τμήμα ΔΒ είναι το ζητούμενο. Είναι φανερό ότι το τμήμα x κατασκευάζεται για οποιαδήποτε τμήματα α, β.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν α είναι γνωστό τμήμα, να κατασκευασθεί τμήμα ίσο με $\sqrt{2}\alpha, \sqrt{3}\alpha, \sqrt{5}\alpha, \ldots, \sqrt{\nu}\alpha$ με ν φυσικό μεγαλύτερο ή ίσο του δύο.

Λύση

Αν $x = \sqrt{2}\alpha$, τότε $x^2 = 2\alpha^2 = \alpha^2 + \alpha^2$, η οποία σημαίνει ότι το x μπορεί να κατασκευασθεί (σχ.9) ως υποτείνουσα ορθογώνιου και ισοσκελούς τριγώνου με κάθετες πλευρές ίσες με α. Έτσι το ΟΒ είναι το ζητούμενο τμήμα.



Σχήμα 9

Αν $y = \sqrt{3}\alpha$, τότε $y^2 = 3\alpha^2 = \alpha^2 + 2\alpha^2 = \alpha^2 + x^2$ που σημαίνει ότι το y είναι υποτείνουσα ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες πλευρές α και x. Αν λοιπόν φέρουμε κάθετο στην ΟΒ στο Β και πάνω σε αυτή πάρουμε σημείο Γ, ώστε ΒΓ = α, τότε $ΟΓ = \sqrt{3}\alpha$, δηλαδή y = ΟΓ. Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο κατασκευάζουμε διαδοχικά τα τμήματα $\sqrt{2}\alpha, \sqrt{3}\alpha, \sqrt{5}\alpha, \ldots, \sqrt{\nu}\alpha$.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

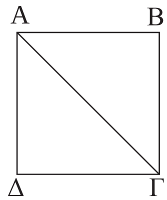
Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας

Αρχικά οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι ο λόγος οιωνδήποτε (φυσικών ή γεωμετρικών) μεγεθών μπορεί να εκφραστεί ως λόγος φυσικών αριθμών. Ειδικότερα, θεωρούσαν ότι όλα τα τμήματα είναι σύμμετρα, δηλαδή για οποιαδήποτε δύο τμήματα ΑΒ και ΓΔ υπάρχει τμήμα ΕΖ που περιέχεται ακέραιο αριθμό φορών τόσο στο ΑΒ, όσο και στο ΓΔ.

Όμως σύντομα έκαναν μια ανακάλυψη που έμελλε να κλονίσει την πεποίθησή τους αυτή. Βρήκαν ότι υπάρχουν μεγέθη που δεν είναι σύμμετρα. Δεν γνωρίζουμε με βεβαιότητα ποιο ακριβώς πρόβλημα οδήγησε τους αρχαίους Έλληνες στην ανακάλυψη αυτή. Οι ιστορικοί έχουν προτείνει κατά καιρούς πολλές εκδοχές.

Η ανακάλυψη αυτή μπορεί να είχε γίνει π.χ. στη γεωμετρία, στο πρόβλημα της εύρεσης του κοινού μέτρου της διαγωνίου προς την πλευρά του τετραγώνου, ή κατά τη μελέτη του κανονικού δωδεκαέδρου, ή στη θεωρία της μουσικής, στο πρόβλημα της διαίρεσης της οκτάβας, που ανάγεται στην εύρεση του γεωμετρικού μέσου των αριθμών 1 και 2, ή στην αριθμητική, στο πρόβλημα του ορισμού του λόγου, που το τετράγωνό του είναι ίσο με 2.

Η πρώτη μαρτυρία για την απόδειξη της ασυμμετρίας (αλλά όχι κατ' ανάγκη και ιστορικά πρώτη απόδειξη) απαντάται στα «Αναλυτικά Ύστερα» του Αριστοτέλη, ο οποίος αναφέρει ότι η απόδειξη της ασυμμετρίας της διαγωνίου με την πλευρά του τετραγώνου γίνεται με την εις άτοπο απαγωγή, γιατί «αν υποτεθεί ότι η διάμετρος είναι σύμμετρη με την πλευρά, τότε ο άρτιος θα ισούται με τον περιττό». Η πρόταση αυτή του Αριστοτέλη ερμηνεύεται ως εξής:



Αν υποθέσουμε ότι η πλευρά ΑΒ είναι σύμμετρη προς τη διαγώνιο ΑΓ, τότε ο λόγος τους είναι λόγος ακεραίων αριθμών, δηλαδή $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{\alpha}{\beta}$, όπου οι α, β δεν είναι και οι δύο άρτιοι. Τότε, από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $ΑΓ^2 = 2ΑΒ^2$. Επομένως, $\frac{ΑΒ^2}{ΑΓ^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{1}{2}$, ή $\beta^2 = 2\alpha^2$.

Αυτό σημαίνει ότι ο β^2 είναι άρτιος και επομένως και ο β είναι άρτιος (δηλαδή της μορφής

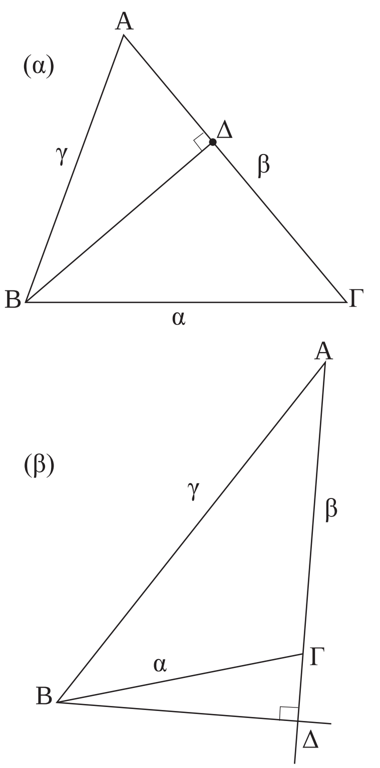
$\beta = 2\lambda$). Τότε ο α πρέπει να είναι περιττός (αφού οι α, β δεν είναι και οι δύο άρτιοι). Όμως τότε $(2\lambda)^2 = 2\alpha^2$, ή $4\lambda^2=2\alpha^2$, ή $2\lambda^2 = \alpha^2$ κι επομένως ο α^2 είναι άρτιος, οπότε και ο α είναι άρτιος, που είναι άτοπο.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι η απόδειξη αυτή έχει καθαρά αριθμητικό χαρακτήρα και στηρίζεται στη θεωρία του άρτιου και του περιττού (δηλαδή τη θεωρία διαιρετότητας δια 2) που είχαν αναπτύξει οι Πυθαγόρειοι.

Γρήγορα βρέθηκαν και άλλα ασύμμετρα τμήματα. Ειδικότερα, ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος (τέλη του 5ου αι. π.Χ.) ανακάλυψε ότι οι πλευρές των τετραγώνων με εμβαδόν 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15 είναι ασύμμετρες με τη διαγώνιο του τετραγώνου με πλευρές τη μονάδα. Επίσης, ο Θεαίτητος απέδειξε ότι αν το εμβαδόν ενός τετραγώνου εκφράζεται με έναν αριθμό Ν που δεν είναι τετράγωνος, τότε η πλευρά του είναι ασύμμετρη με τη μονάδα. Με σύγχρονη ορολογία, αν $N \neq \alpha^2$, τότε ο $\sqrt{N}$ δεν είναι ρητός αριθμός. Ο Θεαίτητος προχώρησε παραπέρα τις έρευνές του και απέδειξε ότι και όλοι οι αριθμοί της μορφής $\sqrt[3]{N}$, όπου Ν φυσικός αριθμός δεν είναι τέλειοι κύβοι. Επίσης εξέτασε άρρητους της μορφής $\sqrt{M+N}$, $\sqrt{M}+\sqrt{N}$, $\sqrt{\sqrt{M}+\sqrt{N}}$.

9.4 Γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος

Το Πυθαγόρειο θεώρημα εκφράζει το τετράγωνο μίας πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από ορθή γωνία, ως προς τις δύο άλλες πλευρές. Προκύπτει, λοιπόν, το ερώτημα: το τετράγωνο μίας πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι σε οξεία ή αμβλεία γωνία μπορεί να εκφρασθεί ως συνάρτηση των άλλων πλευρών; Απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνουν τα ακόλουθα δύο θεωρήματα.



Σχήμα 10

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Αν δηλαδή σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ.10) είναι π.χ. $\hat{A} < 1\mathrm{L}$ και ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β, τότε ισχύει ότι

$$\boldsymbol{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΓ, ΔΒΑ έχουμε, με εφαρμογές του Πυθαγόρειου θεωρήματος αντίστοιχα:

$$\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta\Gamma^2 \text{ και } \Delta B^2 = \gamma^2 - A\Delta^2.$$

Επειδή είναι $\hat{A} < 1\mathrm{L}$ τα Δ, Γ βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του Α και ειδικότερα:

- αν $\hat{\Gamma} < 1\llcorner$ το Δ είναι μεταξύ των Α, Γ (σχ.10α), οπότε $\Delta\Gamma = \beta - \mathrm{A}\Delta$.
- αν $\hat{\Gamma} > 1\llcorner$ το Γ είναι μεταξύ των Α, Δ (σχ.10β), οπότε $\Delta\Gamma = \mathrm{A}\Delta - \beta$.

Από τις δύο τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι

$$\Delta\Gamma^2 = (\beta - \mathrm{A}\Delta)^2 = \beta^2 + \mathrm{A}\Delta^2 - 2\beta \cdot \mathrm{A}\Delta.$$

Με αντικατάσταση αυτής της σχέσης και της $\Delta\mathrm{B}^2 = \gamma^2 - \mathrm{A}\Delta^2$ στην $\alpha^2 = \Delta\mathrm{B}^2 + \Delta\Gamma^2$ προκύπτει ότι

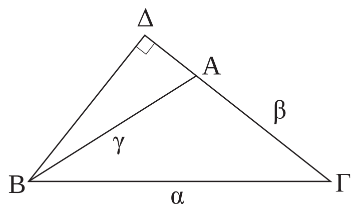
$$\boldsymbol{\alpha^2 = \gamma^2 - \mathrm{A}\Delta^2 + \beta^2 + \mathrm{A}\Delta^2 - 2\beta \cdot \mathrm{A}\Delta = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \mathrm{A}\Delta,}$$

δηλαδή η ζητούμενη ισότητα.

- αν τέλος $\hat{\Gamma} = 1\llcorner$, το Δ συμπίπτει με το Γ και το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΑΒ δίνει $\alpha^2 = \gamma^2 - \beta^2$ που γράφεται $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \mathrm{A}\Delta$, αφού $\mathrm{A}\Delta = \beta$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.



Σχήμα 11

Αν δηλαδή σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ.11) είναι π.χ. $\hat{\mathrm{A}} > 1\llcorner$ και ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β, τότε ισχύει

$$\boldsymbol{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot \mathrm{A}\Delta.}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΓ και ΔΒΑ, παίρνουμε αντίστοιχα:

$$\alpha^2 = \Delta\mathrm{B}^2 + \Delta\Gamma^2 \quad \text{και} \quad \Delta\mathrm{B}^2 = \gamma^2 - \mathrm{A}\Delta^2.$$

Επειδή $\hat{\mathrm{A}} > 1\llcorner$, το Δ βρίσκεται στην προέκταση της ΓΑ προς το Α και επομένως $\Delta\Gamma = \beta + \mathrm{A}\Delta$ οπότε

$$\Delta\Gamma^2 = (\beta + \mathrm{A}\Delta)^2 = \beta^2 + \mathrm{A}\Delta^2 + 2\beta \cdot \mathrm{A}\Delta.$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων $\Delta\mathrm{B}^2 = \gamma^2 - \mathrm{A}\Delta^2$ και

$$\Delta\Gamma^2 = (\beta + \mathrm{A}\Delta)^2 = \beta^2 + \mathrm{A}\Delta^2 + 2\beta \cdot \mathrm{A}\Delta$$

στη σχέση $\alpha^2 = \Delta\mathrm{B}^2 + \Delta\Gamma^2$, προκύπτει η ζητούμενη ισότητα

$$\alpha^2 = \gamma^2 - \mathrm{A}\Delta^2 + \beta^2 + \mathrm{A}\Delta^2 + 2\beta \cdot \mathrm{A}\Delta = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot \mathrm{A}\Delta.$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα και τα προηγούμενα θεωρή-

ΣΧΟΛΙΟ

Είναι φανερό ότι τα παραπάνω θεωρήματα Ι και ΙΙ αποτελούν γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος, αφού στην περίπτωση που είναι $\hat{A}$ = 1∟, τα θεωρήματα αυτά δίνουν ως ειδική περίπτωση το Πυθαγόρειο θεώρημα.

ματα Ι και ΙΙ προκύπτει άμεσα ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

i) Αν $\hat{A} < 1∟$, τότε $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$,

ii) Αν $\hat{A} = 1∟$, τότε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$,

iii) Αν $\hat{A} > 1∟$, τότε $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$.

Αποδεικνύεται όμως με απαγωγή σε άτοπο ότι ισχύει και το αντίστροφο των i), ii), iii). Πράγματι, αν π.χ. ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ δεν μπορεί να ισχύει $\hat{A} = 1∟$ ή $\hat{A} > 1∟$, γιατί τότε από τις ii) και iii) θα είχαμε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ ή $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ αντίστοιχα, που είναι άτοπο, αφού $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$. Άρα $\hat{A} < 1∟$.

Όμοια αποδεικνύονται και οι άλλες περιπτώσεις.

Έτσι έχουμε το ακόλουθο πόρισμα:

ΠΟΡΙΣΜΑ

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι ισοδυναμίες:

i) $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} > 1∟$,

ii) $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} = 1∟$,

iii) $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} < 1∟$.

Σύμφωνα με το πόρισμα αυτό και επειδή σε κάθε τρίγωνο η μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται απέναντι στη μεγαλύτερη γωνία, συγκρίνοντας το τετράγωνο της **μεγαλύτερης** πλευράς ενός τριγώνου με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων πλευρών του, διαπιστώνουμε αν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha = 8$, $\beta = 10$ και $\gamma = 7$, θα έχουμε $\beta^2 = 100$, $\alpha^2 + \gamma^2 = 64 + 49 = 113$ δηλαδή $\beta^2 < \alpha^2 + \gamma^2$, οπότε $\hat{B} < 1∟$ και επειδή η $\hat{B}$ είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου, το τρίγωνο θα είναι οξυγώνιο.

Τέλος από τα θεωρήματα Ι και ΙΙ εκφράζοντας την προβολή ΑΔ ως προς το συνΑ προκύπτει το επόμενο πόρισμα:

ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση

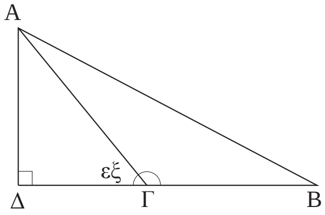
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \text{συν}A.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Αν μεταξύ των πλευρών α, β, γ ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{3}\alpha\beta}$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο,

ii) να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$.



Σχήμα 12

Λύση

i) Από τη δοσμένη ισότητα προκύπτει ότι η γ είναι η μεγαλύτερη πλευρά και επιπλέον ότι $\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2$, οπότε η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι αμβλεία.

ii) Επειδή η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι αμβλεία, σύμφωνα με το θεώρημα αμβλείας γωνίας έχουμε:

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha \cdot \Gamma\Delta \ (1).$$

Από την υπόθεση όμως έχουμε

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{3}\alpha\beta \quad (2).$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\Gamma\Delta = \frac{\sqrt{3}}{2}\beta$. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε $A\Delta^2 = \beta^2 - \Gamma\Delta^2 = \frac{\beta^2}{4}$, οπότε $A\Delta = \frac{\beta}{2} = \frac{A\Gamma}{2}$ που σημαίνει ότι $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 30°$ και επομένως $\hat{\Gamma} = 150°$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Το ύψος υ_α ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο

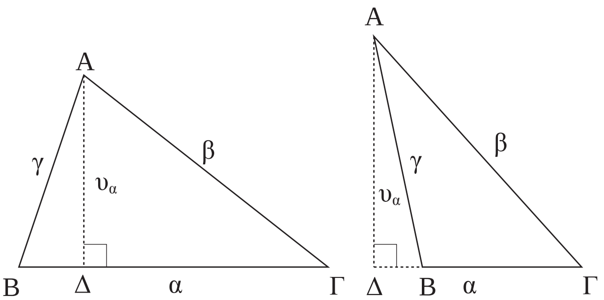
$$\upsilon_\alpha = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)},$$

όπου $\tau = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$ η ημιπερίμετρος του τριγώνου. Ανάλογες εκφράσεις ισχύουν και για τα άλλα ύψη υ_β και υ_γ.

Απόδειξη

Έστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ το ύψος του υ_α. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΒ έχουμε $\upsilon_\alpha^2 = \gamma^2 - B\Delta^2$ (1).

Πρέπει επομένως να υπολογίσουμε την προβολή ΒΔ της γ πάνω στην α.



Σχήμα 13

- Αν $\hat{B} \leq 1∟$, από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha \cdot B\Delta$ ή

  $B\Delta = \frac{1}{2\alpha}(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)$ (2).

- Αν $\hat{B} \geq 1∟$, από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

  $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha \cdot B\Delta$ ή $B\Delta = -\frac{1}{2\alpha}(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)$ (3).

Από τις (2) και (3) προκύπτει ότι $B\Delta^2 = \frac{1}{4\alpha^2}(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)^2$ με αντικατάσταση της οποίας στην (1) παίρνουμε:

$$\upsilon_\alpha^2 = \gamma^2 - \frac{1}{4\alpha^2}(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)^2 = \frac{1}{4\alpha^2}\left[4\alpha^2\gamma^2 - (\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4\alpha^2}(2\alpha\gamma+\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)(2\alpha\gamma-\alpha^2-\gamma^2+\beta^2) =$$

$$= \frac{1}{4\alpha^2}\left[(\alpha+\gamma)^2-\beta^2\right]\left[\beta^2-(\alpha-\gamma)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4\alpha^2}(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)(\beta+\alpha-\gamma)(\beta-\alpha+\gamma) \qquad (4).$$

Επειδή $\alpha+\beta+\gamma = 2\tau$, θα είναι

$\alpha+\gamma-\beta = 2\tau-\beta-\beta = 2(\tau-\beta)$, $\alpha+\beta-\gamma = 2(\tau-\gamma)$ και $\beta+\gamma-\alpha = 2(\tau-\alpha)$,

οπότε η (4) γίνεται:

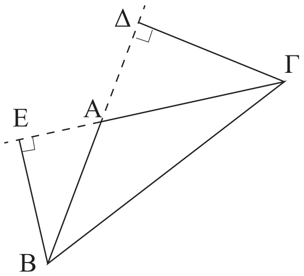
$$\upsilon^2_\alpha = \frac{1}{4\alpha^2}2\tau\cdot 2(\tau-\beta)\cdot 2(\tau-\gamma)\cdot 2(\tau-\alpha) = \frac{4}{\alpha^2}\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)$$

από την οποία προκύπτει το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Στο παρακάτω σχήμα να συμπληρώστε τα κενά:*



i) $ΒΓ^2 = ... + ... + 2ΑΒ ...$

ii) $ΒΓ^2 = ... + ... + 2ΑΓ ...$

2. *Να βρεθεί το είδος των γωνιών τριγώνου ΑΒΓ όταν:*

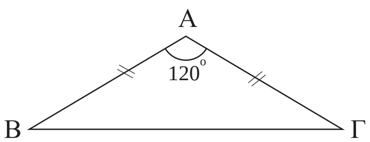
i) $β^2 = 3α^2 + γ^2$,

ii) $γ^2 = α^2 - β^2$,

iii) $α^2 - β^2 = 2γ^2$.

3. *Αν β η .... πλευρά αμβλυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ τότε ... > $α^2$ + ... (Να συμπληρώσετε τα κενά).*

4. *Αν στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A} = 120°$, να δικαιολογήσετε γιατί $α^2 = 3β^2$.*



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να εξετάσετε αν υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ, με α = 6μ, β = 5μ, γ = 4μ, όπου μ θετική παράμετρος. Να εξετασθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.*

2. *Υπάρχει τρίγωνο με μήκη πλευρών α = 6, β = 5, γ = 4; Αν ναι, να υπολογισθούν τα ύψη του τριγώνου.*

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $α = \sqrt{2}$, $β = 1+\sqrt{3}$, γ = 2. Να υπολογισθεί η γωνία $\hat{A}$.*

4. *Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 4cm, ΑΓ = 5cm και $A\hat{B}Δ = 30°$, όπου ΒΔ το ύψος του. Να υπολογισθεί η πλευρά του ΒΓ.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Οι πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ έχουν μήκη ΑΒ = 9cm, ΒΓ = 7cm και ΑΓ = 12cm. Να υπολογισθεί το μήκος της προβολής της ΒΓ πάνω στην ΑΒ.*

2. *Να αποδείξετε ότι σε κάθε τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ, ΓΔ ισχύει ότι*

$$ΑΓ^2 + ΒΔ^2 = ΑΔ^2 + ΒΓ^2 + 2ΑΒ \cdot ΓΔ.$$

3. *Αν ΒΒ′, ΓΓ′ είναι ύψη ενός οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι $α^2 = β{\cdot}ΓΒ' + γ{\cdot}ΒΓ'$.*

4. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1∟$). Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ κατά ΓΔ = ΒΓ. Να αποδείξετε ότι $ΒΔ^2 = 2ΒΓ{\cdot}ΑΔ$.*

5. *Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρουμε παράλληλο της ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $ΒΕ^2 = ΕΓ^2 + ΒΓ{\cdot}ΔΕ$.*

6. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1∟$) με πλευρές α, β, γ. Υπάρχει τρίγωνο με πλευρές 5α, 4β, 3γ;*

Σύνθετα Θέματα

1. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A} = 30°$. Να αποδείξετε ότι $α = β\sqrt{2-\sqrt{3}}$.*

2. *Δίνεται κύκλος διαμέτρου ΑΒ και μία χορδή του ΓΔ//ΑΒ. Αν Μ είναι τυχαίο σημείο της ΑΒ, να αποδείξετε ότι $ΜΓ^2 + ΜΔ^2 = ΜΑ^2 + ΜΒ^2$.*

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $α^3 = β^3 + γ^3$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.*

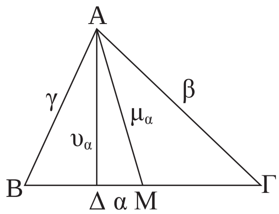
9.5 Θεωρήματα διαμέσων

Οι επόμενες μετρικές σχέσεις που θα μελετήσουμε αφορούν τον υπολογισμό των διαμέσων ενός τριγώνου και των προβολών τους στις πλευρές, ως συνάρτηση των πλευρών του τριγώνου.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι (1ο Θεώρημα Διαμέσων)

Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 14

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, η διάμεσος ΑΜ = μ_α και το ύψος ΑΔ. Αν ΑΓ > ΑΒ, τότε το ίχνος Δ του υ_α βρίσκεται μεταξύ των Β, Μ (σχ.14) και $\hat{\text{ΑΜΓ}} > 1\llcorner$, ενώ $\hat{\text{ΑΜΒ}} < 1\llcorner$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα αμβλείας γωνίας στο τρίγωνο ΑΜΓ και το θεώρημα οξείας γωνίας στο τρίγωνο ΑΜΒ. Τότε θα έχουμε ότι:

i) $\text{ΑΓ}^2 = \text{ΑΜ}^2 + \text{ΜΓ}^2 + 2\text{ΜΓ}\cdot\text{ΜΔ}$

ii) $\text{ΑΒ}^2 = \text{ΑΜ}^2 + \text{ΜΒ}^2 - 2\text{ΜΒ}\cdot\text{ΜΔ}$

Προσθέτοντας κατά μέλη αυτές τις σχέσεις και λαμβάνοντας υπόψη ότι ΜΒ = ΜΓ έχουμε:

$$\text{ΑΓ}^2 + \text{ΑΒ}^2 = 2\text{ΑΜ}^2 + 2\text{ΜΒ}^2 = 2\text{ΑΜ}^2 + 2\left(\frac{\text{ΒΓ}}{2}\right)^2 =$$

$$= 2\text{ΑΜ}^2 + \frac{\text{ΒΓ}^2}{2} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}}.$$

Ανάλογα έχουμε και τους ακόλουθους τύπους:

$$\boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 = 2\mu_\gamma^2 + \frac{\gamma^2}{2}}, \quad \boldsymbol{\alpha^2 + \gamma^2 = 2\mu_\beta^2 + \frac{\beta^2}{2}}.$$

Από τους τύπους αυτούς μπορούμε να υπολογίσουμε τα τετράγωνα των διαμέσων ως συνάρτηση των πλευρών του τριγώνου:

$$\boldsymbol{\mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}}, \quad \boldsymbol{\mu_\beta^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4}},$$

$$\boldsymbol{\mu_\gamma^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}}.$$

Για τον υπολογισμό των προβολών των διαμέσων στις πλευρές του τριγώνου έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ (2ο Θεώρημα Διαμέσων)

Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω στην πλευρά αυτή.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΓ = ΑΒ) ή ισόπλευρο, τότε το Μ ταυτίζεται με το Δ και το 2ο θεώρημα διαμέσων ισχύει ταυτοτικά.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι ΑΓ > ΑΒ. Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (βλ. Απόδειξη θεωρήματος Ι):

i) $\text{ΑΓ}^2 = \text{ΑΜ}^2 + \text{ΜΓ}^2 + 2\text{ΜΓ} \cdot \text{ΜΔ}$

ii) $\text{ΑΒ}^2 = \text{ΑΜ}^2 + \text{ΜΒ}^2 - 2\text{ΜΒ} \cdot \text{ΜΔ}$

βρίσκουμε ότι

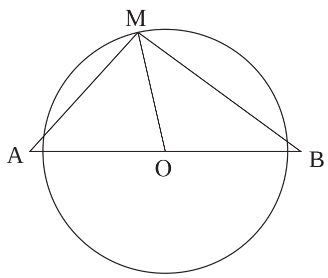
$$\text{ΑΓ}^2 - \text{ΑΒ}^2 = 4\text{ΜΒ} \cdot \text{ΜΔ} = 4\frac{\text{ΒΓ}}{2} \cdot \text{ΜΔ} \text{ ή } \boldsymbol{\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot \text{ΜΔ}}.$$

9.6 Βασικοί γεωμετρικοί τόποι

Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες μετρικές σχέσεις θα μελετήσουμε τα παρακάτω προβλήματα γεωμετρικών τόπων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Έστω Α, Β δύο σταθερά σημεία και k ένα δοσμένο τμήμα. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων, των οποίων το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων από τα Α, Β ισούται με $\mathbf{k^2}$.



Σχήμα 15

Λύση

Έστω Μ ένα σημείο του γεωμετρικού τόπου. Σύμφωνα με το πρόβλημα θα είναι:

$$\text{ΑΜ}^2 + \text{ΒΜ}^2 = k^2 \quad (1).$$

Αν Ο είναι το μέσο του ΑΒ, τότε από το 1ο θεώρημα των διαμέσων θα έχουμε

$$\text{ΑΜ}^2 + \text{ΒΜ}^2 = 2\text{ΜΟ}^2 + \frac{\text{ΑΒ}^2}{2} \Leftrightarrow k^2 = 2\text{ΜΟ}^2 + \frac{\text{ΑΒ}^2}{2} \Leftrightarrow \text{ΜΟ} = \frac{\sqrt{2k^2 - \text{ΑΒ}^2}}{2} \quad (2).$$

Από την ισότητα αυτή βλέπουμε ότι το τμήμα ΜΟ έχει σταθερό μήκος.

Έτσι το Μ απέχει από το σταθερό σημείο Ο σταθερή απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2k^2 - \text{ΑΒ}^2}}{2}$, άρα βρίσκεται στον κύκλο $\left(\text{Ο}, \frac{\sqrt{2k^2 - \text{ΑΒ}^2}}{2}\right)$.

Αντίστροφα. Θα αποδείξουμε ότι κάθε σημείο Μ του κύκλου $\left(\text{Ο}, \frac{\sqrt{2k^2 - \text{ΑΒ}^2}}{2}\right)$ είναι και σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου, δηλαδή ότι ισχύει $AM^2 + MB^2 = k^2$. Πράγματι, από το 1ο θεώρημα διαμέσων έχουμε

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2} = 2\left(\frac{\sqrt{2k^2 - AB^2}}{2}\right)^2 + \frac{AB^2}{2} = k^2.$$

Επομένως ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος που έχει κέντρο Ο το μέσο του τμήματος ΑΒ και ακτίνα ίση με $\frac{\sqrt{2k^2 - AB^2}}{2}$.

Διερεύνηση. Απαραίτητη προϋπόθεση για να υπάρχει γεωμετρικός τόπος είναι

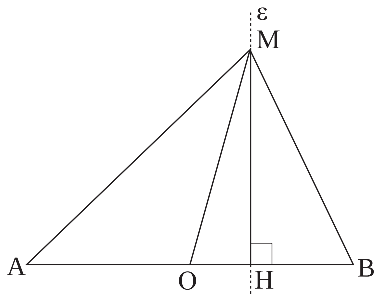
$$2k^2 - AB^2 \geq 0 \Leftrightarrow k \geq \frac{AB}{\sqrt{2}}.$$

Όταν έχουμε ισότητα, ο γεωμετρικός τόπος αποτελείται μόνο από το σημείο Ο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Έστω Α, Β δύο σταθερά σημεία και k ένα σταθερό τμήμα. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων, για τα οποία η διαφορά των τετραγώνων των αποστάσεών τους από τα Α, Β ισούται με k².

Λύση



Σχήμα 16

Έστω Μ ένα σημείο του γεωμετρικού τόπου. Σύμφωνα με το πρόβλημα (για ΑΜ > ΒΜ) είναι

$$AM^2 - BM^2 = k^2 \quad (1).$$

Έστω Ο το μέσο του ΑΒ και ε η ευθεία ΜΗ⊥ΑΒ όπου Η η προβολή του Μ πάνω στην ΑΒ. Από το 2ο θεώρημα των διαμέσων έχουμε ότι

$$AM^2 - BM^2 = 2AB \cdot OH \Leftrightarrow k^2 = 2AB \cdot OH \Leftrightarrow OH = \frac{k^2}{2AB} \quad (2).$$

Η ισότητα αυτή δείχνει ότι το τμήμα ΟΗ είναι σταθερό. Παρατηρούμε ότι η προβολή του Μ πάνω στο ΑΒ είναι σταθερή, άρα το Μ βρίσκεται στην ευθεία ε⊥ΑΒ στο σημείο Η, όπου $OH = \frac{k^2}{2AB}$ και βρίσκεται μεταξύ των σημείων Ο, Β.

Αντίστροφα. Έστω σημείο Η μεταξύ των Ο, Β τέτοιο, ώστε $OH = \frac{k^2}{2AB}$.

Από το Η φέρουμε την κάθετη ευθεία ε στην ΑΒ και έστω Μ τυχαίο σημείο της ε. Θα αποδείξουμε ότι το Μ είναι σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου. Πράγματι από το 2ο θεώρημα διαμέσων έχουμε $AM^2 - BM^2 = 2AB \cdot OH = 2AB \cdot \frac{k^2}{2AB} = k^2$.

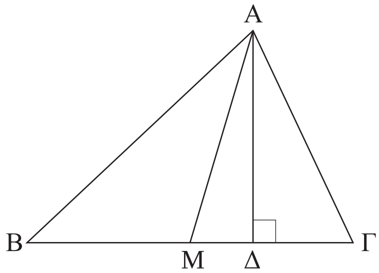
Επομένως ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ε.

Διερεύνηση. Αν k = 0 είναι $MA^2 - MB^2 = 0$ ή ΜΑ = ΜΒ, οπότε το Μ ισαπέχει από τα σημεία Α, Β. Τότε ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Στο παρακάτω σχήμα η ΑΜ είναι διάμεσος και ΑΔ ύψος. Ποια σχέση είναι σωστή;*



i) $AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

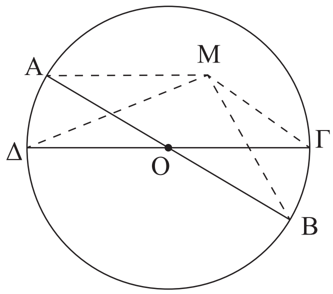
ii) $AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + 2A\Delta^2$

iii) $AB^2 + A\Gamma^2 = 2B\Gamma \cdot M\Delta$

iv) $AB^2 - A\Gamma^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. *Στο παρακάτω σχήμα να συμπληρώσετε τα κενά*



i) $MA^2 + MB^2 = ... + ...$

ii) $M\Gamma^2 + M\Delta^2 = ... + ...$

Να εξηγήσετε γιατί $MA^2+MB^2=M\Gamma^2+M\Delta^2$.

3. *Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι* $\beta^2 + \gamma^2 = 5\alpha^2$ *τότε:*

α. $\mu_\alpha = \dfrac{\alpha}{2}$ β. $\mu_\alpha = \dfrac{3\alpha}{4}$

γ. $\mu_\alpha = \dfrac{3\alpha}{2}$ δ. $\mu_\alpha = \dfrac{2\alpha}{3}$

Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση και αιτιολογήστε την απάντηση σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε* $\beta = 7$, $\gamma = 6$ *και* $\mu_\alpha = 7/2$. *Να υπολογισθούν: i) η πλευρά α, ii) η προβολή της διαμέσου* μ_α *στη ΒΓ.*

2. *Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει*

$$\mu_\alpha^2 + \beta\gamma > \frac{\alpha^2}{4}.$$

3. *Δίνεται κύκλος (Ο, R), μια διάμετρός του ΑΒ και έστω Γ, Δ τα μέσα των ΟΑ και ΟΒ αντίστοιχα.*
Αν $M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 5$, *όπου Μ τυχαίο σημείο του κύκλου, να υπολογισθεί η ακτίνα R.*

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Θ το βαρύκεντρό του. Να αποδείξετε ότι:*

i) $\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \dfrac{3}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$,

ii) $\Theta A^2 + \Theta B^2 + \Theta\Gamma^2 = \dfrac{1}{3}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με* $\hat{A} = 60°$, $\beta = 5$, $\gamma = 3$. *Να υπολογισθεί η διάμεσός του* μ_α.

2. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και τυχαίο σημείο Δ της ΑΒ. Να αποδείξετε ότι*

$$A\Gamma^2 - \Delta B^2 = \frac{B\Gamma^2 \cdot A\Delta}{AB}.$$

3. *i) Αν ΑΒΓΔ ορθογώνιο και Μ τυχαίο σημείο να αποδείξετε ότι* $MA^2 + M\Gamma^2 = MB^2 + M\Delta^2$.

ii) Αν ΑΒΓΔ τετράγωνο και σημείο Μ στο εσωτερικό του, ώστε $MA = 1$, $MB = \sqrt{2}$ *και* $M\Gamma = \sqrt{3}$, *να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου.*

4. *Αν Μ, Ν είναι μέσα των διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι*

$$AB^2+B\Gamma^2+\Gamma\Delta^2+\Delta A^2=A\Gamma^2+B\Delta^2+4MN^2$$

(Θεώρημα Euler).

5. *Στην υποτείνουσα ΒΓ ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε τέτοια, ώστε ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ.*
Να αποδείξετε ότι $A\Delta^2 + AE^2 = \dfrac{5}{9}B\Gamma^2$.

6. *Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει* $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha\mu_\alpha$ *να υπολογισθεί η γωνία* $\hat{A}$.

Σύνθετα Θέματα

1. *Δύο αδέλφια κληρονόμησαν αγροτεμάχιο σχήματος τραπεζίου και αποφάσισαν να το μοιράσουν ανοίγοντας δρόμο που θα ενώνει τα μέσα των παράλληλων πλευρών του.*

Αν οι βάσεις είναι 8km και 6km, ενώ οι μη παράλληλες πλευρές 5km και 6km, πόσο θα στοιχίσει η διάνοιξη του δρόμου, αν 1 χιλιόμετρο δρόμου κοστίζει 500 ευρώ;

2. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με ΑΓ > ΑΒ και Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Αν Ο το μέσο του ΜΝ, να αποδείξετε ότι:*

$$O\Gamma^2 - OB^2 = \frac{A\Gamma^2 - AB^2}{2}$$

3. *Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ = 2α θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ. Χωρίζουμε τη διάμετρο ΑΒ σε τρία ίσα τμήματα ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $MA^2+MB^2+M\Gamma^2+M\Delta^2$ είναι σταθερό.*

4. *Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ πλευράς α, Ο το κέντρο του και κύκλος (Ο, λα), λ > 0. Αν για τυχαίο σημείο Μ του κύκλου ισχύει $MA^2+MB^2+M\Gamma^2+M\Delta^2=18\alpha^2$, να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ.*

5. *Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ πλευράς α, με διαγώνιο ΒΔ = α. Έστω τυχαίο σημείο Ρ. Να αποδείξετε ότι*

$$\alpha^2 = (PA^2 - PB^2) + (P\Gamma^2 - P\Delta^2).$$

Μετρικές σχέσεις σε κύκλο

9.7 Τέμνουσες κύκλου

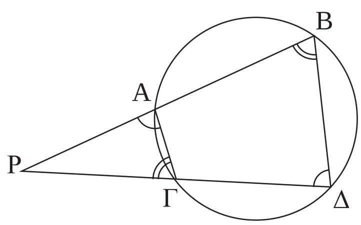
Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο (O, R) και ένα εξωτερικό ή εσωτερικό σημείο του Ρ. Από το Ρ φέρουμε δύο τυχαίες ευθείες που τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Α, Β και Γ, Δ αντίστοιχα.

Το ακόλουθο θεώρημα εκφράζει ότι ΡΑ · ΡΒ = ΡΓ · ΡΔ.

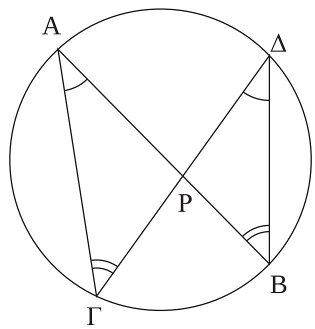
ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Αν δύο χορδές ΑΒ, ΓΔ ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο Ρ, τότε ισχύει

$$PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta.$$



Σχήμα 17α



Σχήμα 17β

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

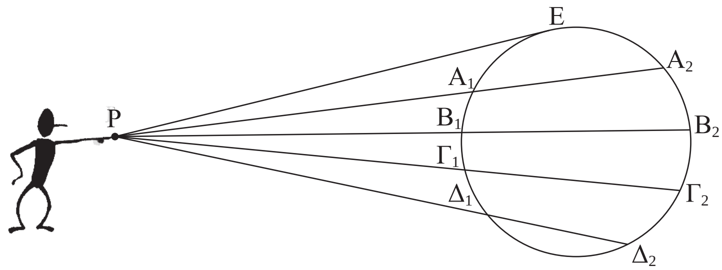
Τα τρίγωνα ΡΑΓ και ΡΒΔ είναι όμοια, αφού $P\hat{A}\Gamma = P\hat{\Delta}B$ και $P\hat{\Gamma}A = P\hat{B}\Delta$ (Στο σχ.17α έχουμε ότι $P\hat{A}\Gamma = P\hat{\Delta}B$ γιατί το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο και η $P\hat{A}\Gamma$ είναι εξωτερική του γωνία. Στο σχ.17β $P\hat{A}\Gamma = P\hat{\Delta}B$ ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο).

Επομένως, ισχύει ότι

$$\frac{\mathbf{PA}}{\mathbf{P\Delta}} = \frac{\mathbf{P\Gamma}}{\mathbf{PB}} \quad \text{ή} \quad \mathbf{PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta}.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι τα γινόμενα των τμημάτων που ορίζουν οι τέμνουσες ενός κύκλου $PA_1 \cdot PA_2$, $PB_1 \cdot PB_2$, $P\Gamma_1 \cdot P\Gamma_2$, ... παραμένουν σταθερά. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα γινόμενα αυτά εξαρτώνται μόνο από τις θέσεις του σημείου Ρ και του κύκλου (Ο, R).

Στην ειδική περίπτωση της εφαπτομένης, όπου τα δύο σημεία τομής ταυτίζονται, το θεώρημα ισχύει.

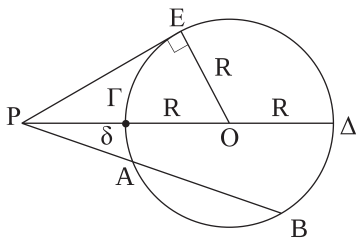


Σχήμα 18

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Αν από ένα εξωτερικό σημείο Ρ κύκλου (Ο, R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΡΕ και μία ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Α, Β, τότε ισχύει ότι

$$PE^2 = PA \cdot PB.$$



Σχήμα 19

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Φέρουμε την ευθεία ΡΟ η οποία τέμνει τον κύκλο στα σημεία Γ και Δ. Θέτουμε ΟΡ = δ, οπότε από το θεώρημα Ι έχουμε ότι:

$$\mathbf{PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta = (\delta - R)(\delta + R) = \delta^2 - R^2}.$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΡΟΕ προκύπτει ότι

$$\mathbf{PE^2 = PO^2 - OE^2 = \delta^2 - R^2} \quad \text{Άρα} \quad \mathbf{PE^2 = PA \cdot PB}.$$

Στην προηγούμενη απόδειξη είδαμε ότι αν μια ευθεία διέρχεται από ένα εξωτερικό σημείο Ρ κύκλου (Ο, R) και τέμνει τον κύκλο σε σημεία Α, Β τότε $\mathbf{PA \cdot PB = \delta^2 - R^2}$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $\mathbf{PA \cdot PB = R^2 - \delta^2}$, αν το Ρ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.

Η διαφορά $\delta^2 - R^2$ λέγεται ***δύναμη του σημείου Ρ ως προς τον κύκλο (Ο, R)*** και συμβολίζεται

$$\mathbf{\Delta^{P}_{(O,\,R)} = \delta^2 - R^2 = OP^2 - R^2}.$$

Ας εξετάσουμε τι συμβαίνει όταν το Ρ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου ή όταν ανήκει σε αυτόν. Τότε η δύναμη του σημείου Ρ ως προς τον κύκλο (Ο, R) είναι αρνητική ή ίση με το μηδέν αντίστοιχα.

Από τον ορισμό της δύναμης σημείου ως προς κύκλο καταλαβαίνουμε ότι ουσιαστικά εκφράζει τη σχετική θέση του σημείου Ρ ως προς τον κύκλο (Ο, R), καθώς εξαρτάται μόνο από το δ, δηλαδή την απόσταση του Ρ από το κέντρο του κύκλου. Επομένως, έχουμε ότι:

- **το Ρ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (Ο, R) αν και μόνο αν**

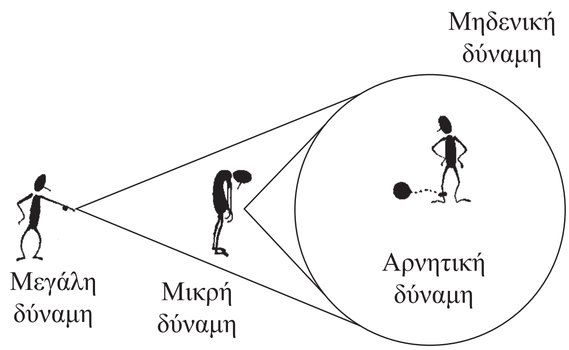
$$\Delta^{P}_{(O,\,R)} > 0$$

- **το Ρ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (Ο, R) αν και μόνο αν**

$$\Delta^{P}_{(O,\,R)} < 0$$

- **το Ρ είναι σημείο του κύκλου (Ο, R) αν και μόνο αν**

$$\Delta^{P}_{(O,\,R)} = 0$$



Σχήμα 20

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Αν δύο τμήματα ΑΒ και ΓΔ ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο Ρ έτσι ώστε ΡΑ · ΡΒ = ΡΓ · ΡΔ , τότε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι εγγράψιμο.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε το σημείο τομής Ρ των τμημάτων ΑΒ, ΓΔ ή των προεκτάσεών τους (σχ.17). Η δοσμένη σχέση ΡΑ · ΡΒ = ΡΓ · ΡΔ γράφεται $\frac{ΡΑ}{ΡΓ} = \frac{ΡΔ}{ΡΒ}$ και αφού $Α\hat{Ρ}Γ = Β\hat{Ρ}Δ$, τα τρίγωνα ΑΡΓ και ΒΡΔ θα είναι όμοια.

Επομένως $Ρ\hat{Β}Δ = Ρ\hat{Γ}Α$, οπότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ *Η εφαρμογή εκφράζει το αντίστροφο του θεωρήματος Ι.*

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Ας θεωρήσουμε ευθεία ε και τρία σημεία της Ρ, Α, Β, με το Α μεταξύ των Ρ και Β. Έστω σημείο Ε εκτός της ευθείας ε τέτοιο, ώστε $ΡΕ^2$ = ΡΑ · ΡΒ. Τότε το τμήμα ΡΕ είναι εφαπτόμενο στον κύκλο, που ορίζουν τα σημεία Α, Β, Ε.

Απόδειξη

Έστω (Ο, R) ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Α, Β, Ε (σχ.19). Τότε $ΡΕ^2 = ΡΑ \cdot ΡΒ = ΟΡ^2 - R^2 = ΟΡ^2 - ΟΕ^2$ ή $ΡΕ^2 + ΟΕ^2 = ΟΡ^2$, οπότε το τρίγωνο ΟΕΡ είναι ορθογώνιο και η ΡΕ εφάπτεται στον κύκλο (Ο, R).

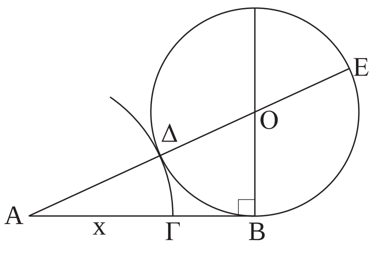
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ *Η εφαρμογή αυτή εκφράζει το αντίστροφο του θεωρήματος ΙΙ.*

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΣΕ ΜΕΣΟ ΚΑΙ ΑΚΡΟ ΛΟΓΟ (ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ)

Να διαιρεθεί ένα τμήμα ΑΒ, σε δύο άνισα τμήματα ΑΓ, ΓΒ ώστε το μεγαλύτερο από αυτά να είναι μέσο ανάλογο του μικρότερου και του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος.

Απόδειξη



Σχήμα 21

Έστω ΑΒ = α και ΑΓ = x το μεγαλύτερο από τα τμήματα στα οποία χωρίζεται το ΑΒ από το Γ (σχ.21). Τότε ΓΒ = α – x και θα πρέπει να ισχύει η σχέση: $\mathbf{ΑΓ^2 = ΑΒ \cdot ΓΒ}$ ή $x^2 = α(α–x)$ (1). Η σχέση (1) γράφεται $x^2 + αx – α^2 = 0$ ή $x(x + α) = α^2$ (2). Έτσι, για να κατασκευάσουμε το x γράφουμε κύκλο $\left(Ο, \frac{α}{2}\right)$ που εφάπτεται στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ στο σημείο Β και φέρουμε την ΑΟ, η οποία τέμνει τον κύκλο στα σημεία Δ, Ε. Τότε ισχύει ότι $ΑΒ^2 = ΑΔ \cdot ΑΕ = ΑΔ(ΑΔ + ΔΕ) = ΑΔ(ΑΔ + ΑΒ)$ ή $α^2 = ΑΔ(ΑΔ + α)$ οπότε το ΑΔ έχει το ζητούμενο μήκος και το Γ είναι η τομή του κύκλου (Α, ΑΔ) και του τμήματος ΑΒ.

ΣΧΟΛΙΟ

*Το πρόβλημα της διαίρεσης ενός ευθύγραμμου τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο είναι γνωστό σήμερα και ως πρόβλημα της **Χρυσής Τομής**. Με το πρόβλημα αυτό επιλύεται γεωμετρικά η εξίσωση* $x^2 = \alpha(\alpha - x)$ *ή* $x^2 + \alpha x - \alpha^2 = 0$.

Η θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2 + \alpha x - \alpha^2 = 0$ *είναι* $x = \frac{\alpha(\sqrt{5}-1)}{2}$, *από όπου προκύπτει ότι* $\frac{\alpha}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{x}{\alpha - x}$, *που είναι η αναλογία της «χρυσής τομής».*

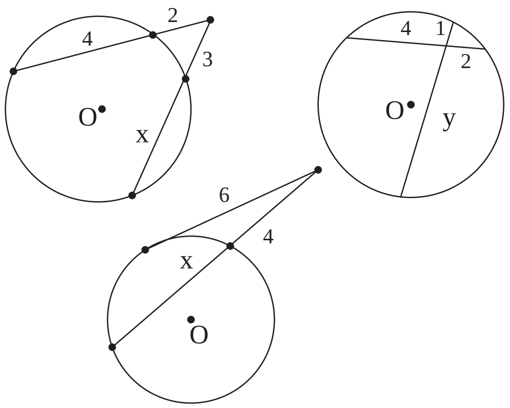
Ο παραπάνω λόγος συμβολίζεται διεθνώς με το γράμμα φ, δηλαδή $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

*Ο συμβολισμός προέρχεται από το όνομα του γλύπτη της κλασικής αρχαιότητας Φειδία ο οποίος κατασκεύασε τον Παρθενώνα. Οι αρχαίοι Έλληνες φιλόσοφοι διαπίστωσαν ότι όπου εμφανίζεται ο λόγος φ (αρχιτεκτονική, γλυπτική κτλ.), δημιουργεί την **αίσθηση της αρμονίας**.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

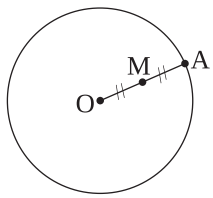
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Να προσδιορισθούν οι τιμές των x, y, στα παρακάτω σχήματα:*



2. *Ποια η δύναμη σημείου Ρ ως προς κύκλο (O,R) όταν Ρ≡0;*

3. *Αν στο διπλανό σχήμα είναι* $\Delta^{M}_{(O,\,R)} = -3$, *να υπολογίσετε την ακτίνα R του κύκλου.*



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Δίνεται κύκλος (Κ,6) και σημείο Α, ώστε ΑΚ = 14cm. Αν από το σημείο Α φέρουμε τέμνουσα ΑΒΓ που τέμνει τον κύκλο κατά χορδή ΒΓ = 6cm, να υπολογίσετε το ΑΒ.*

2. *Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ο κύκλος, που διέρχεται από το Α και τα μέσα Μ, Ν των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, εφάπτεται της ΒΓ στο Δ, να αποδείξετε ότι* $A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma$.

3. *Θεωρούμε κύκλο (Ο, R) και τις χορδές του ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται στο Ρ. Αν ισχύει ότι* $\frac{PA}{PB} = \frac{P\Delta}{P\Gamma}$ *να αποδείξετε ότι οι χορδές ΑΒ, ΓΔ είναι ίσες.*

4. *Να αποδείξετε ότι η προέκταση της κοινής χορδής δύο τεμνόμενων κύκλων διχοτομεί κάθε κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα τους.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Αν Ε είναι το μέσο της ΑΔ και η ΒΕ προεκτεινόμενη τέμνει τον κύκλο στο Ζ, να αποδείξετε ότι:*

i) $BE = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}$, *ii)* $BE = 5EZ$.

2. *Από σημείο Α εκτός κύκλου (Ο, R) φέρουμε τέμνουσα ΑΒΓ και εφαπτόμενο τμήμα ΑΔ. Αν η διχοτόμος της γωνίας* $\hat{A}$ *τέμνει τις ΒΔ, ΓΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι* $EB \cdot Z\Gamma = E\Delta \cdot Z\Delta$.

3. *Αν η διάμεσος ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Ε, να αποδείξετε ότι:*

i) $AM \cdot ME = \frac{B\Gamma^2}{4}$,

ii) $AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM \cdot AE$.

4. *Δίνεται κύκλος (Ο, R) και ευθεία ε που δεν τέμνει τον κύκλο. Από σημείο Μ της ε φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ, ΜΒ και* $O\Gamma \perp \varepsilon$. *Αν η ΑΒ τέμνει την ΟΓ στο Ν, να αποδείξετε ότι* $ON \cdot O\Gamma = R^2$.

5. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1L$), εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R) και το ύψος του ΑΔ. Αν μεταβλητή ευθεία που διέρχεται από το Γ τέμνει το ύψος στο Μ και τον κύκλο στο Η, να αποδείξετε ότι $ΓΜ \cdot ΓΗ = ΓΑ^2$.*

Σύνθετα Θέματα

1. *Αν η διχοτόμος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Ε και είναι $ΑΔ^2 = ΔΒ \cdot ΔΓ$, να αποδείξετε ότι $ΑΕ^2 = 2ΕΓ^2$.*

2. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $β^2 + γ^2 = 2α^2$. Αν η διάμεσος ΑΜ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Δ να αποδείξετε ότι*

$$ΜΔ = \frac{α\sqrt{3}}{6}.$$

3. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $μ_γ = \frac{\sqrt{3}}{2}β$. Αν Μ το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΜ εφάπτεται της ΒΓ στο Β.*

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του ΑΔ, η διάμεσός του ΑΜ και ο περιγεγραμμένος κύκλος (Κ) του τριγώνου ΑΔΜ. Αν Ε, Ζ είναι τα σημεία τομής των ΑΒ και ΑΓ με τον κύκλο (Κ) αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΒΕ = ΓΖ.*

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Έστω ΑΒ, ΓΔ δύο ευθύγραμμα τμήματα. Ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε $ΑΒ \perp ΓΔ$ είναι να ισχύει ότι $ΑΓ^2 - ΑΔ^2 = ΒΓ^2 - ΒΔ^2$.*

2. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, να αποδείξετε ότι $ΑΒ \cdot ΑΓ = ΑΔ^2 + ΒΔ \cdot ΔΓ$.*

3. *Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ και ΒΔ το ύψος του, να αποδείξετε ότι $ΑΜ^2 = ΒΜ^2 + ΑΔ \cdot ΑΓ$.*

4. ***Θεώρημα Stewart***

i) Έστω Δ σημείο της πλευράς ΒΓ, τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι

$$ΒΔ \cdot ΑΓ^2 + ΔΓ \cdot ΑΒ^2 = ΒΓ(ΑΔ^2 + ΒΔ \cdot ΔΓ).$$

ii) Να διατυπώσετε το θεώρημα Stewart όταν το ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ).

5. *Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $μ_β \perp μ_γ$. Να αποδείξετε ότι:*

i) $β^2 + γ^2 = 5α^2$,

ii) αν ΑΔ ύψος και Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, τότε $ΑΗ \cdot ΑΔ = 2α^2$.

6. *Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ. Αν Δ η προβολή του Μ πάνω στην ΑΒ να αποδείξετε ότι $ΒΓ^2 = 3ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 4ΑΒ \cdot ΑΔ$.*

7. *Δίνεται κύκλος (Ο, R) μια ακτίνα ΟΑ και χορδή ΒΓ παράλληλη προς την ΟΑ. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $ΑΒ^2 + ΑΓ^2$ είναι σταθερό.*

8. *Δίνεται κύκλος (Ο, R), μία διάμετρος ΑΒ και Γ, Δ τα μέσα των ΟΑ, ΟΒ αντίστοιχα.*

Αν μία χορδή ΕΗ που διέρχεται από το Γ είναι $ΕΗ = \frac{\sqrt{13}}{2}R$, να αποδείξετε ότι $Ε\hat{Δ}Η = 1L$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

1. *Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 1∟) με ίσες πλευρές α. Στο ημιεπίπεδο ακμής ΒΓ που δεν περιέχει το Α θεωρούμε το ορθογώνιο ΒΓΔΕ με ΒΕ = α. Έστω Ζ, Η οι προβολές των Β, Δ αντίστοιχα στην ΕΓ. Προσπαθήστε να ανακαλύψετε εποπτικά τη σχέση των τμημάτων ΓΗ, ΗΖ και ΖΕ και στη συνέχεια να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας.*
2. *Με κατάλληλη γεωμετρική κατασκευή προσδιορίστε την "ακριβή" θέση των αριθμών $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ και $\sqrt{5}$, πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.*

ΕΡΓΑΣΙΑ (Ριζικός άξονας δύο κύκλων)

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχουν την ίδια δύναμη ως προς δύο κύκλους (Κ, R) και (Λ, ρ) όταν:

i) *Οι κύκλοι τέμνονται (**Υπόδειξη**: φέρτε την κοινή χορδή τους),*

ii) *Οι κύκλοι εφάπτονται (**Υπόδειξη**: φέρτε την κοινή εφαπτομένη),*

iii) *Οι κύκλοι είναι ο ένας εξωτερικός του άλλου (**Υπόδειξη**: χρησιμοποιήστε το πρόβλημα 2 της §9.6).*

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Το πρόβλημα της διαίρεσης σε μέσο και άκρο λόγο

Η προέλευση του προβλήματος της διαίρεσης ενός ευθύγραμμου τμήματος σε δύο μέρη, έτσι, ώστε το μεγαλύτερο τμήμα του να είναι μέση ανάλογος ανάμεσα σε ολόκληρο το τμήμα και το μικρότερο τμήμα του, δηλαδή $α:x = x:(α-x)$, δεν είναι ιστορικά εξακριβωμένη. Ορισμένοι ιστορικοί ανάγουν την προέλευσή του στην Πυθαγόρεια σχολή, συνδέοντάς το με τη μελέτη της τετραγωνικής εξίσωσης $x^2 + αx = α^2$, όπως εμφανίζεται σε γεωμετρική γλώσσα στο Βιβλίο ΙΙ των «Στοιχείων» του Ευκλείδη ή με την ανακάλυψη της ασυμμετρίας στην αρχαία Ελλάδα, και άλλοι με την κατασκευή του πενταγώνου από το Θεαίτητο περί το 386 π.Χ.

Στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται στα εξής Βιβλία:

1. στο Βιβλίο ΙΙ (Προτάσεις 5, 6 και 11), που συνδέεται με την «παραβολή χωρίων» και κατά συνέπεια με την εξίσωση $x^2 + αx = α^2$,
2. στο Βιβλίο IV (Προτάσεις 10-11), κατά την κατασκευή του κανονικού πενταγώνου,
3. στο Βιβλίο VI (Ορισμός 3 και Προτάσεις 29-30), όπου ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί έννοιες από τη γενική θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου που εκτίθεται στο Βιβλίο V (βλ. *Μέτρηση*).
4. στο Βιβλίο XIII (Προτάσεις 16 και 17), κατά την κατασκευή του κανονικού εικοσαέδρου και δωδεκαέδρου, στην οποία ενέχεται το πεντάγωνο.

Μετά τον Ευκλείδη το πρόβλημα της διαίρεσης σε μέσο και άκρο λόγο εμφανίζεται στο αποκαλούμενο «Συμπλήρωμα» ή Βιβλίο XIV των «Στοιχείων», που αποδίδεται στον Υψικλή (2ος αι. π.Χ.). Στο έργο του Ήρωνα εμφανίζεται σε σχέση με τον προσδιορισμό της επιφάνειας του πενταγώνου και του δεκαγώνου, και στη «Συναγωγή» του Πάππου στην κατασκευή του εικοσαέδρου και του δωδεκαέδρου, καθώς και στα θεωρήματα σύγκρισης των όγκων τους.

Στην Αραβική παράδοση δεν υπάρχουν ενδείξεις εισαγωγής της έννοιας της διαίρεσης ενός τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο, αν και στο έργο του αλ-Χουαρίζμι (περίπου 780-850), του Αμπού Καμίλ (περίπου 850-930), του Αμπούλ-Ουάφα (940-997/8) κ.ά. εξετάζονται συναφή προβλήματα.

Στην Ευρωπαϊκή παράδοση οι απαρχές της μελέτης των ιδιοτήτων της διαίρεσης σε μέσο και άκρο λόγο ανάγονται στον Λεονάρδο της Πίζας ή Φιμπονάτσι (περίπου 1180-1250), που εξετάζει μετρικά προβλήματα του πενταγώνου και του δεκαγώνου, καθώς και προβλήματα προσδιορισμού του όγκου του εικοσαέδρου και του δωδεκαέδρου. Ο Φιμπονάτσι είναι περισσότερο γνωστός από το «πρόβλημα των κουνελιών», που εκτίθεται στο «Βιβλίο του άβακα» (*Liber abaci*):

«Πόσα ζεύγη κουνελιών μπορούν να γεννηθούν μέσα σε ένα χρόνο από ένα ζευγάρι κουνέλια; ... όταν η φύση των κουνελιών είναι τέτοια που κάθε μήνα γεννούν ένα άλλο ζευγάρι και αρχίζουν την αναπαραγωγή το δεύτερο μήνα μετά τη γέννησή τους».

Ο Φιμπονάτσι δείχνει ότι το πρόβλημα αυτό οδηγεί στη γένεση της ακολουθίας

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

που ονομάστηκε ακολουθία (αριθμοί) του Φιμπονάτσι από τον Φ.Ε.Α. Λούκας (François Edouard Anatole Lucas, 1848-1891) και σχηματίζεται σύμφωνα με τον κανόνα:

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1,$$
$$u_\nu = u_{\nu-1} + u_{\nu-2}$$

Η σχέση της ακολουθίας αυτής με το πρόβλημα της διαίρεσης σε μέσο και άκρο λόγο είναι ότι το όριο του λόγου του επόμενου προς τον προηγούμενο όρο της ακολουθίας ισούται με την τιμή του μέσου και άκρου λόγου, δηλαδή με τη ρίζα της εξίσωσης $x^2 + \alpha x = \alpha^2$, και είναι άρρητος αριθμός. Δεν υπάρχουν ενδείξεις ότι ο Φιμπονάτσι γνώριζε τη σχέση αυτή, η οποία απαντάται αργότερα σε μαθηματικούς του 16ου-17ου αι. (Κέπλερ, Ζιράρ, Σίμπσον). Η γενική μορφή του ν-οστού όρου της ακολουθίας Φιμπονάτσι

$$u_\nu = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\nu+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\nu+1}\right]$$

δημοσιεύτηκε το 1843 από τον Ζ. Μπινέ.

Το 13ο αι. ο μεταφραστής και σχολιαστής του Ευκλείδη Καμπανός της Νοβάρα προσθέτει στο Βιβλίο XIII των «Στοιχείων» (1482) μία πρόταση που περιέχει μια αριθμητική απόδειξη της ασυμμετρίας ενός ευθύγραμμου τμήματος και των δύο μερών του που λαμβάνονται από τη διαίρεσή του σε μέσο και άκρο λόγο.

Το 15ο-16ο αι. αναζωογονείται το ενδιαφέρον προς τη διαίρεση σε μέσο και άκρο λόγο σε σχέση με τις εφαρμογές της στη Γεωμετρία και την αρχιτεκτονική. Στο πλαίσιο αυτό εισάγεται ο όρος «χρυσή τομή» από τον Λεονάρντο ντα Βίντσι. Το 1509 εκδίδεται «Η θεϊκή αναλογία» (*Divina proportione*) του Λουκά Πατσόλι (L. Pacioli, 1445-περ. 1514), που αν και είναι ειδικά αφιερωμένη στο πρόβλημα της διαίρεσης σε μέσο και άκρο λόγο, η μαθηματική διαπραγμάτευση του θέματος είναι μάλλον αδύνατη.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ

Πυθαγόρειο θεώρημα

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} = 1L$

Θεώρημα διαμέσων

1ο Θ.Δ.: $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$

2ο Θ.Δ.: $\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha M\Delta$

Γενίκευση Πυθαγορείου

$\hat{A} < 1L$: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta$

$\hat{A} > 1L$: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta$

Υπολογισμός των διαμέσων τριγώνων

Προσδιορισμός του είδους τριγώνου ως προς τις γωνίες

Νόμος συνημιτόνων

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \text{συν}A$

Υπολογισμός των υψών

$\upsilon_\alpha = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΕ ΚΥΚΛΟ

Θεώρημα τεμνουσών: $PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta$

Ειδική περίπτωση εφαπτομένης: $PE^2 = PA \cdot PB$

Δύναμη σημείου ως προς κύκλο: $\Delta^P_{(O,R)} = OP^2 - R^2$

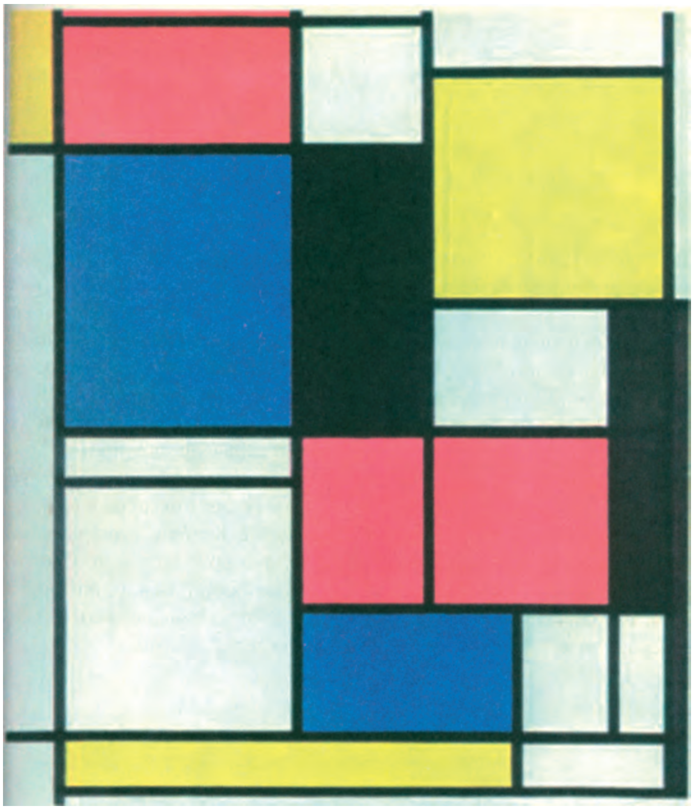
- **Το P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (O, R), αν και μόνο αν $\Delta^P_{(O,R)} > 0$.**
- **Το P είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (O, R), αν και μόνο αν $\Delta^P_{(O,R)} < 0$.**
- **Το P είναι σημείο του κύκλου (O, R), αν και μόνο αν $\Delta^P_{(O,R)} = 0$.**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

ΕΜΒΑΔΑ

Είναι αποδεκτό ότι η έννοια του εμβαδού ενός ευθύγραμμου σχήματος προέκυψε από την ανάγκη αντιμετώπισης προβλημάτων της καθημερινής ζωής, αρκετά χρόνια πριν. Πράγματι είναι ιστορικά επιβεβαιωμένο ότι η Γεωμετρία εμφανίστηκε, τουλάχιστον τρεις χιλιετίες π.Χ., ως τέχνη υπολογισμού μηκών, εμβαδών και όγκων στους λαούς που κατοικούσαν κοντά στους ποταμούς Νείλο, Τίγρη και Ευφράτη. Στην Αίγυπτο μάλιστα ήταν τέχνη για μέτρηση γης. Αργότερα η έννοια του εμβαδού θεμελιώθηκε αυστηρά και γενικεύθηκε σε σύνολα πιο πολύπλοκα από τα ευθύγραμμα σχήματα.

Στο κεφάλαιο αυτό ασχολούμαστε με την έννοια του εμβαδού ενός ευθύγραμμου σχήματος. Αρχικά εισάγουμε την έννοια του εμβαδού ενός πολυγωνικού χωρίου ή μιας πολυγωνικής επιφάνειας. Κατόπιν, δίνουμε τύπους υπολογισμού του εμβαδού του τετραγώνου, του ορθογωνίου, του παραλληλογράμμου, του τριγώνου και του τραπεζίου. Στη συνέχεια, δίνουμε τη σχέση των εμβαδών δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων και τέλος αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα του τετραγωνισμού ενός πολυγώνου.

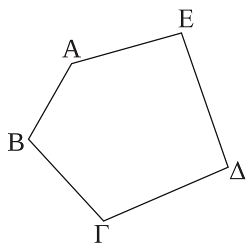


Piet Mondrian (Ολλανδός, 1872 - 1944), Πίνακας ΙΙ, λάδι σε καμβά, 1921 - 1925 Συλλογή Max Bill, Ζυρίχη.

Πολυγωνικά χωρία - Πολυγωνικές επιφάνειες

10.1 Πολυγωνικά χωρία

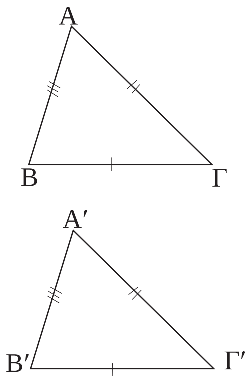
Ας θεωρήσουμε ένα πολύγωνο, για παράδειγμα ένα πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ (σχ.1). Το πολύγωνο μαζί με τα εσωτερικά του σημεία αποτελούν ένα χωρίο, που λέγεται ***πολυγωνικό χωρίο*** που ορίζεται από το ΑΒΓΔΕ.



Σχήμα 1

Ένα πολυγωνικό χωρίο που ορίζεται από τρίγωνο, τετράπλευρο, ... , ν-γωνο λέγεται αντίστοιχα ***τριγωνικό***, ***τετραπλευρικό***, ... , ***ν-γωνικό***.

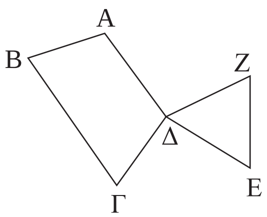
Επίσης, δύο πολυγωνικά χωρία λέγονται **ίσα** όταν τα αντίστοιχα πολύγωνα είναι ίσα (σχ.2).



Σχήμα 2

Τέλος ένα σχήμα που αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος πολυγωνικών χωρίων, που ανά δύο δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, λέγεται ***πολυγωνική επιφάνεια.***

Για παράδειγμα, το σχήμα ΑΒΓΔΕΖ (σχ.3) είναι μια πολυγωνική επιφάνεια.

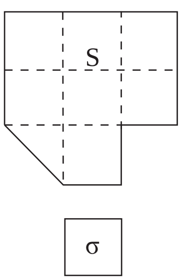


Σχήμα 3

10.2 Εμβαδόν ευθύγραμμου σχήματος - Ισοδύναμα ευθύγραμμα σχήματα

Στο 7ο κεφάλαιο αναφερθήκαμε στη μέτρηση των ευθύγραμμων τμημάτων. Εδώ θα ασχοληθούμε με τη μέτρηση πολυγωνικών χωρίων και επιφανειών.

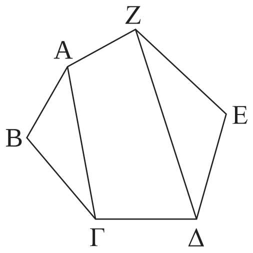
Έστω, λοιπόν ένα πολυγωνικό χωρίο S (σχ.4). Όπως και στα ευθύγραμμα τμήματα, μέτρηση του χωρίου S λέμε τη σύγκρισή του με ένα άλλο επίπεδο χωρίο σ, το οποίο επιλέγουμε ως μονάδα. Η σύγκριση αυτή οδηγεί σε μια σχέση της μορφής: $S = \lambda \cdot \sigma$, όπου λ θετικός αριθμός. (Στην περίπτωση του σχ.4 είναι $\lambda = 7{,}5$). Ο θετικός αριθμός λ λέγεται ***εμβαδόν*** του πολυγωνικού χωρίου S και συμβολίζεται με (S). Πολλές φορές το εμβαδόν ενός πολυγωνικού χωρίου ή μιας πολυγωνικής επιφάνειας θα το συμβολίζουμε απλά με το γράμμα Ε. Επίσης, στα επόμενα, θα λέμε εμβαδόν τριγώνου, τετραπλεύρου και γενικά πολυγώνου και θα εννοούμε το εμβαδόν του αντίστοιχου πολυγωνικού χωρίου.



Σχήμα 4

Για το εμβαδόν δεχόμαστε ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες (αξιώματα):

- ***Ίσα πολυγωνικά χωρία έχουν ίσα εμβαδά.***
- ***Αν ένα πολυγωνικό χωρίο (ή μια πολυγωνική επιφάνεια) χωρίζεται σε πεπερασμένου πλήθους πολυγωνικά***



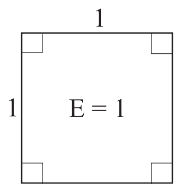
Σχήμα 5

χωρία, που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, τότε το εμβαδόν του ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους πολυγωνικών χωρίων. Για παράδειγμα, για το εμβαδόν του πολυγωνικού χωρίου ΑΒΓΔΕΖ του (σχ.5) έχουμε:

$$(ΑΒΓΔΕΖ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔΖ) + (ΖΔΕ)$$

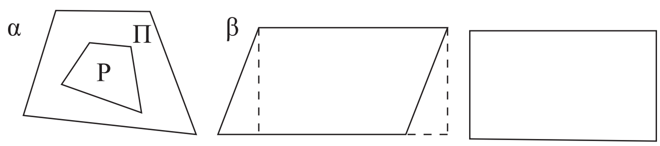
Επίσης δεχόμαστε ότι:

- **Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 1 είναι 1.**



Από τα παραπάνω αξιώματα προκύπτει ότι:

- Αν ένα πολύγωνο Ρ περιέχεται στο εσωτερικό ενός άλλου πολυγώνου Π (σχ.6α), τότε το εμβαδόν του Ρ είναι μικρότερο του εμβαδού του Π.



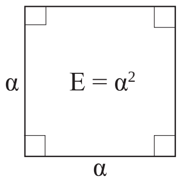
Σχήμα 6

Είδαμε παραπάνω ότι αν δύο πολυγωνικά χωρία είναι ίσα, τότε έχουν ίσα εμβαδά. Το αντίστροφο είναι φανερό (σχ. 6β) ότι δεν ισχύει.

Δύο σχήματα που έχουν το ίδιο εμβαδόν λέγονται ***ισοδύναμα*** ή ***ισεμβαδικά***.

Έτσι σχήματα που δεν είναι ίσα μπορούν να συγκρίνονται ως προς το εμβαδόν τους.

Με τη βοήθεια των παραπάνω ιδιοτήτων του εμβαδού μπορεί να αποδειχθεί το επόμενο θεώρημα.



ΘΕΩΡΗΜΑ

Το εμβαδόν Ε ενός τετραγώνου πλευράς α είναι $α^2$, δηλαδή:

$$\mathbf{E = α^2}.$$

10.3 Εμβαδόν βασικών ευθύγραμμων σχημάτων

Με βάση το εμβαδόν του τετραγώνου θα αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα.

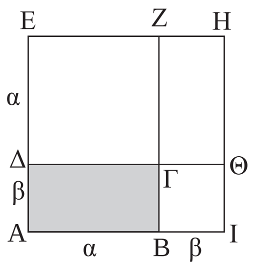
ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

Δηλαδή αν α, β, οι πλευρές και Ε το εμβαδόν είναι:

$$\mathbf{E = \alpha \cdot \beta}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 7

Έστω ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ, με ΑΒ = α και ΑΔ = β (σχ.7). Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα ΔΕ = α, την ΑΒ κατά ΒΙ = β και σχηματίζουμε το τετράγωνο ΑΙΗΕ, το οποίο είναι φανερό ότι έχει πλευρά α + β και επομένως είναι:

$$(\text{ΑΙΗΕ}) = (\alpha + \beta)^2 \quad (1).$$

Προεκτείνοντας τις ΔΓ και ΒΓ σχηματίζονται τα τετράγωνα ΔΓΖΕ, ΒΙΘΓ με πλευρές α, β αντίστοιχα και το ορθογώνιο ΓΘΗΖ που είναι ίσο με το ΑΒΓΔ. Έτσι έχουμε

$$(\text{ΔΓΖΕ}) = \alpha^2,\ (\text{ΒΙΘΓ}) = \beta^2 \text{ και } (\text{ΓΘΗΖ}) = (\text{ΑΒΓΔ}) \quad (2)$$

Είναι φανερό όμως ότι

$$(\text{ΑΙΗΕ}) = (\text{ΑΒΓΔ}) + (\text{ΓΘΗΖ}) + (\text{ΒΙΘΓ}) + (\text{ΔΓΖΕ}),$$

από την οποία με τη βοήθεια των (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$(\alpha + \beta)^2 = 2(\text{ΑΒΓΔ}) + \alpha^2 + \beta^2.$$

Από αυτή μετά τις πράξεις καταλήγουμε στη σχέση

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = \alpha \cdot \beta.$$

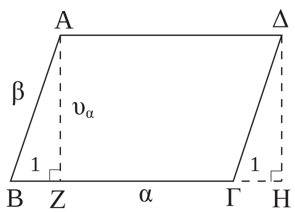
ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Το εμβαδόν Ε ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς του επί το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή.

Δηλαδή $\qquad \mathbf{E = \alpha\upsilon_\alpha = \beta\upsilon_\beta}$,

όπου α, β οι πλευρές και υ_α, υ_β τα αντίστοιχα ύψη.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 8

Ας θεωρήσουμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (σχ.8) και ας φέρουμε το ύψος ΑΖ που αντιστοιχεί στη ΒΓ. Θα αποδείξουμε ότι (ΑΒΓΔ) = ΒΓ · ΑΖ.

Από το Δ φέρουμε ΔΗ κάθετη στην προέκταση της ΒΓ. Τότε τα τρίγωνα ΖΒΑ και ΗΓΔ είναι ίσα ($\hat{Z} = \hat{H} = 90°$, ΑΒ = ΔΓ και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$), οπότε: (ΖΒΑ) = (ΗΓΔ) $\quad$ (1).

Από το σχήμα όμως έχουμε ότι (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΖ) + (ΑΖΓΔ), οπότε σύμφωνα με την (1) προκύπτει ότι

$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΖΓΔ) + (ΔΓΗ) = (ΑΖΗΔ).$$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Ι έχουμε

$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΖΗΔ) = ΑΔ \cdot ΑΖ = ΒΓ \cdot ΑΖ,$$

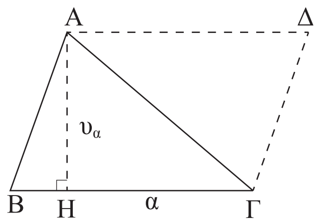
που είναι το ζητούμενο.

Με τη βοήθεια του εμβαδού του παραλληλογράμμου θα υπολογίσουμε τον τύπο του εμβαδού τριγώνου.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ

Το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

Δηλαδή $$\mathbf{Ε = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma \cdot \upsilon_\gamma}.$$



Σχήμα 9

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Με πλευρές ΑΒ και ΒΓ (σχ.9) σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, το εμβαδόν του οποίου είναι

$$(ΑΒΓΔ) = \alpha \cdot \upsilon_\alpha \quad (1).$$

Όμως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι ίσα, οπότε:

$$(ΑΒΓ) = (ΑΔΓ) \quad (2).$$

Από το σχήμα έχουμε ότι (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) η οποία, σύμφωνα με τις (1) και (2), μετατρέπεται στην

$$\alpha \cdot \upsilon_\alpha = 2(ΑΒΓ) \quad ή \quad (ΑΒΓ) = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha .$$

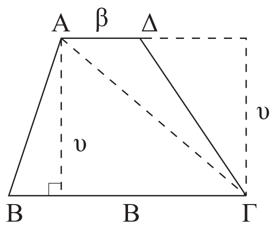
Τέλος, τον τύπο του εμβαδού τριγώνου θα τον αξιοποιήσουμε για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του τραπεζίου.

ΘΕΩΡΗΜΑ IV

Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του.

Δηλαδή $$\mathbf{Ε = \frac{(Β + \beta)}{2} \cdot \upsilon},$$

όπου Β, β οι βάσεις του τραπεζίου και υ το ύψος του.



Σχήμα 10

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΒΓ//ΑΔ) (σχ.10), με βάσεις ΒΓ = Β, ΑΔ = β και ύψος υ. Φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ. Τότε έχουμε

$$Ε = (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) \quad (1).$$

Αλλά τα δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ έχουν το ίδιο ύψος υ και βάσεις Β, β αντίστοιχα και επομένως:

$$(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}\text{Β} \cdot \upsilon \quad \text{και} \quad (\text{ΑΒΔ}) = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon \quad (2).$$

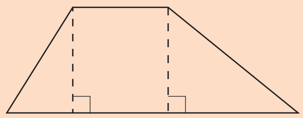
Με αντικατάσταση των σχέσεων (2) στην (1) προκύπτει ότι $\text{Ε} = \frac{\text{Β}+\beta}{2} \cdot \upsilon$, δηλαδή το ζητούμενο.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο της διαμέσου επί το ύψος του.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

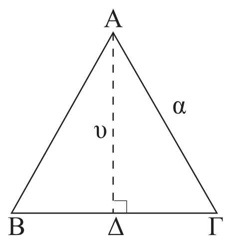
Χωρίζοντας το τραπέζιο σε δύο ορθογώνια τρίγωνα και ένα ορθογώνιο (βλ. το παρακάτω σχήμα), να αποδείξετε τον τύπο του εμβαδού του τραπεζίου.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Το εμβαδόν Ε ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α είναι ίσο με

$$\text{Ε} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}.$$



Σχήμα 11

Απόδειξη

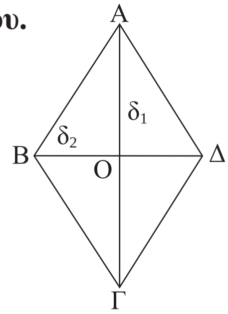
Φέρουμε το ύψος ΑΔ (σχ.11) το οποίο είναι και διάμεσος. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΓ, σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε

$$\upsilon^2 = \text{ΑΔ}^2 = \alpha^2 - \text{ΔΓ}^2 = \alpha^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{3\alpha^2}{4},$$

δηλαδή $\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, οπότε $\text{Ε} = \frac{1}{2}\alpha\upsilon = \frac{1}{2}\alpha\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Το εμβαδόν ρόμβου ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του.



Σχήμα 12

Απόδειξη

Είναι φανερό (σχ.12) ότι

$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΒΔ) + (ΒΓΔ) \quad (1).$$

Επειδή οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι κάθετες και διχοτομούνται έχουμε:

$(ΑΒΔ) = \frac{1}{2}ΒΔ \cdot ΑΟ = \frac{1}{2}\delta_2 \cdot \frac{\delta_1}{2} = \frac{1}{4}\delta_1 \cdot \delta_2$ και $(ΒΓΔ) = \frac{1}{4}\delta_1 \cdot \delta_2$ (2).

Με αντικατάσταση των (2) στην (1) προκύπτει ότι $Ε = \frac{1}{2}\delta_1 \cdot \delta_2$ (3).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

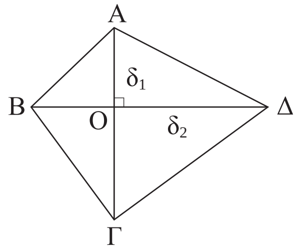
Ο προηγούμενος τύπος (3) ισχύει και στην περίπτωση οποιουδήποτε κυρτού ή μη κυρτού, τετραπλεύρου με κάθετες διαγωνίους.

Πράγματι (σχ.13, 14)

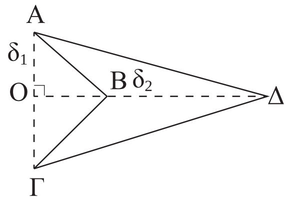
$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΒΔ) + (ΒΓΔ) =$$

$$= \frac{1}{2}ΒΔ \cdot ΑΟ + \frac{1}{2}ΒΔ \cdot ΟΓ = \frac{1}{2}ΒΔ\,(ΑΟ + ΟΓ) = \frac{1}{2}ΒΔ \cdot ΑΓ.$$

Μια γενίκευση του τύπου (3), για την περίπτωση του τετραπλεύρου αποτελεί η άσκηση 7 των αποδεικτικών ασκήσεων.



Σχήμα 13



Σχήμα 14

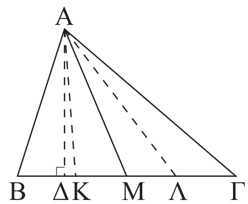
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ.

i) Αν ΑΜ διάμεσος του τριγώνου να αποδείξετε ότι

$$\mathbf{(ΑΒΜ) = (ΑΜΓ).}$$

ii) Από την κορυφή Α να φέρετε τρεις ευθείες που να χωρίζουν το τρίγωνο σε τέσσερα ισοδύναμα τρίγωνα.



Σχήμα 15

Λύση

i) Φέρουμε το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ (σχ.15). Το ΑΔ είναι και ύψος στα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΜΓ, οπότε έχουμε

$$(ΑΒΜ) = \frac{1}{2}ΒΜ \cdot ΑΔ = \frac{1}{2}ΜΓ \cdot ΑΔ = (ΑΜΓ)$$

αφού το Μ είναι μέσο του ΒΓ.

ii) Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι οι ζητούμενες ευθείες είναι οι φορείς των διαμέσων ΑΜ, ΑΚ και ΑΛ των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΒΜ και ΑΜΓ αντίστοιχα.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να χωρίσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ σε τρία ισοδύναμα τρίγωνα με ευθείες από την κορυφή Α.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Να γράψετε τους τύπους υπολογισμού του εμβαδού:*

i) *τετραγώνου*
ii) *ορθογωνίου*
iii) *παραλληλογράμμου*
iv) *τριγώνου*
v) *τραπεζίου*

2. *Ένα τετράγωνο έχει περίμετρο 16. Πόσο είναι το εμβαδόν του;*

3. *Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις $\alpha = 9$, $\beta = 4$ και είναι ισοδύναμο με τετράγωνο πλευράς x. Να βρεθεί το x.*

4. *Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha < \beta$. Με ποια ανισοτική σχέση συνδέονται τα υ_α και υ_β ;*

5. *Αν ένας ρόμβος έχει μήκη διαγωνίων 4 και 5 αντίστοιχα, με τι ισούται το γινόμενο μιας πλευράς του επί το αντίστοιχο ύψος;*

6. *Ένας χωρικός αντάλλαξε έναν αγρό, που είχε σχήμα τετραγώνου πλευράς 60 m, με έναν άλλο αγρό (με την ίδια ποιότητα χώματος) που είχε σχήμα ορθογωνίου με πλάτος 40 m και περίμετρο ίση με την περίμετρο του πρώτου. Έχασε ή κέρδισε ο χωρικός από την ανταλλαγή αυτή; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Στο εσωτερικό τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς $\alpha = 4$ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΔΖ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν των ΑΒΓΔ, ΑΔΖ, ΑΒΖ και ΒΖΓ.*

2. *Αν Μ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΔ = 10 τετραγώνου ΑΒΓΔ, τότε το άθροισμα (ΑΜΒ) + (ΔΜΓ) είναι:*

α. 25 β. 40 γ. 50 δ. 75 ε. 100

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 6, ΑΓ = 8 και $\hat{A} = 60°$. Να βρεθούν: i) το ύψος υ_β, ii) το εμβαδόν (ΑΒΓ), iii) το ύψος υ_α.*

4. *Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 14 και διαγώνιο 5. Να βρείτε το εμβαδόν του.*

5. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ = 10 και αντίστοιχο προς αυτήν ύψος $\upsilon = 5$. Πάνω στις πλευρές ΑΔ και ΒΓ παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, ώστε ΑΕ = ΖΓ.*

i) *Να βρείτε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.*
ii) *Αφού πρώτα συγκρίνετε τα εμβαδά των τραπεζίων ΑΕΖΒ και ΕΖΓΔ να βρείτε το εμβαδόν καθενός από αυτά.*

6. *Ένα οικόπεδο έχει σχήμα τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΔ//ΒΓ) με $\hat{A} = \hat{B} = 1\llcorner$, ΑΔ = 15m, ΒΓ = 20m και ΑΒ = 12m. Ένας καινούργιος δρόμος περνάει παράλληλα προς τη ΔΓ και αποκόπτει μια λωρίδα πλάτους 3m. Πόσα τετραγωνικά μέτρα είναι το οικόπεδο που απομένει;*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Αν Σ είναι σημείο μιας πλευράς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι (ΣΑΓ) + (ΣΒΔ) = (ΑΒΓ).*

2. *Αν οι διάμεσοι ΑΔ και ΒΕ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο Θ να αποδείξετε ότι:*
i) (ΑΒΕ) = (ΒΕΓ), ii) (ΑΘΒ) = (ΔΓΕΘ) και iii) (ΒΘΔ) = (ΑΘΕ).

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το βαρύκεντρό του Θ. Από σημείο Σ της διαμέσου ΑΔ φέρουμε τις κάθετες ΣΕ, ΣΖ στις ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι*

i) *(ΑΒΣ) = (ΑΓΣ),*
ii) *ΑΒ·ΣΖ=ΑΓ·ΣΕ και*
iii) *(ΑΒΘ) = (ΒΘΓ) = $\frac{1}{3}$ (ΑΒΓ).*

4. *Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΒΓ//ΑΔ). Αν Μ το μέσο της πλευράς του ΑΒ, να αποδείξετε ότι (ΑΒΓΔ) = 2(ΜΓΔ).*

5. *Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός τραπεζίου είναι ίσο με το γινόμενο της μίας από τις μη παράλληλες πλευρές του επί την απόσταση του μέσου της άλλης από αυτή.*

6. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 1, ΑΓ = 2 και $\hat{A}$ = 120°. Με πλευρές τις ΑΒ και ΑΓ κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΘ αντίστοιχα. Τότε:*

- *i) να υπολογίσετε το τμήμα ΕΘ,*
- *ii) να αποδείξετε ότι τα Δ, Ε, Θ είναι συνευθειακά και*
- *iii) να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της πολυγωνικής επιφάνειας ΒΓΖΘΕΔ είναι $5+\sqrt{3}$.*

7. *Αν ω είναι η γωνία των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι (ΑΒΓΔ) = $\frac{1}{2}$ ΑΓ · ΒΔ· ημω.*

8. *Ο ιδιοκτήτης ενός οικοπέδου σχήματος ορθογωνίου, του οποίου το μήκος είναι κατά 18 m μεγαλύτερο του πλάτους, θέλει να σχηματίσει γύρω από το οικόπεδο και εξωτερικά αυτού μια δενδροστοιχία πλάτους 2,5 m. Έτσι αναγκάζεται να αγοράσει από τους γείτονές του 695 m^2. Να βρεθούν οι διαστάσεις του οικοπέδου.*

Σύνθετα Θέματα

1. *Θεωρούμε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των ημιευθειών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Ζ, Η, Θ και Ι, ώστε ΒΖ = ΑΒ, ΓΗ = ΒΓ, ΔΘ = ΓΔ και ΑΙ=ΑΔ. Να αποδείξετε ότι*

- *i) (ΙΘΑ) = (ΑΘΔ) = (ΑΓΔ),*
- *ii) (ΙΘΔ) + (ΖΗΒ) = 2(ΑΒΓΔ) και*
- *iii) (ΙΖΗΘ) = 5(ΑΒΓΔ).*

2. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε το μέσο Μ της διαμέσου ΑΔ, το μέσο Ν του ΓΜ και το μέσο Ρ του ΒΝ. Να αποδείξετε ότι (ΜΝΡ) = $\frac{1}{8}$ (ΑΒΓ).*

3. *Στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς α παίρνουμε τα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα, ώστε ΖΓ = ΗΔ = $\frac{\alpha}{4}$.*

- *i) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΖ και ΒΗ τέμνονται κάθετα σε σημείο Κ.*
- *ii) Να υπολογισθούν τα μήκη των τμημάτων: ΑΚ, ΑΗ και ΚΗ.*
- *iii) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΚΗΔ.*

4. *Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ο στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι*

- *i) (ΟΑΒ) + (ΟΓΔ) = (ΑΒΓ) και*
- *ii) (ΟΑΓ) + (ΟΒΓ) = (ΟΓΔ).*

5. *Αν ΑΒΓΔ και ΚΛΜΝ είναι ρόμβος πλευράς α και τετράγωνο πλευράς α αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι (ΑΒΓΔ) ≤ (ΚΛΜΝ).*

10.4 Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

Με τη βοήθεια του βασικού τύπου για το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ, με μήκη πλευρών α, β, γ, προκύπτουν και οι επόμενοι τύποι:

i) $\mathbf{E}=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ (τύπος του Ήρωνα), όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

ii) **Ε = τρ**, όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

iii) $\mathbf{E}=\frac{\boldsymbol{\alpha\beta\gamma}}{\mathbf{4R}}$, όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

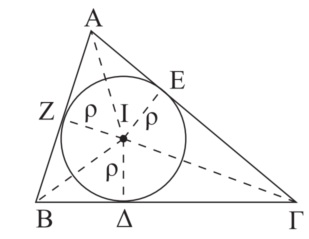
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Στην §9.4 (Εφαρμογή 2) αποδείξαμε ότι

$$\upsilon_\alpha = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)},\text{ οπότε έχουμε:}$$

$$E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\alpha\frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} =$$

$$= \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}.$$



Σχήμα 16

ii) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ (σχ.16) και ο εγγεγραμμένος κύκλος του (Ι, ρ). Φέρουμε τα τμήματα ΙΑ, ΙΒ και ΙΓ και έτσι το τρίγωνο χωρίζεται στα τρίγωνα ΙΒΓ, ΙΓΑ και ΙΑΒ που έχουν το ίδιο ύψος ρ και δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, οπότε έχουμε:

$$E = (AB\Gamma) = (IB\Gamma) + (I\Gamma A) + (IAB) =$$

$$= \frac{1}{2}\alpha\rho + \frac{1}{2}\beta\rho + \frac{1}{2}\gamma\rho = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\rho = \frac{1}{2}2\tau\rho = \tau\rho.$$

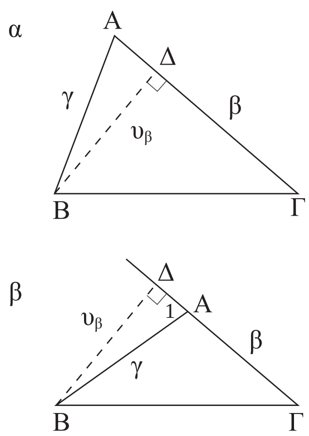
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όμοια αποδεικνύεται ότι ο τύπος (2) ισχύει για οποιοδήποτε περιγεγραμμένο σε κύκλο πολύγωνο με ημιπερίμετρο τ.

iii) Είναι γνωστό ότι $\beta\gamma = 2R\upsilon_\alpha$ (Εφαρμογή 5 §8.2), οπότε έχουμε ότι $\upsilon_\alpha = \frac{\beta\gamma}{2R}$ και με αντικατάσταση στον τύπο $E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha$ προκύπτει το ζητούμενο.

Τέλος, το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται και από τον (τριγωνομετρικό) τύπο:

$$\mathbf{E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A = \frac{1}{2}\gamma\alpha\eta\mu B = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma.}$$



Σχήμα 17

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $\hat{A} < 1\llcorner$, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΑ (σχ.17α) προκύπτει ότι $\upsilon_\beta = \gamma \cdot \eta\mu A$.

Αν $\hat{A} > 1\llcorner$, πάλι από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΑ (σχ.17β) προκύπτει ότι:

$$\upsilon_\beta = \gamma \cdot \eta\mu A_{\varepsilon\xi} = \gamma \cdot \eta\mu(180^\circ - A) = \gamma \cdot \eta\mu A.$$

Έτσι και στις δύο περιπτώσεις έχουμε $\upsilon_\beta = \gamma \cdot \eta\mu A$ οπότε

$$\mathbf{E = \frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta = \frac{1}{2}\beta\gamma \cdot \eta\mu A.}$$

Όταν $\hat{A} = 1\llcorner$, τότε $\upsilon_\beta = \gamma$, επομένως πάλι ο τύπος ισχύει.

Όμοια αποδεικνύονται και οι υπόλοιποι τύποι.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΗΜΙΤΟΝΩΝ

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδειχθεί ότι: $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A} = \dfrac{\beta}{\eta\mu B} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R.$

Απόδειξη

Από τις ισότητες $E = \dfrac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$ και $E = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ προκύπτει ότι $\dfrac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ ή $\eta\mu A = \dfrac{\alpha}{2R}$ ή $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A} = 2R$. Όμοια προκύπτει $\dfrac{\beta}{\eta\mu B} = 2R$, $\dfrac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R$, από τις οποίες συμπεραίνουμε το ζητούμενο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

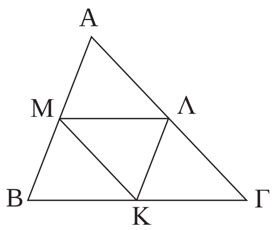
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με α = 13, β = 14 και γ = 15 (σχ.18). Να υπολογίσετε:

i) το εμβαδόν του,

ii) τα ύψη του,

iii) τις ακτίνες του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου,

iv) το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓ.



Σχήμα 18

Λύση

i) Έχουμε $\tau = \dfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = 21$ οπότε με αντικατάσταση των δεδομένων στον τύπο του Ήρωνα παίρνουμε: $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} = \sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = 84.$

ii) Έχουμε $E = \dfrac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha$ ή $84 = \dfrac{1}{2}13\upsilon_\alpha$ ή $\upsilon_\alpha = \dfrac{168}{13}$. Όμοια βρίσκουμε ότι $\upsilon_\beta = 12$ και $\upsilon_\gamma = \dfrac{56}{5}$.

iii) Από τους τύπους $E = \tau \cdot \rho$ και $E = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ προκύπτουν αντίστοιχα ότι $\rho = 4$ και $R = \dfrac{65}{8}$.

iv) Έχουμε $M\Lambda = \dfrac{13}{2}$, $MK = 7$, και $K\Lambda = \dfrac{15}{2}$, οπότε από τον τύπο του Ήρωνα προκύπτει πάλι ότι $(K\Lambda M) = 21$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Με τη βοήθεια του τύπου* $E = \dfrac{1}{2}\beta\gamma\cdot\eta\mu A$ *να αποδείξετε ότι* $E \leq \dfrac{1}{2}\beta\gamma$. *Πότε ισχύει η ισότητα;*

2. *Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι* $(AB\Gamma) = 9$ *και* $\rho = 1{,}5$. *Ποια είναι η περίμετρός του;*

3. *Ποιοι είναι οι τύποι υπολογισμού του εμβαδού ενός τριγώνου;*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι* $AB = 18$, $B\Gamma = 20$ *και* $A\Gamma = 34$. *Να βρείτε το εμβαδόν του.*

2. *Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ//ΒΓ) με* $B\Gamma = 25$, $A\Delta = 11$, $AB = 13$ *και* $\Delta\Gamma = 15$. *Να βρείτε το εμβαδόν του και το ύψος του.*

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με* $AB = 4$, $A\Gamma = 7$ *και* $\hat{A} = 60°$. *Να βρείτε το εμβαδόν του.*

4. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1$∟) με ΑΒ = 6 και ΑΓ = 8. Να βρείτε:*
   i) το εμβαδόν,
   ii) το ύψος $υ_α$,
   iii) την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου.

Ασκήσεις Αποδεικτικές

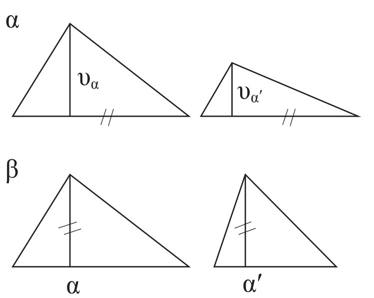
1. *Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $βγ = αυ_α$ να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 1$∟.*
2. *Αν Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ, να αποδείξετε ότι:*
   i) $E < τ(τ-α) \Leftrightarrow A < 1$∟,
   ii) $E = τ(τ-α) \Leftrightarrow A = 1$∟,
   iii) $E > τ(τ-α) \Leftrightarrow A > 1$∟.
3. *Αν δυο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο να αποδείξετε ότι $\frac{(ΑΒΓ)}{(Α'Β'Γ')} = \frac{αβγ}{α'β'γ'}$.*
4. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} \neq 1$∟ φέρουμε τα ύψη ΒΖ και ΓΗ. Να αποδείξετε ότι (ΑΖΗ) = (ΑΒΓ)συν^{2}Α.*
5. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι:*
$$\frac{1}{υ_α} + \frac{1}{υ_β} + \frac{1}{υ_γ} = \frac{1}{ρ}.$$

Σύνθετα Θέματα

1. *i) Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και σταθερό σημείο Κ στο εσωτερικό αυτής. Από το Κ φέρουμε μεταβλητή ευθεία ε που τέμνει τις πλευρές Οx, Oy στα σημεία Μ, Ν αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $\frac{1}{(OKM)} + \frac{1}{(OKN)}$ είναι σταθερό.*
   ii) Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ, σημείο Κ στο εσωτερικό του και τα τμήματα ΑΑ', ΒΒ' και ΓΓ' που διέρχονται από το Κ. Αν $E_1, E_2, \ldots, E_6$ είναι αντίστοιχα τα εμβαδά των τριγώνων ΑΚΓ', ΒΚΓ', ΒΑ'Κ, ΓΚΑ', ΓΚΒ' και ΑΚΒ', να αποδείξετε ότι:
$$\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_3} + \frac{1}{E_5} = \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_4} + \frac{1}{E_6}.$$
2. *Αν $ρ_α$, $ρ_β$, $ρ_γ$ είναι οι ακτίνες των παρεγγεγραμμένων κύκλων τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι*
   $(ΑΒΓ) = (τ-α)ρ_α = (τ-β)ρ_β = (τ-γ)ρ_γ$.
3. *Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγράψιμο σε κύκλο. Αν θέσουμε ΑΒ = α, ΒΓ = β, ΓΔ = γ και ΔΑ = δ να αποδείξετε ότι $\frac{ΑΓ}{ΒΔ} = \frac{αδ + βγ}{αβ + γδ}$*
   ***(2° Θεώρημα Πτολεμαίου)**.*

Εμβαδόν και ομοιότητα

10.5 Λόγος εμβαδών όμοιων τριγώνων - πολυγώνων



Σχήμα 19

Ας θεωρήσουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ με εμβαδά Ε και Ε′ αντίστοιχα. Τότε είναι $E = \frac{1}{2}αυ_α$ και $E' = \frac{1}{2}α'υ_{α'}$, οπότε $\frac{E}{E'} = \frac{αυ_α}{α'υ_{α'}}$. Από την ισότητα αυτή προκύπτει άμεσα ότι:

- Αν α = α΄, τότε $\frac{E}{E'} = \frac{υ_α}{υ_{α'}}$ (σχ.19α).
- Αν $υ_α = υ_{α'}$, τότε $\frac{E}{E'} = \frac{α}{α'}$ (σχ.19β).

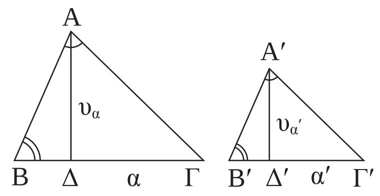
Δηλαδή: **αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών, ενώ αν έχουν ίσα ύψη, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων.**

Στην περίπτωση που τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι όμοια, ισχύει το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Αν δυο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 20

Έστω δύο όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ (σχ.20) με

$$\hat{A}=\hat{A}' \text{ και } \hat{B}=\hat{B}'.$$

Τότε $\dfrac{\alpha}{\alpha'}=\dfrac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_{\alpha'}}=\lambda$ (1), όπου λ ο λόγος ομοιότητας. Αλλά, όπως και παραπάνω, είναι $\dfrac{E}{E'}=\dfrac{\alpha}{\alpha'}\cdot\dfrac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_{\alpha'}}$ (2).

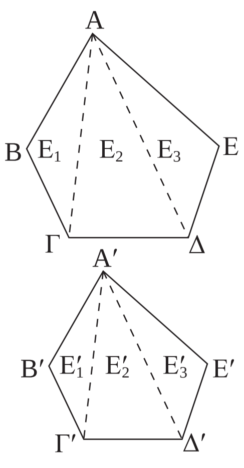
Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\dfrac{E}{E'}=\lambda^2$.

Το παραπάνω συμπέρασμα ισχύει γενικότερα και για όμοια πολύγωνα, όπως μας βεβαιώνει το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 21

Ας θεωρήσουμε δυο όμοια πολύγωνα π.χ. τα πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ και Α′Β′Γ′Δ′Ε′ (σχ.21) με λόγο ομοιότητας:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}=\frac{\Delta E}{\Delta'E'}=\lambda \qquad (1).$$

Φέρουμε τις διαγωνίους των πολυγώνων από τις κορυφές Α και Α′, οπότε αυτά χωρίζονται σε ισάριθμα τρίγωνα όμοια μεταξύ τους.

Αν E_1, E_2, E_3 και E_1', E_2', E_3' είναι τα εμβαδά των αντίστοιχων τριγώνων, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα και τη σχέση (1), θα έχουμε:

$$\frac{E_1}{E_1'}=\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2=\lambda^2,\quad \frac{E_2}{E_2'}=\left(\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}\right)^2=\lambda^2 \quad \text{και}$$

$$\frac{E_3}{E_3'}=\left(\frac{\Delta E}{\Delta'E'}\right)^2=\lambda^2,$$

οπότε

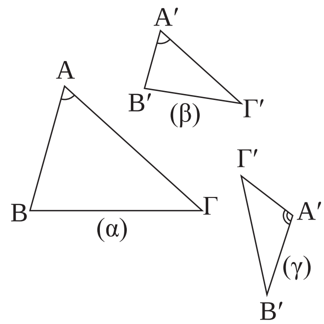
$$\lambda^2=\frac{E_1}{E_1'}=\frac{E_2}{E_2'}=\frac{E_3}{E_3'}=\frac{E_1+E_2+E_3}{E_1'+E_2'+E_3'}=\frac{(AB\Gamma\Delta E)}{(A'B'\Gamma'\Delta'E')},$$

δηλαδή το ζητούμενο.

Για το λόγο των εμβαδών τριγώνων με δύο γωνίες ίσες ή παραπληρωματικές ισχύει το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ

Αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.



Σχήμα 22

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

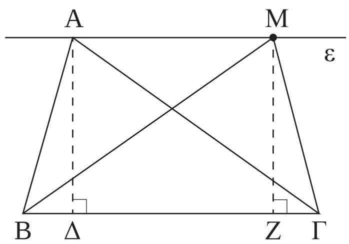
Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ με $\hat{A} = \hat{A}'$ (σχ.22 α,β) ή $\hat{A} + \hat{A}' = 180°$ (σχ.22 α, γ). Τότε και στις δύο περιπτώσεις θα ισχύει ημΑ = ημΑ′, οπότε από τις ισότητες

$$E = \frac{1}{2}\beta \cdot \gamma ημA \quad \text{και} \quad E' = \frac{1}{2}\beta' \cdot \gamma' ημA'$$

με διαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι $\frac{E}{E'} = \frac{\beta \cdot \gamma}{\beta' \cdot \gamma'}$, που είναι το ζητούμενο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ. Αν Μ σημείο της ε, να αποδείξετε ότι (ΜΒΓ) = (ΑΒΓ).



Σχήμα 23

Απόδειξη

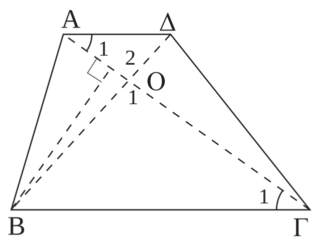
Φέρουμε τα ύψη ΑΔ και ΜΖ των τριγώνων ΑΒΓ και ΜΒΓ αντίστοιχα. Επειδή η ε είναι παράλληλη προς τη ΒΓ, προκύπτει ότι ΑΔ = ΜΖ και επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΜΒΓ είναι ισεμβαδικά, επειδή έχουν κοινή βάση ΒΓ και ίσα ύψη.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΒΓ και ΑΔ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Να αποδείξετε ότι:

i) (ΟΑΒ) = (ΟΓΔ), **ii)** $\mathbf{\frac{(ΑΟΔ)}{(ΟΒΓ)} = \frac{ΑΔ^2}{ΒΓ^2}}$ **και**

iii) $\mathbf{\frac{(ΟΑΒ)}{(ΟΒΓ)} = \frac{ΑΔ}{ΒΓ}}$.



Σχήμα 24

Απόδειξη

i) Είναι (ΟΑΒ) = (ΒΑΔ) – (ΟΑΔ) = (ΑΓΔ) – (ΟΑΔ) = (ΟΓΔ).

ii) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΓ είναι όμοια ($\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, $\hat{\Gamma}_1 = \hat{A}_1$) με λόγο ομοιότητας $\frac{ΑΔ}{ΒΓ}$ και επομένως $\frac{(ΟΑΔ)}{(ΟΒΓ)} = \frac{ΑΔ^2}{ΒΓ^2}$.

iii) Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΒΓ έχουν κοινή κορυφή Β και κοινό το ύψος από αυτήν, επομένως $\frac{(ΟΑΒ)}{(ΟΒΓ)} = \frac{ΟΑ}{ΟΓ}$. Από την ομοιότητα όμως των τριγώνων ΟΑΔ και ΟΒΓ έχουμε ότι $\frac{ΟΑ}{ΟΓ} = \frac{ΑΔ}{ΒΓ}$, οπότε $\frac{(ΟΑΒ)}{(ΟΒΓ)} = \frac{ΑΔ}{ΒΓ}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Δυο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν* $υ_β = υ_{β'}$ *και* $\frac{(ΑΒΓ)}{(Α'Β'Γ')} = \frac{3}{2}$. *Τότε ο λόγος* $\frac{β}{β'}$ *είναι*

α. $\frac{2}{5}$ β. $\frac{3}{4}$ γ. $\frac{3}{2}$ δ. $\frac{9}{4}$ ε. $\frac{4}{9}$

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. *Δυο ρόμβοι ΑΒΓΔ και Α'Β'Γ'Δ' έχουν* $\hat{Α} = \hat{Α}'$ *και* $\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{4}{5}$. *Να υπολογισθεί ο λόγος* $\frac{(ΑΒΓΔ)}{(Α'Β'Γ'Δ')}$.

3. *Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) είναι ισοδύναμο με ένα τρίγωνο Α'Β'Γ' που έχει* $Α'Β'{\cdot}Α'Γ'=36$. *Αν είναι* $\hat{Α} + \hat{Α}' = 2\llcorner$, *ποιο είναι το μήκος των ίσων πλευρών του ισοσκελούς;*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Δυο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν* $α = α'$ *και* $υ_α = \frac{3}{2}υ_{α'}$. *Αν το εμβαδόν του ΑΒΓ είναι* $30m^2$, *να βρείτε το εμβαδόν του Α'Β'Γ'.*

2. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με εμβαδόν* $20m^2$. *Αν Μ σημείο στην προέκταση της ΑΒ τέτοιο ώστε ΑΒ = 2ΒΜ, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΒΓ.*

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ζ των προεκτάσεων των ΒΑ και ΓΑ αντίστοιχα, προς το Α, ώστε* $ΑΔ = \frac{2}{3}ΑΒ$ *και* $ΑΖ = \frac{1}{2}ΑΓ$. *Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι* $30m^2$, *να βρείτε το εμβαδόν του ΑΔΖ.*

4. *Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδόν* $75m^2$. *Έστω Δ σημείο της πλευράς ΒΓ και Μ σημείο του ΑΔ τέτοιο, ώστε* $\frac{ΑΜ}{ΜΔ} = \frac{3}{2}$.

Από το Μ φέρουμε παράλληλο προς την πλευρά ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου ΒΕΖΓ.

5. *Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν* $\hat{Α} = \hat{Α}'$ *και* $\hat{Β} + \hat{Β}' = 2\llcorner$. *Να αποδείξετε ότι* $αβ' = α'β$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και εσωτερικό του σημείο Ρ. Αν οι ΑΡ, ΒΡ και ΓΡ τέμνουν τις ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ στα Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*

i) $\frac{ΡΔ}{ΑΔ} = \frac{(ΒΡΓ)}{(ΑΒΓ)}$,

ii) $\frac{ΡΔ}{ΑΔ} + \frac{ΡΕ}{ΒΕ} + \frac{ΡΖ}{ΓΖ} = 1$ *και*

iii) $\frac{ΡΑ}{ΑΔ} + \frac{ΡΒ}{ΒΕ} + \frac{ΡΓ}{ΓΖ} = 2$.

2. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με* $\hat{Β}, \hat{Γ} < 1\llcorner$ *και το ύψος του ΑΔ. Στο ημιεπίπεδο (ΒΓ, Α) φέρουμε* $Βx \perp ΒΓ$ *και* $Γy \perp ΒΓ$. *Πάνω στις Βx, Γy παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Ε και Ζ, ώστε να είναι ΒΕ = ΓΖ = 2ΑΔ. Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι (ΕΒΜ)+(ΖΓΝ) = (ΑΒΓ).*

3. *Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και δυο κάθετες χορδές ΑΒ και ΓΔ. Να αποδείξετε ότι (ΒΟΔ) = (ΑΟΓ).*

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ, τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι* $(ΑΒΕ)^2 = (ΑΔΕ)(ΑΒΓ)$.

5. *Πάνω στις πλευρές κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε εξωτερικά αυτού τα τετράγωνα ΑΒΕΖ, ΒΓΗΘ, ΓΔΙΚ και ΔΑΛΜ. Να αποδείξετε ότι (ΑΜΖ) + (ΓΗΚ) = (ΒΘΕ) + (ΔΙΛ).*

6. *Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ* ($\hat{Α} = 1\llcorner$) *και τρία πολύγωνα* $Ρ_1$, $Ρ_2$ *και* $Ρ_3$ *όμοια μεταξύ τους, που έχουν ως ομόλογες πλευρές τις ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι* $(Ρ_2)+(Ρ_3)=(Ρ_1)$, *όπου* $(Ρ_1)$,$(Ρ_2)$ *και* $(Ρ_3)$ *τα εμβαδά τους.*

Σύνθετα Θέματα

1. *Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Αν* $Ε_1$, $Ε_2$, $Ε_3$ *και* $Ε_4$ *είναι τα εμβαδά των τριγώνων ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ και ΔΟΑ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι* $Ε_1 \cdot Ε_3 = Ε_2 \cdot Ε_4$. *Αν υποθέσουμε ότι η ΑΔ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ, τότε να αποδείξετε ότι*

i) $Ε_1 = Ε_3$, ii) $Ε_1^2 = Ε_2 \cdot Ε_4$,

iii) $Ε_1 \leq \frac{1}{4}Ε$, *όπου* $Ε = (ΑΒΓΔ)$.

2. *Από εσωτερικό σημείο Σ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές του. Αν E_1, E_2, E_3 είναι τα εμβαδά των τριών τριγώνων που σχηματίζονται να αποδείξετε ότι*

i) καθένα από τα τρίγωνα εμβαδών E_1, E_2, E_3 είναι όμοιο με το ΑΒΓ,

ii) $\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2}+\sqrt{E_3}=\sqrt{E}$, όπου E = (ΑΒΓ).

3. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τις διχοτόμους ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Να αποδείξετε ότι*

i) $(ΔΕΖ)=\dfrac{2αβγ}{(α+β)(β+γ)(γ+α)}(ΑΒΓ)$,

ii) $(ΔΕΖ)\leq\dfrac{1}{4}(ΑΒΓ)$.

4. *Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Κ, Λ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Από τα Κ, Λ να φέρετε δύο ευθείες που να χωρίζουν το τρίγωνο σε τρία ισοδύναμα μέρη.*

Το πρόβλημα του τετραγωνισμού κυρτού πολυγώνου

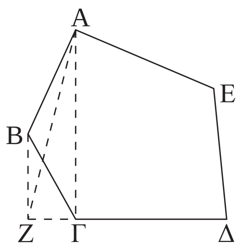
10.6 Μετασχηματισμός πολυγώνου σε ισοδύναμό του

Σε πολλές περιπτώσεις, για τον υπολογισμό του εμβαδού ενός ευθύγραμμου σχήματος επιδιώκουμε τον μετασχηματισμό σε ένα ισοδύναμο τετράγωνο. Η κατασκευή ενός τετραγώνου ισοδύναμου με ένα πολύγωνο λέγεται ***τετραγωνισμός*** αυτού. Η λύση των επόμενων δύο προβλημάτων αποτελεί τη μέθοδο κατασκευής του ισοδύναμου τετραγώνου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να μετασχηματισθεί πολύγωνο σε άλλο ισοδύναμό του με μια πλευρά λιγότερη.

Λύση



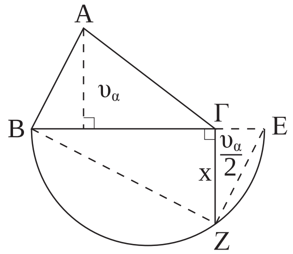
Σχήμα 25

Ας θεωρήσουμε ένα πολύγωνο, π.χ. ένα πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ (σχ. 25). Από την κορυφή Α φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ, που αφήνει προς το ένα μέρος της μόνο μια κορυφή, τη Β. Από το Β φέρουμε την παράλληλο προς την ΑΓ, η οποία τέμνει την ευθεία ΔΓ στο Ζ. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΖΓ έχουν κοινή βάση ΑΓ και τα αντίστοιχα προς αυτή ύψη ίσα, αφού ΒΖ // ΑΓ. Επομένως (ΑΒΓ) = (ΑΖΓ), οπότε (ΑΒΓΔΕ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔΕ) = (ΑΖΓ) + (ΑΓΔΕ) = (ΑΖΔΕ) δηλαδή το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ είναι ισοδύναμο με το τετράπλευρο ΑΖΔΕ και επομένως το αρχικό μας πολύγωνο είναι ισοδύναμο με πολύγωνο που έχει μια πλευρά λιγότερη.

Αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία στο τετράπλευρο ΑΖΔΕ, θα μετασχηματισθεί σε ισοδύναμο τρίγωνο. Έτσι, το αρχικό μας πολύγωνο μπορεί να μετασχηματισθεί σε ισοδύναμο τρίγωνο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να μετασχηματισθεί τρίγωνο σε ισοδύναμο τετράγωνο.



Σχήμα 26

Λύση

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος που αντιστοιχεί στη ΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ προς το Γ παίρνουμε τμήμα $ΓΕ = \frac{\upsilon_\alpha}{2}$ και γράφουμε ημικύκλιο διαμέτρου ΒΕ. Φέρουμε την κάθετο της ΒΓ στο Γ, η οποία τέμνει το ημικύκλιο σε σημείο Ζ. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΖΒΕ έχουμε:

$$ΓΖ^2 = ΒΓ \cdot ΓΕ = \alpha \cdot \frac{\upsilon_\alpha}{2} = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = (ΑΒΓ),$$

οπότε συμπεραίνουμε ότι το τμήμα ΓΖ είναι η πλευρά x του ζητούμενου τετραγώνου, που είναι ισοδύναμο με το τρίγωνο ΑΒΓ.

ΣΧΟΛΙΟ

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι κάθε κυρτό πολύγωνο τετραγωνίζεται, αφού με πεπερασμένου πλήθους επαναλήψεις της διαδικασίας του προβλήματος 1 και τέλος της διαδικασίας του προβλήματος 2 κατασκευάζεται τετράγωνο ισοδύναμο προς το αρχικό πολύγωνο. Ισχύει το ίδιο συμπέρασμα για μη ευθύγραμμα επίπεδα σχήματα; Η απάντηση θα δοθεί στο επόμενο κεφάλαιο (§11.8).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Τι λέγεται τετραγωνισμός ενός πολυγώνου;*

2. *Πώς μετασχηματίζεται ένα ορθογώνιο σε ισοδύναμο τρίγωνο;*

3. *Πώς μετασχηματίζεται ένα παραλληλόγραμμο σε ισοδύναμο τρίγωνο;*

4. *Πώς μετασχηματίζεται ένα τραπέζιο σε ισοδύναμο τετράγωνο;*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να κατασκευασθεί τετράγωνο ισοδύναμο με δοσμένο ορθογώνιο πλευρών α, β.*

2. *Να κατασκευασθεί τετράγωνο ισοδύναμο με το άθροισμα δύο τετραγώνων πλευρών α, β αντίστοιχα.*

3. *Δοσμένο κυρτό τετράπλευρο να διαιρεθεί σε δύο ισοδύναμα μέρη με ευθεία που να διέρχεται από μια κορυφή του.*

4. *Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και σημείο Κ της πλευράς του ΑΔ.*

i) Να μετασχηματισθεί το ΑΒΓΔ σε ισοδύναμό του τρίγωνο του οποίου μια κορυφή να είναι το Κ και οι άλλες να βρίσκονται πάνω στην ευθεία ΒΓ.

ii) Να αχθεί από το Κ μια ευθεία που να διαιρεί το τετράπλευρο σε δύο ισοδύναμα μέρη.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε//ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:*

i) (ΒΔΕ) = (ΓΔΕ),

ii) (ΒΑΕ) = (ΓΑΔ),

iii) (ΒΑΕ) + (ΓΑΔ) = (ΑΒΓ),

με την επιπλέον υπόθεση ότι τα Δ, Ε είναι μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα.

2. *Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της πλευράς του ΒΓ, ώστε* $ΒΔ = \frac{λ}{λ^2+4}ΒΓ$, $λ > 0$. *Να αποδείξετε ότι:*

i) $(ΑΒΔ) = \frac{λ}{λ^2+4}(ΑΒΓ)$,

ii) $(ΑΒΔ) \leq \frac{1}{4}(ΑΒΓ)$,

iii) $(ΑΓΔ) \geq \frac{3}{4}(ΑΒΓ)$.

3. *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Με τη θεωρία του εμβαδού να αποδείξετε ότι* $\frac{ΒΔ}{ΔΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$ *(Θεώρημα διχοτόμου).*

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με* $β = 3γ$, *ΑΔ μία διχοτόμος του και ΒΕ μία διάμεσός του. Να αποδείξετε ότι:*

i) $(ΑΒΔ) = \frac{1}{3}(ΑΔΓ)$,

ii) $(ΑΒΔ)\cdot(ΔΕΓ) = (ΑΔΓ)\cdot(ΒΕΔ)$,

iii) $(ΔΕΓ) = \frac{3}{8}(ΑΒΓ)$.

5. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 6cm και* $\hat{Α} = 120°$.

i) *Να βρεθεί το εμβαδόν του,*

ii) *Αν Ε είναι σημείο της ΑΓ τέτοιο, ώστε* $ΑΕ = \frac{1}{3}ΑΓ$ *και ΑΔ το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΓ.*

iii) *Αν η παράλληλη από το Α προς τη ΒΓ τέμνει την προέκταση της ΔΕ στο Ζ, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΕΖ.*

6. *Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ \\ ΒΓ) και τα μέσα Κ, Λ των ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:*

i) (ΑΒΛΚ) = (ΚΛΓΔ),

ii) (ΜΑΒ) = (ΜΓΔ), *για οποιοδήποτε σημείο Μ του ΚΛ.*

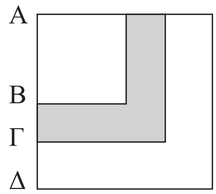
7. *Θεωρούμε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ* ($\hat{Α} = 1\llcorner$) *με ΑΒ = γ. Διαιρούμε την πλευρά ΑΒ σε ν ίσα τμήματα (ν φυσικός,* $ν \geq 2$*) και από τα σημεία διαίρεσης φέρουμε παράλληλες προς την ΑΓ.*

i) *Να υπολογισθούν ως συνάρτηση του γ τα εμβαδά των ν σχημάτων στα οποία διαιρέθηκε το τρίγωνο ΑΒΓ.*

ii) *Χρησιμοποιώντας το i) να αποδείξετε ότι* $1 + 3 + 5 + ... + (2ν - 1) = ν^2$.

8. *Δύο τετράγωνα ΑΒΓΔ και ΔΕΖΗ έχουν κοινή την κορυφή Δ και εμβαδόν 36 το καθένα. Αν οι πλευρές ΒΓ και ΕΖ έχουν κοινό μέσο Μ, να βρεθεί το εμβαδόν του σχήματος ΑΒΜΖΗΔ.*

9. *Τρία τετράγωνα των οποίων τα μήκη των πλευρών είναι ακέραιοι αριθμοί, έχουν κοινή κορυφή Α και είναι τοποθετημένα το ένα πάνω στο άλλο, όπως δείχνει το σχήμα.*



Αν ΒΓ = ΓΔ και η γραμμοσκιασμένη περιοχή έχει εμβαδόν 17, να βρεθεί το εμβαδόν του μικρότερου και του μεγαλύτερου τετραγώνου.

10. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τρεις θετικοί αριθμοί λ, μ, ν. Να φέρετε δύο ευθείες παράλληλες προς τη ΒΓ που να χωρίζουν το τρίγωνο σε τρία μέρη ανάλογα των αριθμών λ, μ, ν.*

11. i) *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και εσωτερικό του σημείου Μ. Αν η ΑΜ τέμνει την ΒΓ στο Δ, να αποδείξετε ότι:*

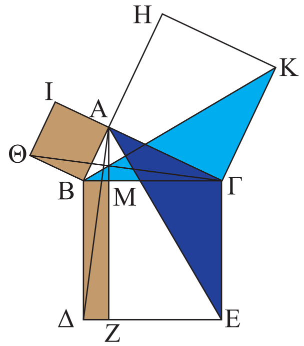
α) $\frac{ΒΔ}{ΔΓ} = \frac{(ΑΜΒ)}{(ΑΜΓ)}$, β) $\frac{ΜΔ}{ΑΔ} = \frac{(ΒΜΓ)}{(ΑΒΓ)}$,

ii) *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και εσωτερικό του σημείο Μ. Αν οι ευθείες ΑΜ, ΒΜ και ΓΜ τέμνουν τις πλευρές ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ στα Δ, Ε και Ζ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι*

$$\frac{ΑΕ}{ΕΓ} + \frac{ΑΖ}{ΖΒ} = \frac{ΑΜ}{ΜΔ}.$$

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Το Πυθαγόρειο θεώρημα στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη αποδεικνύεται στην προτελευταία πρόταση (Πρόταση 47) του Βιβλίου Ι. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο *ΑΒΓ* με $\hat{A}$ ορθή. Το τετράγωνο που κατασκευάζεται επί της *ΒΓ* είναι ισοδύναμο με το άθροισμα των τετραγώνων που κατασκευάζονται επί της *ΑΒ* και *ΑΓ*. Φέρουμε την *ΑΖ* παράλληλη στις *ΒΔ*, *ΓΕ* και τις ευθείες *ΑΔ* και *ΘΓ*. Αφού οι γωνίες $B\hat{A}\Gamma$, $B\hat{A}I$ είναι ορθές, προκύπτει ότι τα τμήματα *ΙΑ*, *ΑΓ* βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Το ίδιο και τα τμήματα *ΒΑ*, *ΑΗ*. Αφού οι γωνίες $\Delta\hat{B}\Gamma$, $\Theta\hat{B}A$ είναι ορθές, έχουμε ότι $\Delta\hat{B}\Gamma = \Theta\hat{B}A$, οπότε: $\Delta\hat{B}\Gamma + A\hat{B}\Gamma = \Theta\hat{B}A + A\hat{B}\Gamma$ ή $\Delta\hat{B}A = \Theta\hat{B}\Gamma$. Αφού $\Delta B = B\Gamma$, $\Theta B = BA$ και $\Delta\hat{B}A = \Theta\hat{B}\Gamma$, η βάση *ΑΔ* ισούται με τη βάση *ΘΓ* και το *ΑΒΔ* ισούται με το *ΘΒΓ*. Τώρα το παραλληλόγραμμο *ΒΜΖΔ* είναι διπλάσιο από το *ΑΒΔ*, και το τετράγωνο *ΙΑΒΘ* είναι διπλάσιο από το *ΘΒΓ*. Επομένως, το παραλληλόγραμμο *ΒΜΖΔ* είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο *ΙΑΒΘ*. Όμοια, αν φέρουμε την *ΑΕ* και τη *ΒΚ* μπορεί να αποδειχθεί ότι το παραλληλόγραμμο *ΓΜΖΕ* είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο *ΗΚΓΑ*. Επομένως, το τετράγωνο *ΒΔΕΓ* είναι ισοδύναμο με το άθροισμα των δύο τετραγώνων *ΙΑΒΘ* και *ΗΚΓΑ*.



Το Πυθαγόρειο θεώρημα στο Βιβλίο Ι των «Στοιχείων»

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Αντικείμενο του κεφαλαίου είναι η έννοια του εμβαδού. Το εμβαδόν ενός πολυγωνικού χωρίου είναι ένας θετικός αριθμός, που εκφράζει το πλήθος των μοναδιαίων τετραγώνων (ή μερών του) που απαιτούνται για να καλύψουν την έκτασή του. Δεχόμαστε την αλήθεια των εξής ιδιοτήτων:

- Ίσα πολυγωνικά χωρία έχουν ίσα εμβαδά.
- Αν ένα πολυγωνικό χωρίο (ή μια πολυγωνική επιφάνεια) χωρίζεται σε πεπερασμένου πλήθους πολυγωνικά χωρία, που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, τότε το εμβαδόν του ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους πολυγωνικών χωρίων.

Ευθύγραμμα σχήματα με το ίδιο εμβαδόν λέγονται ισοδύναμα.

Με σκοπό την παραγωγή των τύπων υπολογισμού του εμβαδού βασικών ευθύγραμμων σχημάτων δεχόμαστε ότι το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς α είναι $E = \alpha^2$. Στηριζόμενοι σ' αυτό αποδεικνύουμε ότι το εμβαδόν Ε ορθογωνίου με πλευρές α, β είναι $E = \alpha\beta$. Στη συνέχεια μετασχηματίζοντας το παραλληλόγραμμο σε ορθογώνιο βρίσκουμε τον τύπο του εμβαδού Ε ενός παραλληλογράμμου. Θεωρώντας πλέον το τρίγωνο ως το μισό κατάλληλου παραλληλογράμμου βρίσκουμε τον τύπο του εμβαδού ενός τριγώνου. Τέλος χωρίζοντας ένα τραπέζιο σε δύο τρίγωνα βρίσκουμε ότι το εμβαδόν Ε ενός τραπεζίου δίνεται από τον τύπο:

$$E = \frac{B + \beta}{2}\upsilon.$$

Στη συνέχεια δίνουμε και άλλους τύπους για το εμβαδόν τριγώνου.

Ως πόρισμα αυτών καταλήγουμε στο Νόμο των ημιτόνων

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R.$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε τη σχέση των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων.

Επίσης, αποδεικνύουμε ότι για δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ με

$$\hat{A} = \hat{A}' \text{ ή } \hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ \text{ ισχύει ότι } \frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}.$$

Τέλος, αποδεικνύουμε ότι κάθε κυρτό πολύγωνο μετασχηματίζεται σε ισοδύναμό του τετράγωνο, αποδεικνύοντας πρώτα ότι το πολύγωνο μετασχηματίζεται σε ισοδύναμό του τρίγωνο και αυτό σε ισοδύναμο τετράγωνο.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

ΕΜΒΑΔΟΝ

Πολυγώνων

Τετραγώνου: $E = \alpha^2$

Ορθογωνίου: $E = \alpha \cdot \beta$

Παραλληλογράμμου: $E = \alpha \cdot \upsilon_\alpha = \beta \cdot \upsilon_\beta$

Τριγώνου: $E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma\upsilon_\gamma$

- $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$
- $E = \tau\rho$
- $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$
- $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A = \frac{1}{2}\gamma\alpha\eta\mu B = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma$

Τραπεζίου: $E = \frac{1}{2}(B + \beta) \cdot \upsilon$

Ρόμβου (και τετραπλεύρου με κάθετες διαγωνίους): $E = \frac{1}{2}\delta_1 \cdot \delta_2$

Πολυγωνικών Επιφανειών

$(\Pi.E.) = (\Pi_1) + (\Pi_2) + \ldots + (\Pi_\nu)$

Εμβαδόν και ομοιότητα

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha'}, \text{ αν } \upsilon_\alpha = \upsilon_{\alpha'} \\ \frac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_{\alpha'}}, \text{ αν } \alpha = \alpha' \\ \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}, \text{ αν } \hat{A} = \hat{A}' \text{ ή } \hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ \\ \lambda^2, \text{ αν } \overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'} \text{ και } \lambda \text{ ο λόγος ομοιότητας} \end{cases}$$

$$\frac{(AB\Gamma \ldots K)}{(A'B'\Gamma' \ldots K')} = \lambda^2, \text{ αν } AB\Gamma\ldots K \approx A'B'\Gamma'\ldots K' \text{ και } \lambda \text{ ο λόγος ομοιότητας}$$

Τετραγωνισμός πολυγώνου

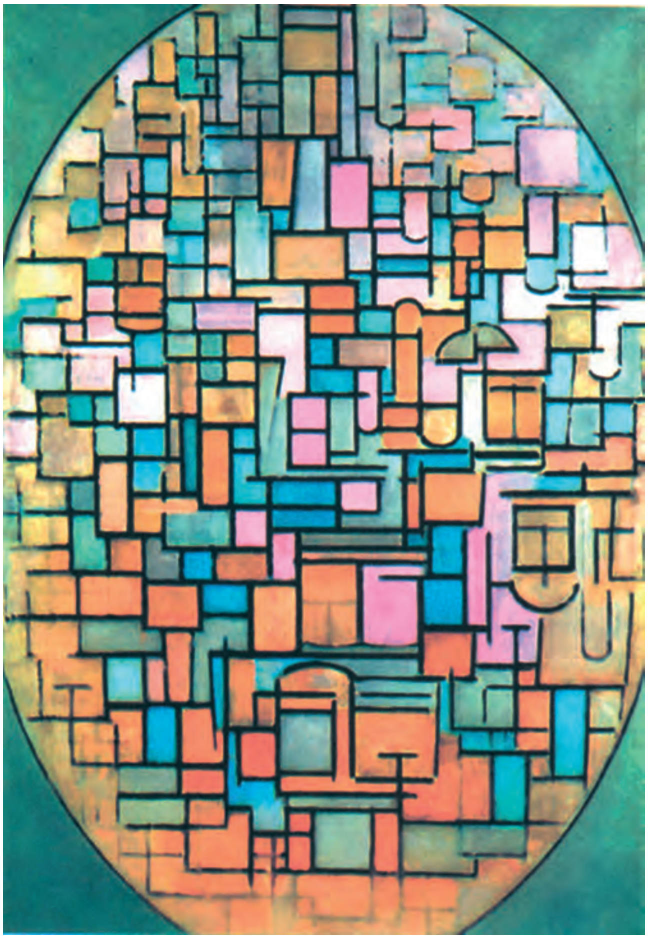
- Μετασχηματισμός πολυγώνου σε ισοδύναμο τρίγωνο
- Μετασχηματισμός τριγώνου σε ισοδύναμο τετράγωνο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

Η μέτρηση του μήκους του κύκλου και του εμβαδού του κυκλικού δίσκου αποτέλεσε ένα σημαντικό θέμα με το οποίο ασχολήθηκαν σπουδαίοι μαθηματικοί της αρχαιότητας (Ιπποκράτης ο Χίος, Αρχιμήδης). Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκαν τα κανονικά πολύγωνα, τα οποία με τη σειρά τους απασχόλησαν τους μαθηματικούς για περίοδο πάνω από 2.000 χρόνια (Αρχαιότητα - K.F. Gauss).

Στο παρόν κεφάλαιο εισάγουμε την έννοια των κανονικών πολυγώνων και μελετάμε βασικές ιδιότητές τους. Εξετάζουμε την εγγραφή ορισμένων βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και υπολογίζουμε τα στοιχεία τους. Στη συνέχεια «προσεγγίζοντας» τον κύκλο με κανονικά πολύγωνα εγγεγραμμένα ή περιγεγραμμένα σε αυτόν και χρησιμοποιώντας τον ορισμό του αριθμού π, βρίσκουμε τύπους για το μήκος κύκλου και τόξου και για το εμβαδόν κυκλικού δίσκου και τομέα.



Piet Mondrian «Σύνθεση»

Κανονικά πολύγωνα

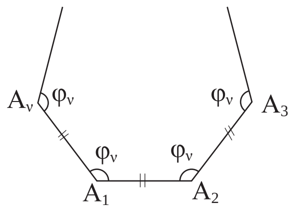
11.1 Ορισμός κανονικού πολυγώνου

Όπως είναι γνωστό, ένα τετράγωνο έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες. Το ίδιο ισχύει και για ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Τέτοια πολύγωνα λέγονται κανονικά.

Ορισμός

Ένα πολύγωνο λέγεται *κανονικό*, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες.

► Γωνία κανονικού ν-γώνου

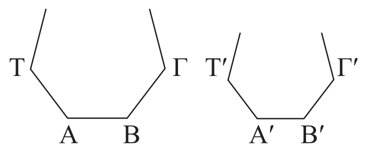


Σχήμα 1

Έστω $A_1A_2...A_\nu$ ένα κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές και έστω $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = ... = \hat{A}_\nu = \varphi_\nu$ (σχ.1). Επειδή το άθροισμα των γωνιών κάθε κυρτού ν-γώνου είναι $(\nu - 2)180°$, θα έχουμε $\nu\varphi_\nu = (\nu - 2) \cdot 180°$ και επομένως

$$\boldsymbol{\varphi_\nu = 180° - \frac{360°}{\nu}}.$$

► Ομοιότητα κανονικών πολυγώνων



Σχήμα 2

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο κανονικά πολύγωνα ΑΒΓ...Τ, Α′Β′Γ′...Τ′ (σχ.2) με τον ίδιο αριθμό πλευρών ν. Τότε η γωνία καθενός είναι $180° - \dfrac{360°}{\nu}$, οπότε έχουμε:

$$\hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', ..., \hat{T} = \hat{T}' \quad (1).$$

Επίσης, αφού ΑΒ = ΒΓ =...= ΤΑ και Α′Β′ = Β′Γ′ =...= Τ′Α′ θα έχουμε

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = ... = \frac{TA}{T'A'} \qquad (2).$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι τα πολύγωνα ΑΒΓ... Τ και Α′Β′Γ′...Τ′ είναι όμοια. Έτσι, έχουμε το επόμενο συμπέρασμα:

Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

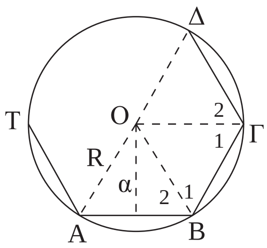
11.2 Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων

Μια σημαντική ιδιότητα των κανονικών πολυγώνων εκφράζεται από το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Κάθε κανονικό πολύγωνο εγγράφεται σε έναν κύκλο και περιγράφεται σε έναν άλλον. Οι δύο αυτοί κύκλοι είναι ομόκεντροι.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 3

Έστω ΑΒΓΔ ...Τ ένα κανονικό πολύγωνο (σχ.3). Θεωρούμε τον κύκλο (Ο, R) που διέρχεται από τις κορυφές Α, Β, Γ του πολυγώνου. Θα αποδείξουμε ότι ο κύκλος αυτός διέρχεται και από την κορυφή Δ, δηλαδή ότι ΟΔ = R. Επειδή ΟΒ = ΟΓ = R, το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές και επομένως $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \sigma$, οπότε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι ίσα, γιατί έχουν:

$$OB = O\Gamma,\ AB = \Gamma\Delta \text{ (αφού ΑΒΓΔ...Τ κανονικό) και}$$
$$\hat{B}_2 = \hat{B} - \sigma = \hat{\Gamma} - \sigma = \hat{\Gamma}_2.$$

Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι ΟΔ = ΟΑ = R. Όμοια αποδεικνύεται ότι ο κύκλος (Ο, R) διέρχεται και από τις υπόλοιπες κορυφές Ε, Ζ, ... Τ και επομένως το πολύγωνο είναι εγγράψιμο. Οι πλευρές του πολυγώνου είναι ίσες χορδές του κύκλου (Ο, R), επομένως και τα αποστήματά τους θα είναι ίσα, έστω με α. Επομένως, ο κύκλος (Ο, α) εφάπτεται στις πλευρές του ΑΒΓΔ...Τ, άρα το πολύγωνο είναι περιγράψιμο σε κύκλο. Είναι φανερό, από τα παραπάνω, ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος (Ο, R) και ο εγγεγραμμένος (Ο, α) του πολυγώνου είναι ομόκεντροι.

► Στοιχεία κανονικού πολυγώνου

Αποδείξαμε παραπάνω ότι κάθε κανονικό πολύγωνο έχει έναν περιγεγραμμένο και έναν εγγεγραμμένο κύκλο που έχουν κοινό κέντρο.

Το κοινό κέντρο των δύο αυτών κύκλων λέγεται ***κέντρο*** του πολυγώνου. Η ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου λέγεται ***ακτίνα*** του πολυγώνου, ενώ η απόσταση του κέντρου από μια πλευρά του, δηλαδή η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου λέγεται ***απόστημα*** του πολυγώνου.

Επειδή τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, ..., $\overset{\frown}{TA}$ (σχ.3) είναι ίσα, οι επίκεντρες γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, ..., $T\hat{O}A$ είναι ίσες. Καθεμία από τις γωνίες αυτές, δηλαδή η γωνία υπό την οποία φαίνεται κάθε πλευρά του πολυγώνου από το κέντρο του, λέγεται ***κεντρική γωνία*** του πολυγώνου.

Στα επόμενα, σε ένα κανονικό ν-γωνο θα συμβολίζουμε με

R την ακτίνα του, με λ_ν την πλευρά του, με α_ν το απόστημά του, με ω_ν την κεντρική του γωνία, με P_ν την περίμετρό του και E_ν το εμβαδόν του.

Για τα στοιχεία των κανονικών πολυγώνων ισχύει το εξής θεώρημα.

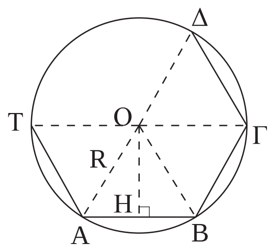
ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ακτίνας R ισχύουν οι εξής σχέσεις:

i) $\alpha_\nu^2 + \dfrac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$ ii) $P_\nu = \nu\lambda_\nu$

iii) $\omega_\nu = \dfrac{360°}{\nu}$ iv) $E_\nu = \dfrac{1}{2}P_\nu\alpha_\nu$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 4

Έστω ΑΒΓΔ...Τ ένα κανονικό ν-γωνο, R η ακτίνα του, $AB = \lambda_\nu$ η πλευρά του και $OH = \alpha_\nu$ το απόστημά του (σχ.4).

i) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΗΟΑ, με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος προκύπτει $OH^2+HA^2=OA^2$, δηλαδή
$$\alpha_\nu^2 + \left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2 = R^2.$$

ii) Επειδή $AB = B\Gamma = ... = TA = \lambda_\nu$, θα είναι $P_\nu = \nu\lambda_\nu$.

iii) Επειδή $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{B\Gamma} = ... = \overset{\frown}{TA}$ θα είναι
$$A\hat{O}B = B\hat{O}\Gamma = ...= T\hat{O}A = \omega_\nu$$
και αφού οι γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, ... και $T\hat{O}A$ έχουν άθροισμα 360°, έχουμε $\nu\omega_\nu = 360°$, δηλαδή $\omega_\nu = \dfrac{360°}{\nu}$.

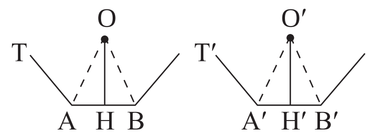
iv) Τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ... , ΟΤΑ είναι ίσα (ΠΠΠ), άρα και ισεμβαδικά και επομένως έχουμε:
$$E_\nu = \nu(OAB) = \nu\,\frac{1}{2}AB \cdot OH = \frac{1}{2}\nu\lambda_\nu\alpha_\nu = \frac{1}{2}P_\nu\alpha_\nu$$
αφού $P_\nu = \nu\lambda_\nu$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Σε δύο κανονικά ν-γωνα ο λόγος των πλευρών τους ισούται με το λόγο των ακτίνων τους και το λόγο των αποστημάτων τους.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε δύο κανονικά πολύγωνα ΑΒΓ...Τ και Α′Β′Γ′...Τ′



Σχήμα 5

(σχ.5) με το ίδιο πλήθος πλευρών, έστω ν (ν ≥3). Αν Ο, Ο′ τα κέντρα των πολυγώνων, τα τρίγωνα ΟΑΒ και Ο′Α′Β′ είναι όμοια γιατί είναι ισοσκελή και έχουν $\hat{AOB} = \hat{A'O'B'} = \frac{360°}{\nu}$ και επομένως $\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{O'A'} = \frac{OH}{O'H'}$, όπου ΟΗ, Ο′Η′ τα ύψη των τριγώνων. Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι:

$$\frac{\boldsymbol{\lambda_\nu}}{\boldsymbol{\lambda'_\nu}} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{R'}} = \frac{\boldsymbol{\alpha_\nu}}{\boldsymbol{\alpha'_\nu}},$$

όπου λ_ν , R, α_ν τα συνήθη στοιχεία του ΑΒΓ...Τ και λ'_ν, R′, α'_ν τα στοιχεία του Α′Β′Γ′...Τ′.

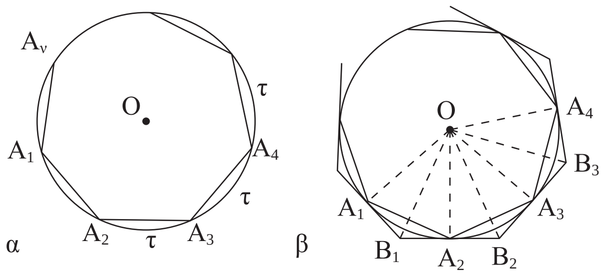
ΣΧΟΛΙΟ

Η διαίρεση ενός κύκλου σε ν ίσα τόξα με τον κανόνα και το διαβήτη δεν είναι δυνατή για οποιαδήποτε τιμή του φυσικού αριθμού ν. Για παράδειγμα, δεν είναι δυνατή η διαίρεση ενός κύκλου σε επτά ίσα τόξα, το οποίο σημαίνει ότι δεν κατασκευάζεται κανονικό 7-γωνο. Από τον τρόπο κατασκευής των κανονικών πολυγώνων (με κανόνα και διαβήτη) που αναπτύσσεται στα στοιχεία του Ευκλείδη, προκύπτει ότι οι αρχαίοι Έλληνες Μαθηματικοί κατασκεύαζαν κανονικά πολύγωνα με πλήθος πλευρών 2^ν, $\nu \geq 2$, $2^\nu \cdot 3$, $2^\nu \cdot 5$, $2^\nu \cdot 3 \cdot 5$, *όπου* $\nu = 0, 1, 2, \ldots$

Ο Αρχιμήδης (287 π.Χ. περίπου - 212 π.Χ.) ασχολήθηκε με το πρόβλημα της κατασκευής κανονικού πολυγώνου και παρουσίασε ένα θαυμάσιο έργο με θέμα την κατασκευή του κανονικού 7-γώνου. Αρκετά αργότερα, το 1796, ο Gauss (1777 - 1855) με αφορμή την κατασκευή κανονικού 17-γώνου απέδειξε ότι ένα κανονικό πολύγωνο μπορεί να κατασκευαστεί, όταν το πλήθος ν των πλευρών του είναι της μορφής $\nu = 2^\alpha P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_\kappa$, *όπου α φυσικός αριθμός και* P_1, P_2, ..., P_κ *πρώτοι αριθμοί του Fermat, δηλαδή της μορφής* $P_\lambda = 2^{2^\lambda} + 1$, $\lambda = 1, 2, \ldots, \kappa$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αποδεικνύεται ότι, αν τα σημεία $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ *διαιρούν έναν κύκλο σε ν ίσα τόξα, τότε το πολύγωνο* $A_1A_2..A_\nu$ *(σχ.6α) καθώς και το πολύγωνο* $B_1, B_2, \ldots B_\nu$, *που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία αυτά (σχ.6β) είναι κανονικά.*



Σχήμα 6

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Υπάρχουν κανονικά πολύγωνα των οποίων οι εξωτερικές γωνίες είναι αμβλείες;*

2. *Ποιο είναι το απόστημα κανονικού πολυγώνου περιγεγραμμένου σε κύκλο;*

3. *Ένα κυρτό πολύγωνο είναι κανονικό όταν:*
   α. *έχει μόνον τις πλευρές του ίσες,*
   β. *έχει μόνον τις γωνίες του ίσες,*
   γ. *είναι εγγράψιμο σε κύκλο και έχει τις πλευρές του ίσες.*

4. *Μεταξύ των λ_ν, α_ν και R ισχύει:*
   α. $\lambda^2_\nu + \dfrac{\alpha^2_\nu}{4} = R^2$ β. $\lambda^2_\nu + \alpha^2_\nu = 4R^2$
   γ. $\lambda^2_\nu = 4(R^2 - \alpha^2_\nu)$ δ. $\lambda^2_\nu + \alpha^2_\nu = \dfrac{R^2}{4}$

5. *Μεταξύ των ω_ν και φ_ν ισχύει:*
   α. $\omega_\nu + \varphi_\nu = 1\llcorner$ β. $\omega_\nu + \varphi_\nu = 2\llcorner$
   γ. $\omega_\nu + \varphi_\nu = 270°$ δ. $\omega_\nu + \varphi_\nu = 3\llcorner$
   (Στις ερωτήσεις 3, 4, και 5 κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση και αιτιολογήστε την απάντησή σας).

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να βρεθούν η γωνία και η κεντρική γωνία ενός κανονικού: πενταγώνου, εξαγώνου, δεκαγώνου και δωδεκαγώνου.*

2. *Αν η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι 108°, τότε το πλήθος των πλευρών του είναι:*
   α. 15 β. 12 γ. 10 δ. 5 ε. 8
   Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. *Σε δύο κανονικά πεντάγωνα ο λόγος των πλευρών τους είναι $\lambda = 2$. Ποιος είναι ο λόγος των αποστημάτων, των ακτίνων τους, των περιμέτρων τους και των εμβαδών τους;*

4. *Τα πλήθη ν_1, ν_2 των πλευρών δύο κανονικών πολυγώνων είναι αντίστοιχα ρίζες των εξισώσεων:*
   $\nu^3 - 3\nu^2 - 7\nu - 15 = 0, \quad 2\nu - 9 = \sqrt{\nu - 4}.$
   Να αποδείξετε ότι τα πολύγωνα είναι όμοια.

5. *Να αποδείξετε ότι το μόνο κανονικό πολύγωνο με γωνία οξεία είναι το ισόπλευρο τρίγωνο.*

6. *Αν ένα κανονικό ν-γωνο και ένα κανονικό μ-γωνο ($\mu > \nu$) είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο, να αποδείξετε ότι:*
   i) $\lambda^2_\nu - \lambda^2_\mu = 4(\alpha^2_\mu - \alpha^2_\nu)$,
   ii) $\lambda_\nu > \lambda_\mu \Leftrightarrow \alpha_\nu < \alpha_\mu$.

7. *Θεωρούμε ένα κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Να αποδείξετε ότι*
   i) *κάθε διαγώνιος χωρίζει το πεντάγωνο σε ένα ισοσκελές τραπέζιο και σε ένα ισοσκελές τρίγωνο,*
   ii) *η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΕ,*
   iii) *δύο διαγώνιοι που δεν έχουν κοινό άκρο σχηματίζουν με δύο πλευρές του πενταγώνου ρόμβο και*
   iv) *αν Η είναι το σημείο τομής της ΑΓ με τη ΒΔ, τότε $AH^2 = A\Gamma \cdot H\Gamma$.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Το δάπεδο ενός δωματίου στρώθηκε με πλακίδια σχήματος κανονικών πολυγώνων με πλήθος πλευρών λ, μ, ν, όπου $\lambda \neq \mu \neq \nu \neq \lambda$. Να αποδείξετε ότι*
   $$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = \frac{1}{2}.$$

2. *Αν ένα πολύγωνο είναι εγγράψιμο και περιγράψιμο σε δύο ομόκεντρους κύκλους, να αποδείξετε ότι είναι κανονικό.*

3. *Αν Α, Β, Γ, Δ είναι διαδοχικές κορυφές ενός κανονικού ν-γώνου ($\nu \geq 4$), να αποδείξετε ότι $A\Gamma^2 - AB^2 = AB \cdot A\Delta$.*

4. *Αν $E_{2\nu}$ είναι το εμβαδόν ενός κανονικού 2ν-γώνου ($\nu > 4$), εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο, R), να αποδείξετε ότι*
   $E_{2\nu} = \dfrac{1}{2}P_\nu R$, *όπου P_ν η περίμετρος του κανονικού ν-γώνου ακτίνας R.*

5. *Αν λ'_ν είναι πλευρά κανονικού ν-γώνου περιγεγραμμένου σε κύκλο και λ_ν, α_ν η πλευρά και το απόστημα αντίστοιχα, κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου στον ίδιο κύκλο, να αποδείξετε ότι $R \cdot \lambda_\nu = \alpha_\nu \cdot \lambda'_\nu$.*

6. *Αν E_α, E_β, E_γ είναι τα εμβαδά κανονικών ν-γώνων που έχουν πλευρές ίσες αντίστοιχα με τις πλευρές α, β, γ ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 1∟), να αποδείξετε ότι $E_\beta + E_\gamma = E_\alpha$.*

Σύνθετα Θέματα

1. *Οι Πυθαγόρειοι ισχυρίζονταν ότι υπάρχουν τρία μόνο κανονικά πολύγωνα των οποίων οι γωνίες μπορούν να καλύψουν το επίπεδο γύρω από ένα σημείο. Τα κανονικά αυτά πολύγωνα είναι τα ισόπλευρα τρίγωνα, τα τετράγωνα και τα κανονικά εξάγωνα. Να αποδείξετε την αλήθεια του ισχυρισμού αυτού των Πυθαγορείων.*

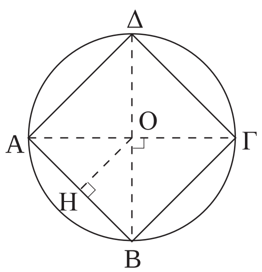
2. *Έστω κανονικό ν-γωνο και σημείο Σ στο εσωτερικό του. Αν $d_1, d_2, \ldots, d_\nu$ είναι οι αποστάσεις του Σ από τις πλευρές του ν-γώνου, να αποδείξετε ότι $d_1 + d_2 + \ldots + d_\nu = \nu\alpha_\nu$, όπου α_ν το απόστημα του ν-γώνου.*

3. *Σε κανονικό δεκάγωνο ΑΒΓΔ...Κ η πλευρά ΑΒ προεκτεινόμενη τέμνει την προέκταση της ακτίνας ΟΓ στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι ΑΜ = ΑΔ.*

11.3 Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και στοιχεία τους

Από την παρατήρηση της προηγούμενης παραγράφου προκύπτει ότι για να κατασκευάσουμε ένα κανονικό πολύγωνο με ν ($\nu \geq 3$) πλευρές, αρκεί να χωρίσουμε έναν κύκλο σε ν ίσα τόξα. Η κατασκευή με κανόνα και διαβήτη δεν είναι δυνατή για κάθε ν. (σχόλιο §11.2). Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με την εγγραφή μερικών βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και θα υπολογίσουμε τα στοιχεία τους.

► Τετράγωνο



Σχήμα 7

Έστω ένας κύκλος (Ο, R) (σχ.7). Αν φέρουμε δύο κάθετες διαμέτρους ΑΓ και ΒΔ, θα είναι $A\hat{O}B = B\hat{O}\Gamma = \Gamma\hat{O}\Delta = \Delta\hat{O}A = 90°$, οπότε $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{\Delta A}$ και επομένως το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο. Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος έχουμε

$$\lambda_4^2 = AB^2 = OA^2 + OB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2,$$

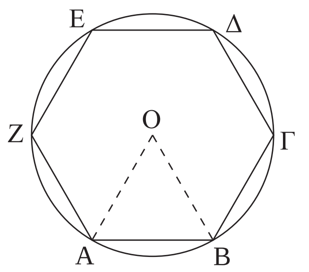
από την οποία προκύπτει ότι:

$$\boldsymbol{\lambda_4 = R\sqrt{2}}.$$

Από τη βασική σχέση $\alpha_\nu^2 + \dfrac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$ με ν = 4 προκύπτει ότι

$$\alpha_4^2 = R^2 - \frac{(R\sqrt{2})^2}{4} = \frac{R^2}{2},$$

δηλαδή $$\boldsymbol{\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}}.$$



Σχήμα 8

► Κανονικό εξάγωνο

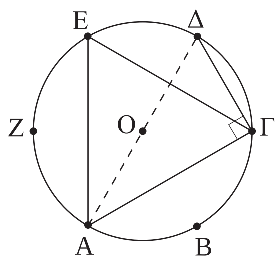
Έστω κύκλος (Ο, R) και ΑΒ η πλευρά του κανονικού εξαγώνου που θέλουμε να εγγράψουμε στον (Ο, R) (σχ.8).

Τότε $A\hat{O}B = \omega_6 = 60°$ και επειδή ΟΑ = ΟΒ (=R) το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο. Άρα ΑΒ = ΟΑ = R, δηλαδή

$$\boldsymbol{\lambda_6 = R}.$$

Έτσι για την εγγραφή κανονικού εξαγώνου σε κύκλο, παίρνουμε πάνω στον κύκλο έξι διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, $\overset{\frown}{\Delta E}$, $\overset{\frown}{EZ}$ και $\overset{\frown}{ZA}$ με αντίστοιχη χορδή R, το καθένα, οπότε το ΑΒΓΔΕΖ είναι κανονικό εξάγωνο. Επειδή $\lambda_6 = R$, από τη βασική σχέση $\alpha_6^2 + \frac{\lambda_6^2}{4} = R^2$ με αντικατάσταση του λ_6 προκύπτει ότι:

$$\alpha_6^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}, \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}}.$$



Σχήμα 9

► Ισόπλευρο τρίγωνο

Αν τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ (σχ.9) διαιρούν τον κύκλο σε έξι ίσα τόξα, τότε τα σημεία Α, Γ, Ε είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου, αφού $\overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma E} = \overset{\frown}{EA} = 120°$.

Επειδή $\overset{\frown}{A\Gamma\Delta} = 180°$, η ΑΔ είναι διάμετρος και επομένως το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο, οπότε

$$\lambda_3^2 = A\Gamma^2 = A\Delta^2 - \Delta\Gamma^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2,$$

δηλαδή $$\boldsymbol{\lambda_3 = R\sqrt{3}}.$$

Εφαρμόζοντας τώρα τη σχέση $\alpha_3^2 + \frac{\lambda_3^2}{4} = R^2$, προκύπτει ότι

$$\boldsymbol{\alpha_3 = \frac{R}{2}}.$$

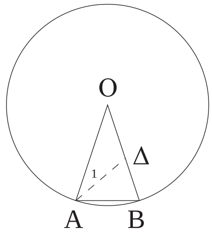
Τα στοιχεία των παραπάνω πολυγώνων συγκεντρώνονται στον επόμενο πίνακα:

	Τετράγωνο	Κανονικό εξάγωνο	Ισόπλευρο τρίγωνο
Πλευρά λ_ν	$\lambda_4 = R\sqrt{2}$	$\lambda_6 = R$	$\lambda_3 = R\sqrt{3}$
Απόστημα α_ν	$\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$	$\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\alpha_3 = \frac{R}{2}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Σε δοσμένο κύκλο να εγγραφεί κανονικό δεκάγωνο.

Λύση



Σχήμα 10

Έστω ΑΒ = λ_{10} (σχ.10) η πλευρά του κανονικού δεκαγώνου που θέλουμε να εγγράψουμε στον κύκλο (Ο, R). Η κεντρική γωνία $A\hat{O}B$ είναι $\dfrac{360°}{10} = 36°$ και καθεμία από τις γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΟΑΒ είναι $\hat{A} = \hat{B} = 72°$.

Έτσι, αν φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας $O\hat{A}B$ τα τρίγωνα ΔΟΑ και ΑΒΔ είναι ισοσκελή, αφού είναι

$$\Delta\hat{A}O = 36° = A\hat{O}B \text{ και } A\hat{\Delta}B = \hat{A}_1 + \hat{O} = 36° + 36° = 72° = \hat{B}.$$

Επομένως, $O\Delta = A\Delta = AB = \lambda_{10}$ και $B\Delta = R - \lambda_{10}$.

Με εφαρμογή του θεωρήματος της διχοτόμου στο τρίγωνο ΟΑΒ προκύπτει ότι:

$$\frac{AB}{AO} = \frac{\Delta B}{\Delta O} \Leftrightarrow \frac{\lambda_{10}}{R} = \frac{R-\lambda_{10}}{\lambda_{10}} \Leftrightarrow \lambda^2_{10} = R\,(R-\lambda_{10})$$

και επειδή $\lambda_{10} = AB > \Delta B = R - \lambda_{10}$ (αφού $A\hat{\Delta}B > B\hat{A}\Delta$), η τελευταία ισότητα εκφράζει ότι το λ_{10} είναι το μεγαλύτερο από τα τμήματα που προκύπτουν αν διαιρέσουμε την ακτίνα R σε μέσο και άκρο λόγο. Για την κατασκευή του κανονικού δεκαγώνου του εγγεγραμμένου σε κύκλο, διαιρούμε την ακτίνα του κύκλου σε μέσο και άκρο λόγο και στη συνέχεια ορίζουμε τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, ..., που έχουν το καθένα χορδή ίση με το μεγαλύτερο τμήμα στα οποία χωρίζεται η ακτίνα με τη διαίρεσή της σε μέσο και άκρο λόγο.

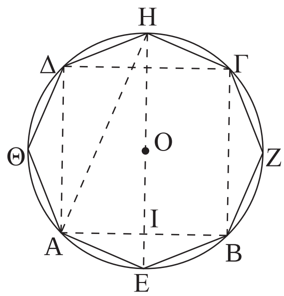
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να αποδειχθεί ότι $\lambda_{10} = \dfrac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$ *και να υπολογισθεί το* α_{10}.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Σε δοσμένο κύκλο, να εγγραφεί κανονικό οκτάγωνο και να υπολογισθούν η πλευρά του και το απόστημά του.

Λύση



Σχήμα 11

Εγγράφουμε στον κύκλο (σχ.11) το τετράγωνο ΑΒΓΔ και στη συνέχεια παίρνουμε τα μέσα Ε, Ζ, Η, Θ των τόξων που αντιστοιχούν στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ. Τότε το ΑΕΒ...Θ είναι το ζητούμενο οκτάγωνο. Αν θεωρήσουμε τη διάμετρο ΕΗ που αντιστοιχεί στο Ε, επειδή το τρίγωνο ΑΗΕ είναι ορθογώνιο και η ΑΒ κάθετη στην ΕΗ, έχουμε $AE^2 = EH \cdot EI = 2R\,(R - OI)$ και τελικά, αφού $AE = \lambda_8$ και $OI = \alpha_4$, έχουμε:

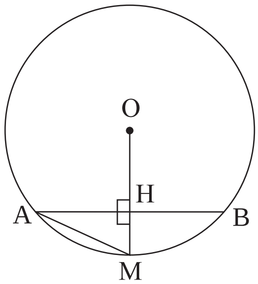
$$\lambda_8^2 = 2R(R-\alpha_4) = 2R\left(R - \frac{R\sqrt{2}}{2}\right) = R^2(2-\sqrt{2}) \text{ και επομένως } \boldsymbol{\lambda_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}}.$$

Τέλος, από τη σχέση $\alpha_8^2 + \dfrac{\lambda_8^2}{4} = R^2$ προκύπτει ότι $\boldsymbol{\alpha_8 = \dfrac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ

Ένα κανονικό ν-γωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Να εγγραφεί στον ίδιο κύκλο κανονικό 2ν-γωνο και να αποδειχθεί ότι $\lambda_{2\nu}^2 = 2R(R - \alpha_\nu)$.



Σχήμα 12

Λύση

Αν πάρουμε τα μέσα των τόξων που αντιστοιχούν στις πλευρές του κανονικού ν-γώνου, ο κύκλος διαιρείται σε 2ν ίσα τόξα. Έτσι προκύπτει το εγγεγραμμένο κανονικό πολύγωνο με 2ν πλευρές.

Έστω ΑΒ = λ_ν (σχ.12) και Μ το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$. Τότε ΑΜ = $\lambda_{2\nu}$ και ΟΜ⊥ΑΒ. Επομένως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΗΜ έχουμε

$$AM^2 = AH^2 + HM^2 \quad ή \quad \lambda_{2\nu}^2 = \left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2 + (R - \alpha_\nu)^2 = \frac{\lambda_\nu^2}{4} + R^2 + \alpha_\nu^2 - 2R\alpha_\nu$$

$$ή \quad \lambda_{2\nu}^2 = 2R^2 - 2R\alpha_\nu \ (αφού\ \frac{\lambda_\nu^2}{4} + \alpha_\nu^2 = R^2) \quad ή \quad \lambda_{2\nu}^2 = \mathbf{2R(R - \alpha_\nu)}.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Από τη σχέση $\alpha_{2\nu}^2 + \frac{\lambda_{2\nu}^2}{4} = R^2$ *προκύπτει ότι* $\alpha_{2\nu}^2 = \frac{4R^2 - \lambda_{2\nu}^2}{4} = \frac{4R^2 - (2R^2 - 2R\alpha_\nu)}{4} = \frac{2R^2 + 2R\alpha_\nu}{4}$

$$ή \quad \alpha_{2\nu}^2 = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{2}}(\mathbf{R} + \alpha_\nu).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Χαρακτηρίστε ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ) τις παρακάτω ισότητες, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.*

i) $\lambda_6^2 + \lambda_3^2 = \lambda_4^2$ ☐Σ ☐Λ

ii) $\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6 = 3R(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$ ☐Σ ☐Λ

iii) $a_3 + a_4 + a_6 = \frac{R}{2}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$ ☐Σ ☐Λ

2. *Αν Α, Β, Γ, Δ διαδοχικά σημεία κύκλου (Ο, R), ώστε ΑΒ =* $R\sqrt{2}$, *ΒΓ =* λ_{12} *και ΓΔ = R, να εξηγήσετε γιατί η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου.*

3. *Αν Α, Β, Γ διαδοχικά σημεία κύκλου (Ο, R), ώστε* $\overset{\frown}{AB} = 120°$ *και* $\overset{\frown}{B\Gamma} = 60°$, *η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι:*

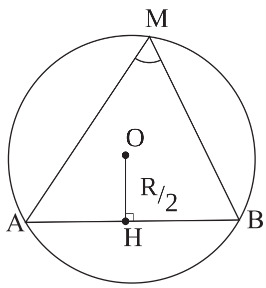
α. $(3 + \sqrt{3})R$, *β. 4R,* *γ.* $(\sqrt{2} + \sqrt{3})R$, *δ.* $(3 + \sqrt{2})R$.

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

4. *Στο παρακάτω σχήμα η γωνία Μ είναι:*

α. 30° β. 45° γ. 50° δ. 60° ε. 75°

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R το εμβαδόν ενός ισόπλευρου τριγώνου, ενός τετραγώνου και ενός κανονικού εξαγώνου, που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο (Ο, R).*

2. *Κανονικό πολύγωνο έχει ακτίνα $R = 10cm$ και απόστημα $\alpha_\nu = 5\sqrt{3}$ cm. Να βρεθεί η πλευρά του λ_ν και το εμβαδόν του E_ν.*
3. *Κανονικό πολύγωνο έχει ακτίνα $R = 8cm$ και πλευρά $\lambda_\nu = 8\sqrt{2}$ cm. Να βρεθεί το απόστημά του α_ν και το εμβαδόν του.*
4. *Σε κύκλο (Ο, R) παίρνουμε διαδοχικά τα τόξα $\widehat{AB} = 60°$, $\widehat{B\Gamma} = 90°$ και $\widehat{\Gamma\Delta} = 120°$. Να υπολογισθούν ως συνάρτηση του R οι πλευρές και το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Το άθροισμα των γωνιών ενός κανονικού πολυγώνου είναι 8 ορθές και το εμβαδόν του $6\sqrt{3}\,cm^2$. Να βρεθεί η ακτίνα του.*
2. *Σε κύκλο (Ο, R) και εκατέρωθεν του κέντρου του, θεωρούμε δύο παράλληλες χορδές του ΑΒ και ΓΔ, ώστε $AB = R$ και $\Gamma\Delta = R\sqrt{3}$. Να υπολογισθούν οι μη παράλληλες πλευρές ΑΓ και ΒΔ του τραπεζίου ΑΒΔΓ, το ύψος του και το εμβαδόν του, ως συνάρτηση του R.*
3. *Να υπολογιστούν ως συνάρτηση του R η πλευρά λ_{12} και το απόστημα α_{12} ενός κανονικού 12-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο, R).*
4. *Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R το εμβαδόν ενός κανονικού δωδεκαγώνου, χωρίς να υπολογίσετε προηγουμένως την πλευρά και το απόστημά του.*

Σύνθετα Θέματα

1. *Δίνεται κύκλος (Ο, R) και χορδή του $\Gamma\Delta = \lambda_6$. Πάνω σε τυχαία ευθεία ε που διέρχεται από το κέντρο και εκατέρωθεν του Ο παίρνουμε σημεία Α, Β, ώστε $OA = OB = \alpha_3$. Αν Μ το μέσο της ΓΔ, να αποδείξετε ότι $MA^2 + MB^2 = \lambda_4^2$.*
2. *Από το σημείο Α εκτός κύκλου (Ο, R) φέρουμε τέμνουσα ΑΒΓ, ώστε ΑΒ = ΒΓ. Αν $OA = R\sqrt{7}$ να αποδείξετε ότι $B\Gamma = \lambda_3$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΓ.*
3. *Σε κύκλο (Ο, R) θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ, ώστε $AB = \lambda_6$ και $B\Gamma = \lambda_3$. Αν Μ το μέσο της ΒΓ και Δ το σημείο που τέμνει η προέκταση της ΑΜ τον κύκλο, να υπολογίσετε, ως συνάρτηση του R, το τμήμα ΜΔ.*

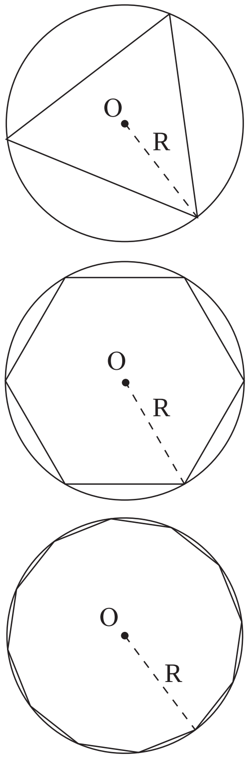
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

1. *Ερμηνεύοντας σε "γεωμετρική γλώσσα" την αριθμητική ισότητα $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$, δώστε έναν τρόπο κατασκευής της πλευράς κανονικού 15-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο.*
2. *Κάνοντας το ίδιο για την αριθμητική ισότητα $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, να δώσετε ένα δεύτερο τρόπο κατασκευής της πλευράς κανονικού 12-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο.*

Μήκος κύκλου

11.4 Προσέγγιση του μήκους του κύκλου με κανονικά πολύγωνα

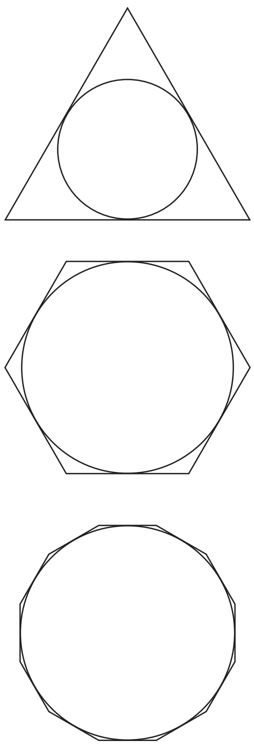
Με τη βοήθεια της περιμέτρου κανονικών πολυγώνων προσεγγίζουμε στη συνέχεια την έννοια του μήκους κύκλου. Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο (O, R) (σχ.13) και ας εγγράψουμε σε αυτόν διαδοχικά ένα ισόπλευρο τρίγωνο, ένα κανονικό 6-γωνο, ένα κανονικό 12-γωνο και γενικά ένα πολύγωνο με διπλάσιο κάθε φορά πλήθος πλευρών από το προηγούμενο.



Σχήμα 13

Καθώς ο αριθμός των πλευρών των κανονικών πολυγώνων διπλασιάζεται, από το σχήμα φαίνεται ότι: “το κανονικό πολύγωνο τείνει να ταυτισθεί με τον κύκλο”.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και αν αντί εγγεγραμμένων θεωρήσουμε κανονικά πολύγωνα περιγεγραμμένα στον κύκλο (O, R) (σχ.14) και διπλασιάζουμε διαρκώς το πλήθος των πλευρών τους. Αν θεωρήσουμε λοιπόν την ακολουθία (P_ν) των περιμέτρων των κανονικών πολυγώνων των εγγεγραμμένων στον κύκλο (O, R) και την ακολουθία (P'_ν) των περιμέτρων των περιγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων γύρω από τον ίδιο κύκλο, τότε αποδεικνύεται ότι υπάρχει μοναδικός θετικός αριθμός L μεγαλύτερος όλων των όρων της ακολουθίας (P_ν) και μικρότερος όλων των όρων της (P'_ν) με την εξής ιδιότητα: καθώς το ν διπλασιάζεται, οι όροι των ακολουθιών (P_ν) και (P'_ν) προσεγγίζουν όλο και περισσότερο τον αριθμό L. Ο αριθμός L (που είναι το κοινό όριο των ακολουθιών και ανεξάρτητος από την επιλογή κανονικών πολυγώνων) λέγεται ***μήκος του κύκλου*** (O, R).


Σχήμα 14

Ο Ιπποκράτης ο Χίος απέδειξε πρώτος ότι ο λόγος $\frac{L}{2R}$ του μήκους του κύκλου προς τη διάμετρό του είναι σταθερός, δηλαδή είναι ο ίδιος για κάθε κύκλο. Η σταθερή αυτή τιμή του λόγου $\frac{L}{2R}$ συμβολίζεται διεθνώς με το Ελληνικό γράμμα π (αρχικό της λέξης περιφέρεια) δηλαδή $\frac{L}{2R} = \pi$, οπότε προκύπτει ότι το μήκος L του κύκλου ακτίνας R δίνεται από τη σχέση

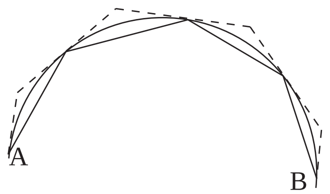
$$\mathbf{L = 2\pi R}.$$

Ο αριθμός π είναι ένας άρρητος, υπερβατικός αριθμός και μια προσέγγισή του, που στην πράξη χρησιμοποιείται, είναι $\pi \cong 3{,}14$.

Ο Αρχιμήδης χρησιμοποιούσε ως προσέγγιση του π το $\frac{22}{7}$.

11.5 Μήκος τόξου

Έστω ένα τόξο $\overset{\frown}{AB}$ ενός κύκλου (O, R) (σχ.15). Μία τεθλασμένη με άκρα τα σημεία Α, Β και τις άλλες κορυφές της σημεία του τόξου λέγεται ***εγγεγραμμένη*** στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$. Στην περίπτωση που οι πλευρές της είναι ίσες, λέγεται κανονική τεθλασμένη.



Σχήμα 15

Μια τεθλασμένη με άκρα τα Α, Β και πλευρές εφαπτόμενες του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ λέγεται ***περιγεγραμμένη*** τεθλασμένη στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$. Η έννοια της κανονικής περιγεγραμμένης ορίζεται, όπως στην περίπτωση της εγγεγραμμένης. Το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ κύκλου (O, R) ορίζεται όπως και το μήκος του κύκλου. Δηλαδή το ***μήκος του τόξου*** $\overset{\frown}{AB}$ είναι ο μοναδικός θετικός αριθμός ℓ τον οποίο προσεγγίζουν ολοένα και περισσότερο τα μήκη P_ν και P'_ν των κανονικών τεθλασμένων γραμμών των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων αντίστοιχα στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$, καθώς το ν διπλασιάζεται. Επειδή ο κύκλος είναι τόξο 360° με μήκος 2πR, το τόξο 1° θα έχει μήκος $\frac{2\pi R}{360}$ οπότε ένα τόξο μ° θα έχει μήκος

$$\boldsymbol{\ell = \frac{\pi R \mu}{180}} \qquad (1).$$

Επίσης, ένα τόξο κύκλου με μήκος R λέγεται ***ακτίνιο*** (rad). Άρα ένα τόξο α rad έχει μήκος αR, δηλαδή

$$\boldsymbol{\ell = \alpha R} \qquad (2).$$

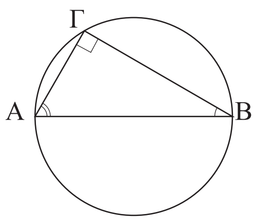
Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Σε κύκλο (O, R) θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και τις χορδές ΑΓ και ΒΓ, ώστε ΑΓ = 2cm και ΒΓ = $2\sqrt{3}$ cm. Να βρεθεί το μήκος του κύκλου και τα μήκη των τόξων $\overset{\frown}{A\Gamma}$ και $\overset{\frown}{\Gamma B}$, που είναι μικρότερα του ημικυκλίου.

Λύση

Επειδή η ΑΒ είναι διάμετρος, η γωνία $A\hat{\Gamma}B$ θα είναι ορθή, οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΑΒ έχουμε $AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2$ ή $(2R)^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2$ ή $4R^2 = 16$, δηλαδή R = 2. Το μήκος L του κύκλου θα είναι L = 2πR = 4π cm. Επειδή $A\Gamma = 2 = \frac{AB}{2}$, θα είναι $\hat{B} = 30°$, οπότε $\overset{\frown}{A\Gamma} = 60°$ και επομένως το μήκος του θα είναι:



Σχήμα 16

$$\ell_1 = \frac{\pi R \mu}{180} = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 60}{180} = \frac{2}{3}\pi \text{ cm}.$$

Τέλος, αφού $\hat{A} = 60°$, θα είναι $\overset{\frown}{B\Gamma} = 120°$, και το μήκος του, θα είναι

$$\ell_2 = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 120}{180} = \frac{4}{3}\pi \text{ cm}.$$

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Αντιστοιχίστε κάθε μέγεθος της στήλης Α με την τιμή του στη στήλη Β.*

Α	*Β*
	αR
Μήκος κύκλου ακτίνας R	$2\pi R$
Μήκος τόξου μ° (*σε κύκλο ακτίνας R*)	$\dfrac{\pi R\mu}{360}$
	$2\alpha R$
Μήκος τόξου α rad (*σε κύκλο ακτίνας R*)	$\dfrac{\pi R\mu}{180}$

2. *Το μήκος L τόξου, κύκλου ακτίνας R με χορδή λ_6 είναι:*

α. $6R$ *β.* πR *γ.* $\dfrac{1}{3}\pi R$ *δ.* $2\pi R$ *ε.* $\dfrac{1}{3}R$

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Πάνω σε ευθεία ε θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Αν L_1, L_2, L_3, και L είναι τα μήκη των κύκλων με διαμέτρους ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΑΔ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι $L_1 + L_2 + L_3 = L$.*

2. *Να βρείτε το μήκος του εγγεγραμμένου κύκλου σε κανονικό εξάγωνο πλευράς 10cm.*

3. *Να βρεθεί το μήκος του τόξου που αντιστοιχεί στην πλευρά κανονικού 10-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας 5cm.*

4. *Όταν ένα ποδήλατο διανύει μια απόσταση, ο ένας τροχός του που έχει ακτίνα R κάνει ν στροφές, ενώ ο άλλος, που έχει ακτίνα ρ κάνει 2ν στροφές. Να αποδείξετε ότι $R = 2\rho$.*

5. *Δίνεται κύκλος (Ο, R) και τα διαδοχικά του σημεία Α, Β, Γ, ώστε να είναι $AB = R\sqrt{2}$ και $B\Gamma = R\sqrt{3}$. Να βρεθούν τα μήκη των τόξων $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και $\overset{\frown}{\Gamma A}$, ως συνάρτηση του R.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Με διάμετρο την ακτίνα ΟΑ ενός κύκλου (Ο, R) γράφουμε κύκλο (Κ) και από το Ο φέρουμε ημιευθεία που τέμνει τον κύκλο (Ο) στο Γ και τον κύκλο (Κ) στο Δ. Να αποδείξετε ότι τα τόξα $\overset{\frown}{A\Gamma}$ και $\overset{\frown}{A\Delta}$ έχουν ίσα μήκη.*

2. *Να αποδείξετε ότι το μήκος του κύκλου, που εφάπτεται σε δύο ομόκεντρους κύκλους, ισούται με το ημιάθροισμα ή την ημιδιαφορά των μηκών αυτών, όταν αντίστοιχα ο κύκλος αυτός περιέχει στο εσωτερικό του ή όχι το μικρότερο κύκλο.*

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με α = 13cm, β = 14cm και γ = 15cm. Να βρείτε το μήκος*

i) του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου,

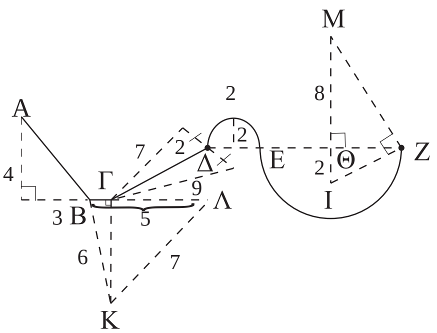
ii) του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

Σύνθετα Θέματα

1. *Δίνεται ημικύκλιο (Ο, R) διαμέτρου ΑΒ. Με διαμέτρους τις ΑΟ και ΟΒ γράφουμε στο εσωτερικό του πρώτου ημικύκλια. Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου, ο οποίος εφάπτεται των τριών αυτών ημικυκλίων, ως συνάρτηση του R.*

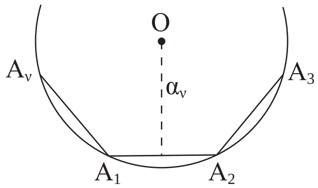
2. *Δίνεται τεταρτοκύκλιο Ο $\overset{\frown}{AB}$. Με διάμετρο την ΟΑ γράφουμε στο εσωτερικό του τεταρτοκυκλίου, ημικύκλιο και στη συνέχεια γράφουμε κύκλο (Κ) που εφάπτεται στο ημικύκλιο, στην πλευρά ΟΒ και στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$. Να αποδείξετε ότι το μήκος του κύκλου (Κ) ισούται με το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{AB}$.*

3. *Να βρείτε το μήκος της γραμμής ΑΒΓΔΕΖ του παρακάτω σχήματος.*



Εμβαδόν κυκλικού δίσκου

11.6 Προσέγγιση του εμβαδού κύκλου με κανονικά πολύγωνα



Σχήμα 17

Έστω ένας κύκλος (O, R). O κύκλος μαζί με τα εσωτερικά του σημεία αποτελούν τον ***κυκλικό δίσκο*** με κέντρο O και ακτίνα R. Στην παράγραφο 11.4 είδαμε ότι τα εγγεγραμμένα ή τα περιγεγραμμένα σε έναν κύκλο κανονικά πολύγωνα τείνουν να ταυτισθούν με τον κύκλο, καθώς το πλήθος των πλευρών τους διπλασιάζεται. O μοναδικός θετικός αριθμός E προς τον οποίο πλησιάζουν ολοένα και περισσότερο, τα εμβαδά των εγγεγραμμένων και των περιγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων, λέγεται ***εμβαδόν του κυκλικού δίσκου*** ή απλούστερα ***εμβαδόν του κύκλου***. Επειδή ο E προσεγγίζεται από το εμβαδόν εγγεγραμμένων ή περιγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων, ας θεωρήσουμε ένα κανονικό ν-γωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο (O, R). Τότε το εμβαδόν E_ν δίνεται από τον τύπο

$$E_\nu = \frac{1}{2} P_\nu \alpha_\nu \qquad (1).$$

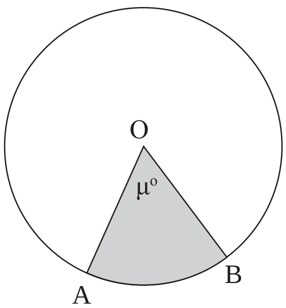
Από το σχ.17 φαίνεται ότι καθώς το ν διπλασιάζεται το α_ν προσεγγίζει την ακτίνα R και επειδή το P_ν προσεγγίζει το μήκος L του κύκλου, από την (1) προκύπτει ότι το E_ν προσεγγίζει το $\frac{1}{2} L \cdot R = \frac{1}{2} 2\pi R \cdot R = \pi R^2$. Έτσι έχουμε το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το εμβαδόν E ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας R δίνεται από τη σχέση

$$E = \pi R^2.$$

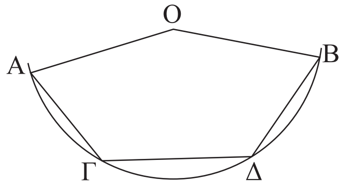
11.7 Εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος



Σχήμα 18

► **Κυκλικός Τομέας**

Θεωρούμε έναν κύκλο (O, R) και μία επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ (σχ.18). Το σύνολο των κοινών σημείων της επίκεντρης γωνίας $A\hat{O}B$ και του κυκλικού δίσκου (O, R) λέγεται ***κυκλικός τομέας*** κέντρου O και ακτίνας R. O κυκλικός αυτός τομέας συμβολίζεται $O\overset{\frown}{AB}$. Αν η επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ είναι μ°, λέμε ότι και ο κυκλικός τομέας $O\overset{\frown}{AB}$ είναι μ°. Το εμβαδόν



Σχήμα 19

του κυκλικού τομέα ορίζεται ανάλογα με το εμβαδόν του κύκλου και συμβολίζεται $(\mathrm{O}\widehat{\mathrm{AB}})$.

Επειδή ο κυκλικός δίσκος είναι κυκλικός τομέας 360° με εμβαδόν πR^2, ο κυκλικός τομέας 1° έχει εμβαδόν $\frac{\pi R^2}{360}$ και άρα ένας τομέας μ° θα έχει εμβαδόν $\frac{\pi R^2 \mu}{360}$. Ώστε το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα $\mathrm{O}\widehat{\mathrm{AB}}$ μ° και ακτίνας R δίνεται από την ισότητα:

$$\mathbf{(O\widehat{AB}) = \frac{\pi R^2 \mu}{360}}.$$

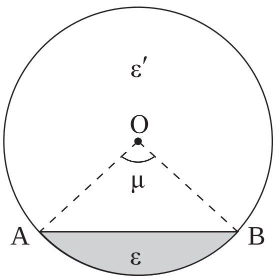
Επίσης, επειδή ο κυκλικός δίσκος (O, R) είναι τομέας 2π rad με εμβαδόν πR^2, ένας τομέας α rad θα έχει εμβαδόν

$$\frac{\pi R^2}{2\pi} \cdot \alpha = \frac{1}{2} \alpha R^2.$$

Επομένως, το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα $\mathrm{O}\widehat{\mathrm{AB}}$ α rad και ακτίνας R δίνεται από την ισότητα

$$\mathbf{(O\widehat{AB}) = \frac{1}{2} \alpha R^2}$$

► Κυκλικό τμήμα



Σχήμα 20

Έστω ένας κύκλος (O, R) και μια χορδή του AB (σχ.20). Η AB χωρίζει τον κυκλικό δίσκο σε δύο μέρη που βρίσκονται εκατέρωθεν αυτής. Καθένα από αυτά τα μέρη λέγεται ***κυκλικό τμήμα***. Το εμβαδόν ε του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην κυρτή γωνία $\mathrm{A\hat{O}B}$ υπολογίζεται με τη βοήθεια της ισότητας

$$\mathbf{\varepsilon = (O\widehat{AB}) - (OAB),}$$

δηλαδή αφαιρώντας από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $\mathrm{O}\widehat{\mathrm{AB}}$ το εμβαδόν του τριγώνου OAB.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

ΜΗΝΙΣΚΟΙ ΤΟΥ ΙΠΠΟΚΡΑΤΗ

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$). Με διαμέτρους ΒΓ, ΑΒ και ΑΓ γράφουμε ημικύκλια στο ημιεπίπεδο (ΒΓ, Α). Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των εμβαδών των σχηματιζόμενων μηνίσκων είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(***Μηνίσκος*** είναι το σχήμα που «περικλείεται» από δύο τόξα που έχουν κοινή χορδή και βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της).

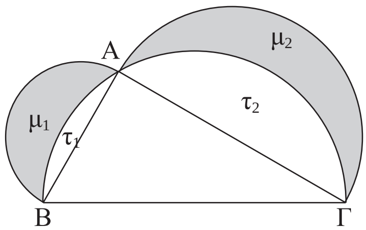
Απόδειξη

Συμβολίζουμε με μ_1, μ_2 τα εμβαδά των σχηματιζόμενων μηνίσκων, τ_1, τ_2 τα εμβαδά των κυκλικών τμημάτων με χορδές ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, στο ημικύκλιο διαμέτρου ΒΓ. Έχουμε

$$\mu_1 = (\mu_1 + \tau_1) - \tau_1 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - \tau_1 = \frac{1}{8}\pi AB^2 - \tau_1 \text{ και}$$

$$\mu_2 = (\mu_2 + \tau_2) - \tau_2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{A\Gamma}{2}\right)^2 - \tau_2 = \frac{1}{8}\pi A\Gamma^2 - \tau_2,$$

από τις οποίες, χρησιμοποιώντας και τη σχέση $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$ βρίσκουμε



Σχήμα 21

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{1}{8}\pi(AB^2 + A\Gamma^2) - (\tau_1 + \tau_2) =$$

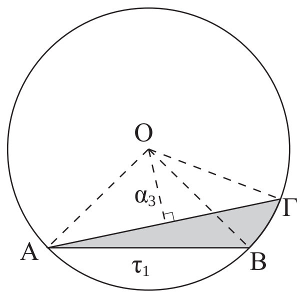
$$= \frac{1}{8}\pi(B\Gamma)^2 - (\tau_1 + \tau_2) = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{B\Gamma}{2}\right)^2 - (\tau_1 + \tau_2) = (AB\Gamma).$$

ΣΧΟΛΙΟ

Επειδή $\mu_1 + \mu_2 = (AB\Gamma)$ και κάθε τρίγωνο τετραγωνίζεται, προκύπτει ότι το άθροισμα $\mu_1 + \mu_2$ τετραγωνίζεται. Οι μηνίσκοι αυτοί αποτελούν το πρώτο μη ευθύγραμμο σχήμα, το οποίο τετραγωνίσθηκε από τον Ιπποκράτη τον Χίο (γεννήθηκε περί το 470 π.Χ.). Ο Ιπποκράτης επίσης πέτυχε τον τετραγωνισμό και άλλων δύο περιπτώσεων μηνίσκων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Δίνεται κύκλος (Ο, R) και δυο χορδές του $AB = R\sqrt{2}$ και $A\Gamma = R\sqrt{3}$ (σχ.22). Να υπολογισθεί η περίμετρος και το εμβαδόν Ε του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ, ως συνάρτηση του R.



Σχήμα 22

Λύση

- Επειδή $AB = R\sqrt{2}$ και $A\Gamma = R\sqrt{3}$, έχουμε αντίστοιχα $AB = \lambda_4$ και $A\Gamma = \lambda_3$, οπότε $A\hat{O}B = 90°$ και $A\hat{O}\Gamma = 120°$ και επομένως $B\hat{O}\Gamma = 30°$. Έτσι το μήκος ℓ του τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma}$ είναι $\ell = \frac{\pi R \cdot 30}{180} = \frac{\pi R}{6}$. Άρα η περίμετρος S του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$S = R\sqrt{2} + R\sqrt{3} + \frac{\pi R}{6} = R(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}).$$

- Για το εμβαδόν Ε έχουμε: $E = (O\overset{\frown}{A\Gamma}) - (OA\Gamma) - \tau_1$ (1), όπου τ_1 το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος με χορδή ΑΒ. Έχουμε:

$$(O\overset{\frown}{A\Gamma}) = \frac{\pi R^2 120}{360} = \frac{\pi R^2}{3}, \quad (OA\Gamma) = \frac{1}{2}\lambda_3\alpha_3 = \frac{1}{2}R\sqrt{3}\frac{R}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{και}$$

$$\tau_1 = (O\overset{\frown}{AB}) - (OAB) = \frac{\pi R^2 90}{360} - \frac{1}{2}\lambda_4\alpha_4 = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{1}{2}R\sqrt{2}\frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2},$$

οπότε αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε ότι $E = \frac{R^2}{12}(\pi + 6 - 3\sqrt{3})$.

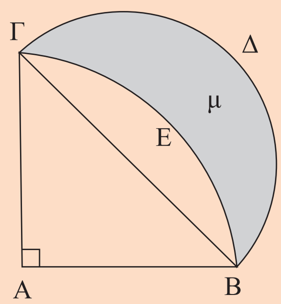
11.8 Τετραγωνισμός κύκλου

Τετραγωνισμός κύκλου λέγεται η κατασκευή, με κανόνα και διαβήτη, ενός τετραγώνου ισοδύναμου με το δοσμένο κύκλο. Έστω R η ακτίνα ενός κύκλου και Ε το εμβαδόν του. Επειδή $E = \frac{1}{2} L \cdot R$, όπου L το μήκος του κύκλου, προκύπτει ότι ο κύκλος είναι ισοδύναμος με τρίγωνο, που έχει βάση L και ύψος R. Κάθε τρίγωνο όμως είναι ισοδύναμο με τετράγωνο. Επομένως ο τετραγωνισμός του κύκλου ανάγεται στην κατασκευή του L, αφού το R είναι ένα δοσμένο τμήμα. Επειδή όμως $L = 2\pi R$, η κατασκευή του ανάγεται στην κατασκευή τμήματος μήκους π (αφού για $R = \frac{1}{2}$ είναι $L = \pi$). Για να είναι η κατασκευή αυτή δυνατή, όπως έχει αποδειχθεί, θα έπρεπε ο π να είναι ρίζα πολυωνυμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές, δηλαδή αλγεβρικός αριθμός, βαθμού 2^{ν}, όπου ν φυσικός. Όμως, ο Γερμανός Μαθηματικός Lindemann, το 1882, (ιστορικό σημείωμα, σελ. 252) απέδειξε ότι ο π δεν είναι αλγεβρικός αριθμός αλλά υπερβατικός και επομένως δεν κατασκευάζεται γεωμετρικά. Αποδείχθηκε έτσι το αδύνατο της γεωμετρικής λύσης του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στο παρακάτω σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, το $\overset{\frown}{B\Delta\Gamma}$ ημικύκλιο διαμέτρου ΒΓ και το $\overset{\frown}{\Gamma E B}$ τόξο του κύκλου (Α, ΑΒ). Να αποδείξετε ότι ο σχηματιζόμενος μηνίσκος τετραγωνίζεται.

(Απάντηση: (μ) = (ΑΒΓ))



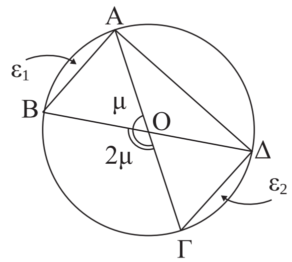
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Αντιστοιχίστε κάθε μέγεθος της στήλης Α με την τιμή του στη στήλη Β.*

Α	Β
	$2\pi R^2$
Εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας R	$\pi R^2 \dfrac{\mu}{180}$
Εμβαδόν κυκλικού τομέα μ° (σε κύκλο ακτίνας R)	πR^2
	$\dfrac{1}{2}\alpha R^2$
Εμβαδόν κυκλικού τομέα α rad (σε κύκλο ακτίνας R)	$\pi R^2 \dfrac{\mu}{360}$

2. *Με βάση το παρακάτω σχήμα χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω ισότητες και αιτιολογήστε την απάντησή σας.*



i) $(O\widehat{AB}) = (O\widehat{\Gamma\Delta})$ ☐Σ ☐Λ

ii) $(O\widehat{B\Gamma}) = (O\widehat{\Delta A})$ ☐Σ ☐Λ

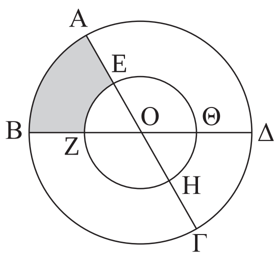
iii) $(O\widehat{B\Gamma}) = 2(O\widehat{AB})$ ☐Σ ☐Λ

iv) $(OA\Delta) = 2(OAB)$ ☐Σ ☐Λ

v) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ☐Σ ☐Λ

vi) $AB = \lambda_6$ ☐Σ ☐Λ

3. *Στο παρακάτω σχήμα υπάρχουν δύο ομόκεντροι κύκλοι με ακτίνες ΟΕ = R και ΟΑ = 2R. Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω ισότητες και αιτιολογήστε την απάντησή σας.*



i) $\ell_{\widehat{AB}} = \ell_{\widehat{\Gamma\Delta}}$ ☐Σ ☐Λ

ii) $\ell_{\widehat{AB}} = \ell_{\widehat{EZ}}$ ☐Σ ☐Λ

iii) $\ell_{\widehat{AB}} = 2\ell_{\widehat{\Gamma\Delta}}$ ☐Σ ☐Λ

iv) (ΑΒΖΕ) = (ΓΔΘΗ) ☐Σ ☐Λ

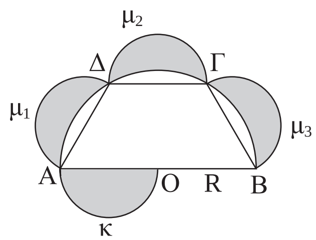
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Δίνεται κύκλος (Ο, R) και ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο σε αυτόν. Να βρεθεί το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.*

2. *Δίνεται κύκλος (Κ) και τόξο του $\widehat{AB} = 60^o$. Αν το τόξο $\widehat{AB}$ έχει μήκος 4π cm, να βρείτε το εμβαδόν του κύκλου (Κ).*

3. *Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Γράφουμε τα τόξα των κύκλων (Α, α), (Β, α) και (Γ, α) που περιέχονται στις γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α την περίμετρο και το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.*

4. *Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιαστεί ένα ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ = 2R και εξωτερικά του τα ίσα ημικύκλια με διαμέτρους ΟΑ, ΑΔ, ΔΓ και ΓΒ. Αν (μ_1),(μ_2), (μ_3) είναι τα εμβαδά των τριών σχηματιζόμενων μηνίσκων και (κ) το εμβαδόν του ημικυκλίου, να αποδείξετε ότι $(\mu_1) + (\mu_2) + (\mu_3) + (\kappa) = (AB\Gamma\Delta)$.*

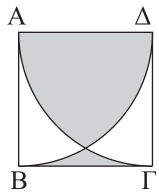


5. *Τρεις ίσοι κύκλοι ακτίνας R εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο στα σημεία Α, Β και Γ. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ, ως συνάρτηση του R.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνεται κύκλος (Ο, R) και ακτίνα του ΟΑ. Στην προέκταση της ΟΑ προς το Α παίρνουμε σημείο Β, ώστε ΟΑ = ΑΒ. Αν ΒΓ είναι το εφαπτόμενο τμήμα που άγεται από το Β προς τον κύκλο, να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.*

2. *Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και τα τόξα $\overset{\frown}{ΒΔ}$ και $\overset{\frown}{ΑΓ}$ των κύκλων (Α, α) και (Δ, α) αντίστοιχα. Να βρεθεί το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του τετραγώνου.*



3. *Δυο ίσοι κύκλοι ακτίνας R έχουν διάκεντρο ίση με $R\sqrt{2}$. Να βρεθεί το εμβαδόν του κοινού τους μέρους.*

4. *Δίνεται ένα ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και στο εσωτερικό του τα ημικύκλια διαμέτρων ΑΓ και ΓΒ, όπου Γ σημείο της διαμέτρου ΑΒ. Η κάθετος της ΑΒ στο Γ τέμνει το αρχικό ημικύκλιο στο Δ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων (**άρβηλος του Αρχιμήδη**) είναι ίσο με το εμβαδόν του κύκλου διαμέτρου ΓΔ.*

5. *Δίνεται κύκλος (Ο, R) και τόξο του $\overset{\frown}{ΑΒ} = 60^o$. Να βρεθεί το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου στον κυκλικό τομέα $Ο\overset{\frown}{ΑΒ}$.*

Σύνθετα Θέματα

1. *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Οι πλευρές ΑΒ και ΒΓ είναι αντίστοιχα πλευρές κανονικού εξαγώνου και ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο. Να υπολογισθούν:*

i) το μήκος της πλευράς ΑΓ,

ii) ο λόγος των εμβαδών του τριγώνου ΑΒΓ και του κύκλου (Ο, R)

iii) το εμβαδόν των τριών κυκλικών τμημάτων που ορίζονται από τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ και περιέχονται στις αντίστοιχες κυρτές γωνίες.

2. *Δίνεται κύκλος (Ο, R). Με κέντρο τυχαίο σημείο του και ακτίνα την πλευρά του τετραγώνου του εγγεγραμμένου σε αυτόν, γράφουμε κύκλο. Να βρεθεί το εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο κυκλικών δίσκων.*

3. *Δύο ίσοι κύκλοι ακτίνας R έχουν διάκεντρο ίση με $R\sqrt{3}$. Να βρείτε, ως συνάρτηση του R, το εμβαδόν του κοινού τους μέρους.*

4. *Δίνεται κύκλος (Ο, R) και μια διάμετρός του ΑΒ. Με κέντρο το μέσο Γ του ενός ημικυκλίου και ακτίνα ΓΑ γράφουμε κύκλο, ο οποίος ορίζει με το άλλο ημικύκλιο τον μηνίσκο, έστω μ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του μ ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.*

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R) και έστω Κ, Λ, Μ, Ν, Ρ, Σ τα μέσα των πλευρών του.*

i) Να αποδείξετε ότι το ΚΛΜΝΡΣ είναι κανονικό εξάγωνο με κέντρο το Ο.

ii) Να αποδείξετε ότι

$$(ΚΛΜΝΡΣ) = \frac{3}{4}(ΑΒΓΔΕΖ).$$

iii) Να βρεθεί, ως συνάρτηση του R, το μήκος του εγγεγραμμένου κύκλου στο ΚΛΜΝΡΣ.

2. *Έστω κύκλος (Ο, R) και μία χορδή του $ΑΒ = λ_ν$. Αν ο κύκλος (Ο, $α_4$) τέμνει τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ στα Α′ και Β′ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι*

i) το εμβαδόν ε του μικτόγραμμου τετραπλεύρου ΑΒΒ′Α′ (με δύο πλευρές τόξα) ισούται με το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $Ο\overset{\frown}{Α'Β'}$ και

ii) $2νε = πR^2$.

3. *Με βάσεις τις πλευρές ενός ν-γώνου και στο εξωτερικό του κατασκευάζουμε ν ορθογώνια με το ίδιο ύψος υ. Συνδέουμε τις εξωτερικές πλευρές τους με τόξα κύκλων που γράφουμε με κέντρα τις κορυφές και ακτίνα υ. Να βρεθεί το άθροισμα των εμβαδών των ν κυκλικών τομέων που σχηματίζονται.*

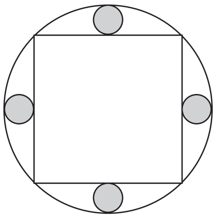
4. *Στο εσωτερικό τετραγώνου γράφουμε τέσσερις ίσους κύκλους που εφάπτονται μεταξύ τους εξωτερικά και εφάπτονται των πλευρών του τετραγώνου. Να υπολογισθεί, ως συνάρτηση της πλευράς α του τετραγώνου το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τους τέσσερις κύκλους.*

5. *Στο κυκλικό οικόπεδο ακτίνας $R = 40m$, του παρακάτω σχήματος, το εγγεγραμμένο τετράγωνο έχει το μέγιστο δυνατό εμβαδόν και πρόκειται να πλακοστρωθεί. Στα τέσσερα κυκλικά τμήματα θα τοποθετηθούν ισάριθμες κυκλικές γλάστρες με το μέγιστο δυνατό εμβαδόν επίσης, ενώ το υπόλοιπο θα φυτευθεί με γκαζόν. Να βρεθεί το εμβαδόν:*

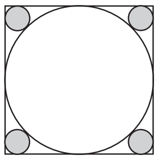
i) του μέρους που θα πλακοστρωθεί,

ii) του μέρους που θα καλύπτουν οι γλάστρες,

iii) του μέρους που θα φυτευθεί με γκαζόν.



6. *Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο έχει πλευρά $α = 50$ m.*



Να βρεθεί: i) το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου, ii) το εμβαδόν καθενός από τους τέσσερις κύκλους που εφάπτονται εσωτερικά του τετραγώνου και εξωτερικά του εγγεγραμμένου κύκλου.

7. *Να βρεθεί η μικρότερη γωνία που σχηματίζουν οι προεκτάσεις των πλευρών ενός κανονικού δεκαπενταγώνου.*

8. *Θεωρούμε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και σημείο της Γ. Μεταβλητή ημιευθεία Γx κάθετη στην ΑΒ τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο Σ. Πάνω στη Γx παίρνουμε σημείο Μ, ώστε να ισχύει $ΑΜ^2 = 2ΑΣ^2$ και φέρουμε ευθεία κάθετη στην ΑΜ στο Μ, που τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο Δ. Τότε*

i) να αποδείξετε ότι $ΑΔ = 2ΑΒ$,

ii) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου Μ, καθώς η ημιευθεία Γx μεταβάλλεται,

iii) να αποδείξετε ότι το μήκος της γραμμής που γράφει το Μ ισούται με το μήκος του ημικυκλίου διαμέτρου ΑΒ.

9. *Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου $ΒΟΓ = 2R$, τυχαίο σημείο του Δ και το μέσο Α του τόξου $\overset{\frown}{ΒΔ}$.*

i) Αν $ε_1$, $ε_2$ είναι τα εμβαδά των κυκλικών τμημάτων των χορδών ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $ε_1 - ε_2 = (Ο\overset{\frown}{ΓΔ})$, όπου $(Ο\overset{\frown}{ΓΔ})$ το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $(Ο\overset{\frown}{ΓΔ})$.

ii) Να αποδείξετε ότι ο μέγιστος κύκλος που εγγράφεται στο κυκλικό τμήμα χορδής ΑΓ (δηλαδή βρίσκεται στο εσωτερικό του κυκλικού τμήματος και εφάπτεται στο τόξο και τη χορδή), είναι αυτός που εφάπτεται στο μέσο της χορδής ΑΓ.

iii) Έστω $Ε_1, Ε_2$ τα εμβαδά των μέγιστων κύκλων των εγγεγραμμένων στα κυκλικά τμήματα χορδών ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα,

α) Να αποδείξετε ότι $Ε_1 + Ε_2 \leq \dfrac{πR^2}{4}$.

β) Αν $\overset{\frown}{ΒΔ} = 120°$, να αποδείξετε ότι

$$Ε_1 + (7+4\sqrt{3})Ε_2 = \frac{πR^2}{8}.$$

10. *Δύο ίσοι κύκλοι με κέντρα Ο και Ο′ αντίστοιχα εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Φέρουμε δύο ακτίνες ΟΒ και Ο′Β′ παράλληλες μεταξύ τους και στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ΟΟ′. Κατασκευάζουμε εξωτερικά από τους δύο κύκλους το ημικύκλιο διαμέτρου ΒΒ′. Να αποδείξετε ότι:*

i) $(Ο\overset{\frown}{ΑΒ}) = (Ο\overset{\frown}{Β′Α′})$ όπου Α′ το αντιδιαμετρικό του Α στον Ο′,

ii) $(Ο\overset{\frown}{ΑΒ}) + (Ο′\overset{\frown}{ΑΒ′}) = (Ο′\overset{\frown}{ΑΑ′})$,

iii) $(Ο\overset{\frown}{ΑΒ}) + (Ο′\overset{\frown}{ΑΒ′}) = (Κ\overset{\frown}{ΒΒ′})$, όπου Κ το μέσο του ΒΒ′,

iv) το εμβαδόν ε του καμπυλόγραμμου σχήματος με πλευρές τα τόξα $\overset{\frown}{ΑΒ}$, $\overset{\frown}{ΒΒ′}$ και $\overset{\frown}{ΑΒ′}$ είναι ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΟΒΒ′Ο′. Αν τα Β, Β′ κινούνται πάνω στους κύκλους, ώστε οι ακτίνες ΟΒ και Ο′Β′ να διατηρούν τις αρχικές ιδιότητες, σε ποια θέση των Β, Β′ το εμβαδόν ε γίνεται μέγιστο;

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Τα μη επιλύσιμα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας

Τον 5ο αι. διατυπώθηκαν στην αρχαία Ελλάδα τρία προβλήματα που έμελλε να γίνουν πασίγνωστα. Πρόκειται για το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου, της τριχοτόμησης γωνίας και του τετραγωνισμού του κύκλου. Η ιστορία των προβλημάτων αυτών είναι πολύ μεγάλη. Αρκεί να σκεφτεί κανείς ότι τα δύο πρώτα λύθηκαν στις αρχές μόνον του περασμένου αιώνα, ενώ το τρίτο στα τέλη του. Αποδείχθηκε ότι και τα τρία προβλήματα δεν είναι επιλύσιμα με τα μέσα που ορίζονται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, δηλαδή με κανόνα και διαβήτη. Η ιστορική σημασία αυτών των προβλημάτων συνίσταται στο ότι ήταν οι πρώτες αποδείξεις μη επιλυσιμότητας στα μαθηματικά. Αποδείχθηκε ότι ορισμένες κατασκευές ήταν αδύνατον να πραγματοποιηθούν με ορισμένα μέσα (τον κανόνα και το διαβήτη).

Ο διπλασιασμός του κύβου. Αν συμβολίσουμε με α την ακμή ενός κύβου, τότε το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου συνίσταται στο να βρεθεί η ακμή κύβου που να έχει όγκο διπλάσιο από το δεδομένο κύβο, δηλαδή ζητείται να βρεθεί το μέγεθος x, για το οποίο να ισχύει $x^3 = 2α^3$. Η προέλευση του προβλήματος δεν είναι ιστορικά εξακριβωμένη. Σύμφωνα με έναν θρύλο που αναφέρει ο Πλούταρχος, το πρόβλημα ετέθη σε ένα χρησμό που απαιτούσε από τους κατοίκους της Δήλου να διπλασιάσουν το βωμό του Απόλλωνα προκειμένου να σταματήσει η επιδημία που είχε εξαπλωθεί στο νησί. Γι' αυτό ονομάζεται και *Δήλιο πρόβλημα*. Ο πρώτος που το μελέτησε ήταν ο Ιπποκράτης ο Χίος, που το ανήγαγε στην εύρεση δύο μέσων αναλόγων σε συνεχή αναλογία μεταξύ δύο δοσμένων μεγεθών, δηλαδή στην εύρεση δύο μεγεθών x, y, τέτοιων, ώστε $\frac{α}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2α}$.
Αργότερα, ο Αρχύτας ο Ταραντίνος έδειξε ότι το μέγεθος x μπορεί να βρεθεί ως τομή, ενός κώνου, ενός κυλίνδρου και της επιφάνειας που λαμβάνεται από την περιστροφή μιας περιφέρειας περί την εφαπτομένη της, δηλ. της επιφάνειας «κρίκου» (torus) μηδενικού ανοίγματος. Η λύση του Αρχύτα αποδείκνυε την ύπαρξη δύο μέσων αναλόγων μεταξύ δύο οιωνδήποτε μεγεθών, ωστόσο η μέθοδός του ξέφευγε από τα καθιερωμένα μέσα του κανόνα και του διαβήτη.

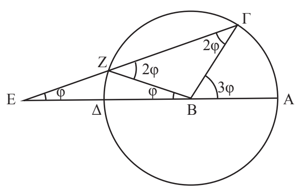
Οι μεταγενέστερες αναζητήσεις στράφηκαν στην εύρεση εναλλακτικών τρόπων κατασκευής των μέσων αναλόγων των δύο δεδομένων μεγεθών που απαιτούνται από την αναλογία του Ιπποκράτη:

$$αy = x^2 \text{ και } xy = α(2α) \text{ ή } y^2 = (2α)x$$

Η κατασκευή των συντεταγμένων του σημείου τομής των δύο αυτών γεωμετρικών τόπων δίνει τη λύση του προβλήματος. Όμως η μελέτη τέτοιων τόπων δεν ήταν απλό πράγμα στην αρχαιότητα. Πρώτα απ' όλα έπρεπε να αποδειχθεί ότι οι τόποι αυτοί ήταν συνεχείς καμπύλες, προκειμένου να μιλήσουμε για σημείο τομής. Μόνον ο Μέναιχμος (δεύτερο ήμισυ του 4ου αι.) μπόρεσε να παραστήσει τους τόπους αυτούς ως επίπεδες τομές κώνων εκ περιστροφής. Είναι πιθανό ο στερεομετρικός αυτός προσδιορισμός του σημείου τομής, όπως και στην περίπτωση του Αρχύτα, να έπαιζε ρόλο απόδειξης της ύπαρξης και της συνέχειας των υπό μελέτη γεωμετρικών τόπων. Οι αρχαίοι Έλληνες αντιμετώπισαν το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου από διάφορες σκοπιές. Ο Ευτόκιος αναφέρει περί τις 12 προτεινόμενες λύσεις. Από τις λύσεις αυτές ορισμένες είναι μηχανικές, όπως π.χ. του Ερατοσθένη (3ος αι. π.Χ.) που πραγματοποιείται με τη βοήθεια ενός μηχανικού οργάνου, του «μεσολάβου», ή η λύση που αποδίδεται στον Πλάτωνα. Άλλες πάλι γίνονται με την εισαγωγή νέων καμπυλών, όπως οι λύσεις του Διοκλή και του Νικομήδη, που πραγματοποιούνται με τη βοήθεια των φερώνυμων καμπυλών. Πάντως μέχρι την εποχή του Ευκλείδη (τέλη του 4ου αι.) πρέπει να είχε εδραιωθεί η πεποίθηση ότι το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου δεν είναι επιλύσιμο με κανόνα και διαβήτη. Η πρώτη προσπάθεια να αποδειχθεί η μη επιλυσιμότητα της ειδικής περίπτωσης κυβικής εξίσωσης $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$, με τη βοήθεια των τετραγωνικών αρρήτων του Βιβλίου X των «Στοιχείων» του Ευκλείδη, έγινε από το Λεονάρδο της Πίζας. Μετά από αυτόν πέρασαν τετρακόσια περίπου χρόνια μέχρι που ο Ντεκάρτ να διατυπώσει το γενικό κριτήριο επιλυσιμότητας μιας κυβικής εξίσωσης: οι ρίζες μιας κυβικής εξίσωσης με ρητούς συντελεστές μπορούν να κατασκευασθούν με κανόνα και διαβήτη, όταν η εξίσωση είναι αναγώγιμη, δηλαδή έχει τουλάχιστον μία ρητή ρίζα (ο Ντεκάρτ υπέθετε ότι όλες οι ρίζες είναι πραγματικές). Το 1637 διατύπωσε την υπόθεση ότι η κατασκευή τμήματος ίσου με $\sqrt[3]{2}$, δηλαδή της λύσης της εξίσωσης $x^3 = 2α^3$ για $α = 1$, δεν είναι δυνατή με κανόνα και διαβήτη. Όμως τη μη επιλυσιμότητα του προβλήματος του διπλασιασμού του κύβου με κανόνα και διαβήτη απέδειξε το 1837 ο Π. Βάντσελ (Pierre Laurent Wantzell, 1814-1848).

Η τριχοτόμηση γωνίας. Στο πρόβλημα αυτό ζητείται να διαιρεθεί μια γωνία σε τρία ίσα μέρη. Συνυφασμένες με τη λύση του προβλήματος αυτού είναι η εφαρμογή από τον Αρχιμήδη της μεθόδου της *νεύσης* και η εισαγωγή μιας νέας καμπύλης, της *τετραγωνίζουσας*. Η μέθοδος της νεύσης συνίσταται στην τοποθέτηση ενός ευθύγραμμου τμήματος ορισμένου μήκους μεταξύ δύο δεδομένων γραμμών έτσι, ώστε τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος να βρίσκονται πάνω στις γραμμές και το ίδιο το τμήμα ή η προέκτασή του να διέρχεται από δεδομένο σημείο.

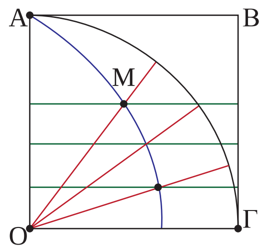
Οι δεδομένες γραμμές που εξέταζαν οι αρχαίοι γεωμέτρες ήταν συνήθως η ευθεία και η περιφέρεια. Ωστόσο, αν ένα πρόβλημα λύνεται με τη μέθοδο της νεύσης, τότε η φύση του προβλήματος παραμένει ασαφής. Αν το ευθύγραμμο τμήμα κινείται έτσι ώστε το ένα άκρο του να βρίσκεται στη μία από τις δεδομένες γραμμές, ενώ η προέκτασή του διέρχεται από το δεδομένο σημείο, τότε το δεύτερο άκρο θα γράψει καμπύλη (Κ). Η εφαρμογή της μεθόδου της νεύσης ισοδυναμεί με την εύρεση του σημείου τομής της καμπύλης (Κ) με τη δεύτερη δεδομένη γραμμή. Όμως η μέθοδος της νεύσης δεν δίνει καμιά πληροφορία για τη φύση της καμπύλης (Κ), η οποία μπορεί να είναι απλή, ή αρκετά πολύπλοκη. Ίσως για το λόγο αυτό οι αρχαίοι γεωμέτρες απέφευγαν τη μέθοδο αυτή.



Σχήμα 1

Η τριχοτόμηση γωνίας με τη μέθοδο της *νεύσης* γίνεται ως εξής: Έστω η γωνία $Α\hat{Β}Γ = 3φ$ (σχ.1) που πρέπει να διαιρεθεί σε τρία ίσα μέρη. Γράφουμε κύκλο κέντρου Β, και προεκτείνουμε την ΑΒ προς την άλλη μεριά από το κέντρο Β. Μεταξύ της ευθείας ΒΕ και του κύκλου τοποθετούμε το τμήμα ΕΖ μήκους R, έτσι ώστε η προέκτασή του να διέρχεται από το σημείο Γ (το σημείο τομής της πλευράς ΒΓ με τον κύκλο). Τότε $Ζ\hat{Ε}Δ = 1/3\ Γ\hat{Β}Α$.

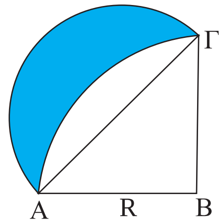
Τον 5ο αι. π.Χ. ο Ιππίας ο Ηλείος εισήγαγε με κινηματικό ορισμό μία νέα καμπύλη, την οποία ο Λάιμπνιτς ονόμασε αργότερα *τετραγωνίζουσα*. Έστω ότι τα τμήματα ΟΑ και ΑΒ (Σχ. 2) αρχίζουν να κινούνται ταυτόχρονα, ώστε το ΟΑ να περιστρέφεται περί το Ο ομοιόμορφα κατά τη φορά των δεικτών του ωρολογίου και το ΑΒ να κατέρχεται ομοιόμορφα παραμένοντας παράλληλο προς τον εαυτό του, μέχρις ότου τα δύο τμήματα να καταλήξουν στη θέση ΟΓ ταυτόχρονα. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής Μ των δύο τμημάτων γράφει την τετραγωνίζουσα. Από τον ορισμό της καμπύλης προκύπτει άμεσα ότι οι τεταγμένες της καμπύλης είναι ανάλογες των αντίστοιχων γωνιών $y:y_1 = φ:φ_1$. Με τη βοήθεια της ίδιας καμπύλης μπορεί να λυθεί και το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου. Τον 10ο αι. ο Θαμπίτ Ιμπν Κούρρα στην πραγματεία του «Διαίρεση της ορθής γωνίας σε τρία ίσα μέρη», ακολουθώντας την παράδοση του Αρχιμήδη, ανάγει το πρόβλημα σε κατασκευή με τη βοήθεια της νεύσης. Στη μεσαιωνική Αραβική γραμματεία επιχειρείται η σύνδεση του προβλήματος της τριχοτόμησης γωνίας με την άλγεβρα και την τριγωνομετρία. Το 15ο αι. ο αλ-Κασί στην απολεσθείσα «Πραγματεία περί χορδής και ημίτονου» προτείνει μια πρωτότυπη αναδρομική μέθοδο για τη λύση της εξίσωσης της τριχοτόμησης γωνίας, δηλ. της κυβικής εξίσωσης της μορφής $x^3 + q = px$, όπου $x = ημφ$, $p = 3/4$, $q = (1/4)ημ3φ$. Η μέθοδος του αλ-Κασί μας είναι γνωστή από την «Πραγματεία» του αλ-Ρουμί (14ος-15ος αι.) και τα σχόλια του Μιρίτ Τσελεμπί στους αστρονομικούς πίνακες του Ούλουγκμπεκ.



Σχήμα 2

Στα τέλη του 16ου αι. ο Φ. Βιέτ στο «Συμπλήρωμα της Γεωμετρίας» απέδειξε ότι η λύση οποιασδήποτε κυβικής εξίσωσης οδηγεί είτε σε νεύση είτε σε τριχοτόμηση γωνίας, και με τη βοήθεια τριγωνομετρικών μέσων βρήκε τη λύση της κυβικής εξίσωσης στη λεγόμενη «μη αναγώγιμη» περίπτωση (ο όρος αυτός εισήχθηκε από τον Καρντάνο για να υποδηλώσει την περίπτωση που η κυβική εξίσωση έχει τρεις πραγματικές λύσεις που εμφανίζονται ως άθροισμα ή διαφορά των αριθμών που σήμερα ονομάζουμε μιγαδικούς). Ο Βιέτ γνώριζε επίσης τις αλγεβρικές εξισώσεις που αντιστοιχούν στη διαίρεση γωνίας όχι μόνο σε τρία, αλλά και σε πέντε ή επτά ίσα μέρη. Πρώτος ο Ντεκάρτ το 1637 εξέφρασε τη γνώμη ότι ο κανόνας και ο διαβήτης είναι ανεπαρκή για τη λύση του προβλήματος αυτού στη γενική περίπτωση. Όμως ολοκληρωμένη απόδειξη της υπόθεσης του Ντεκάρτ δόθηκε μόνον το 1837 από τον Π. Βάντσελ.

Ο τετραγωνισμός του κύκλου. Το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου συνίσταται στην κατασκευή τετραγώνου ισοδύναμου με δεδομένο κύκλο. Αν το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου και της τριχοτόμησης γωνίας ανάγεται σε πρόβλημα λύσης κυβικής εξίσωσης, το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου ανάγεται στην κατασκευή ενός τμήματος ίσου με π. Ο Ιπποκράτης ο Χίος προσπάθησε να λύσει το πρόβλημα αυτό με τον τετραγωνισμό μηνίσκων. Ο Ιπποκράτης βρήκε τρία είδη τέτοιων μηνίσκων. Ένας από αυτούς είναι ο μηνίσκος που περικλείεται από το τεταρτοκύκλιο $\overset{\frown}{ΒΑΓ}$ και του ημικυκλίου με διάμετρο τη χορδή ΑΓ (σχ.3). Το εμβαδόν του μηνίσκου αυτού είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Η ιστορία των μηνίσκων είναι αρκετά μεγάλη. Το 1840 ο Κλάουζεν βρήκε άλλους δύο μηνίσκους, αλλά το 1930-40 οι Ρώσοι μαθηματικοί Ν.Γ. Τσεμποταριόφ και ο Α.Β. Ντοροντνόφ, χρησιμοποιώντας μεθόδους της θεωρίας Γκαλουά, απέδειξαν ότι υπάρχουν πέντε είδη μηνίσκων αλλά κανένας δεν τετραγωνίζει τον κύκλο.



Σχήμα 3

Ο τετραγωνισμός του κύκλου είναι συνυφασμένος με την αριθμητική φύση του αριθμού π. Βασιζόμενος στη θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου και κάνοντας χρήση της μεθόδου της εξάντλησης ο Αρχιμήδης στο έργο του «Κύκλου μέτρηση» αποδεικνύει ότι το εμβαδόν κύκλου είναι ισοδύναμο με το εμβαδόν ορθογώνιου τριγώνου, η μία κάθετος του οποίου είναι η ακτίνα της περιφέρειας και η άλλη το μήκος της περιφέρειας. Αυτό δίνει τη δυνατότητα να αναχθεί το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου στην εύρεση του μήκους της περιφέρειας. Στα τέλη του 18ου αι. ο Ι. Λάμπερτ και ο Α. Λεζάντρ απέδειξαν ότι ο π είναι άρρητος. Μόλις το 1882 ο Λίντεμαν (K.L.F. von Lindemann) και ο Σ. Ερμίτ (Charles Hermite, 1822-1901) απέδειξαν ότι ο αριθμός π είναι υπερβατικός, δηλ. δεν ικανοποιεί καμιά αλγεβρική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές. Κατά συνέπεια, το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου δεν μπορεί να αναχθεί σε αλγεβρική εξίσωση. Το θεώρημα του Λίντεμαν αποδεικνύει τη μη επιλυσιμότητα του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου με κανόνα και διαβήτη.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

Κανονικά πολύγωνα

- Όλες οι πλευρές και οι γωνίες του ίσες.
- Εγγράψιμο και περιγράψιμο σε κύκλο
- $\alpha_\nu^2 + \dfrac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$, $E_\nu = \dfrac{1}{2} P_\nu \alpha_\nu$, $P_\nu = \nu\lambda_\nu$
- $\omega_\nu = \dfrac{180°}{\nu}$, $\varphi_\nu = 180° - \dfrac{360°}{\nu}$
- Κανονικά πολύγωνα με το ίδιο πλήθος πλευρών είναι όμοια
-

ν	3	4	6
λ_ν	$R\sqrt{3}$	$R\sqrt{2}$	R
α_ν	$\dfrac{R}{2}$	$\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Κύκλος

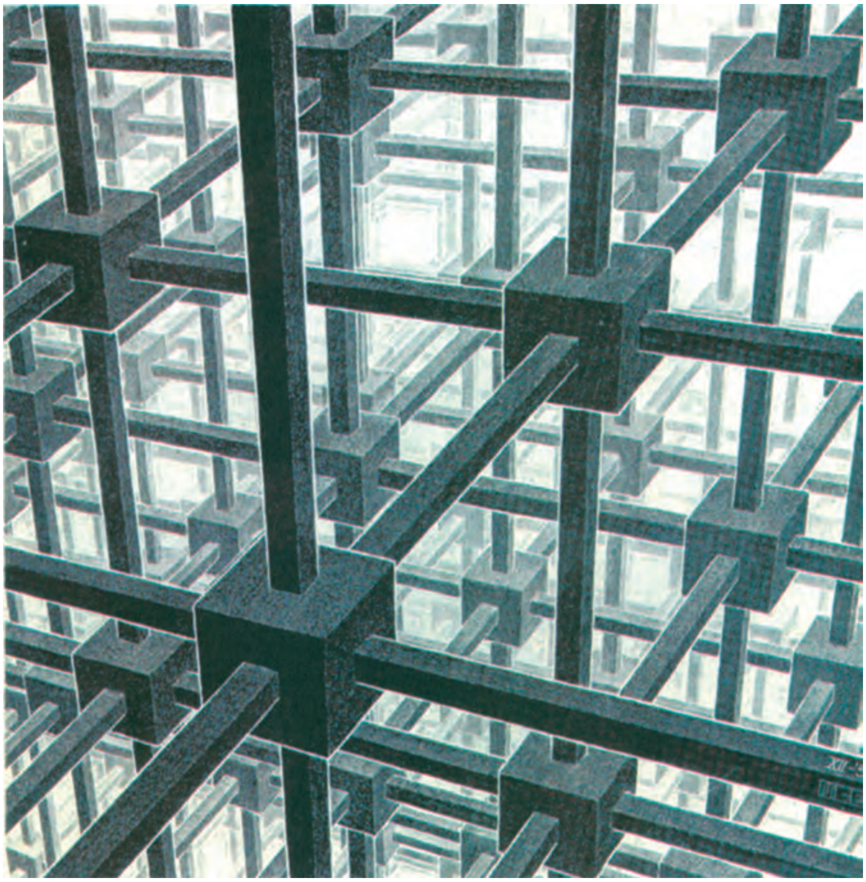
- Μήκος κύκλου: $L = 2\pi R$
- Μήκος τόξου: $\ell = \dfrac{\pi R \mu}{180} = \alpha R$
- Εμβαδόν κυκλικού δίσκου: $E = \pi R^2$
- Εμβαδόν κυκλικού τομέα: $(O\overset{\frown}{AB}) = \dfrac{\pi R^2 \mu}{360} = \dfrac{1}{2}\alpha R^2$

«Διαλογιζόμενος Δάσκαλος»
Μ. Γκατζώνης

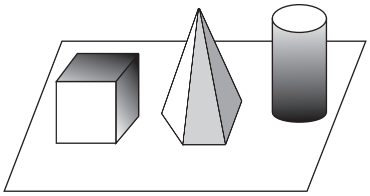
ΚΕΦΑΛΑΙΟ **12**

ΕΥΘΕΙΕΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

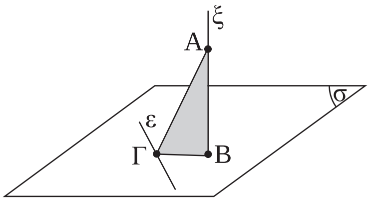
Στο κεφάλαιο αυτό δίνονται βασικοί ορισμοί και αξιώματα που διέπουν τη γεωμετρία του χώρου και μελετώνται βασικές σχέσεις μεταξύ των θεμελιωδών στοιχείων του χώρου.



Maurits Cornelis Escher (Ολλανδός, 1898 - 1972), «Κυβική διαίρεση χώρου».



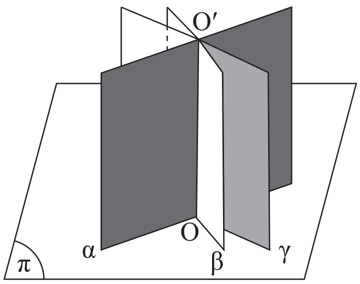
Σχήμα 1



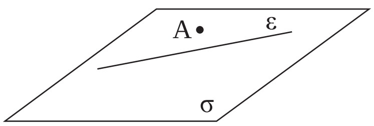
Σχήμα 2

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Η ονομασία ενός επιπέδου με το γράμμα π δεν προκαλεί σύγχυση γιατί από το κείμενο γίνεται φανερό ότι αναφερόμαστε σε επίπεδο και όχι στον αριθμό π. Ο αριθμός π συνήθως εμφανίζεται σε σχέσεις.



Σχήμα 3



Σχήμα 4

12.1 Εισαγωγή

Ο γεωμετρικός χώρος έχει τρεις διαστάσεις, μήκος, πλάτος και ύψος και εκτείνεται απεριόριστα σε κάθε κατεύθυνση, ενώ το επίπεδο, που μελετήσαμε έως τώρα, έχει δύο διαστάσεις. Ο χώρος περιλαμβάνει θεμελιώδη γεωμετρικά στοιχεία –σημεία, ευθείες, επίπεδα– αλλά και πιο πολύπλοκα σχήματα, τα οποία σχηματίζονται από αυτά ή τμήματα αυτών και λέγονται στερεά σχήματα για να αντιδιαστέλλονται από τα επίπεδα σχήματα (σχ.1). Ένα στερεό γεωμετρικό σχήμα μπορεί να είναι πεπερασμένο ή απεριόριστο, να καταλαμβάνει όγκο ή όχι (σχ.2) και να σχηματίζεται από τμήματα ευθειών και επιπέδων ή να είναι ακόμα πιο περίπλοκο. Στα επόμενα κεφάλαια θα μελετήσουμε σχήματα του χώρου και τις ιδιότητές τους. Το σύνολο αυτών των ιδιοτήτων λέγεται ***Γεωμετρία του Χώρου*** ή ***Στερεομετρία***. Τα σχήματα του χώρου παριστάνονται στο χαρτί για να υποβοηθείται η φαντασία μας. Έτσι, το επίπεδο, ως απεριόριστη επιφάνεια, ενώ δεν μπορεί να χωρέσει στην επιφάνεια του χαρτιού, παριστάνεται με ένα παραλληλόγραμμο, δηλαδή με ένα πεπερασμένο τμήμα του και το ονομάζουμε με ένα από τα τελευταία μικρά γράμματα του αλφαβήτου, π.χ. π, σ, τ, κτλ. (με δείκτες ή τόνους ενδεχομένως), που σημειώνεται σε μία από τις γωνίες του παραλληλογράμμου.

Επειδή το επίπεδο είναι υποσύνολο του χώρου, στα αξιώματα του χώρου περιλαμβάνονται τα αξιώματα της γεωμετρίας του επιπέδου και επομένως, οι προτάσεις που ισχύουν στο επίπεδο ισχύουν σε κάθε επίπεδο του χώρου. Πολλές ιδιότητες του χώρου προκύπτουν, αν θεωρήσουμε το χώρο ως επέκταση του επιπέδου κατά μία διάσταση. Για παράδειγμα, η πρόταση: «στο επίπεδο υπάρχουν άπειρες ευθείες που διέρχονται από ένα σημείο» επεκτείνεται στην πρόταση: «στο χώρο υπάρχουν άπειρα επίπεδα που διέρχονται από μία ευθεία». Αυτό γίνεται άμεσα φανερό αν θεωρήσουμε σε ένα επίπεδο (σχ.3) ευθείες που διέρχονται από το ίδιο σημείο και μετακινηθεί το επίπεδο «παράλληλα στον εαυτό του». Τότε, οι ευθείες γράφουν επίπεδα διερχόμενα από την ευθεία που γράφει το κοινό σημείο των ευθειών κατά τη μετακίνηση.

Η πλήρης κατανόηση, όμως, της υφής των γεωμετρικών στοιχείων, οι ιδιότητες και οι σχέσεις μεταξύ τους προκύπτουν έμμεσα, από τις προτάσεις που αποδεικνύονται στα επόμενα.

Στο σχ.4 παριστάνεται ένα επίπεδο που συμβολίζεται με το γράμμα σ και πάνω σε αυτό ένα σημείο Α και μία ευθεία ε. Αν και βλέπουμε ένα πεπερασμένο σχήμα, θα θεωρούμε το επίπεδο ως απεριόριστη επιφάνεια.

Οι ***γεωμετρικές κατασκευές*** στο χώρο έχουν διαφορετική έννοια από αυτήν των κατασκευών στο επίπεδο. Εδώ δεν εννοούμε μόνο τις κατασκευές γεωμετρικών σχημάτων με τη βοήθεια του κανόνα και του διαβήτη, αλλά και τον προσδιορισμό των σημείων του χώρου ως τομή γνωστών σχημάτων, π.χ. τομή δύο ευθειών ή τριών επιπέδων, τον προσδιορισμό μιας ευθείας από δύο γνωστά σημεία ή ως τομή δύο γνωστών επιπέδων και τον καθορισμό ενός επιπέδου από δύο τεμνόμενες ευθείες ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο μπορεί να προσδιορισθεί ένα επίπεδο. Δηλαδή, μια κατασκευή στο χώρο είναι ***νοητή διαδικασία***.

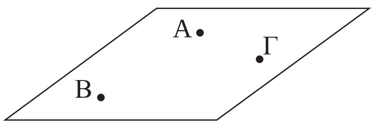
Σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων στο χώρο

12.2 Η έννοια του επιπέδου και ο καθορισμός του

Μία πρωταρχική απαίτηση, η οποία καθορίζει τη θέση και την ύπαρξη ενός επιπέδου στο γεωμετρικό χώρο, είναι το εξής αξίωμα:

ΑΞΙΩΜΑ Ι

Τρία σημεία που δεν είναι συνευθειακά ορίζουν ένα μοναδικό επίπεδο.



Σχήμα 5

Αν Α, Β και Γ είναι τρία μη συνευθειακά σημεία, τότε αυτά ορίζουν μοναδικό επίπεδο (σχ.5) και θα το συμβολίζουμε με (Α, Β, Γ).

Δεχόμαστε επίσης τα επόμενα αξιώματα.

ΑΞΙΩΜΑ ΙΙ

Σε κάθε επίπεδο υπάρχουν τουλάχιστον τρία σημεία μη συνευθειακά.

ΑΞΙΩΜΑ ΙΙΙ

Υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο που δεν ανήκει σε δεδομένο επίπεδο.

Τα σημεία και γενικότερα τα σχήματα που ανήκουν στο ίδιο επίπεδο λέγονται ***συνεπίπεδα***.

ΑΞΙΩΜΑ IV

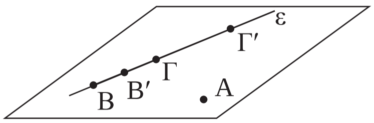
Δύο σημεία ενός επιπέδου ορίζουν ευθεία, τα σημεία της οποίας ανήκουν στο επίπεδο.

Άλλοι τρόποι για τον καθορισμό της θέσης ενός επιπέδου στο χώρο δίνονται από τις ακόλουθες προτάσεις:

ΠΡΟΤΑΣΗ Ι

Μία ευθεία και ένα σημείο, που δεν ανήκει στην ευθεία, ορίζουν ένα επίπεδο, στο οποίο ανήκουν το σημείο και η ευθεία.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 6

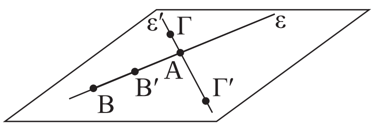
Αν Β και Γ είναι δύο διαφορετικά σημεία στη δοσμένη ευθεία ε (σχ.6), τότε τα σημεία Α, Β και Γ, ως μη συνευθειακά, ορίζουν ένα επίπεδο (Α, Β, Γ) στο οποίο ανήκουν το σημείο Α και η ευθεία ΒΓ, αφού δύο σημεία της ευθείας ανήκουν στο επίπεδο. Το επίπεδο αυτό είναι ανεξάρτητο από το ζεύγος των σημείων Β και Γ που επιλέξαμε πάνω στην ευθεία ε, διότι αν Β′ και Γ′ είναι δύο άλλα σημεία της ε, τότε το επίπεδο (Α, Β′, Γ′) περιέχει την ευθεία ε, άρα και τα σημεία Β και Γ.

Το επίπεδο που ορίζεται από το σημείο Α και την ευθεία ε, που δεν περιέχει το Α, συμβολίζεται με (ε, Α).

ΠΡΟΤΑΣΗ ΙΙ

Δύο τεμνόμενες ευθείες ορίζουν ένα επίπεδο στο οποίο ανήκουν.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

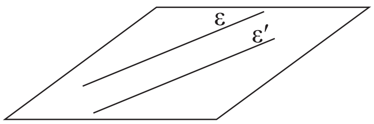


Σχήμα 7

Έστω Α το κοινό σημείο των δύο τεμνόμενων ευθειών ε και ε′ (σχ.7) και Β, Γ σημεία των ευθειών ε και ε′ αντίστοιχα. Τότε, τα σημεία Α, Β και Γ ορίζουν ένα επίπεδο, στο οποίο ανήκουν οι ευθείες ε και ε′. Το επίπεδο αυτό δεν εξαρτάται από τα σημεία Β και Γ, διότι αν επιλέξουμε δύο άλλα σημεία, τα Β′ και Γ′ των ευθειών ε και ε′ αντίστοιχα, το επίπεδο (Α, Β′ Γ′) περιέχει τις ευθείες ε και ε′, άρα και τα σημεία Β και Γ. Επομένως, το επίπεδο που ορίζεται από δύο τεμνόμενες ευθείες είναι μοναδικό.

Το επίπεδο που ορίζεται από τις τεμνόμενες ευθείες ε και ε′ συμβολίζεται με (ε, ε′).

Επαναλαμβάνουμε εδώ τον ορισμό των παράλληλων ευθειών, που συναντήσαμε στη γεωμετρία του επιπέδου.



Σχήμα 8

Ορισμός

Δυο ευθείες λέγονται παράλληλες όταν είναι συνεπίπεδες και δεν τέμνονται (σχ.8).

Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι το ακόλουθο πόρισμα:

ΠΟΡΙΣΜΑ

Δύο παράλληλες ευθείες ορίζουν ένα επίπεδο, στο οποίο ανήκουν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Τι επιφάνεια παράγει μία ευθεία που ολισθαίνει:*
   i) σε δύο παράλληλες ευθείες και
   ii) σε δύο τεμνόμενες ευθείες, εκτός του κοινού τους σημείου; Γιατί εξαιρούμε το κοινό σημείο;

2. *Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των ευθειών που ορίζονται από δύο διαφορετικά σημεία ενός κύκλου;*

3. *Δίνονται δύο τεμνόμενες ευθείες ε και ε' και σημείο Α εκτός αυτών. Πώς θα ελέγξουμε αν το σημείο Α είναι σημείο του επιπέδου (ε, ε'), όπου ε και ε' δύο τεμνόμενες ευθείες;*

4. *Τι επιφάνεια παράγει μία ευθεία που διέρχεται από γνωστό σημείο Α και τέμνει ευθεία ε, που δεν περιέχει το σημείο Α.*

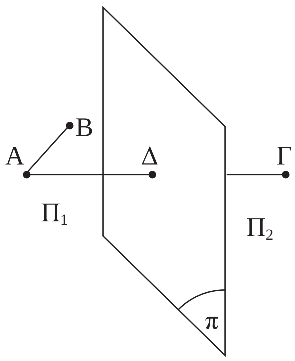
5. *Πόσα επίπεδα ορίζουν τρία σημεία που βρίσκονται στην ίδια ευθεία;*

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Μία ευθεία ανήκει σε ένα επίπεδο, αν και μόνο αν δύο σημεία της ανήκουν στο επίπεδο.

Ένα επίπεδο θεωρείται δεδομένο, όταν δίνονται:

- τρία σημεία που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία ή
- μία ευθεία και ένα σημείο που δεν ανήκει σ' αυτήν ή
- δύο τεμνόμενες ευθείες ή
- δύο παράλληλες ευθείες.



Σχήμα 9

12.3 Σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων

► Σχετικές θέσεις δύο επιπέδων

ΑΞΙΩΜΑ V

Κάθε επίπεδο χωρίζει τα σημεία του χώρου, που δεν ανήκουν σε αυτό, σε δύο περιοχές ξένες μεταξύ τους.

Όπως είναι γνωστό, ένα επίπεδο χωρίζεται από μία ευθεία του σε δύο ημιεπίπεδα που έχουν ως τομή την ευθεία αυτή. Κατ' αναλογία, ο χώρος χωρίζεται από ένα επίπεδο, που λέγεται ***αρχικό επίπεδο*** (σχ.9), σε δύο ***ημιχώρους*** Π_1, Π_2 που έχουν ως τομή το επίπεδο αυτό. Κάθε δύο σημεία που δεν ανήκουν στο π και βρίσκονται στον ίδιο ημιχώρο ορίζουν ευθύγραμμο τμήμα που βρίσκεται εξ ολοκλήρου σε αυτόν τον ημιχώρο, π.χ. το τμήμα ΑΒ (σχ.9). Αν ένα σημείο ανήκει στον έναν ημιχώρο και το άλλο σημείο στον άλλο, τότε το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν τα δύο αυτά σημεία τέμνει το αρχικό επίπεδο σε ένα σημείο μεταξύ των άκρων του, π.χ. το ΑΓ τέμνει το π στο Δ (σχ.9).

ΑΞΙΩΜΑ VI

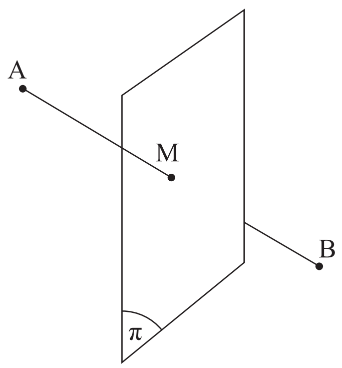
Αν δυο διακεκριμένα επίπεδα έχουν ένα κοινό σημείο, τότε τέμνονται σε μία ευθεία, που περιέχει το σημείο.

Ορισμός Ι

Δυο επίπεδα που δεν τέμνονται λέγονται *παράλληλα*.

Το αξίωμα VI μας βεβαιώνει ότι δύο επίπεδα δεν μπορεί να έχουν ένα μόνο κοινό σημείο. Αν έχουν ένα κοινό σημείο θα έχουν μία ευθεία κοινή που θα διέρχεται από το σημείο αυτό. Όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο υπάρχουν επίπεδα που δεν έχουν κοινό σημείο. Άρα, δύο διαφορετικά επίπεδα είτε τέμνονται σε μία ευθεία είτε είναι παράλληλα.

► Σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου



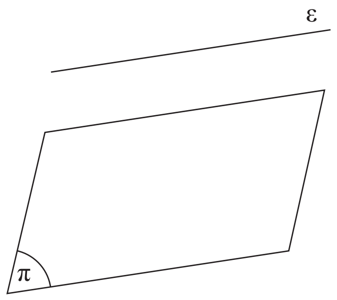
Σχήμα 10

Γνωρίζουμε ήδη από το αξίωμα IV ότι, αν μία ευθεία έχει δύο κοινά σημεία με ένα επίπεδο, τότε η ευθεία ανήκει στο επίπεδο. Επίσης, αν θεωρήσουμε δύο σημεία Α και Β του χώρου που βρίσκονται εκατέρωθεν ενός επιπέδου π (σχ.10), η ευθεία ΑΒ τέμνει το π σε ένα μόνο σημείο Μ μεταξύ των Α και Β. Διότι αν το έτεμνε σε δύο σημεία, τότε η ευθεία θα ανήκε στο επίπεδο. Δηλαδή, υπάρχουν ευθείες του χώρου που έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με κάποιο επίπεδο. Το σημείο αυτό λέγεται ***σημείο τομής*** της ευθείας και του επιπέδου ή ***ίχνος*** της ευθείας στο επίπεδο.

Τέλος, όπως θα δούμε παρακάτω, υπάρχουν ευθείες που δεν έχουν κοινό σημείο με κάποιο επίπεδο. Για τις ευθείες αυτές έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός ΙΙ

Μία ευθεία λέγεται *παράλληλη* σε ένα επίπεδο, αν η ευθεία και το επίπεδο δεν έχουν κοινό σημείο.



Σχήμα 11

Τότε και το επίπεδο (σχ.11) λέγεται ότι είναι ***παράλληλο στην ευθεία.***

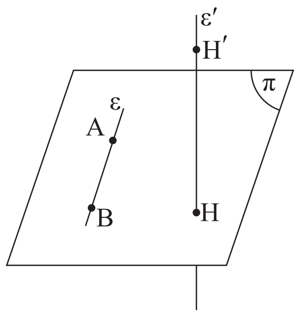
Την παραλληλία ευθείας ε και επιπέδου π τη συμβολίζουμε με ε//π.

► Σχετικές θέσεις δύο ευθειών

Γνωρίζουμε ήδη ότι δύο ευθείες του χώρου μπορεί να είναι παράλληλες ή τεμνόμενες. Στην παράγραφο αυτή αποδεικνύεται ότι υπάρχουν ζεύγη ευθειών που δεν τέμνονται, ενώ δεν είναι παράλληλες.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν μία ευθεία ε ανήκει σε ένα επίπεδο π και ευθεία ε′ τέμνει το π στο σημείο Η εκτός της ε, τότε δεν υπάρχει επίπεδο που να περιέχει τις ευθείες ε και ε′.



Σχήμα 12

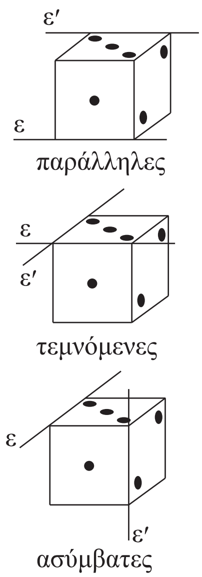
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι υπάρχει επίπεδο που περιέχει τις ευθείες ε και ε′, (σχ.12), δηλαδή περιέχει όλα τα σημεία της ε και όλα τα σημεία της ε′. Αν Α και Β είναι δύο διαφορετικά σημεία της ευθείας ε και Η, Η′ δύο διαφορετικά σημεία της ευθείας ε′, τα επίπεδα (Α, Β, Η) και (Α, Β, Η′) θα ταυτίζονταν με το επίπεδο π. Τότε όμως η ευθεία ε′ θα είχε δύο κοινά σημεία με το π, τα Η και Η′, που είναι άτοπο.

Δηλαδή, υπάρχουν ζεύγη ευθειών του χώρου που δεν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο. Για τις ευθείες αυτές δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός ΙΙΙ

Δύο ευθείες λέγονται *ασύμβατες*, αν δεν υπάρχει επίπεδο που να περιέχει και τις δύο.



Σχήμα 13

Επομένως, δύο διαφορετικές ευθείες του χώρου μπορεί να είναι ***παράλληλες***, ***τεμνόμενες*** ή ***ασύμβατες*** (σχ.13).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όπως είναι γνωστό, στο επίπεδο, από σημείο Α εκτός ευθείας ε απαιτούμε να άγεται μοναδική ευθεία παράλληλη στην ε. Αυτή η πρόταση ισχύει και στο χώρο. Η μοναδική παράλληλη στην ε από το σημείο Α βρίσκεται στο επίπεδο (ε, Α). Κάθε άλλη ευθεία που διέρχεται από το Α και τέμνει το επίπεδο (ε, Α) είναι ασύμβατη στην ε, σύμφωνα με το Θεώρημα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Να αναγνωρίσετε στην αίθουσα διδασκαλίας: i) δύο ευθείες παράλληλες και το επίπεδο που αυτές ορίζουν, ii) δύο ευθείες τεμνόμενες, το επίπεδο που αυτές ορίζουν και να βρείτε άλλες ευθείες πάνω σε αυτό, iii) δύο ευθείες ασύμβατες και να διαπιστώσετε ότι δεν υπάρχει επίπεδο που να περιέχει και τις δύο και iv) τρεις ευθείες ανά δύο ασύμβατες.*
2. *Να αναγνωρίσετε στην αίθουσα διδασκαλίας δύο επίπεδα: i) τεμνόμενα, ii) παράλληλα.*
3. *Να αναγνωρίσετε στην αίθουσα διδασκαλίας διάφορα επίπεδα και ευθείες: i) που ανήκουν σε αυτά, ii) που είναι παράλληλες προς αυτά ή iii) που τα τέμνουν.*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να κατασκευάσετε ευθεία που διέρχεται από σταθερό σημείο Ο και τέμνει δύο σταθερές ασύμβατες ευθείες.*
2. *Δίνονται τρεις ευθείες ασύμβατες ανά δύο. Να κατασκευάσετε ευθεία που να τέμνει και τις τρεις.*
3. *Να κατασκευάσετε ευθεία ε που διέρχεται από σημείο Α και τέμνει ευθεία ε' και κύκλο (Κ) του χώρου.*
4. *Δίνονται οι τεμνόμενες ευθείες ΧΟΧ' και ΨΟΨ' και ευθεία ε ασύμβατη σε αυτές. Αν Μ τυχαίο σημείο της ε, να βρείτε την τομή των επιπέδων (Μ, Χ, Χ') και (Μ, Ψ, Ψ').*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Να αποδείξετε ότι επίπεδο και κύκλος, που δεν ανήκει σε αυτό, έχουν δύο το πολύ κοινά σημεία.*
2. *Να αποδείξετε ότι τρεις ευθείες: i) αν τέμνονται ανά δύο χωρίς να διέρχονται από το ίδιο σημείο, τότε είναι συνεπίπεδες, ii) αν τέμνονται ανά δύο χωρίς να είναι συνεπίπεδες, τότε διέρχονται από το ίδιο σημείο.*
3. *Δίνονται δύο ασύμβατες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$, δύο σημεία Α και Β στην $ε_1$ και δύο σημεία Γ και Δ στην $ε_2$. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΓ και ΒΔ είναι ασύμβατες.*
4. *Δίνονται τέσσερις ευθείες $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$ και $ε_4$, από τις οποίες οι $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες. Να κατασκευάσετε ευθεία που να τέμνει και τις τέσσερις.*
5. *Να αποδείξετε ότι αν τρία επίπεδα τέμνονται ανά δύο, τότε οι τομές τους διέρχονται από το ίδιο σημείο ή είναι παράλληλες.*

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Δύο επίπεδα μπορεί να έχουν:

1. τρία κοινά σημεία, οπότε ταυτίζονται,
2. δύο μόνο κοινά σημεία, οπότε τέμνονται κατά την ευθεία που ορίζουν τα δύο αυτά σημεία,
3. κανένα κοινό σημείο, οπότε είναι παράλληλα.

Εάν δύο επίπεδα έχουν ένα κοινό σημείο, τότε τέμνονται σε μια ευθεία που περνάει από αυτό.

Δύο ευθείες του χώρου μπορεί να:

1. Ταυτίζονται αν έχουν δύο κοινά σημεία.
2. Τέμνονται αν έχουν ένα κοινό σημείο. Τότε ορίζουν ένα επίπεδο στο οποίο ανήκουν.
3. Είναι παράλληλες. Τότε ορίζουν ένα επίπεδο στο οποίο ανήκουν.
4. Είναι ασύμβατες. Δεν έχουν κοινό σημείο και δεν είναι παράλληλες. Τότε δεν υπάρχει επίπεδο που να τις περιέχει.

Η παραλληλία και η καθετότητα στο χώρο

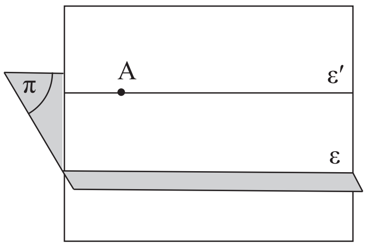
12.4 Ευθείες και επίπεδα παράλληλα - Θεώρημα του Θαλή

► Παραλληλία ευθείας και επιπέδου

Το επόμενο θεώρημα βεβαιώνει την ύπαρξη ευθειών που είναι παράλληλες σε ένα επίπεδο και αποτελεί **κριτήριο** της παραλληλίας ευθείας και επιπέδου.

ΘΕΩΡΗΜΑ I

Αν μία ευθεία ε′ είναι παράλληλη σε μία ευθεία ε ενός επιπέδου π και δεν ανήκει σε αυτό, τότε είναι παράλληλη στο π.



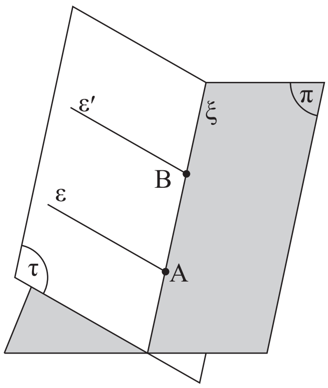
Σχήμα 14

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες ε και ε′ και π ένα επίπεδο που περιέχει την ε και όχι την ε′. Οι παράλληλες ευθείες ε και ε′ (σχ.14), ορίζουν το επίπεδο (ε, ε′). Τα κοινά σημεία των επιπέδων π και (ε, ε′) είναι τα σημεία της ευθείας ε. Αν η ευθεία ε′ έτεμνε το επίπεδο π, θα το έτεμνε σε σημείο της ευθείας ε, επομένως οι ευθείες ε και ε′ δε θα ήταν παράλληλες, που είναι άτοπο.

ΘΕΩΡΗΜΑ II

Αν επίπεδο π τέμνει ευθεία ε, τότε θα τέμνει κάθε ευθεία παράλληλη στην ε.



Σχήμα 15

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω Α το κοινό σημείο της ε και του π και ε′ ευθεία παράλληλη στην ε (σχ.15). Οι ευθείες ε και ε′ ως παράλληλες ορίζουν επίπεδο τ. Τα επίπεδα π και τ έχουν ένα κοινό σημείο, το Α, άρα τέμνονται κατά μία ευθεία ξ. Η ευθεία ξ ανήκει στο επίπεδο τ των παράλληλων ευθειών και τέμνει την ε, άρα θα τέμνει και την ε′ σε ένα σημείο Β.

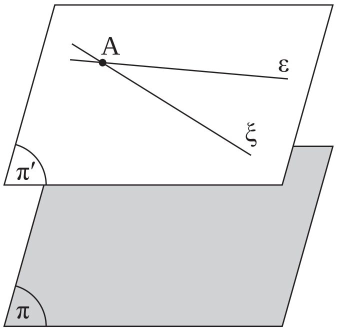
► Παραλληλία επιπέδων

ΘΕΩΡΗΜΑ III

Αν δύο τεμνόμενες ευθείες ε και ξ είναι παράλληλες σε ένα επίπεδο π, τότε το επίπεδο (ε, ξ) είναι παράλληλο στο π.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν τα δύο επίπεδα π′ = (ε,ξ) και π (σχ.16) είχαν κοινό σημείο, τότε θα τέμνονταν σε μία ευθεία ζ, η οποία με τη σειρά



Σχήμα 16

της θα έτεμνε τουλάχιστον μία από τις ευθείες ε και ξ, έστω την ε. (Η άλλη μπορεί να είναι παράλληλη στη ζ). Τότε όμως η ευθεία ε θα έτεμνε το επίπεδο π, που είναι άτοπο.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

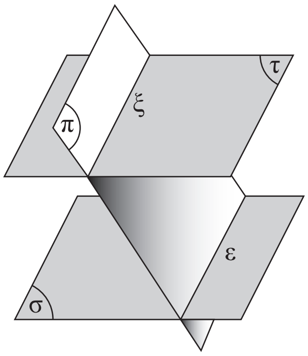
i) Από σημείο εκτός επιπέδου άγεται μοναδικό επίπεδο παράλληλο σε αυτό.

ii) Δύο επίπεδα παράλληλα προς τρίτο είναι και μεταξύ τους παράλληλα.

Το θεώρημα ΙΙΙ αποδεικνύει την ύπαρξη παράλληλων επιπέδων και ταυτόχρονα, δίνει τρόπο κατασκευής επιπέδου π′ που διέρχεται από σημείο Α και είναι παράλληλο σε άλλο. Το σημείο Α πρέπει να βρίσκεται εκτός του επιπέδου π αλλιώς οι ευθείες ε και ξ θα είναι ευθείες του π και έτσι το παράλληλο επίπεδο θα ταυτίζεται με το π.

ΘΕΩΡΗΜΑ IV

Αν σ και τ είναι δύο παράλληλα επίπεδα, τότε κάθε επίπεδο π που τέμνει το ένα τέμνει και το άλλο και οι ευθείες τομής είναι παράλληλες μεταξύ τους.



Σχήμα 17

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

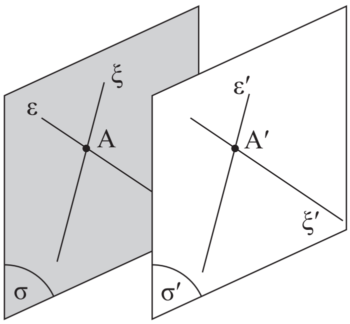
Έστω ότι το επίπεδο π (σχ.17), τέμνει το σ κατά την ευθεία ε και δεν τέμνει το τ. Τότε το π και το τ θα είναι παράλληλα. Όμως το σ, ως παράλληλο στο τ, θα είναι παράλληλο και στο π, σύμφωνα με το πόρισμα ii), που είναι άτοπο. Επομένως το π τέμνει και το άλλο κατά μία ευθεία ξ.

Οι ευθείες ε και ξ είναι παράλληλες, διότι, αν τέμνονταν, τότε τα επίπεδα π και τ θα είχαν κοινό σημείο, που είναι άτοπο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αν ε και ε′ είναι δύο ασύμβατες ευθείες, τότε από τις ε και ε′ διέρχεται μοναδικό ζεύγος παράλληλων επιπέδων.

Απόδειξη



Σχήμα 18

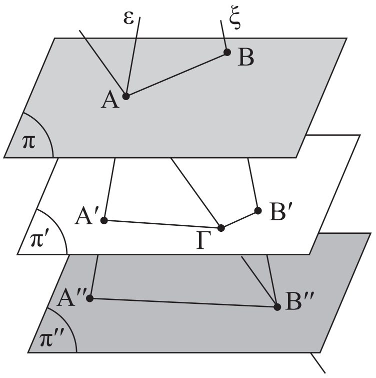
Από τυχαίο σημείο Α της ε φέρουμε ευθεία ξ//ε′ και από τυχαίο σημείο Α′ της ε′ φέρουμε ευθεία ξ′//ε (σχ.18). Τα επίπεδα σ = (ε,ξ) και σ′= (ε′,ξ′) είναι παράλληλα, γιατί το καθένα έχει δύο τεμνόμενες ευθείες παράλληλες στο άλλο. Είναι προφανές ότι τα επίπεδα σ και σ′ είναι ανεξάρτητα των Α και Α′, επομένως είναι το μοναδικό ζεύγος παράλληλων επιπέδων που διέρχονται από τις ασύμβατες ευθείες ε και ε′ αντίστοιχα.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΘΑΛΗ

Αν δύο ασύμβατες ευθείες ε και ξ τέμνουν τρία παράλληλα επίπεδα π, π′ και π″ στα σημεία Α, Α′, Α″ και Β, Β′, Β″ αντίστοιχα, τότε ισχύει

$$\frac{ΑΑ'}{Α'Α''}=\frac{ΒΒ'}{Β'Β''}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 19

Φέρουμε την ευθεία ΑΒ″ (σχ.19), η οποία τέμνει το επίπεδο π′ στο σημείο Γ. Τότε, οι τεμνόμενες στο Α ευθείες ε και ΑΒ″ ορίζουν επίπεδο που τέμνει τα παράλληλα επίπεδα π′ και π″ κατά τις παράλληλες ευθείες Α′Γ και Α″Β″. Τα τρίγωνα ΑΑ′Γ και ΑΑ″Β″ είναι όμοια και έχουμε:

$$\frac{ΑΑ'}{Α'Α''}=\frac{ΑΓ}{ΓΒ''}.$$

Επίσης, οι τεμνόμενες στο Β″ ευθείες ξ και ΑΒ″ ορίζουν επίπεδο, το οποίο τέμνει τα επίπεδα π και π′ κατά τις παράλληλες ευθείες ΑΒ και ΓΒ′. Επομένως τα τρίγωνα Β″ΓΒ′ και Β″ΑΒ είναι όμοια και έχουμε:

$$\frac{ΑΓ}{ΓΒ''}=\frac{ΒΒ'}{Β'Β''}.$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει αμέσως:

$$\frac{ΑΑ'}{Α'Α''}=\frac{ΒΒ'}{Β'Β''}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Από σημείο Ο να κατασκευάσετε επίπεδο παράλληλο σε δύο ασύμβατες ευθείες* $ε_1$ *και* $ε_2$.

2. *Να κατασκευάσετε ευθεία ε, που διέρχεται από γνωστό σημείο Α, είναι παράλληλη σε δοσμένο επίπεδο π που δεν περιέχει το Α και τέμνει ευθεία ξ, τέμνουσα το π.*

3. *Να κατασκευάσετε ευθεία ε, που είναι παράλληλη σε δοσμένο επίπεδο π και τέμνει δύο άλλες ασύμβατες ευθείες, οι οποίες τέμνουν το π.*

4. *Αν μία ευθεία είναι παράλληλη στην τομή δύο επιπέδων, τότε είναι παράλληλη στα δύο επίπεδα ή ανήκει σε ένα από αυτά και είναι παράλληλη στο άλλο.*

5. *Αν δύο τεμνόμενα επίπεδα διέρχονται αντίστοιχα από δύο παράλληλες ευθείες, τότε η τομή των επιπέδων είναι παράλληλη σε αυτές.*

6. *Τα επίπεδα που περνάνε από ευθεία ξ τέμνονται: i) από επίπεδο π παράλληλο στην ευθεία ξ κατά ευθείες παράλληλες στην ξ, επομένως και μεταξύ τους παράλληλες και ii) από επίπεδο που τέμνει την ξ κατά ευθείες που διέρχονται από το ίδιο σημείο.*

7. *Από σημείο Ο να κατασκευασθεί επίπεδο παράλληλο σε δοσμένη ευθεία ε.*

8. *Από δοσμένο σημείο να κατασκευάσετε ευθεία παράλληλη σε δύο τεμνόμενα επίπεδα.*

9. *Από δοσμένο σημείο να κατασκευάσετε επίπεδο παράλληλο σε δύο δοσμένες ευθείες.*

10. *Δίνονται τρεις τυχαίες ευθείες $ε$, $ε_1$ και $ε_2$. Να κατασκευάσετε επίπεδο $σ_1$ που να περιέχει την $ε_1$ και επίπεδο $σ_2$ που να περιέχει την $ε_2$ τέτοια, ώστε η τομή των $σ_1$ και $σ_2$ να είναι παράλληλη στην $ε$.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Αν Α, Β, Γ, Δ είναι τέσσερα σημεία που δεν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο, το σχήμα που αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ λέγεται* ***στρεβλό τετράπλευρο*** *και γράφεται ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών στρεβλού τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.*

2. *Δίνεται στρεβλό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Μ, Ν σημεία επί των ΔΑ και ΔΒ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $\frac{ΔΜ}{ΜΑ} = \frac{ΔΝ}{ΝΒ}$. Να αποδείξετε ότι τα επίπεδα (Μ, Ν, Γ) και (Α, Β, Γ) τέμνονται κατά ευθεία παράλληλη στην ΑΒ.*

3. *Σε στρεβλό τετράπλευρο ΑΒΓΔ, τα μέσα των απέναντι πλευρών και τα μέσα των διαγωνίων ορίζουν ευθύγραμμα τμήματα τα οποία διχοτομούνται.*

4. *Αν Α, Α′, Α″ είναι σημεία ευθείας ε και Β, Β′, Β″ είναι σημεία ευθείας ξ, όπου οι ευθείες ε και ξ είναι ασύμβατες και ισχύει η σχέση*

$$\frac{AA'}{A'A''} = \frac{BB'}{B'B''},$$

τότε οι ευθείες ΑΒ, Α′Β′, Α″Β″ είναι παράλληλες σε ένα επίπεδο (αντίστροφο του Θεωρήματος του Θαλή).

Σύνθετα Θέματα

1. *Αν ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι δύο τρίγωνα που βρίσκονται σε διαφορετικά επίπεδα και επιπλέον ανά δύο οι πλευρές τους είναι παράλληλες, δηλαδή ΑΒ//Α′Β′, ΒΓ//Β′Γ′ και ΑΓ//Α′Γ′, τότε οι ευθείες ΑΑ′, ΒΒ′ και ΓΓ′ διέρχονται από το ίδιο σημείο ή είναι παράλληλες. (Δύο τέτοια τρίγωνα λέγονται ομόλογα).*

2. *Αν ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι δύο τρίγωνα που βρίσκονται σε διαφορετικά επίπεδα και επιπλέον, οι πλευρές ΑΒ και Α′Β′ τέμνονται στο σημείο $Γ_1$, οι ΒΓ και Β′Γ′ τέμνονται στο $Α_1$ και οι ΑΓ και Α′Γ′ τέμνονται στο $Β_1$, τότε: i) τα σημεία Κ, Λ, Μ είναι συνευθειακά και ii) οι ευθείες ΑΑ′, ΒΒ′ και ΓΓ′ διέρχονται από το ίδιο σημείο ή είναι παράλληλες. (Δύο τέτοια τρίγωνα λέγονται ομόλογα).*

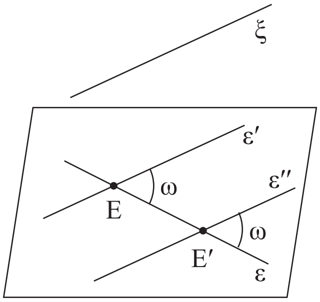
3. *Δίνεται ευθεία ε και δύο τυχαία σημεία Α και Β εκτός αυτής, ώστε οι ευθείες ΑΒ και ε να είναι ασύμβατες. Αν Γ τυχαίο σημείο της ε, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του βαρυκέντρου του τριγώνου ΑΒΓ.*

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

- Δύο επίπεδα είναι παράλληλα, αν δύο τεμνόμενες ευθείες του ενός είναι παράλληλες στο άλλο.
- Αν δύο επίπεδα είναι παράλληλα, κάθε ευθεία του ενός είναι παράλληλη στο άλλο.
- Δύο ευθείες τέμνονται από τρία παράλληλα επίπεδα σε τμήματα ανάλογα.

12.5 Γωνία δύο ευθειών - Ορθογώνιες ευθείες

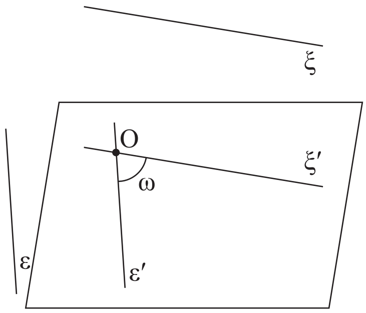
► Καθετότητα ασύμβατων ευθειών



Σχήμα 20

Θεωρούμε δύο ασύμβατες ευθείες ε και ξ (σχ.20). Από τυχαίο σημείο Ε της ευθείας ε κατασκευάζουμε την ευθεία ε′, παράλληλη της ξ. Οι ευθείες ε και ε′, τέμνονται στο σημείο Ε, άρα είναι συνεπίπεδες. Η γωνία ω που σχηματίζουν οι ευθείες ε και ε′ λέγεται ***γωνία των δύο ασύμβατων*** ευθειών ε και ξ.

Η γωνία αυτή δεν εξαρτάται από την επιλογή του σημείου Ε, γιατί αν φέρουμε την ε″ παράλληλη στην ξ από άλλο σημείο Ε′ της ε, τότε οι ευθείες ε, ε′ και ε″ είναι συνεπίπεδες και επιπλέον οι ευθείες ε′ και ε″, ως παράλληλες, θα σχηματίζουν με την ε τις εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες. Άρα, η γωνία των ασύμβατων ευθειών δεν εξαρτάται από την επιλογή του σημείου Ε.



Σχήμα 21

Αποδεικνύεται ότι η γωνία των ασύμβατων ευθειών μπορεί να κατασκευασθεί και ως εξής: Θεωρούμε ένα σημείο Ο του χώρου (σχ.21). Στο επίπεδο (Ο, ε) κατασκευάζουμε την ε′ παράλληλη της ευθείας ε από το Ο. Στο επίπεδο (Ο, ξ) κατασκευάζουμε την ξ′, παράλληλη της ευθείας ξ από το Ο. Έτσι, στο Ο έχουμε τις τεμνόμενες, επομένως συνεπίπεδες, ευθείες ε′ και ξ′. Η γωνία των ευθειών αυτών είναι η γωνία των δύο ασύμβατων. Δύο ασύμβατες ευθείες λέγονται ***ορθογώνιες*** ή ***ασυμβάτως κάθετες***, όταν η γωνία τους είναι ορθή.

► Καθετότητα ευθείας και επιπέδου

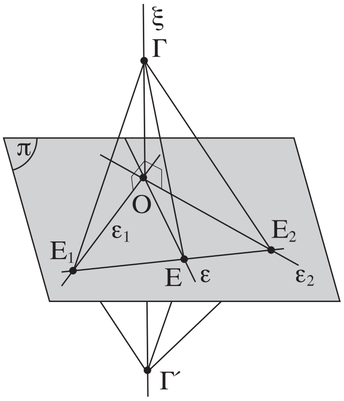
Ορισμός

Μία ευθεία λέγεται *κάθετη* σε ένα επίπεδο, όταν είναι κάθετη σε κάθε ευθεία του επιπέδου που διέρχεται από το ίχνος της.

Επίσης, το επίπεδο λέγεται ***κάθετο στην ευθεία***. Κάθε ευθεία που δεν είναι κάθετη ούτε παράλληλη σε ένα επίπεδο λέγεται ***πλάγια*** ή λέμε ότι ***τέμνει πλάγια*** το επίπεδο.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Αν μία ευθεία είναι κάθετη σε δύο τεμνόμενες ευθείες ενός επιπέδου στο κοινό τους σημείο, τότε είναι κάθετη σε όλες τις ευθείες του επιπέδου που διέρχονται από το ίχνος της.



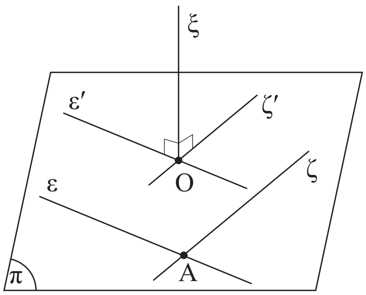
Σχήμα 22

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $ε_1$ και $ε_2$ είναι οι τεμνόμενες ευθείες του επιπέδου π (σχ.22), Ο το κοινό τους σημείο και ξ η κάθετη στις $ε_1$ και $ε_2$ στο Ο, θα αποδείξουμε ότι η ξ είναι κάθετη στην τυχαία ευθεία ε του επιπέδου π που διέρχεται από το Ο. Θεωρούμε τα σημεία Γ και Γ′ της ευθείας ξ συμμετρικά ως προς Ο. Επίσης, θεωρούμε τα σημεία $Ε_1$, $Ε_2$ και Ε που είναι συνευθειακά και βρίσκονται στις ευθείες $ε_1$, $ε_2$ και ε αντίστοιχα. Τότε, έχουμε $ΓΕ_1 = Γ'Ε_1$ και $ΓΕ_2 = Γ'Ε_2$, διότι οι ευθείες $ΟΕ_1$ και $ΟΕ_2$ είναι μεσοκάθετοι του ΓΓ′. Τα τρίγωνα $ΓΕ_1Ε_2$ και $Γ'Ε_1Ε_2$ είναι ίσα, άρα οι γωνίες $Γ\hat{Ε}_1Ε_2$ και $Γ'\hat{Ε}_1Ε_2$ είναι ίσες. Τέλος, τα τρίγωνα $ΓΕ_1Ε$ και $Γ'Ε_1Ε$ είναι ίσα, άρα ΓΕ = Γ′Ε. Τότε, το τρίγωνο ΓΕΓ′ είναι ισοσκελές και η ΕΟ είναι διάμεσος, άρα και ύψος. Δηλαδή, η ευθεία ε είναι κάθετη στην ξ.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Μία ευθεία ορθογώνια σε δύο τεμνόμενες ευθείες είναι κάθετη στο επίπεδο που αυτές ορίζουν.



Σχήμα 23

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι η ευθεία ξ, που είναι ορθογώνια στις ε και ζ (σχ.23), τέμνει το επίπεδο π = (ε, ζ). Έστω ότι η ξ δεν το τέμνει. Από τυχαίο σημείο Μ της ξ φέρουμε τις παράλληλες στις ε και ζ, οι οποίες μαζί με την ξ θα ανήκουν στο παράλληλο επίπεδο του π από το Μ. Αλλά τότε σε αυτό το επίπεδο έχουμε δύο κάθετες στην ξ από το Μ, που είναι άτοπο. Άρα η ξ τέμνει το π, έστω σε σημείο Ο. Από το Ο φέρουμε τις ευθείες ε′ και ζ′ παράλληλες των ε και ζ. Η ξ τότε είναι κάθετη σε δύο τεμνόμενες ευθείες του επιπέδου π, άρα είναι κάθετο στο π.

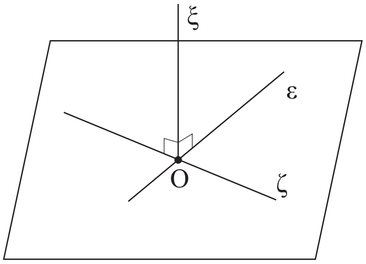
Ανάλογα αποδεικνύεται και η ακόλουθη πρόταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ Ι

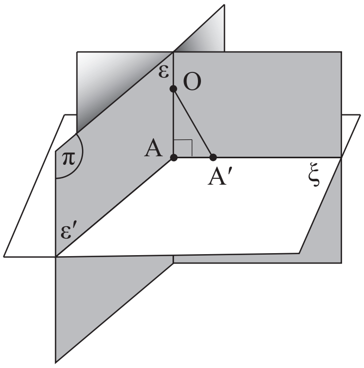
Αν ε και ζ είναι δύο τεμνόμενες ευθείες και η ευθεία ξ είναι ορθογώνια στην ε και κάθετη στην ζ, τότε η ξ είναι κάθετη στο επίπεδο (ε, ζ).

Η καθετότητα ευθείας ξ και επιπέδου π συμβολίζεται με $ξ \perp π$.

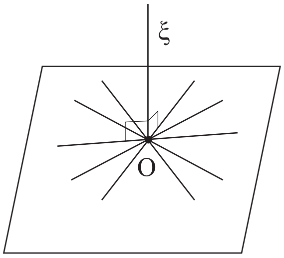
Τα θεωρήματα Ι και ΙΙ και η παραπάνω πρόταση αποτελούν κριτήρια για τον έλεγχο της καθετότητας ευθείας και επιπέδου. Αρκεί δηλαδή να αποδείξουμε ότι **μία ευθεία είναι ορθογώνια ή κάθετη σε δύο τεμνόμενες ευθείες του επιπέδου**.



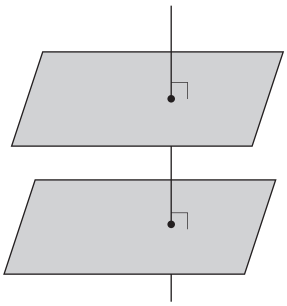
Σχήμα 24

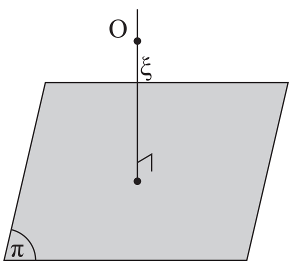


Σχήμα 25



Σχήμα 26


Σχήμα 27



Σχήμα 28

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ

Υπάρχει μοναδικό επίπεδο κάθετο σε ευθεία ξ, που διέρχεται από σημείο Ο του χώρου.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

i) Το σημείο Ο ανήκει στην ευθεία ξ. Σε δύο επίπεδα που περιέχουν την ευθεία ξ κατασκευάζουμε δύο ευθείες ε και ζ κάθετες στην ξ (σχ.24), που διέρχονται από το Ο. Αυτές ορίζουν επίπεδο κάθετο στην ευθεία ξ. Το επίπεδο αυτό είναι μοναδικό, γιατί αν υπήρχε και δεύτερο θα περιείχε τις ευθείες ε και ζ, άρα τα επίπεδα θα ταυτίζονταν.

ii) Το σημείο Ο είναι εκτός της ξ. Στο επιπέδο (Ο, ξ) φέρουμε την ευθεία ε (σχ.25), κάθετη στην ξ και έστω Α το σημείο τομής των ευθειών αυτών. Επίσης, σε κάποιο άλλο επίπεδο, που περιέχει την ξ, φέρουμε ευθεία ε′ κάθετη στην ξ στο Α. Οι ευθείες ε και ε′ ορίζουν επίπεδο π κάθετο στην ξ, που περιέχει το Ο.

Έστω ότι υπάρχει και δεύτερο επίπεδο π′ κάθετο στην ξ που διέρχεται από το Ο. Το π′ δε μπορεί να τέμνει την ξ στο Α, γιατί τότε θα υπήρχαν δύο επίπεδα κάθετα στην ξ από το Α, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως, το π′ θα τέμνει την ξ σε άλλο σημείο, έστω το Α′. Τότε όμως, στο επίπεδο (Ο, ξ) θα είχαμε δύο κάθετες στην ευθεία ξ, από το σημείο Ο εκτός αυτής, που είναι άτοπο.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

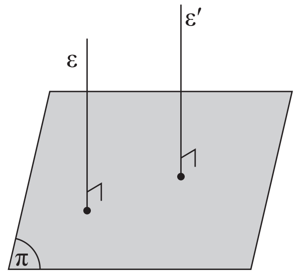
i) Το σύνολο των ευθειών του χώρου, που τέμνουν κάθετα μία ευθεία ξ σε ένα σημείο της Ο, βρίσκονται στο κάθετο επίπεδο της ξ στο Ο (σχ.26).

ii) Δύο επίπεδα κάθετα στην ίδια ευθεία είναι παράλληλα μεταξύ τους (σχ.27).

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται η ακόλουθη πρόταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ ΙΙ

Υπάρχει μοναδική ευθεία ξ κάθετη σε επίπεδο π, που διέρχεται από σημείο Ο του χώρου (σχ.28).



Σχήμα 29

ΠΟΡΙΣΜΑ

Δύο ευθείες κάθετες στο ίδιο επίπεδο είναι παράλληλες (σχ.29).

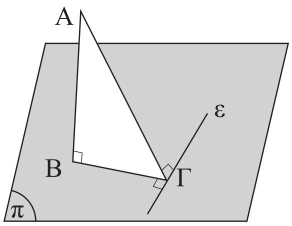
ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΚΑΘΕΤΩΝ

i) Αν η ευθεία ΑΒ (σχ.30) είναι κάθετη σε επίπεδο π (Β σημείο του π) και η ευθεία ΒΓ είναι κάθετη σε ευθεία ε του π, (Γ σημείο της ε), τότε η ΑΓ είναι κάθετη στην ευθεία ε.

ii) Αν η ευθεία ΑΒ είναι κάθετη σε επίπεδο π και η ευθεία ΑΓ είναι κάθετη σε ευθεία ε του π, τότε η ΒΓ είναι κάθετη στην ευθεία ε.

iii) Αν η ευθεία ΑΓ είναι κάθετη στην ε, η ευθεία ΒΓ είναι κάθετη στην ε και η ΑΒ είναι κάθετη στη ΒΓ, τότε η ευθεία ΑΒ είναι κάθετη στο επίπεδο π.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 30

i) Η ευθεία ΑΒ είναι ορθογώνια και η ΒΓ είναι κάθετη στην ε (σχ.30), άρα το επίπεδο (ΑΒ, ΒΓ) είναι κάθετο στην ε και Γ είναι το ίχνος της ε πάνω σε αυτό. Τότε, κάθε ευθεία του επιπέδου που διέρχεται από το ίχνος Γ είναι κάθετη στην ε. Άρα, η ΑΓ είναι κάθετη στην ε.

ii) Η ευθεία ΑΒ είναι ορθογώνια και η ΑΓ κάθετη στην ευθεία ε. Επομένως, η ευθεία ε είναι κάθετη στο επίπεδο (ΑΒ, ΑΓ) στο Γ, σύμφωνα με την πρόταση Ι. Άρα η ευθεία ε είναι κάθετη στην ευθεία ΒΓ του επιπέδου (ΑΒ, ΑΓ), που διέρχεται από το ίχνος της Γ.

iii) Η ευθεία ε είναι κάθετη στο επίπεδο (ΑΓ, ΒΓ), γιατί η ε είναι κάθετη στις ευθείες του ΑΓ και ΒΓ. Άρα η ευθεία ΑΒ του επιπέδου (ΑΓ, ΒΓ) είναι ορθογώνια στην ευθεία ε. Τέλος, η ευθεία ΑΒ είναι κάθετη στο επίπεδο π, γιατί είναι ορθογώνια στην ε και κάθετη στη ΒΓ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Να δείξετε στην αίθουσα διδασκαλίας δύο ευθείες ασυμβάτως κάθετες.*

2. *Να δείξετε μία ευθεία κάθετη στο επίπεδο του δαπέδου.*

3. *Να θεωρήσετε έναν τοίχο της αίθουσας διδασκαλίας και να γίνει πρακτική εφαρμογή των τριών εκφράσεων του Θεωρήματος των τριών καθέτων.*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να αποδείξετε ότι μία ευθεία και ένα επίπεδο κάθετα στην ίδια ευθεία είναι παράλληλα ή ότι το επίπεδο περιέχει την ευθεία.*

2. *Έστω ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο, Μ το μέσο της βάσης ΒΓ και ΑΝ ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στο επίπεδο του τριγώνου. Να αποδείξετε ότι*

i) η ευθεία ΜΝ είναι κάθετη στην ΒΓ,

ii) η ΒΓ είναι κάθετη στο επίπεδο (Α, Μ, Ν).

3. *Να αποδείξετε ότι αν δύο ευθείες είναι ορθογώνιες, τότε υπάρχει επίπεδο που περιέχει τη μία και είναι κάθετο στην άλλη, και αντίστροφα.*

4. *Να κατασκευάσετε ευθεία ε που διέρχεται από σημείο Ο, είναι παράλληλη σε επίπεδο π και ορθογώνια σε ευθεία ε του π.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Έστω (Κ, ρ) κύκλος, ΑΚ ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στο επίπεδο π του κύκλου και Μ τυχαίο σημείο του κύκλου. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΜ είναι κάθετη στην εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Μ.*

2. *Από το κέντρο Μ ορθογωνίου ΑΒΓΔ φέρουμε την ευθεία ε κάθετη στο επίπεδο του ορθογωνίου. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που ορίζεται από το τυχαίο σημείο της ε και το μέσο Ν της ΑΒ είναι κάθετη στην ΑΒ και ορθογώνια στη ΓΔ.*

3. *Σε επίπεδο π φέρουμε κύκλο διαμέτρου ΑΒ και έστω Μ τυχαίο σημείο του κύκλου. Φέρουμε, επίσης, το τμήμα ΑΣ, κάθετο στο επίπεδο π στο Α, το τμήμα ΑΓ κάθετο στην ευθεία ΣΒ στο Γ και το τμήμα ΑΝ κάθετο στην ευθεία ΣΜ στο Ν. Να αποδείξετε ότι*

i) $\Sigma\hat{M}B = 90°$,

ii) $\Sigma A^2 = \Sigma M \cdot \Sigma N = \Sigma B \cdot \Sigma\Gamma$,

iii) τα τρίγωνα ΣΓΝ και ΣΜΒ είναι όμοια,

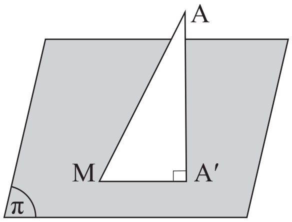
iv) $\Sigma\hat{\Gamma}N = 90°$,

v) η ΣΓ είναι κάθετη στο επίπεδο (Ν, Γ, Α),

vi) $\Gamma\hat{N}A = 90°$,

vii) να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Ν, αν το Μ κινείται στον παραπάνω κύκλο.

12.6 Απόσταση σημείου από επίπεδο - Απόσταση δύο παράλληλων επιπέδων



Σχήμα 31

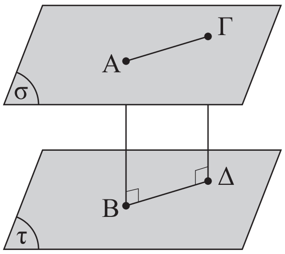
Ορισμός Ι

Ορθή προβολή **ή *προβολή* Α′ σημείου Α στο επίπεδο π λέγεται το σημείο τομής του επιπέδου π με την κάθετο από το Α στο επίπεδο π (σχ.31).**

Αν σημείο Α βρίσκεται εκτός επιπέδου π, Α′ είναι η προβολή του Α στο π και Μ τυχαίο σημείο του π (σχ.31), τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΑ′Μ προκύπτει ότι η κάθετη πλευρά ΑΑ′ είναι μικρότερη από την υποτείνουσα ΑΜ. Δηλαδή, το τμήμα ΑΑ′ είναι το μικρότερο από τα τμήματα με αρχή το σημείο Α και τέλος το τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου π. Μπορούμε, επομένως, να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός ΙΙ

Απόσταση σημείου Α από επίπεδο π **λέγεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΑ′, όπου Α′ η προβολή του Α στο επίπεδο π.**



Σχήμα 32

Αν θεωρήσουμε δύο παράλληλα επίπεδα σ και τ και Β, Δ (σχ.32) είναι οι προβολές των σημείων Α, Γ του σ στο τ, τότε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλα μεταξύ τους, ως κάθετα στο τ. Επίσης, τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ είναι παράλληλα (θεώρημα IV §12.4), άρα το ΑΒΔΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είναι ίσα. Μπορούμε λοιπόν να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός ΙΙΙ

Απόσταση δύο παράλληλων επιπέδων **λέγεται η απόσταση ενός σημείου του ενός επιπέδου από το άλλο (σχ.32).**

Ορισμός IV

Το επίπεδο που είναι κάθετο στο μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος λέγεται *μεσοκάθετο επίπεδο* του ευθύγραμμου τμήματος.

Ορισμός V

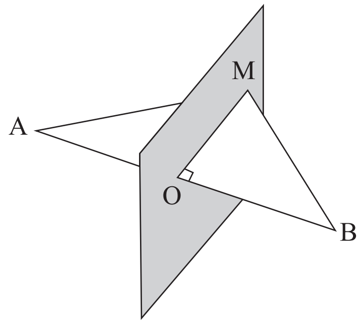
Το μήκος του τμήματος της κοινής καθέτου δύο ασύμβατων ευθειών, που περιλαμβάνεται μεταξύ τους, λέγεται *απόσταση των ασύμβατων ευθειών*.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χώρου που ισαπέχουν από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι το μεσοκάθετο επίπεδο του ευθύγραμμου τμήματος.

Απόδειξη

Έστω Μ το τυχαίο σημείο του χώρου που ισαπέχει από τα άκρα Α και Β του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ (σχ.33). Το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισοσκελές, επομένως η διάμεσος ΜΟ είναι και ύψος του τριγώνου. Δηλαδή, το Μ είναι σημείο της ευθείας ΟΜ που είναι κάθετη στο μέσο Ο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Το σύνολο των ευθειών αυτών ανήκουν στο επίπεδο που είναι κάθετο στο ΑΒ, στο μέσο Ο.



Σχήμα 33

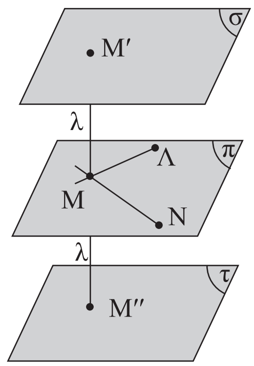
Αντίστροφα, αν Μ είναι το τυχαίο σημείο του μεσοκάθετου επιπέδου στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΟΜ και ΒΟΜ είναι ίσα, επομένως οι υποτείνουσες ΑΜ και ΒΜ είναι ίσες.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χώρου που ισαπέχουν από δύο παράλληλα επίπεδα είναι το μεσοπαράλληλο επίπεδο.

Απόδειξη - Κατασκευή

Αν σ και τ είναι δύο παράλληλα επίπεδα που απέχουν απόσταση 2λ, τα σημεία Μ του χώρου που ισαπέχουν από τα σ και τ απέχουν απόσταση λ από αυτά, επομένως βρίσκονται στο επίπεδο π που ισαπέχει από τα σ και τ.



Σχήμα 34

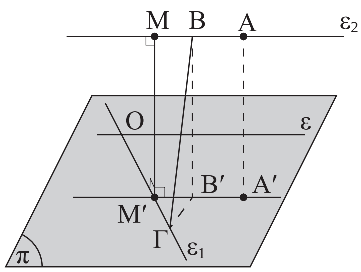
Αντίστροφα, αν Λ, Μ και Ν είναι τρία σημεία του τόπου μη συνευθειακά, τότε επειδή αυτά ισαπέχουν από το επίπεδο σ, οι τεμνόμενες ευθείες ΛΜ και ΝΜ είναι παράλληλες στο σ, άρα το επίπεδο που ορίζουν είναι παράλληλο στο σ, επομένως και στο τ. Επειδή τα σημεία Λ, Μ και Ν ισαπέχουν από τα σ και τ, ανήκουν σε επίπεδο που ισαπέχει από τα σ και τ και είναι παράλληλο σε αυτά. Το επίπεδο αυτό ονομάζεται ***μεσοπαράλληλο*** επίπεδο των σ και τ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Υπάρχει μοναδική ευθεία ε κάθετη σε δύο ασύμβατες ευθείες.

Απόδειξη

Έστω ε_1, ε_2 δύο ασύμβατες ευθείες και από τυχαίο σημείο Ο της ε_1 φέρουμε την ευθεία ε παράλληλη στην ε_2 (σχ.35). Οι ευθείες ε και ε_1 ορίζουν επίπεδο π. Προφανώς, η ευθεία ε_2 είναι παράλληλη στο π. Προβάλλουμε ένα σημείο Α της ε_2 στο επίπεδο π και έστω Α′ η προβολή του. Από το Α′ φέρουμε ευθεία



Σχήμα 35

παράλληλη στην $ε_2$, η οποία ανήκει στο επίπεδο π και τέμνει την $ε_1$ σε σημείο Μ′.

Οι ευθείες $ε_2$ και Α′Μ′, ως παράλληλες, ορίζουν επίπεδο στο οποίο βρίσκεται η ΑΑ′ και η παράλληλη από το Μ′ στην ΑΑ′, η οποία θα τέμνει την $ε_2$ σε σημείο Μ. Η ευθεία ΜΜ′ είναι κάθετη στις ευθείες $ε_1$ και Α′Μ′, γιατί είναι κάθετη στο επίπεδο π. Όμως, η Α′Μ′ είναι παράλληλη στην $ε_2$, άρα η ευθεία ΜΜ′ είναι η κοινή κάθετος των $ε_1$ και $ε_2$.

Η ευθεία αυτή είναι μοναδική, γιατί αν υπήρχε και δεύτερη ευθεία ΝΝ′ κάθετη στις $ε_1$ και $ε_2$, τότε οι παράλληλες ΜΜ′ και ΝΝ′ θα όριζαν ένα επίπεδο στο οποίο θα ανήκαν επίσης οι ασύμβατες $ε_1$ και $ε_2$, που είναι άτοπο.

Θα αποδείξουμε ότι το τμήμα ΜΜ′ είναι μικρότερο από το τυχαίο τμήμα ΒΓ, που ορίζεται μεταξύ δύο σημείων Β και Γ των $ε_1$ και $ε_2$ αντίστοιχα. Προβάλλουμε το σημείο Β στο π και έστω Β′ η προβολή του. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΒ′Γ προκύπτει ότι η υποτείνουσα ΒΓ είναι μεγαλύτερη από την κάθετη πλευρά ΒΒ′. Αλλά η ΒΒ′ είναι ίση με τη ΜΜ′, άρα η ΒΓ είναι μεγαλύτερη από τη ΜΜ′.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων ενός επιπέδου, τα οποία ισαπέχουν από δύο σημεία που δεν ανήκουν σε αυτό.*

2. *Δίνονται δύο σημεία Α και Β και ευθεία ε, ασύμβατη με την ΑΒ. Να βρείτε σημείο Μ της ε τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ΑΒΜ να είναι ισοσκελές.*

3. *Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία ε που τέμνει πλάγια ένα επίπεδο π είναι κάθετη σε μία μόνο ευθεία του π.*

4. *Έστω επίπεδο π, ευθεία ε του π και Α σημείο εκτός του π. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της προβολής Α′ του σημείου Α στο επίπεδο π, όταν το επίπεδο περιστρέφεται γύρω από την ευθεία ε.*

5. *Δίνεται επίπεδο π, σημείο Α του π και σημείο Ο εκτός του π. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της προβολής του σημείου Ο στις ευθείες του π που περνάνε από το σημείο Α.*

6. *Δίνεται επίπεδο π, ευθεία ε του π και σημείο Ο εκτός του π. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της προβολής του σημείου Ο στις ευθείες του π που είναι παράλληλες στην ε.*

7. *Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων του χώρου που ισαπέχουν από τις κορυφές ενός τριγώνου.*

8. *Να βρείτε σημείο του χώρου που ισαπέχει από τέσσερα σημεία, ανά τρία μη συνευθειακά.*

9. *Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων του χώρου τα οποία απέχουν απόσταση λ από επίπεδο π.*

10. *Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ και Μ, σε τυχαία θέση. Να βρείτε επίπεδο που να διέρχεται από το Μ και να ισαπέχει από τα Α, Β και Γ.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Αν Α και Β είναι τυχαία σημεία δύο ασύμβατων ευθειών $ε_1$ και $ε_2$ αντίστοιχα, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου Μ για το οποίο ισχύει $\frac{ΜΑ}{ΜΒ} = λ$, όπου λ γνωστός αριθμός.*

2. *Να κατασκευάσετε ευθεία ε που τέμνει τρεις ασύμβατες ανά δύο ευθείες $ε_1$, $ε_2$ και $ε_3$ σε σημεία Α, Β, Γ αντίστοιχα, ώστε $\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = λ$, όπου λ γνωστός αριθμός.*

3. *Δίνεται επίπεδο π και σημεία Α, Β εκτός του π. Να κατασκευάσετε σημείο του π, το οποίο να απέχει από τα σημεία Α και Β αποστάσεις μ και ν αντίστοιχα.*

Σύνθετα Θέματα

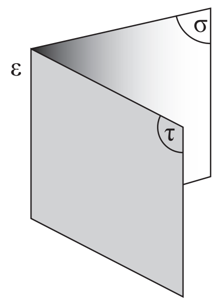
1. *Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων ενός επιπέδου π, τα οποία βλέπουν* *υπό ορθή γωνία δύο σημεία που δε βρίσκονται στο επίπεδο π.*

2. *Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη απόσταση σημείου Α από τα σημεία ενός κύκλου, όταν το Α δεν ανήκει στο επίπεδο του κύκλου.*
3. *Να κατασκευάσετε επίπεδο που να περνάει από ευθεία ε και να ισαπέχει από δύο σημεία Α και Β εκτός της ε.*
4. *Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του χώρου, για τα οποία ισχύει η σχέση* $ΜΑ^2 - ΜΒ^2 = λ^2$, *όπου Α και Β σταθερά σημεία και λ σταθερό μήκος.*
5. *Να αποδείξετε ότι για να είναι ορθογώνια δύο τμήματα ΑΒ και ΓΔ πρέπει και αρκεί να είναι:* $ΓΑ^2 - ΓΒ^2 = ΔΑ^2 - ΔΒ^2$.
6. *Να αποδείξετε ότι αν Α, Β, Γ, Δ τέσσερα σημεία που δεν είναι συνεπίπεδα και δύο από τα ζεύγη τμημάτων (ΑΒ, ΓΔ), (ΑΓ, ΔΒ), (ΑΔ, ΓΒ) είναι ορθογώνια, τότε και το τρίτο ζεύγος είναι ορθογώνιο.*
7. *Να αποδείξετε ότι αν ΑΒΓΔ είναι στρεβλό τετράπλευρο, τότε τα έξι μεσοκάθετα επίπεδα στις πλευρές και τις διαγωνίους του τετραπλεύρου διέρχονται από το ίδιο σημείο.*
8. *Δίνεται επίπεδο π, ευθεία ε του π και σημείο Ο εκτός του π. Έστω Μ τυχαίο σημείο της ε και σ επίπεδο κάθετο στην ΟΜ στο Ο. Να αποδείξετε ότι τα επίπεδα σ διέρχονται από σταθερό σημείο του π.*

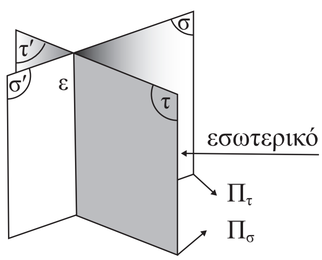
ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

- Απόσταση σημείου από επίπεδο είναι η απόσταση του σημείου από την προβολή του στο επίπεδο.
- Από τα τμήματα που έχουν αρχή ένα σημείο και τέλος τυχαίο σημείο ενός επιπέδου, το κάθετο είναι το μικρότερο από όλα τα άλλα.
- Για κάθε δύο ασύμβατες ευθείες υπάρχει μοναδική κοινή κάθετη ευθεία.

12.7 Δίεδρη γωνία - Αντίστοιχη επίπεδη μίας δίεδρης - Κάθετα επίπεδα



Σχήμα 36



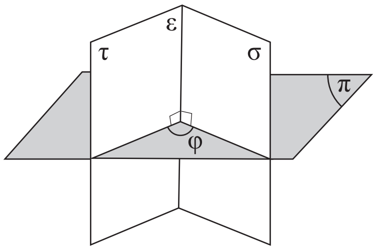
Σχήμα 37

Ορισμός Ι

Δίεδρη γωνία **λέγεται το σχήμα που αποτελείται από δύο ημιεπίπεδα, σ και τ, με κοινή αρχική ευθεία ε και τη συμβολίζουμε με ε(σ,τ).**

Τα ημιεπίπεδα σ και τ (σχ.36) λέγονται ***έδρες*** της διέδρης και η αρχική ευθεία λέγεται ***ακμή*** της διέδρης γωνίας.

Το επίπεδο του ημιεπιπέδου σ χωρίζει το χώρο σε δύο ημιχώρους. Καλούμε $Π_τ$ τον ημιχώρο στον οποίο βρίσκεται το ημιεπίπεδο τ (σχ.37). Επίσης, το επίπεδο του ημιεπιπέδου τ χωρίζει το χώρο σε δύο ημιχώρους. Καλούμε $Π_σ$ τον ημιχώρο στον οποίο βρίσκεται το ημιεπίπεδο σ. Η τομή των περιοχών $Π_σ$ και $Π_τ$ λέγεται ***κυρτή δίεδρη*** γωνία. ***Εσωτερικό*** της δίεδρης γωνίας ε(σ,τ) θα λέμε τα σημεία της κυρτής δίεδρης που δεν ανήκουν στις έδρες ή στην ακμή της. Τα



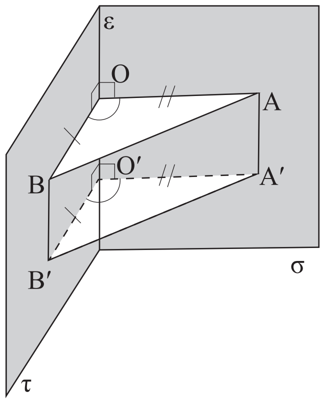
Σχήμα 38

σημεία του χώρου, που δεν είναι εσωτερικά της δίεδρης, δεν ανήκουν στις έδρες ούτε στην ακμή της, θα λέγονται ***εξωτερικά*** σημεία της δίεδρης. Η δίεδρη γωνία που έχει την ίδια ακμή και τις ίδιες έδρες αλλά περιέχει τα εξωτερικά σημεία της αρχικής δίεδρης λέγεται ***μη κυρτή*** ή ***αντικείμενη*** της αρχικής.

Τα αντικείμενα ημιεπίπεδα, σ′ και τ′ μιας δίεδρης γωνίας ε(σ,τ) σχηματίζουν μία άλλη δίεδρη γωνία (σχ.37), με την ίδια ακμή ε, που λέγεται ***κατακορυφήν*** της αρχικής και συμβολίζεται με ε(σ′,τ′).

Ορισμός ΙΙ

Η τομή μιας δίεδρης γωνίας με επίπεδο κάθετο στην ακμή της είναι μία επίπεδη γωνία στο κάθετο επίπεδο, η οποία λέγεται *αντίστοιχη επίπεδη της δίεδρης* (σχ.38).



Σχήμα 39

Αν θεωρήσουμε δύο αντίστοιχες επίπεδες γωνίες $A\hat{O}B$ και $A'\hat{O}'B'$ της δίεδρης γωνίας ε(σ,τ), με $OA = O'A'$ και $OB = O'B'$ (σχ.39), προκύπτει ότι τα $OO'B'B$ και $OO'A'A$ είναι ορθογώνια, άρα $AA'//=BB'$. Αλλά από το παραλληλόγραμμο $AA'B'B$ έχουμε $AB = A'B'$, επομένως τα τρίγωνα OAB και $O'A'B'$ είναι ίσα, άρα και οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $A'\hat{O}'B'$ είναι ίσες. Από αυτά προκύπτει ότι δύο τυχαίες επίπεδες γωνίες μίας δίεδρης γωνίας είναι ίσες.

Ορισμός ΙΙΙ

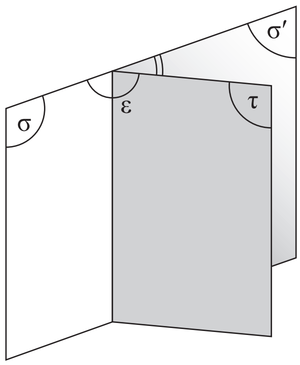
Δύο δίεδρες γωνίες λέγονται *ίσες*, αν τοποθετώντας τη μία πάνω στην άλλη εφαρμόζουν ακριβώς.

Δίεδρη γωνία δύο τεμνόμενων επιπέδων λέγεται η μικρότερη ή ίση της ορθής δίεδρη γωνία που σχηματίζουν τα δύο επίπεδα. ***Γωνία δύο επιπέδων*** λέγεται η αντίστοιχη επίπεδη της δίεδρης των δύο επιπέδων.

Αποδεικνύεται ότι:

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

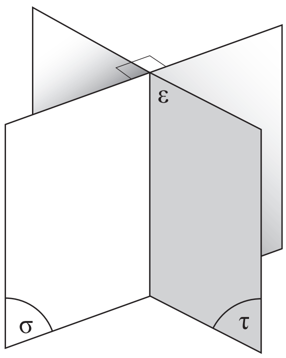
Αν δύο δίεδρες γωνίες είναι ίσες, τότε και οι αντίστοιχες επίπεδες γωνίες είναι ίσες και αντίστροφα.



Σχήμα 40

Με αυτό το θεώρημα μεταφέρουμε στις δίεδρες όλους τους ορισμούς τα μέτρα και τις ιδιότητες των επίπεδων γωνιών. Έτσι έχουμε:

- **Δύο δίεδρες γωνίες, που έχουν κοινή ακμή, μία έδρα κοινή και τις άλλες εκατέρωθεν της κοινής, λέγονται *εφεξής*.**
- **Δύο εφεξής δίεδρες των οποίων οι μη κοινές έδρες είναι αντικείμενα ημιεπίπεδα λέγονται *παραπληρωματικές* (σχ.40).**
- **Μία δίεδρη γωνία λέγεται *οξεία*, *ορθή* ή *αμβλεία*, αν η αντίστοιχη επίπεδη γωνία της δίεδρης είναι οξεία, ορθή ή αμβλεία.**
- **Όταν δύο επίπεδα τεμνόμενα σχηματίζουν μία από τις τέσσερις δίεδρες γωνίες ορθή (σχ.41), τότε και οι τέσσερις είναι ορθές.**



Σχήμα 41

Ορισμός IV

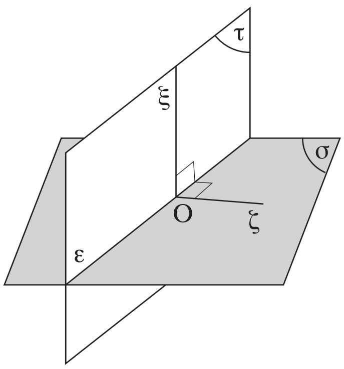
Δύο επίπεδα που σχηματίζουν μία ορθή δίεδρη λέγονται *κάθετα επίπεδα*.

Την καθετότητα δύο επιπέδων σ και τ τη συμβολίζουμε με $\sigma \perp \tau$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Αν μία ευθεία ξ είναι κάθετη σε ένα επίπεδο σ, τότε κάθε επίπεδο που περιέχει την ξ είναι κάθετο στο σ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

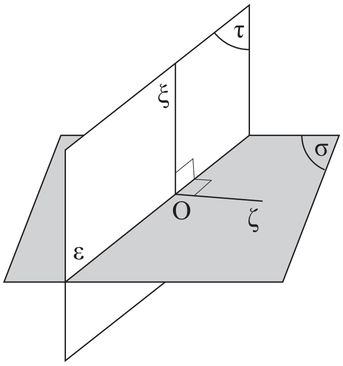


Σχήμα 42

Έστω O το κοινό σημείο της ξ με το επίπεδο σ (σχ.42), ε η ευθεία τομής των επιπέδων σ και τ και ζ ευθεία του σ κάθετη στην ε, στο σημείο O. Η γωνία των ευθειών ξ και ζ είναι η αντίστοιχη της δίεδρης των επιπέδων σ και τ, αφού οι ευθείες ξ και ζ είναι κάθετες στην ακμή ε. Επειδή όμως η ευθεία ξ είναι κάθετη στο επίπεδο σ, θα είναι κάθετη σε κάθε ευθεία του επιπέδου που περνάει από το O, άρα και στη ζ. Επομένως, η επίπεδη γωνία των ευθειών ξ και ζ είναι ορθή.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ

Αν δύο επίπεδα είναι κάθετα, κάθε ευθεία του ενός κάθετη στην τομή τους είναι κάθετη στο άλλο.



Σχήμα 42α

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

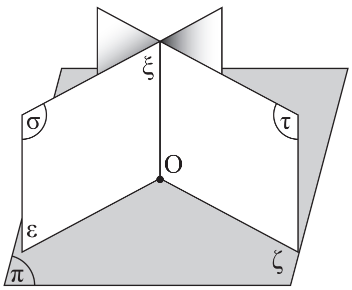
Έστω ξ ευθεία του επιπέδου τ (σχ.42α), κάθετη στην κοινή ευθεία ε των κάθετων επιπέδων σ και τ και Ο το ίχνος της ξ στο επίπεδο σ. Έστω ζ η ευθεία του επιπέδου σ που είναι κάθετη στην ε και περνάει από το Ο. Οι ευθείες ξ και ζ ορίζουν την αντίστοιχη επίπεδη γωνία της δίεδρης που έχει ως έδρες δύο από τα τέσσερα ημιεπίπεδα των επιπέδων σ και τ. Επειδή τα επίπεδα είναι κάθετα, η αντίστοιχη επίπεδη της δίεδρης είναι ορθή. Άρα, οι ευθείες ξ και ζ είναι κάθετες. Τότε η ευθεία ξ είναι κάθετη σε δύο ευθείες, τις ε και ζ, του επιπέδου σ, άρα η ευθεία ξ είναι κάθετη στο σ.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

i) Αν δύο επίπεδα είναι κάθετα μεταξύ τους, τότε η ευθεία που είναι κάθετη στο πρώτο και διέρχεται από σημείο του δευτέρου, βρίσκεται στο δεύτερο επίπεδο.

ii) Αν μία ευθεία ξ είναι κάθετη σε επίπεδο σ, τότε κάθε επίπεδο παράλληλο στην ξ είναι κάθετο στο επίπεδο σ.

iii) Αν δύο τεμνόμενα επίπεδα είναι κάθετα σε επίπεδο π, τότε η τομή τους είναι κάθετη στο π.



Σχήμα 43

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η απόδειξη των πορισμάτων i) και ii) είναι προφανής.

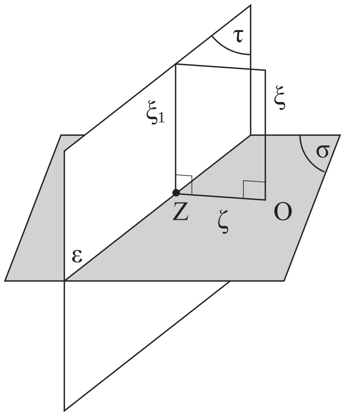
iii) Τα επίπεδα σ και τ τέμνουν το π κατά τις ευθείες ε και ζ αντίστοιχα. Έστω Ο το κοινό σημείο των ε και ζ (σχ.43). Τότε, η ευθεία που είναι κάθετη στο π και περνάει από το Ο, σύμφωνα με το πόρισμα i), ανήκει στο επίπεδο σ. Αλλά για τον ίδιο λόγο ανήκει και στο τ. Άρα είναι η κοινή ευθεία των δύο επιπέδων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αν δύο επίπεδα είναι κάθετα, τότε κάθε ευθεία ξ κάθετη στο ένα είναι παράλληλη στο άλλο ή ανήκει σε αυτό.

Απόδειξη

Από το σημείο τομής Ο της ευθείας ξ και του επιπέδου σ φέρουμε την ευθεία ζ (σχ.44), κάθετη στην κοινή ευθεία ε των δύο επιπέδων. Έστω Ζ το σημείο τομής των ευθειών ε και ζ. Η ευθεία ζ είναι κάθετη στο επίπεδο τ, γιατί από την κατασκευή είναι κάθετη στην τομή των δύο κάθετων επιπέδων. Το επίπεδο των τεμνόμενων ευθειών ξ και ζ τέμνει το τ κατά την ευθεία ξ_1 που είναι κάθετη στην ζ λόγω της καθετότητας του επιπέδου τ με την ευθεία ξ. Οι ευθείες ξ και ξ_1 είναι παράλληλες, γιατί είναι κάθετες στην ευθεία ζ και βρίσκονται στο επίπεδο (ξ, ξ_1). Αν το ίχνος Ο της ευθείας ξ στο σ είναι σημείο της ευθείας ε, τότε η ευθεία ξ ανήκει στο τ.



Σχήμα 44

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Πώς βρίσκουμε την αντίστοιχη επίπεδη μίας δίεδρης γωνίας;*
2. *Πώς κατασκευάζεται το επίπεδο που διχοτομεί μία δίεδρη γωνία;*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να κατασκευάσετε επίπεδο, που διέρχεται από σημείο Ο και είναι κάθετο σε δοσμένο επίπεδο π.*
2. *Να αποδείξετε ότι αν ένα επίπεδο είναι κάθετο στην ακμή μιας δίεδρης, είναι κάθετο και στις έδρες.*
3. *Στην έδρα σ δίεδρης ε(σ,τ) δίνονται δύο σημεία Β, Γ εκτός της ε. Να βρεθεί σημείο Α της έδρας τ τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές και ορθογώνιο στο Α.*
4. *Από δοσμένο σημείο Ο να κατασκευάσετε επίπεδο π κάθετο σε επίπεδο σ και παράλληλο σε ευθεία ε.*
5. *Δίνεται ευθεία ε και επίπεδο π. Να κατασκευάσετε επίπεδο που διέρχεται από την ευθεία ε και είναι κάθετο στο π.*

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

- Ίσες δίεδρες γωνίες έχουν ίσες αντίστοιχες επίπεδες και αντίστροφα.
- Κάθε επίπεδο που διέρχεται από ευθεία ξ κάθετη σε επίπεδο π είναι κάθετο στο π.
- Δύο τεμνόμενα επίπεδα κάθετα στο π τέμνονται σε ευθεία κάθετη στο π.

12.8 Προβολή σημείου και ευθείας σε επίπεδο - Γωνία ευθείας και επιπέδου

► Προβολή σημείου και ευθείας σε επίπεδο

Έχουμε ήδη ορίσει την προβολή σημείου σε επίπεδο στην §12.5. Γενικεύοντας αυτόν τον ορισμό έχουμε:

Ορισμός I

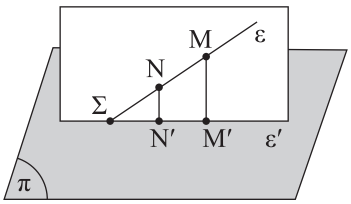
Ορθή προβολή **ή απλώς** ***προβολή ενός σχήματος σε επίπεδο π*** **λέγεται ο γεωμετρικός τόπος των ορθών προβολών όλων των σημείων του σχήματος στο επίπεδο.**

Το επίπεδο π λέγεται ***επίπεδο προβολής***.

ΘΕΩΡΗΜΑ I

Η προβολή ευθείας ε σε επίπεδο π, που δεν είναι κάθετο σε αυτή, είναι ευθεία.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 45

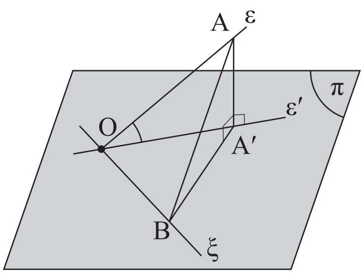
Αν M′ είναι η προβολή σημείου M της ευθείας ε στο επίπεδο π, η ευθεία MM′ (σχ.45) είναι κάθετη στο π, άρα το επίπεδο τ = (ε, MM′) είναι κάθετο στο π και έστω ε′ η τομή των δύο επιπέδων. Αν προβάλουμε το τυχαίο σημείο N της ε (διάφορο του M), η προβάλλουσα ευθεία είναι παράλληλη στη MM′ και ένα σημείο της (το N) ανήκει στο τ, άρα θα ανήκει στο τ και θα τέμνει το σ σε σημείο N′ της ευθείας ε′. Άρα η προβολή της ε είναι η ευθεία ε′.

► Γωνία ευθείας και επιπέδου

ΘΕΩΡΗΜΑ II

Η γωνία που σχηματίζει μία ευθεία ε, που τέμνει ένα επίπεδο π, με την προβολή της ε′, είναι η μικρότερη από τις γωνίες που σχηματίζει η ευθεία ε με τυχαία ευθεία του π που την τέμνει.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 46

Θεωρούμε σημείο A της ευθείας ε και έστω A′ η προβολή του στο π (σχ.46). Στην τυχαία ευθεία ξ του επιπέδου π που περνάει από το O παίρνουμε σημείο B τέτοιο, ώστε OA′ = OB. Προφανώς έχουμε AA′ < AB, γιατί η AA′ είναι κάθετη στο επίπεδο. Τα τρίγωνα OAA′ και OAB έχουν την

ΟΑ κοινή και ΟΑ′ = ΟΒ και ΑΑ′ < ΑΒ, άρα $A\hat{O}A' < A\hat{O}B$. Η γωνία των ευθειών ε και ε′ είναι η μικρότερη, καθώς αυτή η ανισότητα ισχύει για κάθε ευθεία ξ που περνάει από το Ο και είναι διάφορη της ε′.

Ορισμός ΙΙ

Γωνία ευθείας και επιπέδου λέγεται η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με την προβολή της στο επίπεδο.

ΣΧΟΛΙΟ

*Πολλές φορές στη βιβλιογραφία η γωνία ευθείας και επιπέδου λέγεται και **κλίση ευθείας** ως προς επίπεδο. Επειδή όμως ο όρος "κλίση" έχει ορισθεί στην αναλυτική γεωμετρία ως η εφαπτομένη γωνίας, αποφεύγουμε τη χρησιμοποίηση αυτού του όρου για να μη γίνεται σύγχυση.*

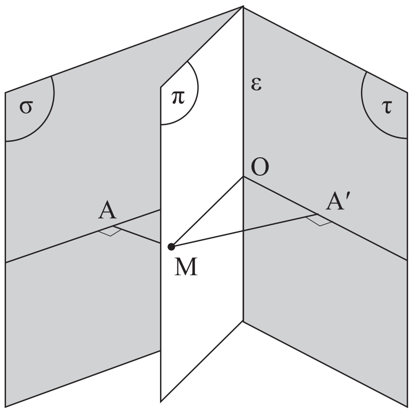
Διχοτόμο ημιεπίπεδο μιας δίεδρης ε(σ,τ) λέγεται το ημιεπίπεδο π που έχει ως αρχική ευθεία την ακμή ε και χωρίζει τη δίεδρη σε δύο ίσες δίεδρες. Το αντικείμενο του διχοτόμου ημιεπιπέδου μιας δίεδρης είναι το διχοτόμο ημιεπίπεδο π′ της αντικείμενης δίεδρης γωνίας. Τα ημιεπίπεδα π και π′ σχηματίζουν ένα επίπεδο που διχοτομεί τη δίεδρη γωνία και την αντικείμενή της και λέγεται ***διχοτόμο επίπεδο*** της δίεδρης.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του εσωτερικού μιας κυρτής δίεδρης που ισαπέχουν από τις έδρες της είναι το διχοτόμο ημιεπίπεδο της δίεδρης.

Απόδειξη

Αν ΜΑ και ΜΑ′, (σχ.47), είναι οι αποστάσεις του εσωτερικού σημείου Μ της δίεδρης ε(σ,τ), από τις έδρες σ και τ, έχουμε ΑΜ = ΜΑ′. Οι ευθείες ΜΑ και ΜΑ′ είναι ορθογώνιες στην ακμή ε, ως κάθετες στα επίπεδα σ και τ αντίστοιχα, και επειδή είναι τεμνόμενες, ορίζουν επίπεδο κάθετο στην ακμή ε που την τέμνει στο Ο. Οι ευθείες τομής του επιπέδου αυτού από τις έδρες σ και τ ορίζουν την $A\hat{O}A'$, αντίστοιχη επίπεδη της δίεδρης ε(σ,τ).



Σχήμα 47

Τότε τα τρίγωνα ΟΜΑ και ΟΜΑ′ είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια στις κορυφές Α και Α′, έχουν την ΟΜ κοινή και ΜΑ = ΜΑ′. Επομένως, οι γωνίες $A\hat{O}M$ και $A'\hat{O}M$ είναι ίσες. Αυτές όμως είναι οι αντίστοιχες επίπεδες των δίεδρων ε(σ,π) και ε(π,τ).

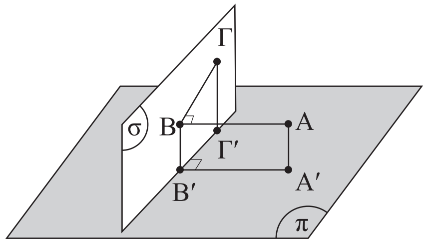
Αντίστροφα, αν Μ είναι σημείο του ημιεπιπέδου π που διχοτομεί τη δίεδρη ε(σ,τ) και το προβάλλουμε στις έδρες σ και τ στα Α και Α′ αντίστοιχα, τα τρίγωνα ΟΜΑ και ΟΜΑ′ είναι ορθογώνια στα Α και Α′, έχουν την ΟΜ κοινή και $A\hat{O}M = A'\hat{O}M$. Επομένως ΜΑ = ΜΑ′.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Αν η μία πλευρά ορθής γωνίας είναι παράλληλη σε επίπεδο και η άλλη δεν είναι κάθετη στο επίπεδο, τότε η γωνία προβάλλεται ως ορθή.

Απόδειξη

Θεωρούμε την ορθή γωνία $A\hat{B}\Gamma$ (σχ.48), της οποίας η πλευρά ΑΒ είναι παράλληλη στο επίπεδο π και έστω $A'B'\Gamma'$ η προβολή της στο π. Το επίπεδο σ που είναι κάθετο στην ευθεία ΑΒ στο Β περιέχει τη ΒΓ, αφού $AB \perp B\Gamma$. Το επίπεδο που προβάλλει την ΑΒ στο π τέμνει το π κατά την ευθεία $A'B'$ που είναι παράλληλη στην ΑΒ, άρα η $A'B'$ είναι κάθετη στο σ. Επομένως η $A'B'$ είναι κάθετη στη $B'\Gamma'$.



Σχήμα 48

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Η προβολή Α'Β' ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ σε επίπεδο π έχει μήκος μικρότερο, μεγαλύτερο ή ίσο με αυτό του ΑΒ; Πότε ισχύει η ισότητα;*
2. *Το μέσο ευθύγραμμου τμήματος προβάλλεται στο μέσο της προβολής;*
3. *Ευθύγραμμο τμήμα προβάλλεται σε επίπεδο. Ποια πρέπει να είναι η γωνία που σχηματίζει ένα ευθύγραμμο τμήμα με το επίπεδο, ώστε η προβολή του να έχει μήκος το μισό του μήκους του;*
4. *Πότε μία ευθεία προβάλλεται σε ένα επίπεδο ως σημείο;*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να κατασκευάσετε επίπεδο τ που διέρχεται από ευθεία ε και είναι κάθετο σε επίπεδο π.*
2. *Να αποδείξετε ότι αν σημείο Μ διαιρεί ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε λόγο λ, τότε η προβολή του ΑΒ σε ένα επίπεδο π, που δεν είναι κάθετο στο ΑΒ, διαιρείται από την προβολή του Μ στον ίδιο λόγο.*
3. *Αν Α'Β'Γ' είναι η προβολή τριγώνου ΑΒΓ σε επίπεδο π, να αποδείξετε ότι το κέντρο βάρους Κ του τριγώνου ΑΒΓ προβάλλεται στο κέντρο βάρους Κ' του Α'Β'Γ'.*
4. *Να αποδείξετε ότι παράλληλες ευθείες προβάλλονται σε παράλληλες ευθείες σε επίπεδο π, στο οποίο δεν είναι κάθετες.*
5. *Να αποδείξετε ότι η προβολή παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ σε επίπεδο π, που δεν είναι κάθετο στο επίπεδο του παραλληλογράμμου, είναι παραλληλόγραμμο.*
6. *Να αποδείξετε ότι η προβολή ορθής γωνίας σε επίπεδο που τέμνει τις πλευρές της ορθής είναι αμβλεία γωνία.*
7. *Τα άκρα Α και Β ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ απέχουν από επίπεδο π 20 και 23 και οι προβολές Α' και Β' των σημείων Α και Β απέχουν μεταξύ τους 4. Πόσο απέχουν τα Α και Β μεταξύ τους;*
8. *Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ μήκους α σε επίπεδο π, όταν η γωνία του ΑΒ ως προς το π είναι:*
   i) 30°, ii)45° και iii) 60°.
9. *Να κατασκευάσετε ευθεία που να σχηματίζει γωνία 60° με επίπεδο π, να διέρχεται από σημείο Α του π και να προβάλλεται σε ευθεία ε του π, που διέρχεται από το Α.*
10. *Να αποδείξετε ότι ο λόγος των προβολών δύο ευθύγραμμων τμημάτων της ίδιας ευθείας ισούται με το λόγο των τμημάτων αυτών.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Αν σ και τ είναι δύο τεμνόμενα επίπεδα και Ο σημείο του σ, να αποδείξετε ότι η ευθεία του σ που διέρχεται από το Ο και σχηματίζει τη μεγαλύτερη γωνία με το τ είναι η κάθετη στην κοινή ευθεία ε.*
2. *Να αποδείξετε ότι τα επίπεδα που είναι κάθετα στο επίπεδο ενός τριγώνου και περιέχουν τις διχοτόμους του τριγώνου τέμνονται σε μία ευθεία.*
3. *Να αποδείξετε ότι σε στρεβλό τετράπλευρο ΑΒΓΔ, που έχει τις μη διαδοχικές πλευρές ίσες, η ευθεία που συνδέει τα μέσα των διαγωνίων του είναι κοινή κάθετος των διαγωνίων.*
4. *Δίνεται ένα οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Να κατασκευάσετε επίπεδο π που να περιέχει την ΑΒ τέτοιο, ώστε η γωνία $\hat{\Gamma}$ να προβάλλεται ως ορθή.*
5. *Εάν ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει τα άκρα του επί των εδρών μιας δίεδρης γωνίας, τότε το διχοτόμο επίπεδο της δίεδρης χωρίζει το ΑΒ σε δύο τμήματα, ανάλογα των αποστάσεων των άκρων Α και Β από την ακμή της δίεδρης.*
6. *Αν ένα σημείο Α απέχει από επίπεδο π απόσταση 6 και από ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ του π απόσταση 10, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της προβολής του τριγώνου ΑΒΓ ισούται με $\frac{4}{5}$ του εμβαδού του τριγώνου.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

1. Να κατασκευάσετε την αντίστοιχη επίπεδη μιας δίεδρης γωνίας.

   Εναλλακτική κατασκευή αντίστοιχης επίπεδης μιας δίεδρης, με ευθείες κάθετες στις έδρες σε ένα σημείο της ακμής.
2. Να μελετήσετε την προβολή τριγώνου σε επίπεδο. Για το εμβαδόν Ε τριγώνου να αποδείξετε ότι ισχύει $E' = E\sigma\upsilon\nu\varphi$, όπου Ε′ το εμβαδόν της προβολής και φ η γωνία των δύο επιπέδων.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Μία ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο αν:

- η ευθεία είναι κάθετη σε δύο ευθείες του επιπέδου,
- η ευθεία είναι κάθετη σε μία ευθεία του επιπέδου και ορθογώνια σε μία άλλη και
- η ευθεία είναι ορθογώνια σε δύο ευθείες του επιπέδου.

Γενικότερα, η ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο, αν είναι κάθετη ή ορθογώνια σε δύο ευθείες που είναι παράλληλες στο επίπεδο.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χώρου που ισαπέχουν από δύο τεμνόμενες ευθείες ε και ξ.*

2. *Αν δύο επίπεδα τέμνονται σε ευθεία ε, κάθε ευθεία ξ κάθετη στο ένα, προβάλλεται στο άλλο σε ευθεία κάθετη στην ε.*

3. *Δίνονται δύο ασύμβατες ευθείες ε και ξ, που σχηματίζουν ίσες γωνίες με επίπεδο π και έχουν προβολές στο επίπεδο π ευθείες παράλληλες. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που συναντούν τις ε και ξ και είναι παράλληλες στο επίπεδο π, συναντούν μία ευθεία που είναι κάθετη στο π.*

4. *Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία που τέμνει τις έδρες μίας δίεδρης γωνίας σε σημεία που ισαπέχουν από την ακμή της, σχηματίζει ίσες γωνίες με τις έδρες και αντίστροφα.*

5. *Για να ισαπέχουν δύο σημεία Α και Β από ευθεία ε, πρέπει και αρκεί οι αποστάσεις των σημείων Α και Β από τα επίπεδα (ε, Β) και (ε, Α) αντίστοιχα, να είναι ίσες.*

6. *Να αποδείξετε ότι αν M_1 και M_2 είναι οι προβολές σημείου Μ σε δύο τεμνόμενα επίπεδα π_1 και π_2, οι προβολές των M_1 και M_2 στην τομή συμπίπτουν.*

7. *Δίνεται στρεβλό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και επίπεδο π. Να βρεθούν τέσσερις ευθείες παράλληλες που περνάνε από τις κορυφές Α, Β, Γ και Δ και τέμνουν το π σε σημεία Α', Β', Γ' και Δ', ώστε το Α'Β'Γ'Δ' να είναι παραλληλόγραμμο.*

8. *Αν ε και ε' είναι δύο ασύμβατες ευθείες και Μ, Ν είναι δύο σημεία της ε, συμμετρικά ως προς την κοινή κάθετο των ε και ε', να αποδείξετε ότι αυτά ισαπέχουν από την ε' και αντίστροφα.*

«Γεωμετρικές Συνθέσεις»
Δ. Τηνιακός

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

ΣΤΕΡΕΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

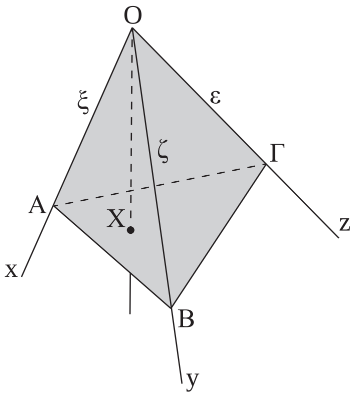
Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε δύο οικογένειες στερεών σχημάτων, τα πολύεδρα και τα στερεά εκ περιστροφής. Τα πολύεδρα αποτελούνται από τμήματα επιπέδων, κατάλληλα τοποθετημένα, ώστε να σχηματίζουν ένα κλειστό στερεό σύνολο. Υπάρχουν πολλά είδη πολυέδρων, εδώ όμως θα μελετήσουμε τα απλούστερα από αυτά, όπως είναι τα πρίσματα και οι πυραμίδες. Τα στερεά εκ περιστροφής με τα οποία θα ασχοληθούμε είναι ο κύλινδρος, ο κώνος και η σφαίρα. Τα στερεά αυτά λέγονται έτσι γιατί σχηματίζονται κατά την περιστροφή επίπεδων σχημάτων, όπως είναι το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, το ορθογώνιο τρίγωνο και ο κύκλος.

Τα πολύεδρα αποτελούν μία κατηγορία σχημάτων του χώρου, τα οποία παρουσιάζουν θεωρητικό ενδιαφέρον, είναι όμως χρήσιμα και από πλευράς εφαρμογής σε διάφορους τομείς της τεχνολογίας και της τέχνης. Στις διάφορες εφαρμογές χρησιμοποιούνται για να προσομοιάζουν σχήματα του φυσικού χώρου που συναντάμε γύρω μας και είναι σημαντικές όχι μόνο οι μετρικές αλλά και οι καθαρά γεωμετρικές ιδιότητές τους.

Πυραμίδα, είσοδος στο μουσείο του Λούβρου, Παρίσι (1989). Αρχιτέκτων ο Γιέο Μιγκ Πέι.

13.1 Περί πολυέδρων

Στο κεφάλαιο 12 μελετήσαμε τις δίεδρες γωνίες, τα σχήματα δηλαδή που αποτελούνται από δύο τεμνόμενα επίπεδα. Στο κεφάλαιο αυτό θα χρειασθούμε την έννοια της τρίεδρης ή πολυεδρικής γωνίας, τα σχήματα δηλαδή που σχηματίζονται ή αποτελούνται από τρία ή περισσότερα επίπεδα. Δίνουμε λοιπόν τους ακόλουθους ορισμούς.



Σχήμα 1

Ορισμός Ι

***Τρίεδρη γωνία* λέγεται το σχήμα που καθορίζεται από τρεις ημιευθείες Οx, Oy και Oz, με κοινή αρχή O, που δεν είναι συνεπίπεδες.**

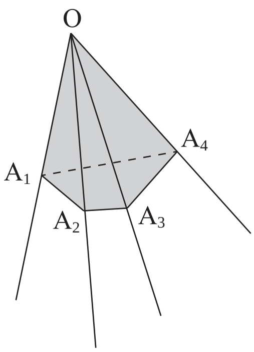
Το σημείο O λέγεται ***κορυφή*** της τρίεδρης, οι ημιευθείες Οx, Oy και Oz λέγονται ***ακμές*** της τρίεδρης. Αν Α, Β και Γ είναι τρία σημεία στις ακμές της τρίεδρης, οι γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$ και $\Gamma\hat{O}A$ λέγονται ***έδρες*** ή ***επίπεδες γωνίες*** της τρίεδρης και τέλος οι δίεδρες γωνίες της τρίεδρης είναι ΟΑ(Β,Γ), ΟΒ(Α,Γ) και ΟΓ(Α,Β) με ακμές τις ΟΑ, ΟΒ και ΟΓ και έδρες τα τρία επίπεδα που ορίζουν οι ακμές ανά δύο. Η τρίεδρη γωνία συμβολίζεται με Ο.ΑΒΓ ή Ο.ξζε, όπου ε, ζ και ξ είναι οι ακμές της τρίεδρης (σχ.1).

Μία τυχαία ημιευθεία ΟΧ λέγεται εσωτερική της τρίεδρης Ο.ΑΒΓ αν η ΟΧ τέμνει το τρίγωνο ΑΒΓ σε εσωτερικό σημείο Χ. Ένα σημείο Χ του χώρου χαρακτηρίζεται ως εσωτερικό αν ανήκει σε μία εσωτερική ημιευθεία ΟΧ.

Αντίστοιχος ορισμός δίνεται και για την πολυεδρική γωνία.

Ορισμός ΙΙ

***Πολυεδρική γωνία* λέγεται το σχήμα που αποτελείται από ν διατεταγμένες ημιευθείες OA_1, OA_2, ..., OA_ν, με κοινή αρχή το σημείο Ο, που ανά τρεις διαδοχικές δεν είναι συνεπίπεδες (σχ.2).**

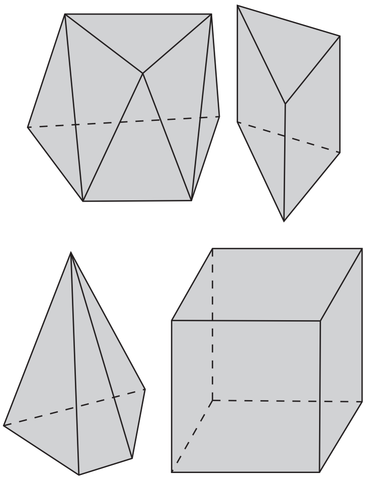


Σχήμα 2

Το σημείο Ο λέγεται ***κορυφή της πολυεδρικής***, οι ημιευθείες λέγονται ***ακμές***, ανά δύο διαδοχικές ακμές ορίζουν μία ***έδρα*** ή ***επίπεδη γωνία*** και ανά δύο διαδοχικές έδρες ορίζουν μία ***δίεδρη γωνία*** της πολυεδρικής στερεάς γωνίας.

Μία πολυεδρική γωνία με τέσσερις, πέντε κτλ. ακμές λέγεται αντίστοιχα ***τετράεδρη***, ***πεντάεδρη*** κτλ. γωνία.

Μία πολυεδρική γωνία λέγεται ***κυρτή***, αν το επίπεδο της κάθε έδρας αφήνει την πολυεδρική γωνία στο ίδιο μέρος του χώρου.

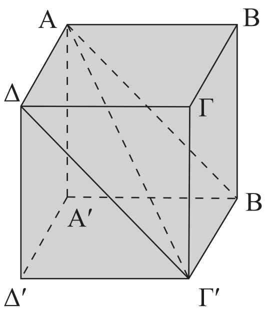


Σχήμα 3

Ορισμός ΙΙΙ

***Απλό πολύεδρο* ή *πολύεδρο* ή ν-εδρο λέγεται το πεπερασμένο σχήμα του χώρου, το οποίο περικλείεται από ν επίπεδα πολυγωνικά σχήματα, που λέγονται έδρες του πολυέδρου.**

Οι έδρες του πολυέδρου αποτελούν την επιφάνεια του πολυέδρου. Η κάθε πλευρά των εδρών ανήκει σε δύο ακριβώς έδρες και λέγεται ***ακμή*** του πολυέδρου. Η κάθε κορυφή των εδρών ανήκει σε τρεις ή περισσότερες έδρες του πολυέδρου και λέγεται ***κορυφή*** του πολυέδρου. Ένα πολύεδρο λέγεται ***κυρτό***, αν το επίπεδο της κάθε έδρας αφήνει ολόκληρο το πολύεδρο στον έναν ημιχώρο. Αντίθετα, αν υπάρχουν κορυφές του πολυέδρου που βρίσκονται εκατέρωθεν του επιπέδου μίας τουλάχιστον έδρας, τότε το πολύεδρο λέγεται ***μη κυρτό***. Στο βιβλίο αυτό θα ασχοληθούμε μόνο με κυρτά πολύεδρα. Στο σχ.3 παριστάνονται μερικά κυρτά πολύεδρα. Στο σχ.4, το σημείο Α είναι μία κορυφή, το τμήμα ΑΔ είναι μία ακμή και το τετράγωνο ΑΔΔ′Α′ είναι μία έδρα του εικονιζόμενου πολυέδρου που λέγεται κύβος.



Σχήμα 4

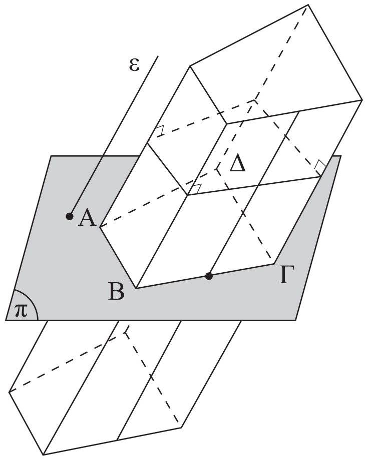
Ανά δύο οι κορυφές του πολυέδρου που δεν ανήκουν στην ίδια έδρα ορίζουν ευθύγραμμα τμήματα που λέγονται ***διαγώνιοι*** του πολυέδρου. Επίσης, ανά τρεις οι κορυφές του πολυέδρου που δεν ανήκουν στην ίδια έδρα ορίζουν επίπεδα που λέγονται ***διαγώνια επίπεδα*** του πολυέδρου. Στο σχ.4 το επίπεδο ΑΔΓ′Β′ είναι ένα διαγώνιο επίπεδο και το τμήμα ΑΓ′ μία διαγώνιος του κύβου.

Ενδεικτικά αναφέρουμε μερικές προτάσεις που ισχύουν στα πολύεδρα:

- **Οι έδρες ενός κυρτού πολύεδρου και οι επίπεδες τομές του είναι κυρτά πολύγωνα.**
- **Κάθε ευθεία τέμνει ένα κυρτό πολύεδρο το πολύ σε δύο σημεία.**
- **Αν Κ είναι το πλήθος των κορυφών, Α το πλήθος των ακμών και Ε το πλήθος των εδρών απλού πολυέδρου, ισχύει η σχέση Κ − Α + Ε = 2 (Θεώρημα του Euler).**

Πρίσματα

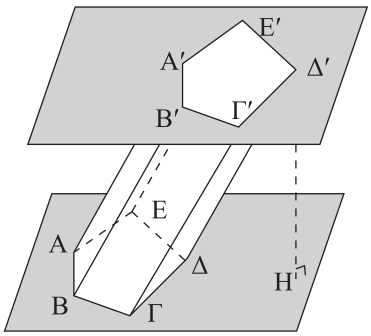
13.2 Ορισμός και στοιχεία του πρίσματος



Σχήμα 5

► Πρισματική επιφάνεια

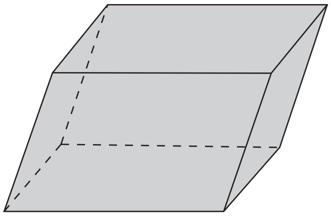
Θεωρούμε σε ένα επίπεδο π μία κλειστή πολυγωνική γραμμή με ν κορυφές και μία ευθεία ε, που τέμνει το π. Το σύνολο των ευθειών που είναι παράλληλες στην ε και διέρχονται από τα σημεία της πολυγωνικής γραμμής λέγονται ***γενέτειρες*** (σχ.5) και συνιστούν μία επιφάνεια που λέγεται ***πρισματική επιφάνεια***. Η πολυγωνική γραμμή λέγεται ***οδηγός γραμμή.*** Οι γενέτειρες που διέρχονται από τις κορυφές της πολυγωνικής γραμμής λέγονται ***ακμές*** της πρισματικής επιφάνειας. Το σύνολο των γενετειρών, που τέμνουν μία πλευρά της πολυγωνικής γραμμής, σχηματίζει μία επίπεδη επιφάνεια που λέγεται ***έδρα*** της πρισματικής επιφάνειας. Η πρισματική επιφάνεια λέγεται ***κυρτή*** ή ***μη κυρτή***, αν η οδηγός γραμμή είναι κυρτή ή όχι. Στα επόμενα θα ασχοληθούμε με κυρτές πρισματικές επιφάνειες. Κάθε επίπεδο που τέμνει μία ακμή θα τέμνει όλες τις ακμές και η πολυγωνική γραμμή που σχηματίζεται λέγεται ***επίπεδη τομή*** της πρισματικής επιφάνειας. Παράλληλα επίπεδα τέμνουν την πρισματική επιφάνεια σε ίσες πολυγωνικές γραμμές. Αν το επίπεδο τέμνει κάθετα τις ακμές, τότε η τομή λέγεται ***κάθετη τομή.***



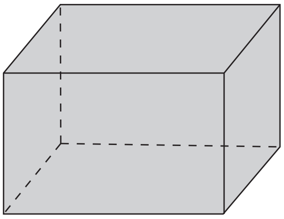
Σχήμα 6

► Πρίσμα

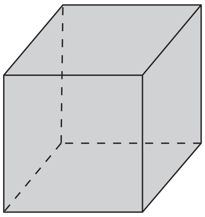
Το στερεό σχήμα που περικλείεται μεταξύ δύο παραλλήλων επιπέδων και μιας πρισματικής επιφάνειας (σχ.6), συμπεριλαμβανομένων των επίπεδων τομών, λέγεται ***πρίσμα***. Οι δύο ίσες και παράλληλες τομές λέγονται ***βάσεις*** του πρίσματος. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα στα επίπεδα των βάσεων και είναι κάθετο σε αυτά λέγεται ***ύψος*** του πρίσματος. Τα τμήματα των εδρών της πρισματικής επιφάνειας που περικλείονται μεταξύ των επιπέδων των βάσεων είναι παραλληλόγραμμα και λέγονται ***παράπλευρες έδρες*** του πρίσματος. Τα τμήματα των ακμών της πρισματικής επιφάνειας που περιλαμβάνονται μεταξύ των επιπέδων των βάσεων λέγονται ***παράπλευρες ακμές*** του πρίσματος. Οι κορυφές των βάσεων λέγονται ***κορυφές*** του πρίσματος. Οι πλευρές των βάσεων λέγονται ***ακμές*** του πρίσματος. Αν οι βάσεις είναι κάθετες τομές, το πρίσμα λέγεται ***ορθό***. Το πρίσμα λέγεται ***τριγωνικό***, ***τετραγωνικό***, ***ν-γωνικό***, αν οι βάσεις του είναι τρίγωνα, τετράπλευρα, ν-γωνα. Το πρίσμα



Σχήμα 7



Σχήμα 8



Σχήμα 9

λέγεται ***κανονικό***, αν είναι ορθό και οι βάσεις είναι κανονικά πολύγωνα. Ένα πρίσμα σημειώνεται γράφοντας τις κορυφές του πολυγώνου της μίας βάσης το σύμβολο – και στη συνέχεια τις κορυφές της άλλης βάσης με την ίδια φορά. Έτσι, το πενταγωνικό πρίσμα που εικονίζεται στο σχ. 6 γράφεται ΑΒΓΔΕ-Α′Β′Γ′Δ′Ε′.

Αν οι βάσεις ενός πρίσματος είναι παραλληλόγραμμα, τότε το πρίσμα λέγεται ***παραλληλεπίπεδο*** (σχ.7). Αν το πρίσμα είναι ορθό και οι βάσεις είναι ορθογώνια, το πρίσμα λέγεται ***ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο*** (σχ.8). Ειδικότερα, αν το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει όλες τις ακμές ίσες, λέγεται ***κύβος*** (σχ.9).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι σε κάθε πρίσμα ισχύουν οι προτάσεις:

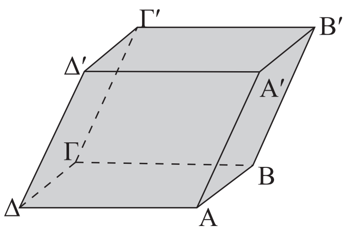
- **οι παράπλευρες έδρες είναι παραλληλόγραμμα,**
- **οι παράπλευρες ακμές είναι ίσες,**
- **οι βάσεις είναι ίσες.**

13.3 Παραλληλεπίπεδο - κύβος

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Οι απέναντι έδρες ενός παραλληλεπιπέδου είναι ίσες και παράλληλες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 10

Έστω το παραλληλεπίπεδο ΑΒΓΔ-Α′Β′Γ′Δ′ (σχ.10). Οι απέναντι έδρες ΑΒΒ′Α′ και ΔΓΓ′Δ′ έχουν:

ΑΒ=//ΔΓ από το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, ΑΑ′=//ΔΔ′ από την έδρα ΑΑ′Δ′Δ και $\hat{BAA'} = \hat{ΓΔΔ'}$ γιατί έχουν πλευρές παράλληλες μία προς μία και ομόρροπες. Άρα, τα παραλληλόγραμμα είναι ίσα και τα επίπεδά τους παράλληλα.

Από το θεώρημα αυτό προκύπτει ότι μπορούμε σε ένα παραλληλεπίπεδο να θεωρήσουμε οποιοδήποτε ζεύγος απέναντι εδρών ως βάσεις. Κάθε ακμή ενός παραλληλεπιπέδου είναι ίση με τις παράλληλές της, επομένως οι ακμές του παραλληλεπιπέδου χωρίζονται σε τρεις τετράδες ίσων ακμών.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ι

Οι παράπλευρες έδρες ορθού πρίσματος είναι ορθογώνια.

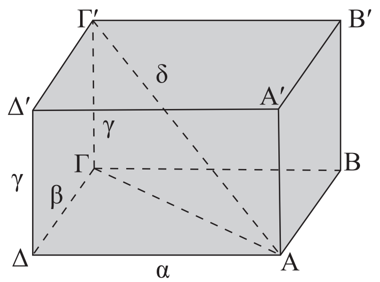
Ορισμός

Διαστάσεις ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου λέγονται τα μήκη των τριών ακμών που έχουν κοινό το ένα άκρο τους.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Σε κάθε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο το τετράγωνο της διαγωνίου δ ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των τριών διαστάσεων του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου, δηλαδή $\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 11

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ (σχ.11), προκύπτει ότι

$$Α Γ^2 = Α Δ^2 + Δ Γ^2 \Leftrightarrow Α Γ^2 = \alpha^2 + \beta^2 \qquad (1).$$

Από το επίσης ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΓ′ έχουμε

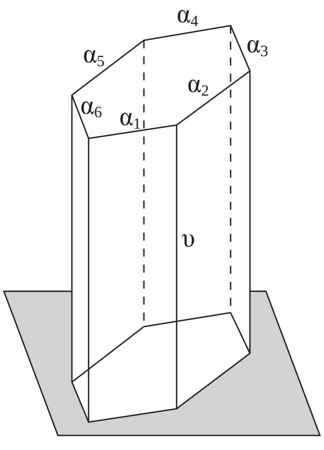
$$Α Γ'^2 = Α Γ^2 + Γ Γ'^2 \Leftrightarrow \delta^2 = Α Γ^2 + \gamma^2 \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας στη (2) το $ΑΓ^2$ από την (1), έχουμε το ζητούμενο: $\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ

Η διαγώνιος δ κύβου ακμής α είναι $\delta = \alpha\sqrt{3}$.

13.4 Μέτρηση πρίσματος



Σχήμα 12

► Εμβαδόν επιφάνειας ορθού πρίσματος

Η επιφάνεια ενός ορθού ν-γωνικού πρίσματος (σχ.12) αποτελείται από ν παράπλευρες έδρες και δύο βάσεις. Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ορθού πρίσματος E_π είναι το άθροισμα των εμβαδών των παράπλευρων εδρών του πρίσματος ενώ το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του πρίσματος E_o είναι το άθροισμα του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας και του εμβαδού των δύο βάσεων. Αν υ είναι το ύψος του ορθού πρίσματος και α_1, α_2, ... α_ν είναι τα μήκη των πλευρών των βάσεων, τότε έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας E_π και της ολικής επιφάνειας E_o ενός ορθού πρίσματος με ύψος υ και

μήκη πλευρών των βάσεων α_1, α_2, ..., α_ν, δίνεται από τις σχέσεις:

$$\mathbf{E_\pi = s \cdot \upsilon \quad και \quad E_o = E_\pi + 2B,}$$

όπου s είναι η περίμετρος και B το εμβαδόν της μίας βάσης του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Καθεμία από τις παράπλευρες έδρες είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, που η μία του πλευρά είναι ίση με το ύψος υ του ορθού πρίσματος, ενώ η άλλη πλευρά είναι μία από τις πλευρές των ίσων βάσεων. Το εμβαδόν λοιπόν της παράπλευρης επιφάνειας του ορθού πρίσματος E_π δίνεται από τη σχέση:

$\mathbf{E_\pi} = \alpha_1 \cdot \upsilon + \alpha_2 \cdot \upsilon + ... + \alpha_\nu \cdot \upsilon = (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu) \cdot \upsilon = s \cdot \upsilon$,

όπου s είναι η περίμετρος της βάσης.

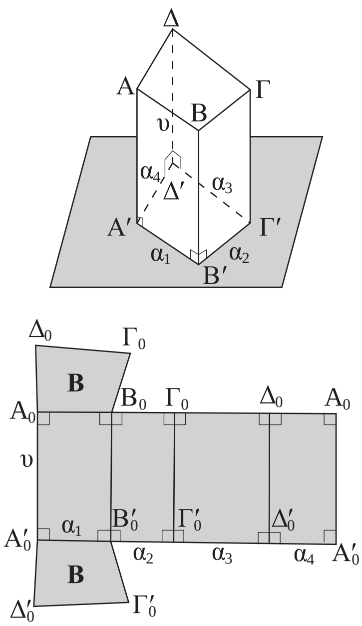
Αν **B** είναι το εμβαδόν της βάσης του ορθού πρίσματος, το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας προφανώς δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{E_o = E_\pi + 2B.}$$

► Ανάπτυγμα ορθού πρίσματος

Θεωρούμε το ορθό τετραγωνικό πρίσμα ΑΒΓΔ-Α′Β′Γ′Δ′ (σχ.13). Η παράπλευρη επιφάνεια του πρίσματος αποτελείται από ορθογώνια παραλληλόγραμμα, τα οποία όμως ανήκουν σε διαφορετικά επίπεδα. Κατασκευάζουμε το ***ανάπτυγμα*** της παράπλευρης επιφάνειας του πρίσματος ως εξής: Στο επίπεδο μίας έδρας ***κατακλίνουμε*** όλες τις έδρες του πρίσματος με τη σειρά που αυτές είναι τοποθετημένες στο χώρο, σαν να ξετυλίγουμε τις παράπλευρες έδρες του πρίσματος και τις δύο βάσεις του πάνω στο επίπεδο μίας έδρας. Το σχήμα που προκύπτει από την ανάπτυξη της παράπλευρης επιφάνειας του πρίσματος αποτελείται από ορθογώνια παραλληλόγραμμα ίσα με τις αντίστοιχες έδρες του πρίσματος, τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο, με τη σειρά που οι αντίστοιχες έδρες είναι τοποθετημένες στο χώρο. Λόγω της ισότητας αυτής, από το ανάπτυγμα του πρίσματος μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν της ***παράπλευρης*** και ***ολικής*** επιφάνειας του πρίσματος και γενικά να λύσουμε προβλήματα που έχουν σχέση με την επιφάνεια του πρίσματος.

Από το ανάπτυγμα του πρίσματος μπορούμε να κατασκευάσουμε πρακτικά το πρίσμα. Αν, δηλαδή, κόψουμε το σχήμα $A_0B_0\Gamma_0\Delta_0A_0A_0'\Delta_0'\Gamma_0'B_0'A_0'$ με ένα ψαλίδι και τσακίσουμε το



Σχήμα 13

χαρτί κατά μήκος των ευθύγραμμων τμημάτων $B_0B'_0$, $\Gamma_0\Gamma'_0$ και $\Delta_0\Delta'_0$, ώστε να ταυτιστούν τα δύο ευθύγραμμα τμήματα με άκρα τα σημεία A_0 και A'_0, έχουμε ένα πρίσμα με αυτό το ανάπτυγμα. Για να κατασκευάσουμε το συγκεκριμένο πρίσμα χρειαζόμαστε και τις δύο βάσεις του, ώστε να προσδιοριστούν οι δίεδρες γωνίες του πρίσματος.

Από το ανάπτυγμα του πρίσματος είναι φανερό ότι το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ορθού πρίσματος ισούται με το εμβαδόν ορθογώνιου παραλληλογράμμου που η μία του πλευρά είναι το ύψος υ του πρίσματος και η άλλη του πλευρά είναι η περίμετρος μίας βάσης του.

► Όγκος πρίσματος

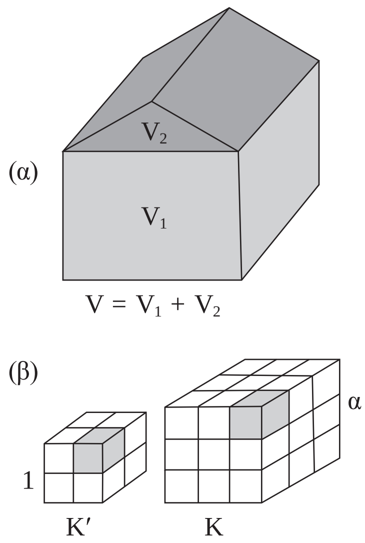
Ορισμός

Όγκος **ενός πολυέδρου Π με μονάδα μέτρησης το πολύεδρο Π′ λέγεται ο αριθμός που δηλώνει ότι το πολύεδρο Π γίνεται με επαναλήψεις του Π′ ή των μερών του.**

Ο όγκος δηλαδή είναι ο λόγος δύο πολυέδρων και είναι θετικός αριθμός. Ως ***μονάδα μέτρησης των όγκων*** λαμβάνεται ***ο κύβος με ακμή μήκους μία μονάδα.*** Δύο πολύεδρα λέγονται ***ισοδύναμα*** αν έχουν ίσους όγκους. Τον όγκο ενός πολυέδρου Π τον συμβολίζουμε με (Π).

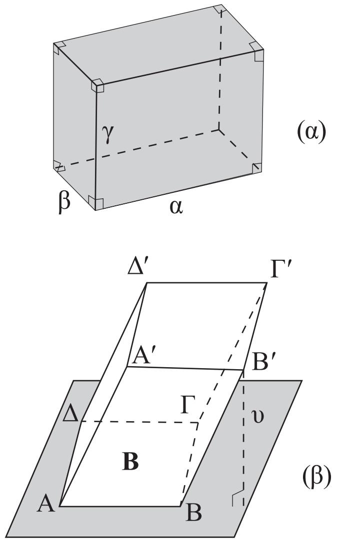
Ιδιότητες του όγκου:

- **Δύο ίσα πολύεδρα έχουν ίσους όγκους.**
- **Το μέρος ενός πολυέδρου έχει όγκο μικρότερο του αρχικού πολυέδρου.**
- **Αν ένα πολύεδρο χωρισθεί σε άλλα πολύεδρα, τα οποία δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, τότε ο όγκος του αρχικού πολυέδρου ισούται με το άθροισμα των όγκων των μερών του** (σχ.14α). (Τα επίπεδα σχήματα έχουν μηδενικό όγκο).



Σχήμα 14

Στο σχ.14β έχουμε ένα παράδειγμα μέτρησης του κύβου Κ με μονάδα τον κύβο Κ′. Επειδή ο κύβος Κ′ δε χωράει ακέραιες φορές στον κύβο Κ, υποδιαιρούμε τον κύβο Κ′ σε μικρότερους κύβους, εδώ σε 8, και ο κύβος Κ γίνεται με 27 επαναλήψεις του $\frac{1}{8}$ του κύβου Κ′, δηλαδή $(K) = \frac{27}{8}(K')$. Επομένως, με μονάδα τον κύβο Κ′ ο κύβος Κ έχει όγκο: $(K) = \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$.



Σχήμα 15

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν τα ακόλουθα θεωρήματα:

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

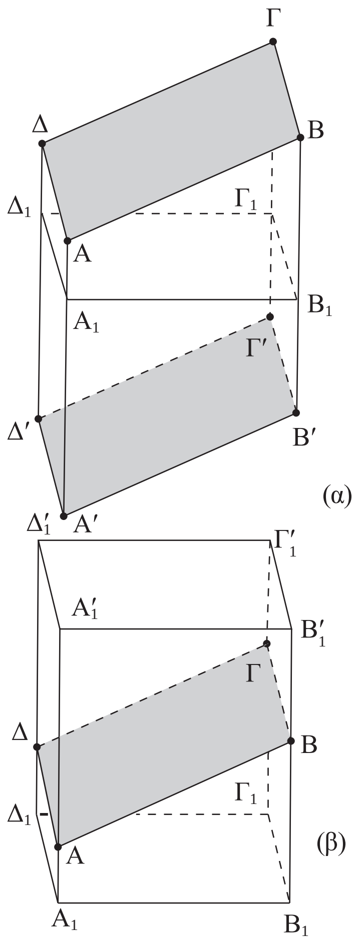
i) Ο όγκος V ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου ισούται με το γινόμενο των τριών διαστάσεών του, δηλαδή $V = \alpha\beta\gamma$ (σχ. 15α).

ii) Ο όγκος V κάθε παραλληλεπιπέδου ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης Β επί το αντίστοιχο ύψος υ, δηλαδή $V = B \cdot \upsilon$ (σχ.15β).

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ Ι

- Ο όγκος κύβου ακμής μήκους α ισούται με α^3.
- Ο όγκος ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου ισούται με το εμβαδόν της βάσης του επί το αντίστοιχο ύψος.

Αν τμήσουμε ένα πλάγιο πρίσμα (σχ.16α) σε δύο μέρη με ένα επίπεδο κάθετο στις ακμές του, που το τέμνει μεταξύ των βάσεων, και μετακινήσουμε τα δύο μέρη έτσι ώστε να έρθουν σε επαφή οι δύο βάσεις του πρίσματος, ταυτίζοντας τις αντίστοιχες κορυφές, τότε δημιουργείται ένα ορθό πρίσμα (σχ.16β) που έχει βάσεις ίσες με την κάθετη τομή και ύψος ίσο με την ακμή του πρίσματος. Ισχύει δηλαδή το επόμενο θεώρημα:



Σχήμα 16

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Κάθε πλάγιο πρίσμα είναι ισοδύναμο με ορθό πρίσμα που έχει ως βάση μία κάθετη τομή του πλάγιου πρίσματος και ως ύψος την ακμή του.

Όπως είδαμε παραπάνω, ο όγκος ενός παραλληπεπιπέδου ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης επί το αντίστοιχο ύψος του. Τώρα θα αποδείξουμε ότι αυτό ισχύει σε κάθε πρίσμα.

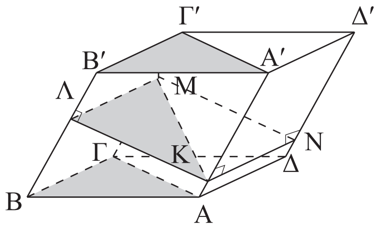
ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Κάθε διαγώνιο επίπεδο ενός παραλληλεπιπέδου το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τριγωνικά πρίσματα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν το παραλληλεπίπεδο είναι ορθό, χωρίζεται από ένα διαγώνιο επίπεδο σε δύο ίσα ορθά πρίσματα, που έχουν ίσες βάσεις και ίσα ύψη, επομένως είναι ισοδύναμα.

Έστω ΑΒΓΔ-Α′Β′Γ′Δ′ τυχαίο παραλληλεπίπεδο και Γ′ΓΑΑ′ ένα διαγώνιο επίπεδο (σχ.17), που το χωρίζει σε δύο τρι-



Σχήμα 17

γωνικά πρίσματα. Αν ΚΛΜΝ είναι μία τομή κάθετη στην ακμή ΑΑ′, τότε, σύμφωνα με το θεώρημα Ι οι όγκοι των δύο πρισμάτων ΑΒΓ-Α′Β′Γ′ είναι (ΚΛΜ) · ΑΑ′ και (ΚΜΝ) · ΔΔ′ αντίστοιχα. Αλλά ΑΑ′ = ΔΔ′ και (ΚΛΜ) = (ΚΜΝ), διότι το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο που χωρίζεται από τη διαγώνιό του και σε δύο ίσα τρίγωνα. Επομένως τα δύο πρίσματα είναι ισοδύναμα.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ ΙΙ

i) Ο όγκος τριγωνικού πρίσματος ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της τριγωνικής βάσης επί το ύψος.

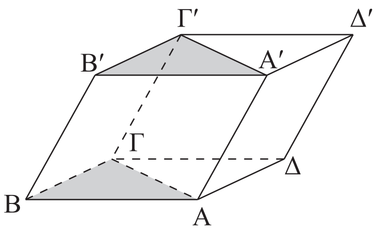
ii) Ο όγκος κάθε πρίσματος ισούται με το εμβαδόν της βάσης επί το ύψος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Έστω το τριγωνικό πρίσμα ΑΒΓ-Α′Β′Γ′ (σχ.18). Σχηματίζουμε το παραλληλεπίπεδο ΑΒΓΔ-Α′Β′Γ′Δ′, του οποίου ο όγκος ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης επί το ύψος. Όμως, το διαγώνιο επίπεδο Γ′ΓΑΑ′ χωρίζει το παραλληλεπίπεδο σε δύο ισοδύναμα τριγωνικά πρίσματα. Άρα, ο όγκος **V** του τριγωνικού πρίσματος δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2}\,\text{εμβ}(ΑΒΓΔ) \cdot υ = \text{εμβ}(ΑΒΓ) \cdot υ = \mathbf{B} \cdot υ,$$

όπου **Β** το εμβαδόν του τριγώνου της βάσης ΑΒΓ και υ το ύψος του πρίσματος.



Σχήμα 18

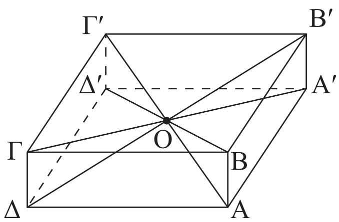
ii) Εφαρμόζουμε το Πόρισμα i) σε κάθε ένα από τα (ν–2) τριγωνικά πρίσματα στα οποία χωρίζεται ένα ν-γωνικό πρίσμα από τα διαγώνια επίπεδα που διέρχονται από μία παράπλευρη ακμή του.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Οι τέσσερις διαγώνιοι ενός παραλληλεπιπέδου διχοτομούνται.

Απόδειξη

Έστω το παραλληλεπίπεδο ΑΒΓΔ-Α′Β′Γ′Δ′ και οι διαγώνιοι ΑΓ′, Α′Γ, ΒΔ′ και Β′Δ (σχ.19). Θα αποδείξουμε ότι δύο από αυτές, έστω οι ΑΓ′ και Α′Γ διχοτομούνται. Το τετράπλευρο ΑΑ′Γ′Γ είναι παραλληλόγραμμο, διότι έχει δύο απέναντι πλευρές, τις ΑΑ′ και ΓΓ′, ίσες και παράλληλες, ως παράπλευρες ακμές του παραλληλεπιπέδου. Επομένως οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Όμοια αποδεικνύεται ότι η διαγώνιος ΑΓ′ διχοτομείται με τις ΒΔ′ και Β′Δ.



Σχήμα 19

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να αποδείξετε ότι το ύψος πλάγιου πρίσματος είναι μικρότερο από την ακμή του.*

2. *Να αποδείξετε ότι οι κάθετες τομές ορθού πρίσματος είναι ίσες με τις βάσεις του και τα ύψη ίσα με τις ακμές του.*

3. *Να αποδείξετε ότι όλες οι ακμές πλάγιου πρίσματος σχηματίζουν ίσες γωνίες με τα επίπεδα των βάσεων.*

4. *Κανονικό τριγωνικό πρίσμα έχει ύψος α και βάση ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του πρίσματος.*

5. *Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κανονικού πρίσματος ύψους υ με βάση κανονικό πολύγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας ρ, αν η βάση είναι τρίγωνο, τετράγωνο ή εξάγωνο.*

6. *Να αποδείξετε ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα που διέρχεται από το κέντρο παραλληλεπιπέδου και έχει τα άκρα του στην επιφάνειά του διχοτομείται από το κέντρο.*

7. *Για την κατασκευή μιας κυβικής δεξαμενής, κλειστής από παντού, χρησιμοποιήθηκαν 216 m^2 λαμαρίνας. Να υπολογίσετε την ακμή του κύβου.*

8. *Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει διαστάσεις 8, 12, 16. Να υπολογίσετε τη διαγώνιο, το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο του.*

9. *Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο ενός κύβου αν γνωρίζετε: i) την ακμή του, ii) τη διαγώνιο μιας έδρας του, iii) τη διαγώνιό του.*

10. *Κύβος έχει όγκο 125. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Να αποδείξετε ότι ο όγκος ενός τριγωνικού πρίσματος ισούται με το ημιγινόμενο μιας παράπλευρης έδρας επί την απόστασή της από την απέναντι ακμή.*

2. *Να αποδείξετε ότι ο όγκος ενός πρίσματος που η κάθετη τομή του είναι πολύγωνο περιγεγραμμένο σε έναν κύκλο, ισούται με το γινόμενο της παράπλευρης επιφάνειας επί το μισό της ακτίνας του κύκλου.*

3. *Δίνονται τρεις παράλληλες ευθείες που δεν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο και τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΑ', ΒΒ' και ΓΓ' που ολισθαίνουν πάνω σε αυτές. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας και ο όγκος του πρίσματος ΑΒΓ-Α'Β'Γ' είναι σταθερά.*

4. *Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των προβολών ενός ευθύγραμμου τμήματος σε τρεις ευθείες, ανά δύο ορθογώνιες μεταξύ τους, ισούται με το τετράγωνο του τμήματος.*

5. *Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των προβολών ενός ευθύγραμμου τμήματος σε τρία επίπεδα, ανά δύο κάθετα μεταξύ τους, ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου του τμήματος.*

6. *Σε έναν κύβο, να αποδείξετε ότι: i) οι διαγώνιοι σχηματίζουν ίσες γωνίες με τις ακμές και ii) η προβολή μιας ακμής σε μία διαγώνιο ισούται με το ένα τρίτο της διαγωνίου.*

7. *Δίνεται παραλληλεπίπεδο ΑΒΓΔ-Α'Β'Γ'Δ'. Να αποδείξετε ότι τα επίπεδα (Α, Γ, Δ') και (Α', Γ', Β) τριχοτομούν τη διαγώνιο ΔΒ'.*

Σύνθετα Θέματα

1. *Να αποδείξετε ότι η τομή κύβου με επίπεδο που ορίζεται από τα άκρα τριών ακμών που διέρχονται από την ίδια κορυφή είναι ισόπλευρο τρίγωνο.*

2. *Να αποδείξετε ότι τα τρία επίπεδα που ορίζονται από μία διαγώνιο κύβου και από τις τρεις ακμές που διέρχονται από το ένα άκρο της διαγωνίου σχηματίζουν ίσες δίεδρες.*

3. *Εάν τμηθεί κύβος ΑΒΓΔ-Α'Β'Γ'Δ' με επίπεδο που διέρχεται από τα μέσα των ακμών ΑΒ, ΒΓ και ΓΓ', να αποδείξετε ότι η τομή είναι κανονικό εξάγωνο.*

4. *Το άθροισμα των τετραγώνων των ακμών ενός παραλληλεπιπέδου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των τεσσάρων διαγωνίων του.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

1. *Σε ένα τετραγωνικό πρίσμα, να αποδείξετε ότι: i) οι διαγώνιοι αποτελούν δύο ομάδες τεμνόμενων ευθειών, ii) η απόσταση αυτών των κοινών σημείων ισούται με την απόσταση των μέσων των διαγωνίων της βάσης και iii) να χρησιμοποιηθεί αυτή η ιδιότητα για να βρείτε ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε το πρίσμα να είναι παραλληλεπίπεδο.*

2. *Να αποδείξετε ότι σε ένα τριγωνικό πρίσμα:*
- *i) απέναντι ίσων εδρών βρίσκονται ίσες δίεδρες,*
- *ii) απέναντι της μεγαλύτερης έδρας βρίσκεται η μεγαλύτερη δίεδρη και*
- *iii) το εμβαδόν κάθε έδρας είναι μικρότερο του αθροίσματος των δύο άλλων.*

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

1. Εμβαδόν
- Το εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας ορθού πρίσματος ισούται με την περίμετρο της βάσης επί το μήκος της ακμής.
- Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας πρίσματος ισούται με το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας αυξημένο κατά το εμβαδόν των δύο βάσεων.

2. Όγκος
- Ο όγκος πρίσματος ισούται με το εμβαδόν της βάσης επί το ύψος του.
- Ο όγκος πρίσματος ισούται με το εμβαδόν της κάθετης τομής επί το μήκος της ακμής του.
- Ο όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ισούται με το γινόμενο των τριών διαστάσεών του.
- Ο όγκος κύβου ισούται με τον κύβο της ακμής του.

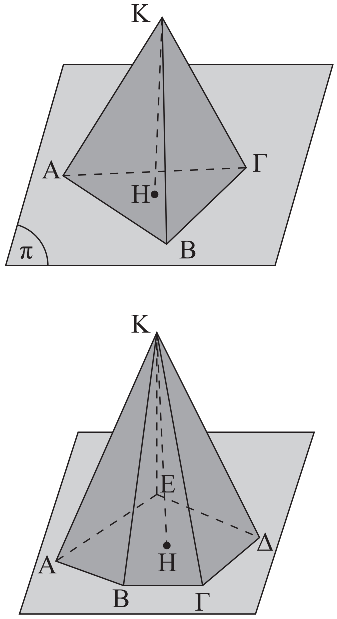
3. Άλλες ιδιότητες
- Οι απέναντι έδρες παραλληλεπιπέδου είναι ίσες και παράλληλες.
- Οι διαγώνιοι παραλληλεπιπέδου διχοτομούνται.
- Κάθε διαγώνιο επίπεδο παραλληλεπιπέδου το διαιρεί σε δύο ισοδύναμα τριγωνικά πρίσματα.
- Αν α, β, γ οι διαστάσεις ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου και δ η διαγώνιος, ισχύει

$$\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

Πυραμίδες

13.5 Ορισμός και στοιχεία πυραμίδας

Θεωρούμε ένα επίπεδο κυρτό πολύγωνο $A_1A_2\ldots A_\nu$ με ν κορυφές και ένα σημείο Κ εκτός του επιπέδου του πολυγώνου. Το πολύεδρο, που έχει έδρες τα ν τρίγωνα KA_1A_2, KA_2A_3, .., $KA_\nu A_1$ και το πολύγωνο $A_1A_2....A_\nu$, λέγεται ν-γωνική ***πυραμίδα*** και σημειώνεται $K.A_1A_2...A_\nu$. Το πολύγωνο λέγεται ***βάση*** της πυραμίδας, ενώ τα τρίγωνα με κοινή κορυφή το σημείο Κ και απέναντι πλευρές τις πλευρές της βάσης



Σχήμα 20

λέγονται ***παράπλευρες έδρες***. Το κοινό σημείο Κ λέγεται ***κορυφή*** της πυραμίδας. Ανά δύο οι διαδοχικές παράπλευρες έδρες τέμνονται σε ευθύγραμμα τμήματα που λέγονται ***παράπλευρες ακμές*** της πυραμίδας. Το σύνολο των παράπλευρων εδρών λέγεται ***παράπλευρη επιφάνεια*** της πυραμίδας. Η πυραμίδα λέγεται τριγωνική, τετραγωνική, πενταγωνική κτλ., αν η βάση είναι τρίγωνο, τετράπλευρο, πεντάγωνο κτλ.

Στο σχ.20 παριστάνονται μία τριγωνική πυραμίδα, με κορυφή το σημείο Κ και βάση το τρίγωνο ΑΒΓ που σημειώνεται με Κ.ΑΒΓ, και μία πενταγωνική πυραμίδα, με κορυφή το σημείο Κ και βάση το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ που σημειώνεται με Κ.ΑΒΓΔΕ. Το ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από την κορυφή Κ της πυραμίδας κάθετα στο επίπεδο της βάσης λέγεται ***ύψος*** της πυραμίδας. Στο σχ.20 το τμήμα ΚΗ είναι το ύψος των πυραμίδων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

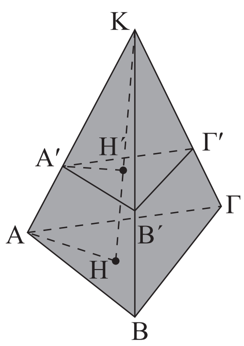
Αν μία πυραμίδα τμηθεί με επίπεδο παράλληλο στη βάση της, τότε:

i) Οι παράπλευρες ακμές και το ύψος της πυραμίδας χωρίζονται σε μέρη ανάλογα.

ii) Η τομή είναι πολύγωνο όμοιο της βάσης με λόγο ομοιότητας το λόγο των αποστάσεων της κορυφής από τη βάση και την τομή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αποδεικνύουμε το θεώρημα για μια τριγωνική πυραμίδα. Η απόδειξη για τυχούσα ν-γωνική πυραμίδα γίνεται με όμοιο τρόπο.



Σχήμα 21

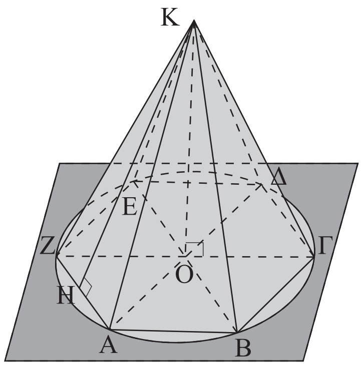
Έστω η πυραμίδα Κ.ΑΒΓ και ΚΗ το ύψος της (σχ.21). Φέρουμε ένα επίπεδο παράλληλο στη βάση, το οποίο τέμνει τις ακμές και το ύψος της πυραμίδας στα σημεία Α′, Β′, Γ′ και Η′ αντίστοιχα.

i) Στην έδρα ΚΑΒ, οι πλευρές ΑΒ και Α′Β′ είναι παράλληλες ως τομές των παράλληλων επιπέδων με την έδρα ΚΑΒ. Από τα όμοια τρίγωνα ΚΑΒ και ΚΑ′Β′ προκύπτει η σχέση:

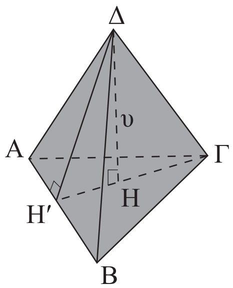
$$\frac{ΚΑ}{ΚΑ'} = \frac{ΚΒ}{ΚΒ'} = \frac{ΑΒ}{Α'Β'}\,.$$

Εφαρμόζοντας τον ίδιο συλλογισμό για τις υπόλοιπες έδρες της πυραμίδας, προκύπτουν οι σχέσεις:

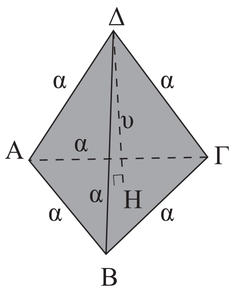
$$\frac{ΚΑ}{ΚΑ'} = \frac{ΚΒ}{ΚΒ'} = \frac{ΚΓ}{ΚΓ'} = \frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \frac{ΓΑ}{Γ'Α'} = λ.$$



Σχήμα 22



Σχήμα 23α



Σχήμα 23β

Επίσης, από τα όμοια τρίγωνα ΚΗΑ και ΚΗ′Α′ προκύπτει:

$$\frac{\text{ΚΑ}}{\text{Κ}'\text{Α}'} = \frac{\text{ΚΗ}}{\text{ΚΗ}'} = \lambda.$$

ii) Η βάση και η τομή της πυραμίδας είναι δύο τρίγωνα (ν-γωνα) με τα ζεύγη των ομόλογων πλευρών τους παράλληλα και ομόρροπα, επομένως έχουν τις ομόλογες γωνίες ίσες. Επιπλέον, από τις παραπάνω σχέσεις τα ζεύγη των ομόλογων πλευρών είναι ανάλογα, άρα τα τρίγωνα είναι όμοια, με λόγο ομοιότητας λ.

13.6 Κανονική πυραμίδα-Τετράεδρο

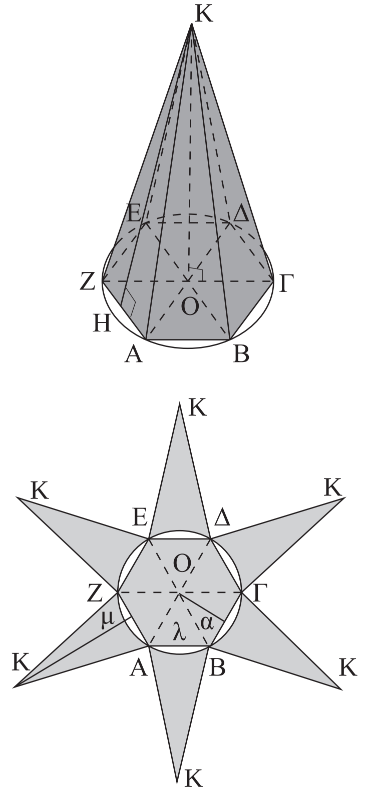
Μία πυραμίδα λέγεται ***κανονική***, αν η βάση είναι κανονικό πολύγωνο και η προβολή της κορυφής της πυραμίδας στο επίπεδο της βάσης είναι το κέντρο του κανονικού πολυγώνου (σχ.22). Σε μία κανονική πυραμίδα, οι παράπλευρες έδρες είναι ισοσκελή τρίγωνα, ίσα μεταξύ τους και το ύψος κάθε παράπλευρης έδρας που άγεται από την κορυφή της πυραμίδας λέγεται ***απόστημα*** ή ***παράπλευρο ύψος*** της κανονικής πυραμίδας (σχ.22). Αποδεικνύεται επίσης, ότι **αν οι παράπλευρες έδρες μιας πυραμίδας είναι ίσα ισοσκελή τρίγωνα, τότε η πυραμίδα είναι κανονική.**

Μία τριγωνική πυραμίδα (σχ.23α) λέγεται ***τετράεδρο***, γιατί έχει τέσσερις τριγωνικές έδρες. Οποιαδήποτε έδρα του τετραέδρου μπορεί να θεωρηθεί ως βάση. ***Κανονικό*** λέγεται το τετράεδρο που όλες οι έδρες του είναι ίσα ισόπλευρα τρίγωνα (σχ.23β). Το τετράεδρο είναι το απλούστερο πολύεδρο.

13.7 Μέτρηση πυραμίδας

► Εμβαδόν κανονικής πυραμίδας

Το ανάπτυγμα της επιφάνειας κανονικής ν-γωνικής πυραμίδας στο επίπεδο της βάσης αποτελείται από το κανονικό πολύγωνο της βάσης και από τα ν ισοσκελή τρίγωνα των παράπλευρων εδρών τοποθετημένα αστεροειδώς στις πλευρές της βάσης (σχ.24). Από το ανάπτυγμα υπολογίζεται η παράπλευρη και η ολική επιφάνεια κανονικής ν-γωνικής πυραμίδας. Η παράπλευρη επιφάνεια $\mathbf{E}_\pi$ είναι το άθροισμα των εμβαδών των ν ισοσκελών τριγώνων που αποτελούν τις παράπλευρες έδρες της πυραμίδας, ενώ το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας $\mathbf{E}_o$ είναι το άθροισμα της παράπλευρης επιφάνειας και της βάσης. Το ανάπτυγμα πυραμίδας κατασκευάζεται επίσης, όταν χρειάζεται να κατασκευασθεί πρακτικά η πυραμίδα.



Σχήμα 24

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Το εμβαδόν της παράπλευρης E_π και της ολικής E_o επιφάνειας κανονικής πυραμίδας δίνεται από τις σχέσεις

$$E_\pi = \tau \cdot \mu \quad \text{και} \quad E_o = \tau \cdot (\mu + \alpha),$$

όπου τ είναι η ημιπερίπετρος, α είναι το απόστημα της βάσης και μ το απόστημα της πυραμίδας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η παράπλευρη επιφάνεια κανονικής πυραμίδας αποτελείται από ν ισοσκελή τρίγωνα, με βάση λ και απόστημα α, που έχουν εμβαδόν:

$$\mathbf{E}_\pi = \nu \cdot \frac{1}{2}\alpha\lambda = \left(\frac{1}{2}\nu\alpha\right) \cdot \lambda = \tau \cdot \mu$$

Για τον υπολογισμό του εμβαδού της συνολικής επιφάνειας της πυραμίδας, στην παράπλευρη επιφάνεια προσθέτουμε και το εμβαδόν της βάσης που είναι κανονικό ν-γωνο:

$$\mathbf{E}_o = \mathbf{E}_\pi + \nu \cdot \frac{1}{2}\lambda\alpha = \mathbf{E}_\pi + \left(\frac{1}{2}\nu\lambda\right) \cdot \alpha = \mathbf{E}_\pi + \tau \cdot \alpha = \tau \cdot (\mu + \alpha)$$

► Όγκος πυραμίδας

Δεχόμαστε χωρίς απόδειξη ότι:

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Δύο τριγωνικές πυραμίδες με ίσα ύψη και ίσες ή ισοδύναμες βάσεις είναι ίσες ή ισοδύναμες.

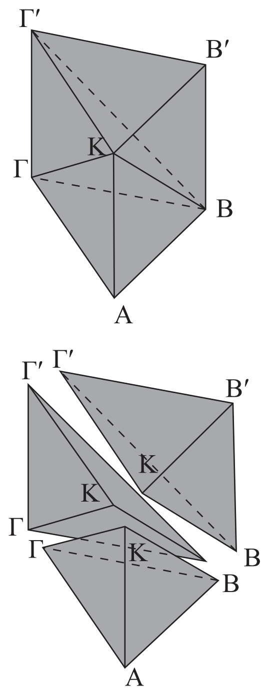
Το επόμενο θεώρημα είναι πολύ σημαντικό γιατί συσχετίζει τους όγκους ενός πρίσματος και μιας πυραμίδας που έχουν ίσες βάσεις και ίσα ύψη.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ

Ο όγκος πυραμίδας ισούται με το ένα τρίτο του όγκου πρίσματος που έχει την ίδια βάση και το ίδιο ύψος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω η τριγωνική πυραμίδα Κ.ΑΒΓ. Από τις κορυφές Β και Γ (σχ.25), φέρουμε τις παράλληλες και ίσες στην ΚΑ και σχηματίζεται το πρίσμα ΑΒΓ-ΚΒ′Γ′. Χωρίζουμε το πρίσμα στις εξής τρεις πυραμίδες: Κ.ΑΒΓ, Β.ΚΒ′Γ′ και Κ.ΒΓΓ′. Οι δύο πρώτες πυραμίδες είναι ισοδύναμες, γιατί έχουν ως



Σχήμα 25

βάσεις τις ίσες βάσεις του πρίσματος και κοινό ύψος. Η δεύτερη και η τρίτη είναι επίσης ισοδύναμες, διότι αν θεωρήσουμε ότι έχουν κοινή κορυφή το σημείο Κ, οι βάσεις τους ΒΒ′Γ′ και ΒΓΓ′ είναι τα δύο ίσα τρίγωνα στα οποία χωρίζεται το παραλληλόγραμμο ΒΓΓ′Β′ με τη διαγώνιό του ΒΓ′. Επίσης έχουν ίσα ύψη, αφού οι βάσεις τους είναι συνεπίπεδες. Παρατηρούμε δηλαδή ότι το πρίσμα χωρίστηκε σε τρεις ισοδύναμες πυραμίδες, άρα ο όγκος κάθε τριγωνικής πυραμίδας ισούται με το τρίτο του όγκου του πρίσματος που έχει την ίδια βάση και το ίδιο ύψος, δηλαδή συμβολικά $\mathbf{V} = \frac{\mathbf{E}\cdot υ}{3}$, όπου **V** ο όγκος, **Ε** το εμβαδόν της βάσης και υ το ύψος της πυραμίδας.

Αν η πυραμίδα είναι ν-γωνική, τη χωρίζουμε σε (ν-2) τριγωνικές πυραμίδες, φέροντας τις διαγωνίους της βάσης από μία κορυφή της. Για κάθε μία από τις τριγωνικές πυραμίδες αποδείξαμε ότι ισχύει το Θεώρημα, επομένως ο συνολικός όγκος της πυραμίδας ισούται με το άθροισμα των όγκων των τριγωνικών πυραμίδων, δηλαδή:

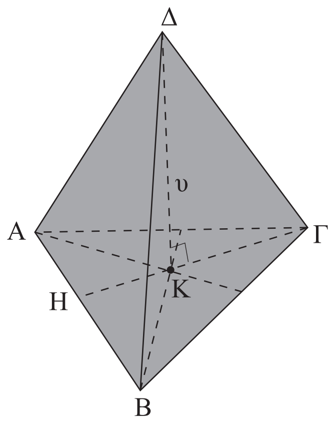
$$\mathbf{V} = \frac{1}{3}\,(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \ldots + \mathbf{E}_{ν\text{-}2})\cdot υ = \frac{\mathbf{E}\cdot υ}{3},$$

όπου $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, ... είναι τα εμβαδά των (ν-2) τριγώνων που χωρίζεται η βάση, **Ε** το εμβαδόν της βάσης και υ το ύψος της πυραμίδας.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να υπολογισθεί το εμβαδόν της συνολικής επιφάνειας και ο όγκος κανονικού τετραέδρου, ακμής α.

Λύση



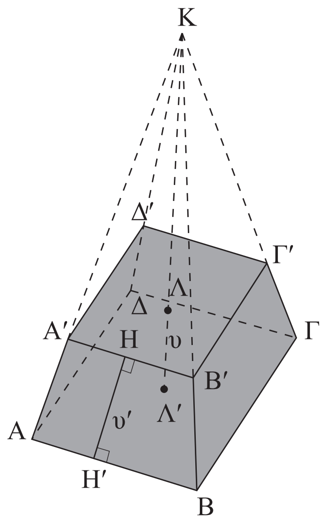
Σχήμα 26

Η επιφάνεια του τετραέδρου αποτελείται από τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς α, επομένως η συνολική επιφάνεια του τετραέδρου έχει εμβαδόν $\mathbf{E} = 4\cdot α^2\,\frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\cdot α^2$.

Ο όγκος του κανονικού τετραέδρου, θεωρούμενο ως τριγωνική πυραμίδα, ισούται με το τρίτο του εμβαδού της βάσης ΑΒΓ που είναι ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α, επί το ύψος ΔΚ. Το Κ όμως είναι κέντρο βάρους της βάσης και από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΚ έχουμε $ΔΚ = \frac{α\sqrt{6}}{3}$.

Επομένως, ο όγκος του τετραέδρου είναι $\mathbf{V} = \frac{1}{3}\cdot\frac{α^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{α\sqrt{6}}{3} = \frac{α^3\sqrt{2}}{12}$.

13.8 Ορισμός και στοιχεία κόλουρης πυραμίδας



Σχήμα 27

Αν τμήσουμε μία πυραμίδα μεταξύ κορυφής και βάσης, με επίπεδο παράλληλο στη βάση, τότε το μέρος της πυραμίδας που περιλαμβάνεται μεταξύ των δύο παράλληλων επιπέδων λέγεται ***κόλουρη πυραμίδα***. Τα δύο όμοια πολύγωνα λέγονται ***βάσεις (μικρή και μεγάλη)*** της κόλουρης πυραμίδας και το ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα στα επίπεδα των βάσεων και είναι κάθετο σε αυτά λέγεται ***ύψος*** της κόλουρης πυραμίδας.

Οι παράπλευρες έδρες μιας κόλουρης πυραμίδας είναι τραπέζια και τα ύψη τους λέγονται ***παράπλευρα ύψη*** της κόλουρης πυραμίδας. ***Ισοσκελής*** λέγεται η κόλουρη πυραμίδα που κατασκευάζεται από κανονική πυραμίδα και οι παράπλευρες έδρες της είναι ισοσκελή τραπέζια.

Στο σχ.27 παριστάνεται μια κόλουρη ισοσκελής τετραγωνική πυραμίδα, η οποία σημειώνεται με ΑΒΓΔ-Α′Β′Γ′Δ′, έχει ύψος ΛΛ′ και παράπλευρο ύψος ΗΗ′.

13.9 Μέτρηση κόλουρης ισοσκελούς πυραμίδας

► Εμβαδόν επιφάνειας κόλουρης ισοσκελούς πυραμίδας

Το εμβαδόν $\mathbf{E_\pi}$ της παράπλευρης επιφάνειας κόλουρης ισοσκελούς πυραμίδας με βάσεις κανονικά ν-γωνα, ισούται με:

$$\mathbf{E_\pi = (\tau + \tau') \cdot \upsilon'},$$

όπου τ και τ′ είναι οι ημιπερίμετροι των βάσεων και υ′ είναι το παράπλευρο ύψος της.

Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας δίνεται από τον τύπο:

$$\mathbf{E_o = E_\pi + B + \beta},$$

όπου **Β** και **β** είναι τα εμβαδά των δύο βάσεων.

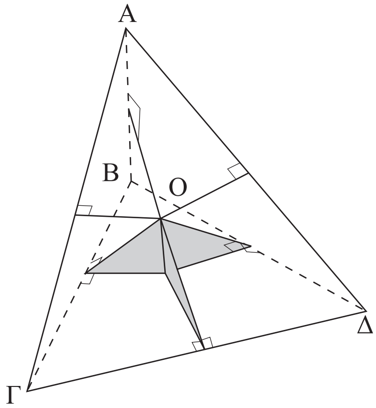
► Όγκος κόλουρης ισοσκελούς πυραμίδας

Ο όγκος κόλουρης πυραμίδας δίνεται από τον τύπο:

$$\mathbf{V} = \frac{\upsilon \cdot (\mathrm{B} + \beta + \sqrt{\mathrm{B}\beta})}{\mathbf{3}}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Να αποδειχθεί ότι τα μεσοκάθετα επίπεδα στις έξι ακμές ενός τετραέδρου διέρχονται από το ίδιο σημείο. Επίσης, οι ευθείες που είναι κάθετες στις έδρες τετραέδρου στα περίκεντρα των εδρών διέρχονται από το ίδιο σημείο.



Σχήμα 28

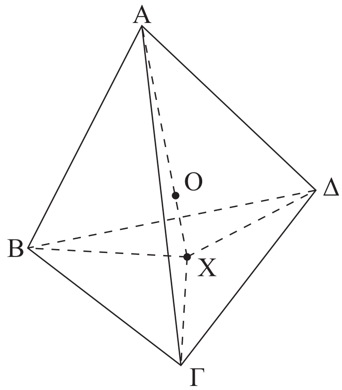
Απόδειξη

Αν ΑΒΓΔ είναι ένα τετράεδρο, τα μεσοκάθετα επίπεδα στις ακμές ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ τέμνονται σε σημείο Ο, διότι είναι κάθετα σε τρεις τεμνόμενες ευθείες.

Το σημείο Ο (σχ.28), ισαπέχει από τις κορυφές Α, Β, Γ και Δ άρα θα ανήκει και στα μεσοκάθετα επίπεδα των υπολοίπων ακμών. Επίσης, το σημείο Ο ανήκει στα μεσοκάθετα επίπεδα των τριών ακμών κάθε έδρας, άρα προβάλλεται στα περίκεντρα των εδρών.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Να βρεθεί σημείο που να ισαπέχει από τα επίπεδα των εδρών ενός τετραέδρου ΑΒΓΔ.



Σχήμα 29

Απόδειξη

Τα σημεία της κοινής ευθείας ΑΧ (σχ.29), των επιπέδων που διχοτομούν τις δίεδρες ΑΒ(Γ,Δ), ΑΔ(Β,Γ) και ΑΓ(Β,Δ) ισαπέχουν από τις τρεις έδρες ΑΒΓ, ΑΒΔ και ΑΓΔ. Το επίπεδο που διχοτομεί τη δίεδρη ΒΔ(Α,Γ) τέμνει την ΑΧ σε ένα σημείο Ο, που ισαπέχει και από τις τέσσερις έδρες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να υπολογίσετε το ύψος και το απόστημα κανονικής i) εξαγωνικής, ii) τετραγωνικής και iii) τριγωνικής πυραμίδας (κανονικό τετράεδρο), αν έχει πλευρά βάσης μήκους μ και ακμή μήκους λ.*

2. *Να αποδείξετε ότι οι παράπλευρες έδρες κανονικής ν-γωνικής πυραμίδας σχηματίζουν ίσες γωνίες με το επίπεδο της βάσης.*

3. *Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας και της ολικής επιφάνειας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας, με πλευρά βάσης 4 και ακμή 7.*

4. *Να υπολογίσετε το εμβαδόν της βάσης κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας που έχει εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας 200 και απόστημα 10.*

5. *Η μεγάλη πυραμίδα της Αιγύπτου έχει βάση τετράγωνο πλευράς 234m και ύψος 146m. Να υπολογίσετε την παράπλευρη επιφάνεια και τον όγκο της πυραμίδας.*

6. *Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας και τον όγκο κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας ως συνάρτηση της πλευράς της βάσης, αν έχει ακμή ίση με τη διαγώνιο της βάσης.*

7. *Να βρείτε το λόγο των όγκων κύβου και κανονικού τετραέδρου που έχει ακμή ίση με τη: i) διαγώνιο του κύβου και ii) διαγώνιο της έδρας του κύβου.*

8. *Να βρείτε το λόγο των όγκων κανονικού τετραέδρου ακμής α και κανονικής εξαγωνικής πυραμίδας πλευράς α και ύψους α.*
9. *Επίπεδο παράλληλο στη βάση κανονικής εξαγωνικής πυραμίδας, με πλευρά α και ύψος υ, διχοτομεί το ύψος της. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας και τον όγκο της κόλουρης πυραμίδας που προκύπτει.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνεται το παραλληλεπίπεδο ΑΒΓΔ-Α'Β'Γ'Δ'. Να αποδείξετε ότι το τετράεδρο ΑΓΒ'Δ' έχει το ένα τρίτο του όγκου του παραλληλεπιπέδου.*
2. *Να αποδείξετε ότι σε κάθε τετράεδρο, το γινόμενο του εμβαδού κάθε έδρας επί το αντίστοιχο ύψος είναι σταθερό.*
3. *Να αποδείξετε ότι ο όγκος τετραέδρου δε μεταβάλλεται αν μία ακμή μετακινηθεί στο φορέα της χωρίς να αλλάξει μήκος.*
4. *Αν δύο τετράεδρα έχουν κοινή μία ακμή και τη δίεδρη που αντιστοιχεί σε αυτήν, τότε ο λόγος των εμβαδών ισούται με το λόγο του γινομένου των εμβαδών των δύο εδρών που πρόσκεινται στη δίεδρη.*
5. *Αν δύο τετράεδρα έχουν κοινή μία τρίεδρη γωνία, τότε ο λόγος των όγκων τους ισούται με το λόγο του γινομένου των ακμών της τρίεδρης.*
6. *Αν Α', Β', Γ' είναι τα μέσα των ακμών ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ τετράεδρου ΟΑΒΓ, τότε* $(ΟΑ'Β'Γ') = \frac{1}{8}(ΟΑΒΓ)$.
7. *Κανονική τριγωνική πυραμίδα Ο.ΑΒΓ έχει πλευρά βάσης α και οι παράπλευρες ακμές της σχηματίζουν γωνία 60° με τη βάση. Να υπολογίσετε τον όγκο της.*

Σύνθετα Θέματα

1. *Να αποδείξετε ότι ο όγκος τετραέδρου ισούται με το γινόμενο της προβολής του σε επίπεδο κάθετο σε μία ακμή επί το ένα τρίτο της ακμής αυτής.*
2. *Αν η κάθετη τομή τριγωνικού πρίσματος έχει ίσες πλευρές, τότε το άθροισμα των αποστάσεων κάθε εσωτερικού σημείου από τις βάσεις και από τις παράπλευρες έδρες είναι σταθερό.*
3. *Να αποδείξετε ότι το στερεό που έχει κορυφές τα μέσα των ακμών ενός κύβου έχει ίσες ακμές και να υπολογίσετε τον όγκο του.*

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

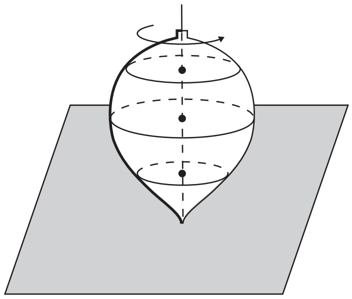
1. Αν τυχαία πυραμίδα τμηθεί με επίπεδο παράλληλο στη βάση της (σχ.29), έχουμε:
- $\frac{ΚΑ}{ΚΑ'} = \frac{ΚΒ}{ΚΒ'} = \frac{ΚΓ}{ΚΓ'} = \frac{ΚΗ}{ΚΗ'} = λ$ και
- $ΑΒΓ \approx Α'Β'Γ'$ με λόγο ομοιότητας λ.

2. **Μέτρηση κανονικής πυραμίδας:**
- Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας: $\mathbf{E_π} = τ \cdot μ$
- Όγκος: $\mathbf{V} = \frac{\mathbf{B \cdot υ}}{\mathbf{3}}$,

όπου μ το απόστημα, τ η ημιπερίμετρος της βάσης, υ το ύψος της πυραμίδας και **Β** το εμβαδόν της βάσης.

3. **Μέτρηση κόλουρης πυραμίδας**
- Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας: $\mathbf{E_π} = (τ + τ') \cdot υ'$
- Όγκος: $\mathbf{V} = \frac{υ \cdot (Β + β + \sqrt{Ββ})}{\mathbf{3}}$, τ και τ' οι ημιπερίμετροι των βάσεων, **Β** και **β** τα εμβαδά των βάσεων, υ το ύψος και υ' το παράπλευρο ύψος της πυραμίδας.

13.10 Στερεά εκ περιστροφής



Σχήμα 30

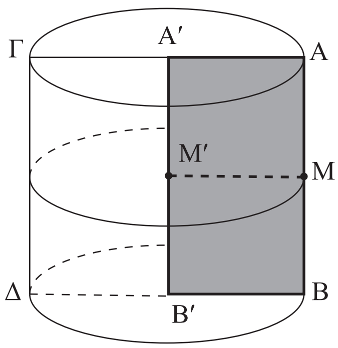
Τα στερεά εκ περιστροφής είναι η δεύτερη οικογένεια στερεών που θα μελετήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο. Τα στερεά αυτά είναι χρήσιμα τόσο από θεωρητική όσο και από πρακτική άποψη γιατί κατασκευάζονται εύκολα με τη χρήση ειδικών μηχανημάτων. Τα στερεά εκ περιστροφής λέγονται έτσι γιατί δημιουργούνται κατά την περιστροφή μιας επίπεδης γραμμής γύρω από άξονα περιστροφής μία ευθεία που βρίσκεται στο επίπεδο της γραμμής (σχ.30). Τα σημεία της γραμμής αυτής κατά την περιστροφή γράφουν κύκλους που βρίσκονται σε επίπεδα κάθετα στον άξονα περιστροφής και έχουν τα κέντρα τους στον άξονα. Στις επόμενες παραγράφους θα μελετήσουμε τον κύλινδρο, τον κώνο και τη σφαίρα ως στερεά εκ περιστροφής.

Κύλινδρος

13.11 Ορισμός και στοιχεία κυλίνδρου

Ορισμοί

***Ορθός κύλινδρος* ή *κύλινδρος εκ περιστροφής* ή *κύλινδρος* λέγεται το σχήμα που παράγεται από ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, το οποίο εκτελεί μία πλήρη περιστροφή στο χώρο γύρω από τη μία πλευρά του.**



Σχήμα 31

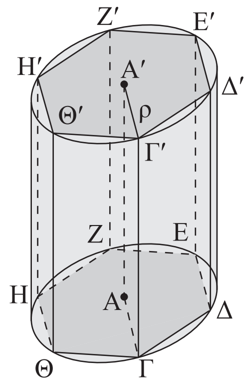
Το ευθύγραμμο τμήμα Α′Β′ γύρω από το οποίο περιστρέφεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΒ′Α′ (σχ.31), μένει αμετακίνητο κατά την περιστροφή, λέγεται ***άξονας*** ή ***ύψος*** του κυλίνδρου. Κατά την περιστροφή, η πλευρά ΑΒ παραμένει παράλληλη και σε σταθερή απόσταση από τον άξονα Α′Β′ και η τυχαία θέση της πλευράς ΑΒ λέγεται ***γενέτειρα*** του κυλίνδρου. Η επιφάνεια που δημιουργείται από την κίνηση της πλευράς ΑΒ λέγεται ***παράπλευρη*** ή ***κυρτή επιφάνεια*** του κυλίνδρου.

Οι πλευρές Α′Α και Β′Β του παραλληλογράμμου, ως κάθετες στην Α′Β′ και ίσες μεταξύ τους, κατά την περιστροφή, γράφουν ίσους και παράλληλους κυκλικούς δίσκους που ανήκουν σε επίπεδα κάθετα στον άξονα στα σημεία Α′ και Β′. Οι κύκλοι (Α′, Α′Α) και (Β′, Β′Β) είναι παράλληλοι, λέγονται ***βάσεις του κυλίνδρου*** και η ακτίνα Α′Α = Β′Β λέγεται ***ακτίνα*** του κυλίνδρου.

Ο κύλινδρος θα συμβολίζεται με (Α′Β′, Α′Α), όπου Α′Β′ είναι ο άξονας του κυλίνδρου και Α′Α είναι η ακτίνα του.

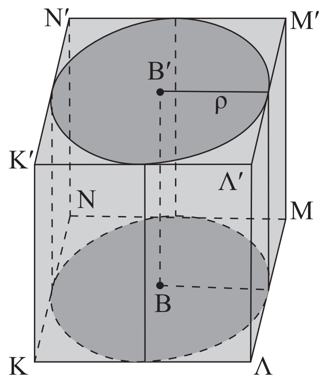
13.12 Μέτρηση κυλίνδρου

Έστω κύλινδρος (ΑΑ′, ρ). Αν στη μία βάση του κυλίνδρου (σχ.32) εγγράψουμε ένα πολύγωνο και από τις κορυφές του πολυγώνου φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα και ίσα με τον άξονα του κυλίνδρου, τα τμήματα αυτά είναι γενέτειρες του κυλίνδρου, οι οποίες ξεκινάνε από σημεία της μίας βάσης, βρίσκονται στην κυρτή επιφάνεια του κυλίνδρου και καταλήγουν στην άλλη βάση ως κορυφές ενός πολυγώνου, ίσου και παράλληλου στο αρχικό πολύγωνο. Σχηματίζεται έτσι ένα ορθό πρίσμα που λέγεται ***εγγεγραμμένο στον κύλινδρο***.



Σχήμα 32

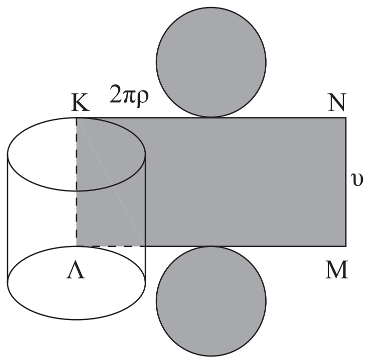
Αν στη μία βάση του κυλίνδρου (ΒΒ′, ρ), περιγράψουμε ένα πολύγωνο (σχ.33) και από τις κορυφές του πολυγώνου φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα και ίσα με τον άξονα του κυλίνδρου ΒΒ′, σχηματίζεται ένα ορθό πρίσμα, οι έδρες του οποίου είναι επίπεδα εφαπτόμενα στον κύλινδρο κατά μήκος γενετειρών και οι βάσεις του είναι ίσα πολύγωνα περιγεγραμμένα στις δύο βάσεις. Ένα τέτοιο πρίσμα λέγεται ***περιγεγραμμένο στον κύλινδρο***.



Σχήμα 33

► Ανάπτυγμα του κυλίνδρου

Εγγράφουμε στον κύλινδρο (ΑΑ′, ρ), ένα κανονικό πρίσμα, το οποίο αναπτύσσουμε στο επίπεδο (σχ.32). Το ανάπτυγμα του πρίσματος είναι ένα ορθογώνιο με το ένα ζεύγος απέναντι πλευρών ίσες με τις γενέτειρες και το άλλο ίσο με την περίμετρο της βάσης του πρίσματος. Αν διπλασιάζουμε συνεχώς τον αριθμό των πλευρών του πρίσματος, η περίμετρος της βάσης του τείνει στο μήκος του κύκλου. Άρα, στο όριο, το ανάπτυγμα της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι ορθογώνιο με πλευρές τη γενέτειρα και το μήκος του κύκλου της βάσης, δηλαδή υ και 2ρπ αντίστοιχα, όπου υ το ύψος, ρ η ακτίνα του κυλίνδρου (σχ.34). Το ανάπτυγμα της ολικής επιφάνειας αποτελείται από το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ που περιγράψαμε και από δύο κυκλικούς δίσκους ακτίνας ρ, που αντιστοιχούν στις δύο βάσεις του κυλίνδρου (σχ.34).



Σχήμα 34

► Εμβαδόν επιφάνειας κυλίνδρου

Σύμφωνα με τους συλλογισμούς που κάναμε για την κατασκευή του αναπτύγματος, προκύπτει αμέσως το ακόλουθο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Το εμβαδόν της κυρτής και της ολικής επιφάνειας ενός κυλίνδρου ακτίνας ρ και ύψους υ είναι $E_\kappa = 2\pi\rho\upsilon$ και $E_0 = 2\pi\rho(\upsilon + \rho)$ αντίστοιχα.

► Όγκος κυλίνδρου

Αν εγγράψουμε στον κύλινδρο ένα ορθό κανονικό πρίσμα με βάση κανονικό ν-γωνο, ο όγκος του πρίσματος ισούται με το εμβαδόν της βάσης επί το ύψος του. Θεωρούμε τώρα ότι το ν διπλασιάζεται συνεχώς, ώστε το πλήθος των πλευρών της βάσης του πρίσματος να τείνει στο άπειρο, οπότε το εμβαδόν της βάσης τείνει στο εμβαδόν του κύκλου. Τότε, στο όριο, ο όγκος του κυλίνδρου ισούται με το εμβαδόν του κύκλου της βάσης επί το ύψος, δηλαδή:

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν αντί των εγγεγραμμένων πρισμάτων στον κύλινδρο χρησιμοποιούσαμε τα περιγεγραμμένα θα βρίσκαμε τους ίδιους ακριβώς τύπους για την επιφάνεια και τον όγκο του κυλίνδρου.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Ο όγκος κυλίνδρου ύψους υ και ακτίνας ρ ισούται με $V = \pi\rho^2\upsilon$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής και ολικής επιφάνειας και τον όγκο του κυλίνδρου που έχει ύψος 1 και ακτίνα 1.*
2. *Το ίδιο για κύλινδρο με ακτίνα 15 και ύψος 8.*
3. *Να υπολογίσετε τον όγκο, την κυρτή και τη συνολική επιφάνεια κυλίνδρου που έχει ύψος διπλάσιο της ακτίνας του.*
4. *Κυλινδρική δεξαμενή έχει ακτίνα 1μ. Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα σε λίτρα της δεξαμενής για κάθε εκατοστό του μέτρου ύψος.*
5. *Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός κυλίνδρου με ύψος 2 είναι ίσο με το εμβαδόν κύκλου ακτίνας 4. Να βρεθεί η ακτίνα ρ του κυλίνδρου.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

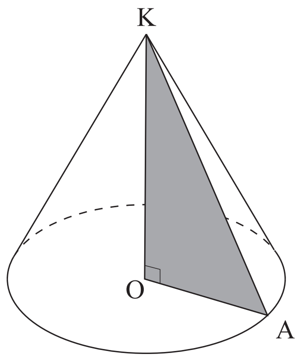
1. *Κύλινδρος έχει όγκο V και ύψος υ. Να υπολογίσετε την ολική του επιφάνεια.*
2. *Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και Μ το μέσο του ΑΒ. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που σχηματίζεται από το ορθογώνιο ΜΝΓΒ, (ΜΝ//ΑΔ) κατά την περιστροφή του γύρω από την πλευρά ΑΔ. Σε ποια θέση πρέπει να είναι το Μ, ώστε ο παραγόμενος όγκος να είναι το μισό του κυλίνδρου που παράγεται από το τετράγωνο;*
3. *Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓΔ που περιστρέφεται γύρω από άξονα του επιπέδου του που δεν το τέμνει και είναι παράλληλος στην πλευρά ΑΒ. Να υπολογίσετε τον όγκο και την ολική επιφάνεια που παράγεται από το ορθογώνιο και να αποδείξετε ότι ισούται με το μήκος του κύκλου που γράφει το κέντρο Ο του ορθογωνίου επί το εμβαδόν και την περίμετρο του ορθογωνίου αντίστοιχα.*

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

1. Εμβαδόν επιφάνειας κυλίνδρου:
   - κυρτής: $\mathbf{E_K = 2\pi\rho\upsilon}$,
   - ολικής: $\mathbf{E_0 = 2\pi\rho(\upsilon+\rho)}$
2. Όγκος κυλίνδρου: $\mathbf{V = \pi\rho^2\upsilon}$.

Κώνος

13.13 Ορισμός και στοιχεία κώνου

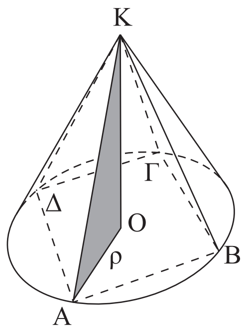


Σχήμα 35

Ορισμοί

***Ορθός κώνος* ή *κώνος εκ περιστροφής* ή απλώς *κώνος* λέγεται το στερεό σχήμα που παράγεται από την περιστροφή ενός ορθογώνιου τριγώνου γύρω από μία κάθετη πλευρά του.**

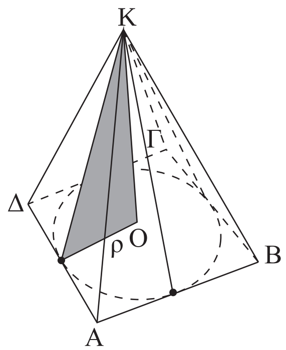
Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΚΟΑ, με την ορθή γωνία στο Ο (σχ.35), το οποίο περιστρέφεται γύρω από την κάθετη πλευρά ΚΟ. Η υποτείνουσα ΚΑ του ορθογώνιου τριγώνου, κατά την περιστροφή, διέρχεται από το σταθερό σημείο Κ και γράφει μία κυρτή επιφάνεια, ενώ η κάθετη πλευρά ΟΑ γράφει έναν κυκλικό δίσκο κέντρου Ο και ακτίνας ΟΑ, που βρίσκονται στο επίπεδο που είναι κάθετο στην ΚΟ στο Ο. Το στερεό σχήμα που παράγεται με αυτόν τον τρόπο από το τρίγωνο ΚΟΑ λέγεται ***κώνος***. Η κυρτή επιφάνεια που παράγεται από την υποτείνουσα ΚΑ λέγεται ***παράπλευρη*** ή ***κυρτή*** επιφάνεια του κώνου, η τυχαία θέση της ΚΑ λέγεται ***γενέτειρα*** ή ***πλευρά*** του κώνου. Η κάθετη πλευρά ΚΟ, που παραμένει σταθερή κατά την περιστροφή, λέγεται ***άξονας*** ή ***ύψος***, το σημείο Κ λέγεται ***κορυφή***, ο κύκλος που γράφει η κάθετη πλευρά ΟΑ λέγεται ***βάση*** και η ακτίνα της βάσης λέγεται ***ακτίνα του κώνου.*** Είναι προφανές ότι όλες οι γενέτειρες ενός κώνου είναι ίσες. Ο κώνος συμβολίζεται με (ΚΟ, ΟΑ), όπου ΚΟ ο άξονας και ΟΑ η ακτίνα της βάσης του κώνου.



Σχήμα 36

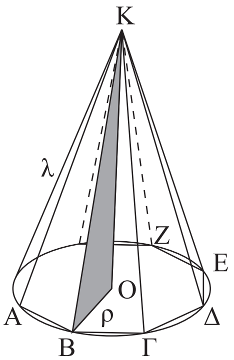
13.14 Μέτρηση του κώνου

Θεωρούμε έναν κώνο (ΚΟ, ρ) (σχ.36), και ένα πολύγωνο εγγεγραμμένο στη βάση του κώνου, π.χ. ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Αν ενώσουμε την κορυφή Κ του κώνου με τις κορυφές του πολυγώνου, οι ακμές της πυραμίδας είναι γενέτειρες του κώνου. Η πυραμίδα λοιπόν που έχει με τον κώνο κοινή κορυφή και η βάση της είναι εγγεγραμμένη στη βάση του κώνου λέγεται ***εγγεγραμμένη*** στον κώνο.

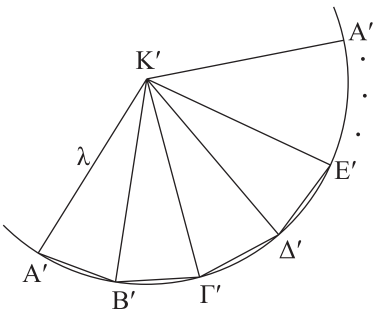


Σχήμα 37

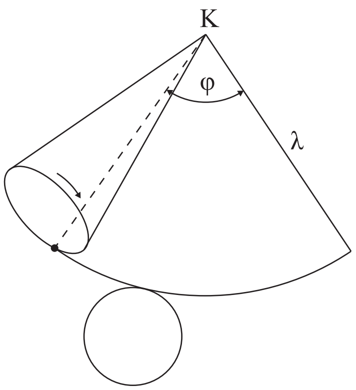
Αν τώρα θεωρήσουμε ένα πολύγωνο, περιγεγραμμένο στη βάση ενός κώνου, π.χ. ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ (σχ.37) και συνδέσουμε την κορυφή Κ του κώνου με τις κορυφές του



Σχήμα 38



Σχήμα 39



Σχήμα 40

πολυγώνου, προκύπτει μία πυραμίδα που λέγεται ***περιγεγραμμένη*** στον κώνο. Η πυραμίδα αυτή έχει έδρες που ***εφάπτονται*** στην κυρτή επιφάνεια του κώνου κατά μήκος γενετειρών.

► Ανάπτυγμα του κώνου

Η κυρτή επιφάνεια ενός κώνου μπορεί να αναπτυχθεί στο επίπεδο. Για το σκοπό αυτό εγγράφουμε στον κώνο (ΚΟ, ρ) (σχ.38), μία κανονική ν-γωνική πυραμίδα, την οποία στη συνέχεια αναπτύσσουμε στο επίπεδο. Το ανάπτυγμα της παράπλευρης επιφάνειας της κανονικής πυραμίδας αποτελείται από ν ίσα ισοσκελή τρίγωνα (σχ.39), τα οποία κατασκευάζουμε το ένα δίπλα στο άλλο ως εγγεγραμμένα τρίγωνα στον κύκλο (Κ′, λ), όπου Κ′ τυχόν σημείο του επιπέδου και λ το μήκος της γενέτειρας του κώνου.

Διπλασιάζοντας συνεχώς τον αριθμό ν των κορυφών της εγγεγραμμένης πυραμίδας, τα μήκη των ίσων χορδών ΑΒ, ΒΓ, κτλ. γίνονται συνεχώς μικρότερα και η πολυγωνική γραμμή Α′Β′...Α′ στο ανάπτυγμα τείνει να συμπέσει με το τόξο του κύκλου (Κ′, λ). Στο όριο λοιπόν, το ανάπτυγμα του κώνου είναι ένας τομέας του κύκλου (Κ′, λ), το τόξο του οποίου έχει μήκος $\overset{\frown}{ΑΑ'} = 2πρ$. Αν ονομάσουμε φ τη γωνία $Α'\hat{Κ}'Α'$ του τομέα, μετρημένη σε μοίρες, έχουμε τη σχέση (σχ.40):

$$\frac{360}{2πλ} = \frac{φ}{2πρ} \Leftrightarrow φ = \frac{ρ}{λ} \cdot 360^{o}.$$

Άρα, το ανάπτυγμα της κυρτής επιφάνειας κώνου με πλευρά λ και ακτίνα ρ είναι τομέας κύκλου ακτίνας λ που βλέπει τόξο μήκους 2πρ ή σε μοίρες:

$$\boldsymbol{φ = \frac{ρ}{λ} \cdot 360^{o}}$$

► Εμβαδόν επιφάνειας και όγκος του κώνου

Σύμφωνα με τους συλλογισμούς που κάναμε για την κατασκευή του αναπτύγματος, προκύπτει αμέσως το ακόλουθο Θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Το εμβαδόν της κυρτής $Ε_κ$ και της ολικής $Ε_ο$ επιφάνειας ενός κώνου με ακτίνα ρ και γενέτειρα λ, ισούται με:

$$Ε_κ = πρλ \quad \text{και} \quad Ε_0 = πρ(ρ + λ).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Το ανάπτυγμα της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι τομέας κύκλου ακτίνας λ που έχει μήκος τόξου 2πρ. Για το εμβαδόν $\mathbf{E}_{\kappa}$ αυτού του τομέα ισχύει η σχέση:

$$\frac{\pi\lambda^2}{2\pi\lambda} = \frac{E_\kappa}{2\pi\rho} \Leftrightarrow E_\kappa = \pi\rho\lambda.$$

Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας προκύπτει αν στο εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας προσθέσουμε το εμβαδόν της βάσης του κώνου, δηλαδή:

$$E_0 = \pi\rho^2 + \pi\rho\lambda = \pi\rho\,(\rho + \lambda).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Ο όγκος κώνου ακτίνας ρ και ύψους υ ισούται με:

$$V = \pi\rho^2\frac{\upsilon}{3}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

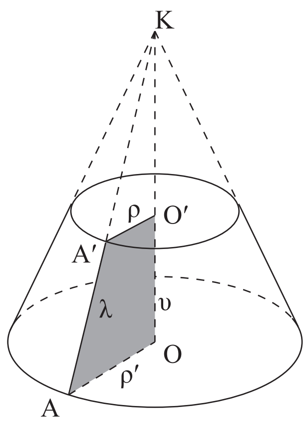
Θεωρούμε κανονική πυραμίδα εγγεγραμμένη στον κώνο, η οποία έχει όγκο $\mathbf{V} = \dfrac{\mathbf{B}\cdot\upsilon}{3}$, όπου **B** το εμβαδόν της βάσης της. Αν ο αριθμός των πλευρών της πυραμίδας συνεχώς διπλασιάζεται, τότε στο όριο, το εμβαδόν της βάσης της πυραμίδας είναι το εμβαδόν της βάσης του κώνου και ο όγκος του κώνου ισούται με $\mathbf{V} = \dfrac{\pi\rho^2\upsilon}{3}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αντί των εγγεγραμμένων πυραμίδων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις περιγεγραμμένες. Ο όγκος του κώνου είναι μικρότερος από τον όγκο των περιγεγραμμένων πυραμίδων και μεγαλύτερος των εγγεγραμμένων.

13.15 Κόλουρος κώνος

Έστω κώνος (ΚΟ, ρ), ο οποίος τέμνει ένα επίπεδο κάθετο στον άξονά του στο σημείο Ο′ μεταξύ Κ και Ο (σχ.41). Δημιουργείται έτσι ένας μικρότερος κώνος, με την ίδια κορυφή και βάση έναν κύκλο παράλληλο προς τον αρχικό, με μικρότερη ακτίνα, ο οποίος αφαιρείται από τον αρχικό κώνο.



Σχήμα 41

Το σχήμα που απομένει λέγεται ***κόλουρος κώνος*** και αποτελείται από το μέρος του κώνου που περιλαμβάνεται μεταξύ της βάσης και ενός επιπέδου παράλληλου σε αυτό, μεταξύ κορυφής και βάσης. Οι δύο παράλληλοι κύκλοι λέγονται ***βάσεις*** του κόλουρου κώνου (μικρή και μεγάλη) και το ευθύγραμμο τμήμα ΟΟ′ που συνδέει τα κέντρα των βάσεων λέγεται ***άξονας*** ή ***ύψος***. Το τμήμα ΑΑ′ λέγεται ***γενέτειρα*** ή ***πλευρά.***

Για τον όγκο και την επιφάνεια ενός κόλουρου κώνου ισχύουν τα επόμενα Θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

- Το εμβαδόν της κυρτής $E_κ$ και της ολικής $E_ο$ επιφάνειας κόλουρου κώνου με ακμή λ και ακτίνες βάσεων ρ και ρ′, ισούται με:
$E_κ = πλ(ρ + ρ')$ και $E_0 = πλ(ρ + ρ') + π(ρ^2 + ρ'^2)$.
- Ο όγκος κόλουρου κώνου, με ύψος υ και ακτίνες ρ και ρ′, ισούται με:
$$V = \frac{πυ}{3}(ρ^2 + ρ'^2 + ρρ').$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Κώνος έχει ακτίνα 3 και ύψος 4. Να υπολογίσετε τον όγκο, την κυρτή και την ολική επιφάνεια του κώνου.*
2. *Κώνος έχει ύψος 4 και επιφάνεια 6π. Να βρείτε την ακτίνα του κώνου.*
3. *Κατασκευάζεται αποθήκη οικοδομικών υλικών σε σχήμα αντεστραμμένου κώνου (σιλό), χωρίς κάλυμμα, με ακτίνα βάσης ρ και γενέτειρα 2ρ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της λαμαρίνας που χρειάζεται για την κατασκευή της και τον όγκο της αποθήκης.*
4. *Κώνος παράγεται από την περιστροφή ορθογώνιου και ισοσκελούς τριγώνου γύρω από το ύψος του. Αν ρ είναι η ακτίνα της βάσης του κώνου, να υπολογίσετε τον όγκο και την κυρτή επιφάνεια του κώνου.*
5. *Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κώνου είναι ίσο με το εμβαδόν κύκλου ακτίνας α. Να βρείτε την κυρτή επιφάνεια και τον όγκο του κώνου, αν έχει ακτίνα ρ.*
6. *Να βρείτε το λόγο του εμβαδού της βάσης ενός κώνου προς το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειάς του, αν έχει ύψος ίσο με τη διάμετρο της βάσης του.*
7. *Κώνος και κύλινδρος έχουν ίσες βάσεις και ίσα ύψη. Να βρείτε το λόγο των κυρτών επιφανειών τους.*
8. *Να βρείτε τη γωνία του κυκλικού τομέα που παριστάνει το ανάπτυγμα του κώνου ακτίνας ρ και ύψους* $υ = \sqrt{15}ρ$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Να χωριστεί η κυρτή επιφάνεια κώνου σε δύο ισοδύναμα μέρη με επίπεδο κάθετο στον άξονα του κώνου. Το ίδιο για τους όγκους των κώνων.*
2. *Ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ κατά ίσο μήκος και στο σημείο αυτό φέρουμε ευθεία ξ κάθετη στην ΑΒ. Να υπολογίσετε τον όγκο που παράγεται από το ισόπλευρο τρίγωνο, αν αυτό περιστραφεί γύρω από την ευθεία ξ.*
3. *Κώνος έχει ακτίνα ρ και γενέτειρα 2ρ. Να χωρίσετε τον κώνο με δύο παράλληλα επίπεδα στη βάση σε τρία μέρη, ώστε οι κυρτές επιφάνειες που προκύπτουν να είναι ισοδύναμες.*
4. *Να αποδείξετε ότι ο όγκος ενός κώνου ισούται με το εμβαδόν του ορθογώνιου τριγώνου που τον παράγει επί το* $\frac{1}{3}$ *του μήκους του κύκλου της βάσης.*
5. *Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των κυρτών επιφανειών δύο κώνων που παράγονται από δύο όμοια ορθογώνια τρίγωνα είναι ανάλογα προς τα τετράγωνα των ακτίνων τους.*
6. *Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας ενός κώνου ισούται με το εμβαδόν κύκλου ακτίνας α. Να υπολογίσετε: i) τον όγκο του κώνου, αν έχει ακτίνα ρ και ii) τον όγκο του κώνου, αν* $α = 1$ *και* $ρ = \frac{2}{3}$.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

1. Εμβαδόν επιφάνειας κώνου ακτίνας ρ και γενέτειρας λ:

- κυρτής: $\mathbf{E_\kappa} = \pi\rho\lambda$,
- ολικής: $\mathbf{E_o} = \pi\rho(\rho + \lambda)$.

2. Το ανάπτυγμα κώνου ακτίνας ρ και γενέτειρας λ είναι κυκλικός τομέας γωνίας: $\varphi = \frac{\rho}{\lambda} \cdot 360^o$.

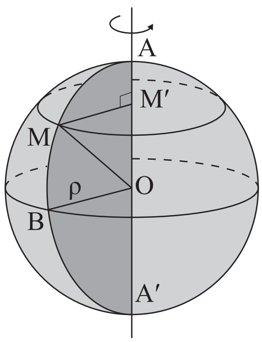
3. Όγκος κώνου ύψους υ και ακτίνας ρ: $\mathbf{V} = \frac{\pi\rho^2\upsilon}{3}$.

4. Κόλουρος κώνος με ακτίνες ρ, ρ′, ύψος υ και γενέτειρα λ:

- εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $\mathbf{E_\kappa} = \pi\lambda(\rho + \rho')$
- εμβαδόν ολικής επιφάνειας $\mathbf{E_o} = \pi\lambda(\rho + \rho') + \pi(\rho^2 + \rho'^2)$
- όγκος $\mathbf{V} = \frac{\pi\upsilon}{3}(\rho_2 + \rho'_2 + \rho\rho')$.

Σφαίρα

13.16 Ορισμός και στοιχεία σφαίρας



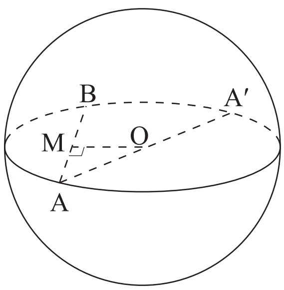
Σχήμα 42

Η σφαίρα, ένα στερεό σχήμα που είναι γνωστό από την εποπτεία, μπορεί να οριστεί γεωμετρικά με δύο τρόπους. Κατά τον ένα τρόπο, θεωρείται ότι προκύπτει ως επιφάνεια εκ περιστροφής, ενώ κατά τον δεύτερο τρόπο ότι είναι γεωμετρικός τόπος σημείων του χώρου. Ακολουθούν και οι δύο ορισμοί:

Ορισμοί

i) ***Σφαίρα*** **είναι το σχήμα που παράγεται από την περιστροφή ενός κύκλου (Ο, ρ) με άξονα περιστροφής μία διάμετρό του.**

ii) ***Σφαίρα*** **είναι το σύνολο των σημείων του χώρου που απέχουν από ένα σταθερό σημείο Ο σταθερή απόσταση ρ.**

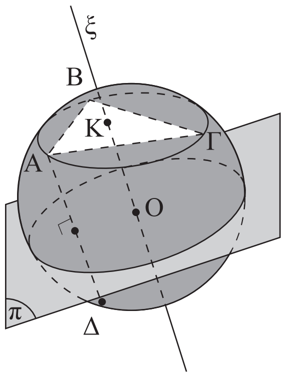


Σχήμα 43

Το σημείο Ο λέγεται ***κέντρο*** (σχ.42) και το τμήμα ΟΒ = ρ λέγεται ***ακτίνα*** της σφαίρας. Η σφαίρα συμβολίζεται με (Ο, ρ), όπου Ο είναι το κέντρο της σφαίρας και ρ η ακτίνα της. Κάθε ευθεία που περνάει από το κέντρο Ο της σφαίρας τέμνει τη σφαίρα σε δύο σημεία Α και Α′, τα οποία λέγονται ***αντιδιαμετρικά*** σημεία (σχ.43) και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΑ′ λέγεται ***διάμετρος*** της σφαίρας. Το ευθύγραμμο τμήμα

ΑΒ που ενώνει δύο τυχαία σημεία της σφαίρας λέγεται ***χορδή***. Τα σημεία του χώρου που απέχουν από το κέντρο της σφαίρας απόσταση μικρότερη από την ακτίνα της σφαίρας λέγονται ***εσωτερικά*** σημεία της σφαίρας, ενώ εκείνα των οποίων η απόσταση από το κέντρο είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα λέγονται ***εξωτερικά.***

Ως άμεση συνέπεια του ορισμού προκύπτουν οι εξής προτάσεις:



Σχήμα 44

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

- **Κάθε σφαίρα έχει μόνο ένα κέντρο Ο.**
- **Όλες οι διάμετροι της σφαίρας είναι ίσες.**
- **Κάθε χορδή σφαίρας είναι μικρότερη από τη διάμετρο.**
- **Αν ΑΒ είναι χορδή σφαίρας και Μ το μέσο της χορδής, τότε η ΟΜ είναι κάθετη στη χορδή.**

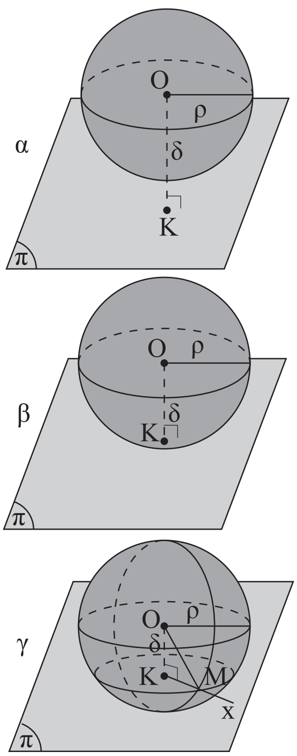
ΠΡΟΤΑΣΗ

Τέσσερα σημεία του χώρου, που δεν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο, ορίζουν μοναδική σφαίρα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ και Δ, που δεν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο. Τα σημεία της ευθείας ξ που είναι κάθετη στο επίπεδο του τριγώνου ΑΒΓ στο περίκεντρο Κ ισαπέχουν από τα Α, Β και Γ (σχ.44). Κατασκευάζουμε τώρα το επίπεδο π που είναι μεσοκάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ, που τέμνει την ευθεία ξ σε ένα σημείο Ο. Το σημείο Ο ισαπέχει και από τα τέσσερα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Τέλος, επειδή το κέντρο κάθε σφαίρας που περνάει από τα σημεία Α, Β και Γ είναι σημείο της ξ και το κέντρο κάθε σφαίρας που περνάει από τα Α και Δ είναι σημείο του π, έπεται ότι η σφαίρα αυτή είναι μοναδική.

13.17 Θέσεις ευθείας και επιπέδου ως προς σφαίρα



Σχήμα 45

► Σχετική θέση επιπέδου και σφαίρας

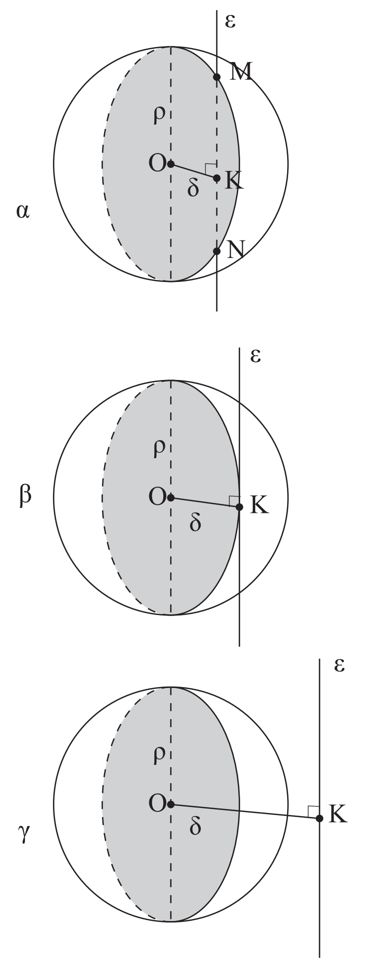
Έστω σφαίρα (Ο, ρ), επίπεδο π που απέχει απόσταση ΟΚ = δ από το κέντρο Ο της σφαίρας (σχ.45).

i) Αν δ > ρ (σχ.45α), τότε όλα τα σημεία του επιπέδου είναι εξωτερικά σημεία της σφαίρας, επομένως το επίπεδο και η σφαίρα δεν έχουν κοινά σημεία.

ii) Αν $\delta = \rho$ (σχ.45β), τότε το σημείο Κ είναι κοινό σημείο της σφαίρας και του επιπέδου, ενώ κάθε άλλο σημείο του επιπέδου είναι εξωτερικό σημείο της σφαίρας. Τότε το επίπεδο λέγεται ***εφαπτόμενο*** επίπεδο της σφαίρας και το σημείο Κ λέγεται ***σημείο επαφής.***

iii) Αν $\delta < \rho$ (σχ.45γ), τότε το σημείο Κ είναι εσωτερικό σημείο της σφαίρας. Τότε το επίπεδο τέμνει τη σφαίρα και η τομή είναι κύκλος του επιπέδου π με κέντρο το σημείο Κ και ακτίνα $\rho' = \sqrt{\rho^2 - \delta^2}$.

Όταν το επίπεδο περνάει από το κέντρο της σφαίρας, τότε η τομή της σφαίρας με το επίπεδο είναι κύκλος που έχει κέντρο Ο και ακτίνα ρ και λέγεται ***μέγιστος κύκλος.*** Η τομή της σφαίρας με επίπεδο που δεν περνάει από το κέντρο λέγεται ***μικρός κύκλος*** της σφαίρας.



Σχήμα 46

► Σχετική θέση ευθείας και σφαίρας

Θεωρούμε σφαίρα (Ο, ρ) και ευθεία ε που δε διέρχεται από το κέντρο Ο. Στο επίπεδο (Ο, ε) γράφουμε τον κύκλο (Ο, ρ), που είναι μέγιστος κύκλος της σφαίρας και έστω $OK = \delta$ η απόσταση του σημείου Ο από την ευθεία ε. Η εύρεση των κοινών σημείων της ευθείας και της σφαίρας ανάγεται στην εύρεση των κοινών σημείων της ευθείας ε και του κύκλου (Ο, ρ).

i) Έστω ότι $\delta < \rho$ (σχ.46α). Τότε η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο (Ο, ρ) σε δύο σημεία Μ και Ν. Άρα η ευθεία ε τέμνει τη σφαίρα σε δύο σημεία, τα Μ και Ν.

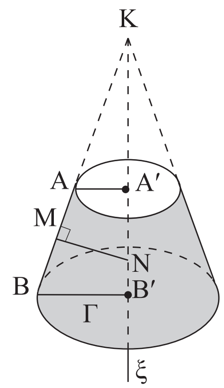
ii) Έστω ότι $\delta = \rho$ (σχ.46β). Τότε ο κύκλος (Ο, ρ) που βρίσκεται στο επίπεδο (Ο, ε), εφάπτεται στην ευθεία ε και το σημείο Κ είναι το μοναδικό κοινό σημείο της ευθείας ε και της σφαίρας (Ο, ρ). Στην περίπτωση αυτή η ευθεία ε λέγεται ***εφαπτομένη*** της σφαίρας και σημείο Κ λέγεται ***σημείο επαφής.***

iii) Έστω ότι $\delta > \rho$ (σχ.46γ). Ο κύκλος (Ο, ρ) δεν τέμνει την ευθεία ε, επομένως η ευθεία και η σφαίρα δεν έχουν κοινά σημεία. Αν η ευθεία ε διέρχεται από το Ο, τότε η ε τέμνει τη σφαίρα σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία.

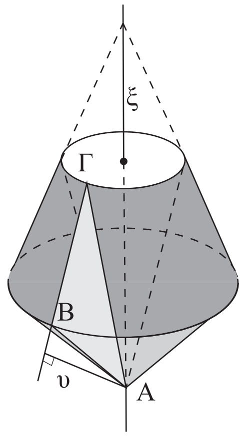
13.18 Μέτρηση σφαίρας

► Εμβαδόν και όγκος παραγόμενος από την περιστροφή επίπεδης πολυγωνικής γραμμής

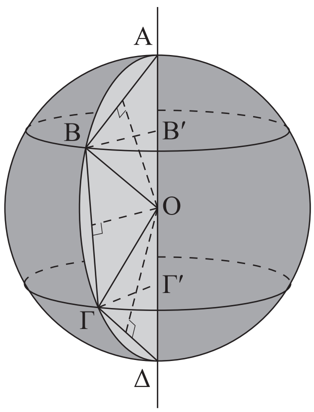
Για τον υπολογισμό του εμβαδού της επιφάνειας της σφαίρας και του όγκου της θα χρειαστούμε τα επόμενα θεωρήμα-



Σχήμα 47



Σχήμα 48



Σχήμα 49

τα που αναφέρονται ως θεωρήματα του Πάππου. Ο Πάππος έζησε τον 3ο μ.Χ. αιώνα και εδίδαξε στο Πανεπιστήμιο της Αλεξάνδρειας.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται κατά την πλήρη περιστροφή ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ (σχ.47), με άξονα περιστροφής ευθεία ξ συνεπίπεδη με το τμήμα, που δεν το τέμνει σε εσωτερικό σημείο και δεν είναι κάθετη σε αυτό, ισούται με το γινόμενο του κύκλου που έχει ακτίνα το τμήμα ΜΝ που είναι κάθετο στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος μέχρι τον άξονα, επί το μήκος της προβολής Α′Β′ του τμήματος στον άξονα, δηλαδή

$$\text{εμβ}(\text{ΑΒ}) = 2\pi \cdot \text{ΜΝ} \cdot \text{Α}'\text{Β}'.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Ο όγκος του στερεού που παράγεται κατά την περιστροφή τριγώνου ΑΒΓ γύρω από άξονα ξ, που ανήκει στο επίπεδο του τριγώνου και διέρχεται από την κορυφή Α, χωρίς να το τέμνει σε εσωτερικά σημεία, ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της επιφάνειας που παράγει η πλευρά ΒΓ επί το ένα τρίτο του ύψους που αντιστοιχεί στην κορυφή Α του τριγώνου (σχ.48), δηλαδή:

$$\text{ογκ}(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{3}\upsilon \cdot \text{εμβ}(\text{ΒΓ}).$$

► Εμβαδόν επιφάνειας σφαίρας

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ

Το εμβαδόν της επιφάνειας σφαίρας (Ο, ρ) ισούται με το εμβαδόν τεσσάρων μέγιστων κύκλων, δηλαδή:

$$\text{Ε} = 4\pi\rho^2.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε ότι η σφαίρα (Ο, ρ) παράγεται από την περιστροφή ενός μέγιστου κύκλου της, με άξονα μία διάμετρο. Στο μέγιστο κύκλο εγγράφουμε ένα κανονικό πολύγωνο με άρτιο πλήθος κορυφών, π.χ. ένα εξάγωνο (σχ.49). Κατά την περιστροφή γύρω από τη διάμετρο ΑΔ, η πολυγωνική γραμμή ΑΒΓΔ, σύμφωνα με το θεώρημα Ι του Πάππου, παράγει επιφάνεια εμβαδού:

$$\mathbf{Ε_6} = 2\pi\alpha_6(\text{ΑΒ}' + \text{Β}'\text{Γ}' + \text{Γ}'\text{Δ}) = 2\pi\alpha_6 \cdot \text{ΑΔ} = 4\pi\rho\alpha_6\,,$$

όπου $α_6$ είναι το απόστημα του κανονικού εξαγώνου.

Διπλασιάζοντας συνεχώς τις πλευρές του εγγεγραμμένου πολυγώνου, στο όριο, η πλευρά του εγγεγραμμένου πολυγώνου συνεχώς μειώνεται, το πολύγωνο τείνει στο μέγιστο κύκλο και το απόστημα τείνει στην ακτίνα του κύκλου. Στο όριο λοιπόν, έχουμε:

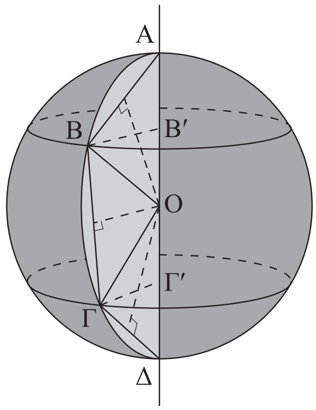
$$\mathbf{E} = 4πρ \cdot ρ = 4πρ^2.$$

► Όγκος σφαίρας

ΘΕΩΡΗΜΑ IV

Ο όγκος σφαίρας ακτίνας ρ είναι: $V = \frac{4}{3}πρ^3$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 49α

Εγγράφουμε στον κύκλο που παράγει τη σφαίρα εκ περιστροφής ένα κανονικό πολύγωνο με άρτιο πλήθος κορυφών, π.χ. ένα εξάγωνο (σχ.49α). Κατά την περιστροφή γύρω από τον άξονα ΑΔ, τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ και ΟΓΔ παράγουν όγκο, που σύμφωνα με το Θεώρημα ΙΙ του Πάππου δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{V_6} = \frac{1}{3}(εμβ(ΑΒ) + εμβ(ΒΓ) + εμβ(ΓΔ)) \cdot α_6 =$$

$$= \frac{1}{3}εμβ(ΑΒΓΔ) \cdot α_6$$

όπου $α_6$ είναι το απόστημα του κανονικού εξαγώνου και εμβ(ΑΒ) είναι το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται από το τμήμα ΑΒ κατά την περιστροφή του γύρω από τον άξονα ΑΔ. Διπλασιάζοντας συνεχώς τις πλευρές του εγγεγραμμένου πολυγώνου, στο όριο, η πλευρά του εγγεγραμμένου πολυγώνου τείνει στο μηδέν, το εμβαδόν της πολυγωνικής γραμμής ΑΒ...Δ τείνει στο εμβαδόν του ημικυκλίου ακτίνας ρ, το εμβαδόν που παράγει η πολυγωνική γραμμή ΑΒ...Δ τείνει στο εμβαδόν της σφαίρας και το απόστημα τείνει στην ακτίνα ρ του κύκλου. Στο όριο, λοιπόν, έχουμε:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{3} \cdot 4πρ^2 \cdot ρ = \frac{4}{3}πρ^3.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Ο όγκος και το εμβαδόν της επιφάνειας σφαίρας και ο όγκος και το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κώνου, κόλουρου κώνου και κυλίνδρου υπολογίστηκαν για πρώτη φορά από τον Αρχιμήδη με διαφορετική μέθοδο από αυτήν που χρησιμοποιούμε εδώ, που την αποκαλούσε «έφοδο».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Σφαίρα ακτίνας 50 τέμνεται από επίπεδο που απέχει από το κέντρο απόσταση 20. Να υπολογίσετε την ακτίνα της τομής.*
2. *Σφαίρα ακτίνας 40 τέμνεται από επίπεδο κατά κύκλο με εμβαδόν 900π. Να βρείτε την απόσταση του επιπέδου από το κέντρο της σφαίρας.*
3. *Διαιρούμε μία ακτίνα σφαίρας (Ο, ρ) σε δύο ίσα τμήματα και από το σημείο της διαίρεσης φέρουμε επίπεδο κάθετο στην ακτίνα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου της τομής.*
4. *Σφαίρα ακτίνας ρ φωτίζεται από φωτεινή πηγή που βρίσκεται σε απόσταση $\delta>\rho$ από το κέντρο της σφαίρας. Να βρείτε την ακτίνα του κύκλου που χωρίζει το φωτιζόμενο μέρος της σφαίρας από το σκοτεινό.*
5. *Να υπολογίσετε το εμβαδόν σφαίρας ακτίνας $\rho=10$.*
6. *Να βρείτε το λόγο των επιφανειών δύο σφαιρών αν ο λόγος των ακτίνων τους είναι λ.*
7. *Να υπολογίσετε τον όγκο σφαίρας με ακτίνα 3.*
8. *Να υπολογίσετε το λόγο των όγκων δύο σφαιρών αν ο λόγος των ακτίνων τους είναι λ.*
9. *Δίνονται δύο ομόκεντρες σφαίρες με ακτίνες ρ και ρ'. Φέρουμε επίπεδο εφαπτόμενο στη μικρότερη σφαίρα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου κατά τον οποίο τέμνεται η μεγάλη σφαίρα από επίπεδο που εφάπτεται στη μικρή.*
10. *Κυλινδρικός λέβητας έχει ύψος ίσο με την ακτίνα του ρ και καταλήγει σε δύο ημισφαίρια. Να υπολογίσετε το ρ, ώστε ο συνολικός όγκος να είναι 63π.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνονται τα στερεά: i) κύλινδρος ακτίνας ρ και ύψους 2ρ, ii) κώνος ακτίνας ρ και ύψους ρ και iii) σφαίρα ακτίνας ρ. Να αποδείξετε ότι (α) ο όγκος της σφαίρας ισούται με τέσσερις όγκους κώνου, (β) δύο όγκοι κυλίνδρου είναι τρεις σφαίρες και (γ) δύο ολικές επιφάνειες του κυλίνδρου ισοδυναμούν με τρεις φορές την επιφάνεια της σφαίρας.*
2. *Να αποδείξετε ότι αν δύο σφαίρες τέμνονται, η τομή τους είναι κύκλος.*
3. *Να αποδείξετε ότι ο όγκος σφαίρας ακτίνας ρ, ο όγκος ισόπλευρου κυλίνδρου περιγεγραμμένου στη σφαίρα (δηλαδή κυλίνδρου με ακτίνα ρ και ύψος 2ρ) και ο όγκος ισοσκελούς κώνου περιγεγραμμένου στη σφαίρα (δηλαδή κώνου περιγεγραμμένου στη σφαίρα που έχει διάμετρο βάσης ίση με ακμή) είναι ανάλογοι των αριθμών 4, 6 και 9 αντίστοιχα.*

Σύνθετα Θέματα

1. *Να βρείτε το λόγο του ύψους κυλίνδρου προς την ακτίνα σφαίρας αν έχουν ίσες ακτίνες και ισοδύναμες κυρτές επιφάνειες.*
2. *Σε σφαίρα ακτίνας ρ εγγράφεται κώνος. Να βρείτε την απόσταση της βάσης του κώνου από το κέντρο ώστε ο κώνος να έχει μέγιστο όγκο. Το ίδιο και για κύλινδρο εγγεγραμμένο σε σφαίρα.*
3. *Να βρείτε το λόγο των εμβαδών και των όγκων σφαίρας και του εγγεγραμμένου σε αυτήν i) κύβου, ii) κανονικού οκταέδρου.*
4. *Σφαίρα, κύλινδρος και κώνος έχουν ίσες ακτίνες και τα ύψη του κώνου και του κυλίνδρου είναι ίσα με τη διάμετρο της σφαίρας. Να υπολογίσετε τους λόγους των κυρτών επιφανειών του κυλίνδρου και του κώνου προς την επιφάνεια της σφαίρας. Το ίδιο και για τους όγκους τους.*
5. *Αν V_α, V_β και V_γ είναι οι όγκοι που παράγονται από ορθογώνιο τρίγωνο αν αυτό περιστραφεί γύρω από τις πλευρές α, β και γ αντίστοιχα, τότε ισχύει:*

$$\frac{1}{V_\alpha^2}=\frac{1}{V_\beta^2}+\frac{1}{V_\gamma^2}.$$

Να βρεθεί επίσης ο λόγος $\frac{V_\beta}{V_\gamma}$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Δίνεται τετραγωνική πυραμίδα Κ.ΑΒΓΔ, με βάση τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α, η έδρα ΚΑΔ είναι ισόπλευρο τρίγωνο και οι γωνίες ΚΑΒ και ΚΔΓ είναι ορθές.

i) *Να αποδειχθεί ότι η δίεδρη γωνία ΑΔ(Κ,Γ) είναι ορθή.*

ii) *Από το σημείο Α φέρουμε την ΑΒ' κάθετη στην ακμή ΚΒ και από το Β' επίπεδο παράλληλο στο ΑΒΓΔ που τέμνει τις ακμές ΚΑ, ΚΓ και ΚΔ στα σημεία Α', Γ' και Δ'. Να υπολογισθεί ο όγκος της κόλουρης πυραμίδας ΑΒΓΔ-Α'Β'Γ'Δ'.*

iii) *Να αποδειχθεί ότι η πυραμίδα Κ.ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμη σε σφαίρα και να υπολογισθεί ο όγκος και η επιφάνειά της.*

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

1. Η σχετική θέση σφαίρας (Ο, ρ) και επιπέδου π εξαρτάται από την απόσταση δ του επιπέδου από το κέντρο Ο ως εξής:

- $\delta > \rho$, το επίπεδο και η σφαίρα δεν έχουν κοινά σημεία,
- $\delta = \rho$, το επίπεδο και η σφαίρα έχουν ένα κοινό σημείο. Το επίπεδο εφάπτεται στη σφαίρα,
- $\delta < \rho$, το επίπεδο τέμνει τη σφαίρα σε κύκλο με ακτίνα $\sqrt{\rho^2 - \delta^2}$ και κέντρο την προβολή του κέντρου της σφαίρας στο επίπεδο.

2. Η σχετική θέση σφαίρας (Ο, ρ) και ευθείας ε εξαρτάται από την απόσταση δ του κέντρου Ο από την ευθεία ως εξής:

- $\delta > \rho$, η ευθεία δεν έχει κοινά σημεία με τη σφαίρα.
- $\delta = \rho$, η ευθεία έχει ένα κοινό σημείο με τη σφαίρα, δηλαδή η ευθεία εφάπτεται στη σφαίρα.
- $\delta < \rho$, η ευθεία τέμνει τη σφαίρα σε δύο σημεία.

3. Εμβαδόν επιφάνειας σφαίρας (Ο, ρ): $\mathbf{E} = 4\pi\rho^2$

4. Όγκος σφαίρας (Ο, ρ): $\mathbf{V} = \frac{4}{3}\pi\rho^3$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Να βρείτε σημείο του οποίου το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεών του από τις κορυφές ενός τετραέδρου να είναι ελάχιστο.*
2. *Η τομή τετραέδρου με επίπεδο παράλληλο σε δύο απέναντι ακμές είναι παραλληλόγραμμο.*
3. *Δίνονται τρεις ευθείες ε, ζ και ξ ανά δύο ασύμβατες, που δεν είναι παράλληλες στο ίδιο επίπεδο. Να κατασκευάσετε παραλληλεπίπεδο που έχει τρεις ακμές του στις ευθείες αυτές.*
4. *Το επίπεδο που διχοτομεί μία δίεδρη γωνία ενός τετραέδρου χωρίζει την απέναντι ακμή σε μέρη ανάλογα των προσκείμενων εδρών.*
5. *Σε κάθε τετράεδρο οι τρεις ευθείες που συνδέουν τα μέσα των απέναντι ακμών διχοτομούνται. Τα τμήματα αυτά λέγονται **διδιάμεσοι** και το σημείο αυτό λέγεται **κέντρο βάρους** του τετραέδρου.*
6. *Οι τέσσερις **διάμεσοι τετραέδρου**, δηλαδή τα τμήματα που συνδέουν τις κορυφές με τα κέντρα βάρους των απέναντι εδρών, διέρχονται από το ίδιο σημείο και τις χωρίζει σε λόγο 1:3.*
7. *Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που συνδέουν τα μέσα των απέναντι ακμών τετραέδρου (διδιάμεσοι) διέρχονται από το κέντρο βάρους του τετραέδρου.*
8. *Να βρείτε εσωτερικό σημείο τετραέδρου τέτοιο ώστε τα τετράεδρα που σχηματίζονται με κορυφή το σημείο αυτό και βάσεις τις έδρες του αρχικού τετραέδρου να είναι ισοδύναμα.*

13.19 Κανονικά πολύεδρα

Ένα πολύεδρο λέγεται ***κανονικό*** όταν όλες οι έδρες του είναι ίσα κανονικά πολύγωνα και όλες οι πολυεδρικές γωνίες του είναι ίσες.

Από τον ορισμό αυτό προκύπτει ότι όλες οι ακμές ενός κανονικού πολυέδρου είναι ίσα ευθύγραμμα τμήματα, καθώς επίσης και όλες οι επίπεδες γωνίες των εδρών του είναι ίσες. Από τα πολύεδρα που εξετάσαμε έως τώρα, κανονικά ήταν το κανονικό τετράεδρο και ο κύβος. Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε όλα τα κανονικά πολύεδρα που μπορούν να κατασκευασθούν.

Όπως αναφέραμε στην §13.1, για το πλήθος των κορυφών Κ, των ακμών Α και των εδρών Ε ενός πολυέδρου, ισχύει το θεώρημα του Euler:

$$\mathbf{E + K = A + 2} \qquad (1).$$

Ένα κανονικό πολύεδρο έχει έδρες που είναι κανονικά πολύγωνα και έστω ν ο αριθμός των πλευρών κάθε έδρας. Οι Ε έδρες έχουν συνολικά νΕ πλευρές, οι οποίες ανά δύο ταυτίζονται για να δώσουν μία ακμή του πολυέδρου, άρα οι ακμές είναι:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{\nu E}}{\mathbf{2}} \qquad (2).$$

Επίσης, κάθε έδρα του κανονικού πολυέδρου έχει ν κορυφές και το σύνολο των επίπεδων γωνιών όλων των εδρών του είναι νΕ. Θεωρούμε ότι αυτές ενώνονται ανά μ για να δώσουν μία στερεά γωνία του κανονικού πολυέδρου, που αντιστοιχεί σε κάθε κορυφή του. Επομένως οι κορυφές είναι

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{\nu E}}{\boldsymbol{\mu}} \qquad (3).$$

Αντικαθιστώντας τα Α και Κ στην (1) από τις (2) και (3), έχουμε

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{4}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{(2}\boldsymbol{\mu}\mathbf{ + 2}\boldsymbol{\nu}\mathbf{ - }\boldsymbol{\mu\nu}\mathbf{)}} \qquad (4).$$

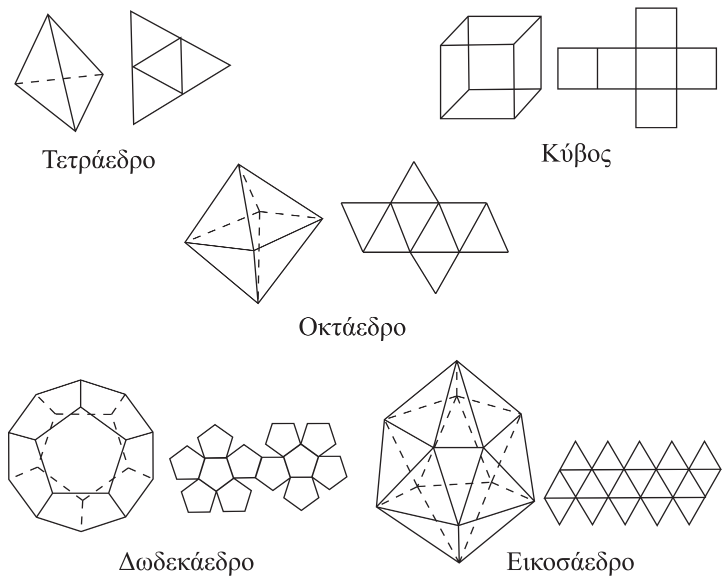
Αναζητούμε λοιπόν φυσικούς αριθμούς μ, ν και Ε που να ικανοποιούν τη σχέση (4), λαμβάνοντας υπόψη ότι ο παρονομαστής πρέπει να είναι θετικός αριθμός και οι έδρες πρέπει να είναι περισσότερες από τρεις. Οι λύσεις που ικανοποιούν όλες αυτές τις συνθήκες είναι οι εξής:

- Για ν = 3 το μ παίρνει τις τιμές μ = 3, 4, 5 και το Ε = 4, 8, 20 αντίστοιχα, δηλαδή με τρίγωνα σχηματίζεται το ***κανονικό τετράεδρο***, ***οκτάεδρο*** και ***εικοσάεδρο***.
- Για ν = 4 τότε μ = 4 και Ε = 6, δηλαδή με τετράγωνα σχηματίζεται μόνο ***ο κύβος***.
- Για ν = 5 τότε μ = 3 και Ε = 12, δηλαδή με κανονικά πεντάγωνα σχηματίζεται μόνο το κανονικό ***δωδεκάεδρο***.

Αυτές είναι οι ***μόνες*** λύσεις που επιδέχεται η σχέση (4), επομένως ***υπάρχουν μόνο πέντε κανονικά πολύεδρα,*** που λέγονται και ***Πλατωνικά στερεά.*** Μελετήθηκαν στην Ακαδημία του Πλάτωνα, στη Σχολή του Πυθαγόρα και ο Ευκλείδης ασχολείται με αυτά στο 13ο βιβλίο των Στοιχείων όπου αποδεικνύει ότι αυτά είναι ακριβώς πέντε (βλ. σχετικό ιστορικό σημείωμα). Στο σχ.50 εικονίζονται τα πέντε κανονικά πολύεδρα και δίπλα το ανάπτυγμά τους. Τα κανονικά πολύεδρα είναι εγγράψιμα και περιγράψιμα σε σφαίρα. Δηλαδή υπάρχει εσωτερικό σημείο Ο, που είναι κέντρο δύο σφαιρών, αυτής που περνάει από όλες τις κορυφές του κανονικού πολυέδρου και αυτής που εφάπτεται όλων των εδρών, στα κέντρα τους.

ΣΧΟΛΙΟ

Ο κύβος με το οκτάεδρο και το δωδεκάεδρο με το εικοσάεδρο λέγονται ***συζυγή*** *κανονικά πολύεδρα, γιατί, όπως παρατηρούμε από τον πίνακα, οι αριθμοί των εδρών και των κορυφών του ενός ισούνται με τους αριθμούς των κορυφών και των εδρών του άλλου, ενώ το πλήθος των ακμών μένει ίδιο. Για πληρότητα λέμε ότι το τετράεδρο είναι συζυγές με τον εαυτό του. Μία εφαρμογή αυτής της παρατήρησης είναι ότι αν με κορυφές τα κέντρα των εδρών ενός κανονικού πολυέδρου κατασκευάσουμε άλλο κανονικό πολύεδρο, αυτό είναι το συζυγές του. Για παράδειγμα, τα κέντρα των εδρών κύβου είναι κορυφές κανονικού οκταέδρου.*



Σχήμα 50

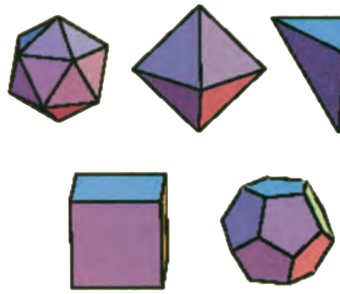
Στον παρακάτω πίνακα παραθέτουμε τα βασικά στοιχεία των κανονικών πολυέδρων. Από τον πίνακα αυτό και το μήκος της ακμής α κατασκευάζονται τα αναπτύγματα των κανονικών πολυέδρων, αφού γνωρίζουμε το σχήμα των εδρών, το πλήθος των εδρών συνολικά και τον αριθμό των εδρών που συνορεύουν σε κάθε κορυφή του πολυέδρου. Από τα αναπτύγματα μπορούν να κατασκευασθούν τα πολύεδρα.

Κανονικό πολύεδρο	Ε	Κ	Α	Είδος εδρών	Ακμές ανά κορυφή	Ακτίνα περιγεγραμμένης σφαίρας
Τετράεδρο	4	10	6	Τρίγωνα	3	$R=\frac{\alpha\sqrt{6}}{4}$
Κύβος	6	8	12	Τετράγωνα	3	$R=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$
Οκτάεδρο	8	6	12	Τρίγωνα	4	$R=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$
Δωδεκάεδρο	12	20	30	Πεντάγωνα	3	$R=\frac{\alpha}{4}\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)$
Εικοσάεδρο	20	12	30	Τρίγωνα	5	$R=\frac{\alpha}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

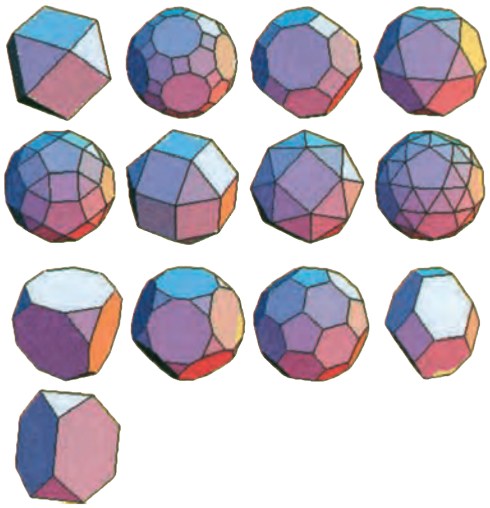
Τα κανονικά πολύεδρα

Η ιδέα να διακρίνουμε τα πολύεδρα σε ομάδες που παρουσιάζουν κάποια ιδιάζουσα κανονικότητα ανάγεται στην αρχαία Ελλάδα. Πώς ακριβώς και γιατί έγινε αυτή η ομαδοποίηση δεν είναι ιστορικά γνωστό. Όλα τα ονομαζόμενα (κυρτά) κανονικά πολύεδρα ήταν γνωστά στους αρχαίους Έλληνες γεωμέτρες, και ορισμένα από αυτά (κύβος, τετράεδρο, οκτάεδρο) πρέπει να ήταν γνωστά και στους Αιγυπτίους.



Τα πέντε Πλατωνικά στερεά: εικοσάεδρο, οκτάεδρο, τετράεδρο, κύβος, δωδεκάεδρο

Τα πολύεδρα αυτά συχνά ονομάζονται και *Πλατωνικά* ή *κοσμικά στερεά*. Στη φιλοσοφία του Πλάτωνα τα τέσσερα από αυτά συμβολίζουν τέσσερα δομικά στοιχεία του σύμπαντος: το τετράεδρο τη φωτιά, ο κύβος τη γη, το εικοσάεδρο το νερό και το οκτάεδρο τον αέρα. Το πέμπτο, το δωδεκάεδρο, συμβόλιζε τον κόσμο (στα λατινικά ονομαζόταν quinta essentia - «πέμπτη ουσία»). Η θεωρία της κατασκευής των πέντε κανονικών πολυέδρων εκτίθεται στο τέλος των «Στοιχείων», Βιβλίο XIII, του Ευκλείδη, όπου οι ακμές τους εκφράζονται ως συνάρτηση της ακτίνας της περιγεγραμμένης σφαίρας με τη βοήθεια της θεωρίας των αρρήτων του Βιβλίου X και αποδεικνύεται ότι υπάρχουν ακριβώς πέντε κανονικά πολύεδρα. Από αυτά ο κύβος, το τετράεδρο και το δωδεκάεδρο πρέπει να μελετήθηκαν από τους Πυθαγορείους, ενώ η μελέτη του οκταέδρου και του εικοσαέδρου αποδίδεται στο Θεαίτητο. Ο Θεαίτητος ήταν μάλλον ο πρώτος που έγραψε για τα κανονικά στερεά, ενώ σύμφωνα με μια μαρτυρία του Υψικλή, μια δεύτερη πραγματεία πάνω στο θέμα αυτό με τίτλο «Σύγκριση των πέντε κανονικών στερεών» γράφηκε γύρω στο 320 π.Χ. από τον Αρισταίο. Πιθανόν στην πραγματεία αυτή να ανάγονται οι κατασκευές των εγγεγραμμένων σε σφαίρα κανονικών πολυέδρων που απαντάμε στη «Συναγωγή» του Πάππου. Ο Υψικλής μας μεταφέρει επίσης τη μαρτυρία ότι ο Απολλώνιος έγραψε μια συγκριτική μελέτη για το δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο, η οποία όμως δεν διασώθηκε.



Τα αποκαλούμενα σήμερα Αρχιμήδεια στερεά: κυβοκτάεδρο, (ρομβο)κόλουρο εικοσιδωδεκάεδρο, (ρομβο)κόλουρο κυβοκτάεδρο, κόλουρος κύβος, κόλουρο δωδεκάεδρο, κόλουρο εικοσάεδρο, κόλουρο οκτάεδρο, εικοσιδωδεκάεδρο, ρομβοεικοσιδωδεκάεδρο, ρομβοκυβοκτάεδρο, πεπλατυσμένος κύβος, πεπλατυσμένο δωδεκάεδρο, κόλουρο τετράεδρο.

Σύμφωνα με μαρτυρία του Πάππου, ο Αρχιμήδης στη χαμένη πραγματεία του για τα λεγόμενα ημικανονικά πολύεδρα διακρίνει δεκατρία νέα είδη πολυέδρων, οι έδρες των οποίων είναι κανονικά πολύγωνα, αλλά διάφορων ειδών, και όλες οι κορυφές των οποίων είναι ισοδύναμες, δηλαδή έχουν την ίδια διάταξη εδρών γύρω από κάθε κορυφή. Από αυτά άλλα έχουν δύο είδη πολυγώνων και άλλα τρία. Ο αριθμός των εδρών κυμαίνεται μεταξύ 8 και 92. Σήμερα τα πολύεδρα αυτά ονομάζονται ημικανονικά ή Αρχιμήδεια στερεά.

Το ενδιαφέρον στα κανονικά πολύεδρα αναζωογονήθηκε τον 15ο αι. με τις εργασίες του Πιέρο ντελλα Φραντσέσκα (1457) και τη «Θεϊκή αναλογία» του Λουκά Πατσόλι (1509), όπου εξετάζονται Αρχιμήδεια στερεά και τρόποι κατασκευής τους. Στα κανονικά πολύερα αναφέρονται επίσης στο έργο τους ο Φινέος (Orontius Finaeus, 1550) και ο Ράμος (1569).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β΄

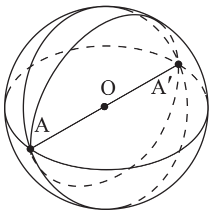
Γεωμετρία της σφαίρας

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

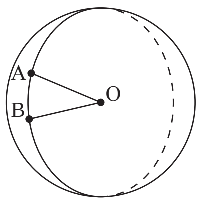
Στο Παράρτημα αυτό θα παρουσιαστεί μία σύντομη εισαγωγή στη Γεωμετρία της σφαίρας, θα μελετήσουμε δηλαδή, κατ' αναλογία με τη γεωμετρία του επιπέδου, ιδιότητες σχημάτων στην επιφάνεια της σφαίρας.

2. ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Σε μια σφαίρα κέντρου Ο (σχ.1), υπάρχουν άπειροι μέγιστοι κύκλοι, που περνάνε από ένα σημείο της Α. Οι μέγιστοι αυτοί κύκλοι ορίζονται ως τομή της σφαίρας με τα επίπεδα που περνάνε από την ακτίνα ΟΑ. Παρατηρούμε όμως ότι αυτοί οι κύκλοι διέρχονται και από ένα δεύτερο σημείο Α′, το αντιδιαμετρικό σημείο του Α.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

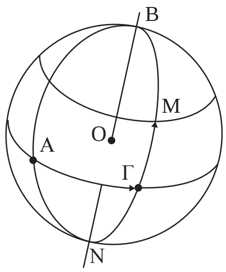
Δύο σημεία Α και Β μη αντιδιαμετρικά στην επιφάνεια της σφαίρας (σχ.2), ορίζουν έναν και μόνο ένα μέγιστο κύκλο που περιέχει τα σημεία αυτά. Αποδεικνύεται ότι το μικρότερο από τα δύο τόξα του μέγιστου κύκλου είναι η συντομότερη απόσταση μεταξύ των δύο αυτών σημείων, μετρημένη πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας. Κάθε άλλη γραμμή που συνδέει τα δύο αυτά σημεία, πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας έχει μήκος μεγαλύτερο από αυτό του τόξου ΑΒ. Έχουμε λοιπόν τις προτάσεις:

- **Από κάθε σημείο μιας σφαίρας διέρχονται άπειροι μέγιστοι κύκλοι.**
- **Δύο τυχόντες μέγιστοι κύκλοι τέμνονται σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία.**
- **Δύο μη αντιδιαμετρικά σημεία σε μία σφαίρα ορίζουν ένα μέγιστο κύκλο.**

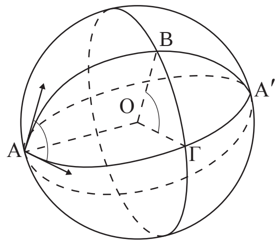
Ονομάζουμε ***γωνιακή απόσταση*** ή ***απόσταση*** μεταξύ δύο σημείων Α και Β μιας σφαίρας το μικρότερο από τα δύο τόξα ΑΒ του μέγιστου κύκλου που αυτά ορίζουν. Είναι το ίδιο αν ορίσουμε την απόσταση ως την επίκεντρη κυρτή γωνία $\hat{AOB}$ (σχ.2), που ορίζουν τα δύο σημεία Α και Β, με το κέντρο Ο της σφαίρας. Το τόξο ή η γωνία μπορεί να μετρηθεί σε ορθές, μοίρες ή ακτίνια. Εάν τα σημεία είναι αντιδιαμετρικά, τότε τα δύο τόξα του μέγιστου κύκλου είναι ίσα μεταξύ τους και επιλέγουμε ένα από τα δύο για να μετρήσουμε την απόστασή τους.

Ονομάζουμε ***γωνία δύο μέγιστων κύκλων*** τη δίεδρη γωνία που σχηματίζουν τα επίπεδα των δύο κύκλων. ***Άξονας*** ενός μέγιστου κύκλου λέγεται η ευθεία που είναι κάθετη στο επίπεδο του κύκλου, στο κέντρο της σφαίρας. ***Πόλοι*** ενός κύκλου λέγονται τα σημεία τομής του άξονα του κύκλου με τη σφαίρα. Οι πόλοι είναι προφανώς αντιδιαμετρικά σημεία της σφαίρας. Όταν αναφερόμαστε στον πόλο ενός μέγιστου κύκλου θα εννοούμε έναν από τους δύο πόλους.

Για τον προσδιορισμό της θέσης ενός σημείου επάνω στη σφαίρα, χρησιμοποιείται το εξής σύστημα αναφοράς. Θεωρούμε ένα μέγιστο κύκλο, που τον λέμε ***ισημερινό***, τους ***παράλληλους*** μικρούς κύκλους και τους ***πόλους*** του Β και Ν (σχ.3). Ο ένας πόλος λέγεται ***βόρειος*** και ο άλλος ***νότιος***. Οι μέγιστοι κύκλοι που περνάνε από τους πόλους Β και Ν λέγονται ***μεσημβρινοί***.



Σχήμα 3



Σχήμα 4

Το σημείο τομής Α του ισημερινού με έναν συγκεκριμένο μεσημβρινό θεωρείται αρχή των μετρήσεων. Ένα σημείο της σφαίρας Μ βρίσκεται στην τομή ενός παραλλήλου και ενός μεσημβρινού (σχ.3). Το τόξο ΓΜ από τον ισημερινό μέχρι τον παράλληλο του σημείου Μ λέγεται ***πλάτος,*** ενώ το τόξο επί του ισημερινού από την αρχή Α των μεσημβρινών μέχρι του μεσημβρινού ΓΜ του σημείου Μ λέγεται ***μήκος***. Το πλάτος παίρνει τιμές από –90° (νότιος πόλος) μέχρι +90° (βόρειος πόλος) ενώ το μήκος +180° προς τη μία κατεύθυνση του ισημερινού και –180° προς την άλλη. Το σύστημα αυτό χρησιμοποιείται στη Γεωγραφία, την Αστρονομία και τα Μαθηματικά με διάφορα ονόματα.

Προτάσεις

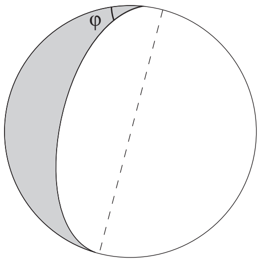
- **Η γωνία δύο μέγιστων κύκλων ισούται με τη γωνία των εφαπτομένων των μέγιστων κύκλων σ'**

ένα σημείο τομής και έχει μέτρο ίσο με το τόξο του μέγιστου κύκλου που έχει ως πόλους τα κοινά σημεία των δύο κύκλων (σχ.4).

- **Η γωνία δύο μέγιστων κύκλων ισούται με την απόσταση των πόλων τους (σχ.4).**
- **Δύο μέγιστοι κύκλοι είναι κάθετοι αν και μόνον αν καθένας από αυτούς περιέχει τον πόλο του άλλου.**
- **Από τον πόλο ενός μέγιστου κύκλου άγονται άπειρα τόξα, κάθετα στο μέγιστο κύκλο.**

3. ΑΤΡΑΚΤΟΙ ΚΑΙ ΟΝΥΧΕΣ

Το μέρος της επιφάνειας της σφαίρας που περιέχεται μεταξύ δύο ημιπεριφερειών μέγιστων κύκλων λέγεται ***άτρακτος*** (σχ.5). Η γωνία των ημιπεριφερειών λέγεται ***γωνία του άτρακτου***. ***Σφαιρικός όνυχας*** λέγεται το μέρος του όγκου της σφαίρας που περιέχεται μεταξύ των δύο ημικυκλίων μέγιστων κύκλων. ***Βάση του σφαιρικού όνυχα*** λέγεται ο άτρακτος που περιέχεται μεταξύ των ημικυκλίων.



Σχήμα 5

Γωνία σφαιρικού όνυχα λέγεται η γωνία της βάσης του όνυχα.

Αποδεικνύονται οι εξής προτάσεις:

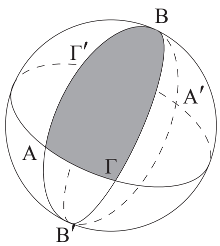
- **Δύο άτρακτοι, στην ίδια σφαίρα, με ίσες γωνίες είναι ίσοι.**
- **Ο λόγος των εμβαδών δύο ατράκτων στην ίδια σφαίρα ισούται με το λόγο των γωνιών τους.**

4. ΣΦΑΙΡΙΚΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

Σφαιρικό τρίγωνο λέγεται το μέρος της σφαίρας το οποίο περικλείεται μεταξύ των τόξων τριών μέγιστων κύκλων, με την προϋπόθεση ότι τα τόξα είναι μικρότερα από ημικύκλια.

Παράδειγμα

Το σχήμα ΑΒΓ (σχ.6) είναι ένα σφαιρικό τρίγωνο. Τα σημεία τομής των μέγιστων κύκλων Α, Β, Γ λέγονται ***κορυφές*** και τα τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ λέγονται ***πλευρές*** του σφαιρικού τριγώνου. Οι γωνίες που σχηματίζουν οι τρεις μέγιστοι κύκλοι ανά δύο λέγονται ***γωνίες*** του σφαιρικού τριγώνου και τις συμβολίζουμε συνήθως με τα γράμματα των κορυφών Α, Β, Γ. Τις πλευρές του τριγώνου τις συμβολίζουμε συνήθως με τα μικρά γράμματα των απέναντι κορυφών, δηλαδή συμβολίζουμε με α, β, γ τις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα.



Σχήμα 6

Πρέπει να τονίσουμε ότι η γεωμετρία στη σφαίρα δεν επηρεάζεται από την ακτίνα της, διότι όλα τα μετρούμενα μεγέθη, μήκη πλευρών και γωνίες κορυφών, μετρώνται με τόξα μέγιστων κύκλων και όχι με μήκη.

Είδη σφαιρικών τριγώνων

Ένα σφαιρικό τρίγωνο χαρακτηρίζεται αναλόγως των πλευρών ή των γωνιών του ως εξής:

ως προς τις γωνίες:	ως προς τις πλευρές:
(μονο)ορθογώνιο: μία γωνία ορθή	**(μονο)ορθόπλευρο:** μία πλευρά ορθή
δισορθογώνιο: δύο γωνίες ορθές	**δισορθόπλευρο:** δύο πλευρές ορθές
τρισορθογώνιο: τρεις γωνίες ορθές	**τρισορθόπλευρο:** τρεις πλευρές ορθές
	ισοσκελές: δύο πλευρές ίσες
	ισόπλευρο: τρεις πλευρές ίσες

Θεωρούμε ως **μονάδα μέτρησης γωνιών και πλευρών την ορθή γωνία** και ως **μονάδα μέτρησης των εμβαδών αυτό του τρισορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου**, δηλαδή το $\frac{1}{8}$ της σφαίρας. Με αυτές τις μονάδες μέτρησης προκύπτουν οι ακόλουθες προτάσεις:

- **Το εμβαδόν ενός ατράκτου ισούται με το διπλάσιο της γωνίας του.**

Απόδειξη

Θεωρούμε τον άτρακτο ΒΟΑ, σχ.5, με γωνία φ και τον ορθογώνιο άτρακτο ΒΟΓ. Ο λόγος των εμβαδών τους είναι όπως ο λόγος των γωνιών τους, δηλαδή:

$$\frac{\text{ατρ.ΒΟΑ}}{\text{ατρ.ΒΟΓ}} = \frac{\hat{\text{ΒΟΑ}}}{\hat{\text{ΒΟΓ}}} = \varphi \qquad (1)$$

Αλλά ο άτρακτος ΒΟΓ ισούται με δύο τρισορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα, επομένως, η σχέση (1) γράφεται: ατρ(ΒΟΑ) = 2φ.

Σφαιρική υπεροχή ενός τριγώνου ΑΒΓ λέγεται η διαφορά (Α + Β + Γ − 2).

- **Το εμβαδόν ενός σφαιρικού τριγώνου ισούται με τη σφαιρική υπεροχή του τριγώνου.**

Απόδειξη

Ο άτρακτος που σχηματίζει η γωνία $\hat{\text{Α}}$ του τριγώνου

ΑΒΓ, (σχ.6), χωρίζεται από τη ΒΓ σε δύο τρίγωνα, επομένως, για τα εμβαδά τους ισχύει:

$$\text{ατρ. } \hat{A} = \text{εμ.}(ΑΒΓ) + \text{εμ.}(Α'ΒΓ) \qquad (1)$$

Όμοια:

$$\text{ατρ. } \hat{B} = \text{εμ.}(ΑΒΓ) + \text{εμ.}(ΑΒ'Γ) \qquad (2)$$

$$\text{ατρ. } \hat{Γ} = \text{εμ.}(ΑΒΓ) + \text{εμ.}(ΑΒΓ') = \text{εμ.}(ΑΒΓ) + \text{εμ.}(Α'Β'Γ) \qquad (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$\text{ατρ. } \hat{A} + \text{ατρ } \hat{B} + \text{ατρ } \hat{Γ} = \text{ημισφ } ΑΒ + 2\ \text{εμ.}(ΑΒΓ),$$

και επειδή η μονάδα είναι η ορθή γωνία, έχουμε:

$$2Α + 2Β + 2Γ = 4 + 2\text{εμβ.}(ΑΒΓ) \Rightarrow \text{εμ.}(ΑΒΓ) = Α + Β + Γ - 2.$$

Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο ισχύουν οι εξής προτάσεις:

- **κάθε πλευρά είναι μικρότερη του αθροίσματος των δύο άλλων.**
- **το άθροισμα των τριών πλευρών είναι μικρότερο των τεσσάρων ορθών.**
- **το άθροισμα των γωνιών του είναι μεγαλύτερο των δύο ορθών.**
- **απέναντι άνισων πλευρών βρίσκονται ομοίως άνισες γωνίες.**
- **αν είναι ισοσκελές έχει τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι των ίσων πλευρών ίσες. Επίσης, η διάμεσος είναι ύψος και διχοτόμος.**
- **αν είναι ισόπλευρο είναι και ισογώνιο.**
- **τα κάθετα τόξα μέγιστων κύκλων στα μέσα των πλευρών του (μεσοκάθετοι), περνάνε από το ίδιο σημείο. Το σημείο αυτό ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου.**
- **τα τόξα μέγιστων κύκλων που διχοτομούν τις γωνίες ενός σφαιρικού τριγώνου (διχοτόμοι), περνάνε από το ίδιο σημείο. Το σημείο αυτό ισαπέχει από τις πλευρές του τριγώνου.**
- **τα τόξα μέγιστων κύκλων που περνάνε από τις κορυφές και είναι κάθετα στις απέναντι πλευρές (ύψη) περνάνε από το ίδιο σημείο.**
- **ισχύουν τα Θεωρήματα του συνημιτόνου και ημιτόνου:**

$$\text{συν}α = \text{συν}β\ \text{συν}γ + \text{ημ}β\ \text{ημ}γ\ \text{συν}Α$$

$$\frac{\text{ημ}α}{\text{ημ}Α} = \frac{\text{ημ}β}{\text{ημ}Β} = \frac{\text{ημ}γ}{\text{ημ}Γ}.$$

5. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Η Σφαιρική Γεωμετρία έχει εφαρμογές στην Αστρονομία, Ναυσιπλοΐα, Χαρτογραφία και αλλού.

Στην Αστρονομία, εφαρμόζεται στη μελέτη προβλημάτων που δεν μας ενδιαφέρει η απόσταση των ουρανίων σωμάτων από τη Γη αλλά η θέση τους στον ουράνιο θόλο που θεωρείται σφαιρικός με κέντρο το κέντρο της Γης.

Η Γη θεωρείται κατά προσέγγιση σφαιρική, επομένως η σφαιρική γεωμετρία έχει εφαρμογές και στις επιστήμες που σχετίζονται με το σχήμα της Γης. Μία από αυτές είναι η Ναυσιπλοΐα και χρησιμεύει για να γίνονται υπολογισμοί πορείας.

Είναι γνωστό από την αρχαιότητα ότι η επιφάνεια της σφαίρας δεν είναι δυνατόν να αναπτυχθεί στο επίπεδο. Δηλαδή, δεν μπορούμε να αναπτύξουμε τη σφαίρα στο επίπεδο όπως κάναμε με τον κύλινδρο και τον κώνο. Εάν προσπαθήσουμε να κάνουμε αυτό το ανάπτυγμα, θα τσαλακώσουμε ή θα σκίσουμε την επιφάνεια της σφαίρας. Αυτό συμβαίνει διότι η σφαίρα έχει καμπυλότητα που διαφέρει ποιοτικά από αυτήν του κυλίνδρου ή του κώνου. Λόγω αυτής της ιδιότητας οι χάρτες δεν μπορεί να είναι ακριβείς.

6. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Παρατηρούμε ότι στη γεωμετρία της σφαίρας, το άθροισμα των γωνιών ενός σφαιρικού τριγώνου είναι μεγαλύτερο από δύο ορθές, σε αντίθεση με την Ευκλείδεια Γεωμετρία όπου το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με δύο ορθές. Η ιδιότητα αυτή είναι ισοδύναμη με τη μη ύπαρξη παράλληλων «ευθειών», δηλαδή κάθε δύο μέγιστοι κύκλοι τέμνονται. Η γεωμετρία αυτή λέγεται σφαιρική ή Ελλειπτική Γεωμετρία.

Υπάρχουν επίσης γεωμετρίες στις οποίες το άθροισμα των γωνιών των τριγώνων τους είναι μικρότερο από δύο ορθές, που είναι ισοδύναμο με την ύπαρξη πολλών παράλληλων ευθειών που άγονται από σημείο εκτός ευθείας. Οι γεωμετρίες αυτές λέγονται Υπερβολικές Γεωμετρίες.

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

§7.1 - 7.6

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. $\hat{A} = 80°$, $\hat{B} = 60°$, $\hat{\Gamma} = 40°$.
2. $\omega = 45°$.
3. $\alpha = 30$ cm, $\beta = 20$ cm, $\gamma = 15$cm.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. $\hat{A} = 100°$, $\hat{B} = 60°$, $\hat{\Gamma} = 20°$.
2. Να λάβετε υπόψη σας τις ιδιότητες των αναλογιών.
3. $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{MA}{MA+MB} = = \frac{3}{3+4} \Leftrightarrow ...$

§7.7

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Θεώρημα Θαλή.
2. i) Θεώρημα Θαλή (ΖΓ\\ΑΔ), ii) Θεώρημα Θαλή (ΑΔ\\ΒΖ και ΑΒ\\ΔΗ).
3. Θεώρημα Θαλή (ΑΒ\\ΓΔ και ΒΕ\\ΑΓ).
4. Θεώρημα Θαλή και ΒΜ = ΜΓ.
5. Αρκεί $\frac{AZ}{ZB} = \frac{AH}{H\Delta}$.
6. Αρκεί $\frac{AZ}{ZB} = \frac{AH}{H\Gamma}$.
7. Αρκεί $\frac{M\Delta}{MB} = \frac{ME}{M\Gamma}$.
8. Αρκεί $\frac{Z\Delta}{ZE} = \frac{H\Delta}{HE}$.
9. $h = 8$m.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Να εξετάσετε 2 περιπτώσεις. Το Γ μεταξύ Ο και Β ή Ο και Α.
2. Αρκεί $\frac{x}{3\mu} = \frac{y}{2\mu} = \frac{\omega}{4\mu}$, όπου μ αυθαίρετο τμήμα.
3. Αρκεί $\frac{AZ}{ZB} = \frac{AH}{H\Gamma}$.
4. Θεώρημα Θαλή (ΔΖ\\ΒΓ) και ιδιότητες αναλογιών.
5. Θεώρημα Θαλή (ΔΕ\\ΒΓ).
6. i) Αρκεί ΑΚ = 2ΜΚ. ii) Αρκεί $\frac{ME}{E\Gamma} = \frac{MK}{AK}$.
7. Αρκεί $\frac{\Delta E}{\Delta\Gamma} = \frac{Z\Gamma}{\Delta\Gamma}$.

Σύνθετα Θέματα

1. Φέρουμε ΔΖ\\ΒΓ.
2. Φέρουμε ΑΕ\\ΒΓ.
3. Θεώρημα Θαλή (ΒΕ\\ΟΑ και ΒΖ\\ΟΑ).
4. Φέρουμε ΔΗ\\ΒΖ. Από θεώρημα Θαλή προκύπτει ότι $\frac{AZ}{Z\Gamma} = \frac{\kappa \cdot \lambda}{\lambda + 1}$.
5. Να αποδείξετε ότι $\frac{K\Gamma}{KB} = \frac{M\Gamma}{M\Delta}$.

§7.8 - 7.9

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Θεώρημα διχοτόμου στα τρίγ. ΑΒΜ και ΑΜΓ.
2. ΔΕ = ΔΒ + ΕΒ = ….
3. Παρατηρήστε ότι ΜΕ εξωτερική διχοτόμος του τριγ. ΑΜΓ.
4. Αρκεί $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$.
5. Θεώρημα διχοτόμου για τις ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ.
6. Αποδείξτε ότι ΒΕ διχοτόμος της $B\hat{\Delta}\Gamma$.
7. Παρατηρήστε ότι ΟΓ, ΟΔ διχοτόμοι.
8. Είναι ΔΒ < ΔΓ και ΒΓ = 42m (ΑΔ διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ).

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Παρατηρήστε ότι ΟΑ εξωτερική διχοτόμος του τριγ. ΟΒΔ.
2. Θεώρημα Θαλή (ΑΔ\\ΕΜ) και ΑΔ διχοτόμος.
3. i) Η ΒΙ διχοτόμος στο τρίγ. ΑΒΔ και $B\Delta = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$ ii) Αρκεί $\frac{AI}{I\Delta} = \frac{AK}{KM}$ iii) Προκύπτει από το ii).
4. Θεώρημα διχοτόμου και τριγωνική ανισότητα.
5. i) Θεώρημα διχοτόμου στο τρίγωνο ΟΔΓ και Θαλή ii) όμοια.

Σύνθετα Θέματα

1. Αποδείξτε ότι ΑΚ, ΑΛ διχοτόμοι στο τρίγ. ΕΑΖ.
2. Θεώρημα διχοτόμου. Για το αντίστροφο αν η διχοτόμος της $\hat{A}$ τέμνει την ΒΔ στο Ε αρκεί ΓΕ διχοτόμος της $\hat{\Gamma}$.
3. Φέρουμε τη διχοτόμο ΜΔ του τριγ. ΑΜΒ, που τέμνει τον κύκλο στο Ε.
4. Αν η ΔΖ τέμνει τη ΒΓ στο Κ αρκεί $\frac{HK}{H\Delta} = \frac{K\Gamma}{\Delta\Gamma}$.
5. Η άγνωστη κορυφή ανήκει σε ευθεία και κύκλο.

Γενικές Ασκήσεις

1. Να λάβετε υπόψη σας ότι ΚΔ\\ΑΒ\\ΛΕ.
2. Φέρουμε Αx\\ΒΓ. Να λάβετε υπόψη σας την ιδιότητα του βαρυκέντρου.
3. i) Φέρουμε ΓΗ\\ΑΒ ii) Εφαρμόζουμε το i) για το τρίγ. ΑΒΔ και την ευθεία ΖΓ.
4. Θεώρημα Θαλή (ΑΔ\\ΒΖ) και διχοτόμου (ΑΖ διχοτόμος).
5. Αποδείξτε ότι οι ΕΜ και ΖΜ είναι διχοτόμοι.
6. i) Να εκφράσετε τα τμήματα ως συνάρτηση των ΟΑ, ΟΓ, ΟΔ. ii) Όμοια με το i).
7. Αν η ΒΔ τέμνει την ΑΓ στο Ζ, το Ζ προσδιορίζεται.
8. Αν η παράλληλη από το Α προς την Οx τέμνει την Οy στο Δ, το Δ προσδιορίζεται (και στις τρεις περιπτώσεις).
9. Φέρουμε τα αποστήματα των χορδών.
10. Να λάβετε υπόψη σας, ότι το άθροισμα δυο αντίστροφων θετικών αριθμών είναι μεγαλύτερο ή ίσο του δύο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Παρατηρήστε ότι ΑΒΓ ≈ ΔΕΓ.
2. Παρατηρήστε ότι ΑΒΓ ≈ ΑΔΕ.

3. Το τρίγωνο που προκύπτει είναι όμοιο με το αρχικό (πλευρές ανάλογες).
4. Παρατηρήστε ότι σχηματίζονται δύο όμοια ορθογώνια τρίγωνα.
5. Παρατηρήστε ότι ΑΒΔ ≈ΑΔΓ και ΑΒΔ ≈ΑΒΓ.
6. Παρατηρήστε ότι ΑΒΔ ≈ ΑΕΓ.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Παρατηρήστε ότι σχηματίζονται δύο όμοια ορθογώνια τρίγωνα.
2. Αποδείξτε ότι έχουν ίσες γωνίες και ανάλογες πλευρές.
3. Παρατηρήστε ότι $ΑΒΑ_1 \approx ΑΒΑ_2$.
4. Παρατηρήστε ότι ΗΑΕ ≈ ΗΒΔ και ΗΒΖ ≈ ΗΕΓ.
5. Παρατηρήστε ότι ΜΔΖ ≈ ΜΔ′Ζ′.
6. Παρατηρήστε ότι ΑΒΔ ≈ ΔΑΓ.

Σύνθετα Θέματα

1. Φέρτε παράλληλες ώστε να δημιουργηθούν δύο παραλληλόγραμμα και δύο τρίγωνα.
2. Παρατηρήστε ότι σχηματίζεται εγγράψιμο τετράπλευρο.
3. Εφαρμόστε θεώρημα διχοτόμων και παρατηρήστε ότι ΑΒΔ ≈ ΑΔΓ.
4. Αποδείξτε ότι ΑΔΒ ≈ ΑΔΓ.
5. Παρατηρήστε ότι ΑΒΔ ≈ ΑΕΓ και ΑΒΕ ≈ ΒΔΕ.

Γενικές Ασκήσεις

1. Παρατηρήστε ότι ΑΒΤ ≈ ΑΓΤ.
2. Παρατηρήστε ότι ΑΒΔ ≈ ΑΒΕ, ΑΔΓ ≈ ΑΕΓ.
3. Παρατηρήστε ότι ΒΔΕ≈ΓΔΖ, ΑΒΕ ≈ ΑΓΖ.
4. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα Θαλή στις παραλληλίες που προκύπτουν από τα κάθετα τμήματα.
5. i) Χρησιμοποιήστε την Εφαρμογή 4.
   ii) Θεωρήστε το αντιδιαμετρικό σημείο του Μ.
   iii) Χρησιμοποιήστε τα i), ii).
6. Θεωρήστε σημείο Ε της ΑΓ, ώστε: $Ε\hat{Δ}Γ = Α\hat{Δ}Β$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

§9.1 - 9.2

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Εφαρμόστε το Πυθαγόρειο θεώρημα.
2. Παρατηρήστε ότι $\hat{Γ} = 30°$.
3. Να συγκρίνετε τα ΑΔ και ΓΔ.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Εφαρμόστε το Πυθαγόρειο θεώρημα.
2. Παρατηρήστε ότι $ΑΓΒ = ΑΔΒ = 1⌊$. $Α\hat{Γ}Β = Α\hat{Δ}Β = 1⌊$.
3. Σχηματίστε τη ΒΔ και εργασθείτε στα τρίγωνα ΕΒΔ και ΕΓΔ.
4. i) Χρησιμοποιήστε το Πυθαγόρειο στα ΑΒΔ και Α′Β′Δ′.
5. Εφαρμόστε το Πυθαγόρειο Θεώρημα και παρατηρήστε ότι $β = γ$.

Σύνθετα Θέματα

1. Εργαστείτε στα τρίγωνα ΔΑΒ και ΔΑΓ.
2. i) Θεωρήστε ΛΔ⊥ΚΒ
   ii) Χρησιμοποιήστε το i).
3. Αποδείξτε ότι το ΑΒΚΔ είναι ορθογώνιο. ii) Εφαρμόστε το Πυθαγόρειο.
4. Χρησιμοποιήστε ότι $μ_α = \frac{α}{2}$.
5. Θεωρήστε τις προβολές των Γ και Δ στην ΑΒ.
6. Παρατηρήστε ότι ΔΑΒ ≈ ΑΒΓ και ΔΑΓ ≈ ΑΒΓ.

§9.4

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Εξετάστε ποια είναι η μεγαλύτερη γωνία.
2. Χρησιμοποιήστε την Εφαρμογή 1.
3. Εφαρμόστε το θεώρημα οξείας γωνίας ή το νόμο των συνημιτόνων.
4. Παρατηρήστε ότι $\hat{Α} = 60°$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Εφαρμόστε γενικευμένο Πυθαγόρειο ως προς τη $\hat{Β}$. (Παρατηρήστε ότι $\hat{Β} > 90°$).
2. Εργασθείτε στα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΔΓ για τις $\hat{Γ}$, $\hat{Δ}$.
3. Εφαρμόστε το θεώρημα οξείας γωνίας για τις $\hat{Β}$, $\hat{Γ}$.
4. Εφαρμογή του γενικευμένου Πυθαγορείου.
5. Φέρτε κάθετες από τα Δ και Ε στη ΒΓ.
6. Χρησιμοποιήστε την τριγωνική ανισότητα και υψώστε στο τετράγωνο.

Σύνθετα Θέματα

1. Χρησιμοποιήστε ότι $\hat{Α} = 30°$.
2. Εργασθείτε στα τρίγωνα ΑΜΓ και ΒΜΔ.
3. Χρησιμοποιήστε Πυθαγόρειο.

§9.5

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Χρησιμοποιήστε 1ο και 2ο θεώρημα Διαμέσων.
2. Χρησιμοποιήστε το 1ο θεώρημα Διαμέσων.
3. Χρησιμοποιήστε το 1ο θεώρημα Διαμέσων.
4. Χρησιμοποιήστε τους τύπους των Διαμέσων.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιήστε γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα και το 1ο θεώρημα Διαμέσων.
2. Χρησιμοποιήστε το $2^{ο}$ θεώρημα Διαμέσων.
3. i) Χρησιμοποιήστε την τομή των διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ.
   ii) Χρησιμοποιήστε το i).
4. Χρησιμοποιήστε διαδοχικά το 1ο θεώρημα Διαμέσων.
5. Φέρτε τη διάμεσο ΑΜ.
6. Χρησιμοποιήστε το 1ο θεώρημα Διαμέσων.

Σύνθετα Θέματα

1. Φέρτε κατάλληλες παράλληλες από το μέσο μιας πλευράς.
2. Εργασθείτε με το μέσο του ΜΝ.
3. Εφαρμόστε το 1ο θεώρημα

Διαμέσων στα τρίγωνα ΜΑΒ και ΜΓΔ.

4. Εφαρμόστε το 1ο θεώρημα Διαμέσων στα τρίγωνα ΜΑΓ και ΜΒΔ.
5. Εφαρμόστε το 1ο θεώρημα Διαμέσων στα τρίγωνα ΡΑΓ και ΓΑΔ.

§9.7

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Υπολογίστε το γινόμενο ΑΒ·ΑΓ.
2. Παρατηρήστε ότι $ME = \frac{B\Delta}{2}$, $NE = \frac{\Delta\Gamma}{2}$.
3. Εφαρμόστε το θεώρημα Τεμνουσών.
4. Εφαρμόστε το θεώρημα Τεμνουσών.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. i) Πυθαγόρειο Θεώρημα
   ii) Θεώρημα Τεμνουσών.
2. Θεώρημα διχοτόμου και τέμνουσας - εφαπτομένης.
3. i) Θεώρημα Τεμνουσών,
   ii) Εφαρμόστε το 1ο θεώρημα Διαμέσων.
4. Παρατηρήστε ότι το ΓΝΗΜ είναι εγγράψιμο. όπου Η το σημείο τομής των ΑΒ και ΟΜ.
5. Παρατηρήστε ότι ΒΔΜΗ εγγράψιμο.

Σύνθετα Θέματα

1. Παρατηρήστε ότι $\Delta E\Gamma \approx AE\Gamma$.
2. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα Διαμέσων και υπολογίστε τη μ_α.
3. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα Διαμέσων.
4. Εφαρμόστε το θεώρημα Τεμνουσών για τις ΒΕΑ και ΓΖΑ.

Γενικές Ασκήσεις

1. i) Εφαρμόστε το Πυθαγόρειο
   ii) Με απαγωγή σε άτοπο.
2. Εφαρμόστε το θεώρημα Τεμνουσών και όμοια τρίγωνα.
3. Υπολογίστε όλους τους όρους ως συνάρτηση των πλευρών του τριγώνου.
4. Θεωρήστε το ύψος και εφαρμόστε το θεώρημα οξείας και αμβλείας γωνίας.
5. i) ΘΜ=α/2, όπου Θ βαρύκεντρο, ii) αν ΒΚ ύψος το ΔΗΚΓ είναι εγγράψιμο.
6. Εφαρμόστε το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα και το θεώρημα Διαμέσων.
7. Εφαρμόστε το 1ο θεώρημα Διαμέσων.
   ($AB^2 + A\Gamma^2 = 4R^2$ = σταθερό).
8. Αποδείξτε ότι ισχύει το Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΕΔΗ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

§10.1 - 10.3

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. $(AB\Gamma\Delta) = 16$ τ.μ., $(\Delta AZ) = 4\sqrt{3}$.
   Αν ΖΙ⊥ΑΒ τότε ΖΙ = 2 οπότε (ΑΒΖ) = 4τ.μ. = (ΔΓΖ) και $(BZ\Gamma) = 8 - 4\sqrt{3}$.
2. Εφαρμόστε τον τύπο
   $E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha$. Σωστό το Γ.
3. α) $\upsilon_\beta = 3\sqrt{3}$ μ.μ.
   β) $(AB\Gamma) = 12\sqrt{3}$ τ.μ.
   γ) Βρίσκουμε πρώτα το ΒΓ.
4. Αν α, β οι διαστάσεις του ορθογωνίου, έχουμε: α + β = 7 και $\alpha^2 + \beta^2 = 25$ και προκύπτει Ε = 12τ.μ.
5. α) (ΑΒΓΔ) = 50τ.μ.
   β) (ΑΕΖΒ) = (ΕΖΓΔ) = 25τ.μ.
6. Φέρουμε ΔΗ⊥ΒΓ και βρίσκουμε ότι ΔΓ=13, οπότε το εμβαδόν της λωρίδας είναι 3 · 13 = 39 τ.μ.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Φέρουμε ΑΗ, ΔΖ⊥ΒΓ και εφαρμόζουμε τον τύπο $E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha$.
2. i) Εφαρμογή 3 §10.3.
   ii) Είναι $(AB\Delta) = \frac{1}{2}(AB\Gamma) =$ (ΒΕΓ) και (ΑΔΓ) = (ΒΕΓ).
3. i) Εφαρμόστε την εφ. 3 §10.3 στα τρίγωνα $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ και $\overset{\Delta}{\Sigma B\Gamma}$.
   ii) Χρησιμοποιήστε το i). Για το υπόλοιπο χρησιμοποιήστε πάλι το i) για Σ = Θ.
4. Φέρουμε από το Μ παράλληλο προς τη ΔΓ.
5. Επίσης από το Μ φέρουμε παράλληλο προς τη ΔΓ.
6. i) Φέρουμε ΕΗ⊥ΑΘ και εφαρμόζουμε θεώρημα οξείας γωνίας στο τρίγωνο ΑΕΘ και βρίσκουμε $E\Theta = \sqrt{3}$
   ii) Διαπιστώνουμε ότι
   $E\Theta^2 + AE^2 = A\Theta^2$
   iii) $(AB\Gamma) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ τ.μ. = (ΕΑΘ)
   οπότε $(B\Gamma Z\Theta E\Delta) = 5 + \sqrt{3}$.
7. Φέρουμε ΒΜ, ΔΛ⊥ΑΓ και είναι (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ).
8. 58m και 76m.

Σύνθετα Θέματα

1. i) ΘΙ, ΑΔ διάμεσοι στα $\overset{\Delta}{I\Theta\Delta}$, $\overset{\Delta}{A\Theta\Gamma}$ αντίστοιχα
   ii) (ΙΘΔ) = 2(ΑΔΓ)
   iii) Χρησιμοποιήστε το ii).
2. Διαδοχική εφαρμογή της εφαρ. 3 της §10.3.
3. i) Αποδείξτε ότι
   $B\hat{A}K + A\hat{B}K = 90°$
   ii) Από το $\overset{\Delta}{ABZ}$ βρίσκουμε πρώτα $AZ = \frac{5\alpha}{4}$ και ακολούθως $AK = \frac{4\alpha}{5}$. Επίσης βρίσκουμε ότι $AH = \frac{\alpha}{4}\sqrt{17}$ και $KH = \frac{13}{20}\alpha$
   iii) $(AKH\Delta) = \frac{77}{200}\alpha^2$ τ.μ.
4. i) Από το Ο φέρουμε κάθετες στις ΑΒ, ΓΔ και εφαρμόζουμε τον τύπο $E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha$
   ii) Από το i) είναι
   (ΑΒΓ) – (ΟΑΒ) = (ΟΓΔ).
5. Αν δ_1, δ_2 τα μήκη των διαγωνίων, είναι: $\alpha^2 = \frac{1}{4}(\delta_1^2 + \delta_2^2)$ και στη συνέχεια χρησιμοποιήστε την $x^2 + y^2 \geq 2xy$, $x, y \in \Re$.

§10.4

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Να βρείτε το εμβαδόν του (ΑΒΓ) με τον τύπο του Ήρωνα.
2. Φέρουμε ΔΖ||ΑΒ και με τον τύπο του Ήρωνα βρίσκουμε (ΔΖΓ) = 84 τ.μ. και αν ΔΗ⊥ΒΓ είναι ΔΗ = 12 οπότε (ΑΒΓΔ) = 216 τ.μ.
3. $(ΑΒΓ) = 7\sqrt{3}$
4. i) Ε = 24 ii) $υ_α = \frac{24}{5}$
   iii) Ε = τρ, οπότε ρ = 2.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιούμε τους τύπους $βγ = α \cdot υ_α$, $Ε = \frac{1}{2} α \cdot υ_α$ και $Ε = \frac{αβγ}{4R}$.
2. i) Από τη δοθείσα με τύπο Ήρωνα καταλήγουμε στην $α^2 < β^2 + γ^2$ ii) και iii) όπως το i).
3. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ έχουν τον ίδιο περιγεγραμμένο κύκλο.
4. Με Α < 90°, ΑΗ = β συνΑ και ΑΖ = γ συνΑ οπότε…..
   Όμοια για $\hat{Α} > 90°$.
5. Χρησιμοποιούμε τους τύπους $Ε = τ \cdot ρ$ και $Ε = \frac{1}{2} α \cdot υ_α$.

Σύνθετα Θέματα

1. i) Είναι $\frac{1}{(ΟΚΜ)} + \frac{1}{(ΟΚΝ)} = \frac{(ΟΜΝ)}{(ΟΚΜ)(ΟΚΝ)}$
   ii) Οι ευθείες ΒΚΒ′ και ΓΚΓ′ είναι τέμνουσες των πλευρών της $\hat{Α}$ οπότε από το i)…..
2. $(ΑΒΓ)=(ΑΒΙ_α)+(ΑΓΙ_α)-(ΒΓΙ_α)$.
3. Παρατηρήστε ότι (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΔ) + (ΒΓΔ) και εφαρμόστε τον τύπο $Ε = \frac{αβγ}{4R}$.

§10.5

1. Εφαρμογή του τύπου $\frac{Ε}{Ε'} = \frac{υ_α}{υ_{α'}}$ οπότε (Α′Β′Γ′) = 20 τ.μ.
2. (ΒΜΓ) = 5τ.μ.
3. Θεώρημα ΙΙΙ της §10.5. Είναι (ΑΔΖ) = 10τ.μ.
4. Θεώρημα Ι της §10.5 και είναι (ΒΕΖΓ) = 48τ.μ.
5. Εφαρμογή του θεωρήματος ΙΙΙ §10.5.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. i) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ΡΒΓ}$ και $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ έχουν κοινή βάση ΒΓ.
   ii) Εφαρμόζουμε το i).
   iii) $\frac{ΡΑ}{ΑΔ} = \frac{ΑΔ - ΡΔ}{ΑΔ} = 1 - \frac{ΡΔ}{ΑΔ}$
2. Θεώρημα ΙΙΙ της §10.5.
3. Αποδείξτε πρώτα ότι $Α\hat{Ο}Γ + Δ\hat{Ο}Β = 2∟$.
4. Γράψτε την αποδεικτέα σε μορφή αναλογίας.
5. Είναι $Μ\hat{Α}Ζ + Β\hat{Α}Δ = 2∟$ άρα θεώρημα ΙΙΙ §10.5.
6. Θεώρημα Ι §10.5.

Σύνθετα Θέματα

1. $Α\hat{Ο}Β + Α\hat{Ο}Δ = 2∟$ οπότε θεώρημα ΙΙΙ §10.5.
   i) Είναι (ΑΒΓ) = (ΒΔΓ)
   ii) Απλό
   iii) $Ε = 2Ε_1 + Ε_2 + Ε_4$,
   $x + y \geq 2\sqrt{xy}, \quad x,y \geq 0$.
2. i) Απλό ii) $\frac{Ε_1}{Ε} = \left(\frac{ΔΕ}{ΒΓ}\right)^2$.
3. i) (ΔΕΖ) = (ΑΒΓ) – (ΑΖΕ) – (ΒΖΔ) – (ΔΓΕ)
   ii) $x + y \geq 2\sqrt{xy}, \ x,y \geq 0$.
4. Αν ΚΜ και ΛΝ οι ζητούμενες ευθείες τα τρίγωνα ΑΚΜ και ΑΒΓ έχουν κοινή γωνία Α. Το ίδιο για τα τρίγωνα ΑΛΝ και ΑΒΓ.

§10.6

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Η πλευρά x του τετραγώνου ικανοποιεί την $x^2 = αβ$.
2. Αν x η πλευρά του ζητούμενου τετραγώνου τότε $x^2 = α^2 + β^2$.
3. Πρόβλημα 1 §10.6.
4. Πρόβλημα 1 §10.6.

Γενικές Ασκήσεις

1. i) Τα τρίγωνα έχουν ίσα ύψη και την ίδια βάση
   iii) Εφαρμογή 3 §10.1.
2. i) Σύγκριση εμβαδών,
   ii) Αρκεί $\frac{λ}{λ^2 + 4} \leq \frac{1}{4}$.
3. Βρείτε με δύο τρόπους το λόγο $\frac{(ΑΒΔ)}{(ΑΓΔ)}$.
4. i) Θεώρημα ΙΙΙ §10.5 ii) τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΔΕΓ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή Ε, iii) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ έχουν κοινή τη γωνία Γ.
5. i) Απλό, ii) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ έχουν τη γωνία Γ κοινή, iii) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΔΕΓ είναι όμοια.
6. i) Απλό, ii) ΜΚ διάμεσος στο $\overset{\triangle}{ΑΜΔ}$ και ΜΛ διάμεσος στο $\overset{\triangle}{ΒΜΓ}$.
7. i) Αν $d = \frac{γ}{ν}$ εκφράστε ως συνάρτηση του d τα εμβαδά του τριγώνου και των τραπεζίων που σχηματίζονται.
   ii) Το εμβαδόν του τριγώνου και των τραπεζίων δίνουν το εμβαδόν του (ΑΒΓ).
8. Είναι (ΑΒΜΖΗΔ) = (ΑΒΓΔ) + + (ΔΕΖΗ) – (ΔΕΜΓ) = 54.
9. Είναι $ΑΓ^2 - ΑΒ^2 = 17$ οπότε ΑΓ = 9 και ΑΒ = 8, $ΑΒ^2 = 64$, $ΑΔ^2 = 100$.
10. Τα τρίγωνα ΑΔΕ, ΑΖΗ και ΑΒΓ είναι όμοια μεταξύ τους και γράφουμε το ημικύκλιο διαμέτρου ΑΓ.
11. i) Όπως άσκηση 1 (αποδεικτικές) §10.5, ii) προκύπτει από το i).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

§11.1 - 11.2

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Είναι:
   $φ_5 = 108°$, $φ_6 = 120°$,
   $φ_{10} = 144°$ και $φ_{12} = 150°$,
   $ω_5 = 72°$, $ω_6 = 60°$, $ω_{10} = 36°$ και $ω_{12} = 30°$.
2. Σωστή η δ.
3. §11.1.

4. Λύστε τις εξισώσεις.

5. Λύστε την ανίσωση $\varphi_\nu < 90°$ ως προς ν.

6. Θεώρημα Ι §11.2.

7. i) $\widehat{AE} = \widehat{\Delta\Gamma}$

ii) $Z\hat{A}E = Z\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}E = 90°$

iii) Αξιοποιήστε το i)

iv) Ξεκινήστε με την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΒΗΓ.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Είναι $\varphi_\lambda + \varphi_\mu + \varphi_\nu = 360°$.

2. Αποδείξτε ότι έχει πλευρές και γωνίες ίσες.

3. Εφαρμόστε το 2° θεώρημα διαμέσων στο $A\hat{B}\Gamma$.

4. Αν $AB = \lambda_\nu$ και Μ το μέσο του $\widehat{AB}$ το ΟΑΜΒ έχει κάθετες διαγωνίους.

5. Τα πολύγωνα είναι όμοια.

6. Τα πολύγωνα είναι όμοια.

Σύνθετα Θέματα

1. Βρείτε για ποια ν υπάρχει θετικός ακέραιος κ τέτοιος ώστε $\kappa\varphi_\nu = 360°$.

2. Αν $A_1A_2...A_\nu$ το κανονικό ν-γωνο είναι:.

$(\Sigma A_1A_2) + (\Sigma A_2A_3) + ... + (\Sigma A_\nu A_1) = (A_1A_2 ... A_\nu)$.

3. Συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΓΜ και ΑΓΔ.

§11.3

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. $E_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2, \quad E_4 = 2R^2,$

$E_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2.$

2. Είναι $\lambda_\nu = R, \quad E_\nu = 150\sqrt{3}cm^2$ $(\nu = 6)$.

3. Είναι $\alpha_\nu = 4\sqrt{2}, \ \nu = 4$

$E_4 = 128cm^2$.

4. $AB = \lambda_6 = R, \quad B\Gamma = \lambda_4 = R\sqrt{2}$

κτλ. $(AB\Gamma\Delta) = \frac{R^2}{2}(2+\sqrt{3})$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Το άθροισμα των γωνιών είναι (2ν-4) ορθές, οπότε $\nu = 6$, $R = 2$.

2. Το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο και $AB = \lambda_6$, $\Delta\Gamma = \lambda_3$, $A\Gamma = B\Delta = \lambda_4$.

3. Εφαρμογή 3 §11.3. Είναι:

$\lambda_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ και

$\alpha_{12} = \frac{1}{2}R\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

4. Αν $AB = \lambda_6$ και Γ το μέσο του $\widehat{AB}$ είναι $A\Gamma = \lambda_{12}$ και το ΟΑΓΒ έχει κάθετες διαγωνίους.

Σύνθετα Θέματα

1. Εφαρμόστε το 1ο θεώρημα Διαμέσων.

2. Υπολογίστε το γινόμενο $AB \cdot A\Gamma$.

3. Παρατηρήστε ότι $A\Gamma = 2R$.

§11.4

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Εφαρμόστε τον τύπο του μήκους κύκλου.

2. $L = 10\sqrt{3}$cm.

3. $\ell = \pi$ cm.

4. Απλή.

5. $AB = \lambda_4$ και $B\Gamma = \lambda_3$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Αν Κ το κέντρο του κύκλου (Κ) παρατηρήστε ότι: $A\hat{K}\Delta = 2A\hat{O}\Gamma$.

2. Σχέσεις ακτίνων και διακέντρου.

3. Χρησιμοποιούμε τους τύπους $E = \tau\rho$, $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ και τον τύπο του Ήρωνα.

Σύνθετα Θέματα

1. Αν Κ, Λ τα μέσα των ΟΑ, ΟΒ αντίστοιχα και (Μ, x) ο κύκλος που εφάπτεται στα τρία ημικύκλια είναι: $OM = R - x$, $OK = \frac{R}{2}$, $KM = \frac{R}{2} + x$ και το ΟΚΜ είναι ορθογώνιο οπότε $x = \frac{R}{3}$.

2. Παρόμοια με την 1. Η ακτίνα του κύκλου (Κ) είναι $\frac{R}{4}$.

3. $6, 2+\sqrt{61}+6\pi$.

§11.6 - 11.8

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. $E = \pi\frac{R^2}{4}$.

2. $R = 12 \qquad E = 144\pi \ cm^2$.

3. $\ell_{\widehat{B\Gamma}} = \frac{\pi\alpha 60}{180} = \frac{\pi\alpha}{3}$,

$E = \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})\alpha^2$.

4. Παρόμοια με την εφαρμογή 1 §11.7.

5. Η περίμετρος είναι πR και το εμβαδόν $\frac{R^2}{2}(2\sqrt{3}-\pi)$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Είναι $O\hat{B}\Gamma = 30°$, $\ell_{\widehat{A\Gamma}} = \frac{\pi R}{3}$.

Περίμετρος $= R(1+\sqrt{3}+\frac{\pi}{3})$

Εμβαδόν $= \frac{R^2}{6}(3\sqrt{3}-\pi)$.

2. Αρκεί να βρούμε το εμβαδόν ενός από τα μη γραμμοσκιασμένα μικτόγραμμα τρίγωνα. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$E = \frac{\alpha^2}{6}(6+\pi-3\sqrt{3})$.

3. Αν Α, Β είναι τα κοινά σημεία των κύκλων (Κ, R) και (Λ, R) με $\delta = R\sqrt{2}$ αποδείξτε πρώτα ότι το ΑΚΒΛ είναι τετράγωνο.

4. $E = \frac{\pi}{8}(AB^2 - A\Gamma^2 - \Gamma B^2)$,

$AB = A\Gamma + \Gamma B$.

5. Αν (Κ, κ) ο εγγεγρ. στον τομέα κύκλος τότε: $OK = R - \kappa$ $K\Gamma = \kappa$, όπου $K\Gamma \perp OA$ και $A\hat{O}K = 30°$. Είναι $\kappa = \frac{R}{3}$.

Σύνθετα Θέματα

1. i) $\widehat{AB\Gamma} = 180°$ άρα $A\Gamma = 2R$.

ii) $\frac{(AB\Gamma)}{E} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$,

iii) Το κυκλικό τμήμα με χορδή την ΑΒ έχει εμβαδόν $\frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$ και το κυκλικό τμήμα με χορδή τη ΒΓ έχει εμβαδόν $\frac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$.

2. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = (\pi - 1)R^2$.
3. Βρίσκουμε πρώτα ότι $K\hat{A}\Lambda = 120°$ (Α κοινό σημείο των κύκλων).
4. Εφαρμογή 1 §11.7.

Γενικές Ασκήσεις

1. ii) Τα πολύγωνα είναι όμοια, iii) $L = \frac{3}{2}\pi R$.
2. α) Διαφορά εμβαδών δύο κυκλικών τομέων. β) Χρησιμοποιούμε και την $\omega_\nu = \frac{360}{\nu}$.
3. Αποδείξτε ότι το άθροισμα των γωνιών των τομέων είναι 4 ορθές.
4. Η ακτίνα του κάθε κύκλου είναι $\frac{\alpha}{4}$ και το ζητούμενο εμβαδόν $(4 - \pi)\frac{\alpha^2}{16}$.
5. ii) $\rho = 10(2 - \sqrt{2})$.
6. Η ακτίνα καθενός από τους τέσσερις κύκλους είναι $x = 25(3 - 2\sqrt{2})$.
7. Γωνία δύο τεμνουσών του κύκλου. Βρίσκουμε $\omega_{min} = 12°$.
8. i) $AM^2 = A\Gamma \cdot A\Delta$ και $A\Sigma^2 = A\Gamma \cdot AB$
   ii) Το τεταρτοκύκλιο $\overset{\frown}{AM}$, του κύκλου με διάμετρο το ΑΔ
   iii) Το μήκος του διαγραφόμενου τόξου είναι $\frac{1}{2}\pi AB$.
9. i) $\varepsilon_1 = (O\overset{\frown}{A\Gamma}) - (OA\Gamma)$, $\varepsilon_2 = (O\overset{\frown}{AB}) - (OAB)$ και η ΟΑ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, ii) Πάρτε και έναν άλλο εγγεγραμμένο κύκλο και συγκρίνετε τις ακτίνες τους, iii) α) Οι ακτίνες ρ_1, ρ_2 των μέγιστων εγγεγραμμένων κύκλων στα κυκλικά τμήματα χορδών ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα είναι: $\rho_1 = \frac{1}{2}(R - \frac{\gamma}{2})$, $\rho_2 = \frac{1}{2}(R - \frac{\beta}{2})$
   β) $\rho_1 = \frac{R}{4}$ και $\rho_2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}R$.
10. i) Απλό ii) Χρησιμοποιήστε το i), iii) Το ΟΒΒ′Ο′ είναι παρ/μο, iv) Προσθέτουμε και αφαιρούμε διαδοχικά από τα μέλη της iii) τα εμβαδά του μικτόγραμμου τριγ. ΑΒΓ και του κυκλικού τμήματος χορδής ΓΒ′ αντίστοιχα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

§12.3

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Η ζητουμένη ευθεία είναι η τομή των δύο επιπέδων που ορίζει το σημείο Ο με καθεμία από τις ασύμβατες ευθείες.
2. Φέρουμε το τυχαίο επίπεδο που περιέχει τη μία ευθεία και τέμνει τις άλλες δύο στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Η ευθεία ΑΒ είναι η ζητούμενη.
3. Το επίπεδο (Α, ε′) τέμνει τον κύκλο (Κ) σε δύο, ένα ή κανένα σημείο. Επομένως υπάρχουν δύο, μία ή καμία τέτοια ευθεία.
4. Τα επίπεδα (Μ,Χ,Χ′) και (Μ,Ψ,Ψ′) έχουν δύο κοινά σημεία. Το Μ και το Ο. Άρα η κοινή ευθεία είναι η ΜΟ.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Τέμνουμε το επίπεδο με το επίπεδο του κύκλου.
2. Χρησιμοποιούμε τις προτάσεις: i) δύο επίπεδα τέμνονται σε ευθεία αν έχουν ένα κοινό σημείο και ii) μία ευθεία που έχει δύο σημεία της σε επίπεδο τότε ανήκει σ’ αυτό.
3. Με απαγωγή σε άτοπο.
4. Η ζητούμενη ευθεία ορίζεται από τα σημεία τομής των ε_3 και ε_4 με το επίπεδο $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.
5. Αν οι ευθείες τομής του ενός με τα δύο άλλα τέμνονται, τότε αυτό είναι κοινό σημείο και των τριών επιπέδων. Αν είναι παράλληλες, τότε και η τρίτη είναι παράλληλη σε αυτές.

§12.4

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Από το Ο φέρουμε τις παράλληλες των ασύμβατων και αυτές ορίζουν το ζητούμενο επίπεδο.
2. Τέμνουμε την ευθεία ξ με το επίπεδο το παράλληλο στο π που περνάει από το Α και ενώνουμε αυτό το σημείο με το Α.
3. Φέρουμε επίπεδο παράλληλο στο π που τέμνει τις ασύμβατες σε δύο σημεία. Αυτά ορίζουν μία από τις ευθείες που ικανοποιούν το πρόβλημα.
4. Τότε η ευθεία είναι παράλληλη και στα δύο επίπεδα, διότι είναι παράλληλη μια ευθεία του καθενός.
5. Αποδεικνύεται με απαγωγή σε άτοπο ότι η κοινή ευθεία δεν μπορεί να τέμνει τις ε και ε′.
6. Φέρουμε τυχαίο επίπεδο από την ξ που τέμνει το π και χρησιμοποιούμε τον ορισμό της παραλληλίας ευθείας και επιπέδου.
7. Φέρουμε από το Ο ευθεία παράλληλη στην ε. Κάθε επίπεδο που περιέχει αυτήν και όχι την ε είναι λύση του προβλήματος.
8. Φέρουμε την παράλληλη στην κοινή ευθεία των δύο επιπέδων.
9. Το ζητούμενο επίπεδο ορίζεται από δύο ευθείες παράλληλες στις δοσμένες, που διέρχονται από το Ο. Αν οι δοσμένες είναι παράλληλες, βρίσκουμε δύο τεμνόμενες ευθείες του επιπέδου τους και αναγόμαστε στην πρώτη περίπτωση.
10. Κατασκευάζουμε τα επίπεδα (ε_1, ξ_1) και (ε_2, ξ_2), όπου ξ_1, $\xi_2 // \varepsilon$ τέμνουσες των ε_1 και ε_2 αντίστοιχα.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Αποδεικνύουμε ότι δύο απέναντι πλευρές του σχηματιζόμενου τετραπλεύρου είναι παράλληλες και ίσες.

2. Τα επίπεδα αυτά περνάνε από δύο παράλληλες ευθείες, άρα η τομή είναι παράλληλη σ' αυτές.
3. Καθιστούμε τα τμήματα αυτά διαγωνίους παραλληλογράμμου και προκύπτει το ζητούμενο.
4. Γίνεται χρήση του ορθού του θεωρήματος του Θαλή.

Σύνθετα Θέματα

1. Ανά δύο οι παράλληλες πλευρές των τριγώνων ορίζουν τρία επίπεδα που είτε θα τέμνονται σε ένα σημείο ή θα τέμνονται ανά δύο σε τρεις ευθείες παράλληλες.
2. Τα σημεία A_1, B_1 και Γ_1 είναι σημεία της κοινής ευθείας των δύο επιπέδων των τριγώνων. Ανά δύο οι πλευρές των τριγώνων ορίζουν τρία επίπεδα που περνάνε από το ίδιο σημείο ή τέμνονται ανά δύο σε τρεις ευθείες παράλληλες (προηγούμενη άσκηση).
3. Είναι ευθεία παράλληλη στην ε.

§12.5

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Υπάρχει ευθεία του π παράλληλη στην ε.
2. Εφαρμογή του θεωρήματος των τριών καθέτων.
3. Το ζητούμενο επίπεδο είναι αυτό που ορίζεται από μία ευθεία και την κοινή κάθετό τους.
4. Είναι η ευθεία η παράλληλη σε μία κάθετη της ε.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Εφαρμογή του θεωρήματος των τριών καθέτων.
2. Εφαρμογή του θεωρήματος των τριών καθέτων.
3. Εφαρμογή του i) θεωρήματος των τριών καθέτων.

   ii) Τα ΣΓ και ΣΝ είναι τα ύψη των ορθογώνιων τριγώνων ΣΑΜ και ΣΑΒ, επομένως ισχύουν οι σχέσεις αυτές.

   iii) Από τις προηγούμενες σχέσεις και επειδή έχουν μία κοινή γωνία, είναι όμοια.

   iv) Από τα όμοια τρίγωνα, επειδή το ένα είναι ορθογώνιο θα είναι και το άλλο.

   v) Η ΣΓ είναι κάθετη στην ΓΝ και ορθογώνια στην ΑΓ.

   vi) Εφαρμογή του θεωρήματος των τριών καθέτων ii).

   vii) Είναι κύκλος διαμέτρου ΑΓ στο επίπεδο που περνάει από το Γ και είναι κάθετο στην ΣΓ.

§12.6

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Είναι η τομή του μεσοκάθετου επιπέδου στο τμήμα που ορίζουν τα δύο σημεία με το δοσμένο επίπεδο.
2. Είναι η τομή του μεσοκάθετου επιπέδου στο ΑΒ με την ευθεία.
3. Η ζητούμενη κάθετη είναι η ευθεία του π που είναι κάθετη στην προβολή της ε στο π.
4. Ο γ.τ. είναι κύκλος σε επίπεδο κάθετο στην ε, με διάμετρο ΑΒ, όπου Β η προβολή του Α στην ε.
5. Ο γ.τ. είναι κύκλος του π με διάμετρο ΟΟ′, όπου Ο′ η προβολή του Ο στο π.
6. Ο γ.τ. είναι η ευθεία η κάθετη στην ε από το Ο′, την προβολή του Ο στο π.
7. Ο γ.τ. είναι η κάθετη ευθεία στο επίπεδο του τριγώνου, που περνάει από το περίκεντρο.
8. Ο γ.τ. είναι το κοινό σημείο των μεσοκάθετων επιπέδων στα τμήματα που ορίζουν τα τέσσερα δοσμένα σημεία ανά δύο.
9. Ο γ.τ. είναι τα επίπεδα τα παράλληλα στο π, σε απόσταση λ, κείμενα εκατέρωθεν του π.
10. Είναι το επίπεδο το παράλληλο στο (Α, Β, Γ), που περνάει από το Μ.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Ο γ.τ. είναι το επίπεδο το παράλληλο στις δύο ασύμβατες, που διαιρεί την απόσταση των ασύμβατων σε λόγο λ.
2. Χρησιμοποιούμε την προηγούμενη άσκηση. Η ζητούμενη ευθεία ε_3 ορίζεται ως η τέμνουσα των δύο ασύμβατων ε_1 και ε_2 που περνάει από το σημείο τομής της ε_3 με το επίπεδο το παράλληλο στις ε_1 και ε_2 το οποίο χωρίζει την απόστασή τους σε λόγο λ.
3. Το ζητούμενο σημείο είναι το σημείο τομής των δύο κύκλων (Α′, ρ) και (Β′, ρ′), όπου Α′ και Β′ οι προβολές των Α και Β στο π και

   $\rho = \sqrt{\mu^2 - AA'^2}$ και

   $\rho' = \sqrt{\nu^2 - BB'^2}$.

Σύνθετα Θέματα

1. Ο γ.τ. είναι κύκλος του π με κέντρο την προβολή Ο′ του μέσου Ο του ΑΒ και

   ακτίνα $\rho = \sqrt{\dfrac{AB^2}{4} - OO'^2}$.
2. Προβάλλουμε το Α στο π και ενώνουμε την προβολή Α′ με το κέντρο του κύκλου. Τα άκρα της διαμέτρου είναι τα ζητούμενα σημεία.
3. Το επίπεδο ορίζεται από το μέσον Ο του ΑΒ και την ευθεία ε.
4. Ο γ.τ. είναι επίπεδο κάθετο στην ΑΒ στο σημείο Μ′ για το οποίο ισχύει $OM' = \dfrac{A^2}{2AB}$, όπου Ο το μέσον του ΑΒ.
5. Θεωρούμε επίπεδο κάθετο στην ΓΔ που περιέχει την ΑΒ και χρησιμοποιούμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα.
6. Εφαρμογή της άσκησης 5.
7. Τα μεσοκάθετα επίπεδα στα ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ τέμνονται σε ένα σημείο Ο που ανήκει και στα μεσοκάθετα επίπεδα των υπολοίπων.

8. Το σταθερό σημείο είναι το σημείο τομής του π με την ευθεία ξ που είναι κάθετη στο επίπεδο (Ο, ε) στο Ο.

§12.7

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Κάθε επίπεδο που περιέχει την κάθετη ΟΟ′ στο επίπεδο π ικανοποιεί το πρόβλημα.
2. Οι έδρες σ και π περιέχουν την ακμή ε που είναι κάθετη στο π.
3. Γίνεται χρήση των γ.τ. i) του μεσοκάθετου επιπέδου στο τμήμα ΒΓ και ii) κύκλου με κέντρο το μέσο Μ του ΒΓ και ακτίνα το μισό του ΒΓ.
4. Φέρουμε από το Ο ευθεία παράλληλη στην ε και ευθεία κάθετη στο σ. Αυτές οι δύο ευθείες ορίζουν το επίπεδο π.
5. Από τυχαίο σημείο της ε φέρουμε ευθεία κάθετη στο π. Η ε και η κάθετη ορίζουν το ζητούμενο επίπεδο.

§12.8

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Εάν ε⊥π τότε κάθε επίπεδο που περιέχει την π είναι κάθετο. Εάν η ε είναι πλάγια στο π, τότε το επίπεδο (ε, ε′) είναι κάθετο στο π, όπου ε′ η προβολή της ε στο π.
2. Εφαρμογή του Θεωρήματος του Θαλή στο επίπεδο που ορίζει η ευθεία με την προβολή της.
3. Εφαρμογή της προηγούμενης άσκησης.
4. Οι παράλληλες ευθείες και οι προβάλλουσες δύο σημεία που βρίσκονται ένα στην καθεμία, ορίζουν επίπεδα παράλληλα, που τεμνόμενα από τρίτο δίνουν τομές ευθείες παράλληλες.
5. Τα ζεύγη των απέναντι πλευρών προβάλλονται ως παράλληλες ευθείες.
6. Κατασκευάζουμε στο επίπεδο της προβολής τρίγωνο $ΑΒ_0Γ$ ίσο με το ΑΒΓ και συγκρίνουμε αυτό με την προβολή ΑΒ′Γ, όπου Β η ορθή γωνία και Α, Γ οι τομείς των πλευρών της με το επίπεδο.
7. Απλή εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος.
8. Από τον ορισμό του συνημιτόνου γωνίας έχουμε:

   i) $ΑΒ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ii) $ΑΒ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   iii) $ΑΒ = \dfrac{1}{2}$.
9. Φέρουμε την κάθετη στο επίπεδο π στο Α, η οποία μαζί με την ε ορίζουν επίπεδο, πάνω στο οποίο κατασκευάζουμε ευθεία που σχηματίζει γωνία 60^o με την ε.
10. Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Θαλή της γεωμετρίας του επιπέδου.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Συγκρίνουμε τις γωνίες που σχηματίζουν η κάθετη και η πλάγια με τις προβολές τους.
2. Παρατηρούμε ότι τα επίπεδα αυτά έχουν κοινό το έκκεντρο του τριγώνου.
3. Το μέσο μιας διαγωνίου με τις δύο άλλες κορυφές συνιστούν ισοσκελές τρίγωνο, άρα η διάμεσος είναι και ύψος. Το ίδιο και για το μέσο της άλλης διαγωνίου και προκύπτει το ζητούμενο.
4. Αν Γ′ η προβολή του Γ στο ζητούμενο επίπεδο και ΓΔ το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, τότε το τρίγωνο ΓΓ′Δ είναι ορθογώνιο στο Γ′ και έχει δύο γνωστές πλευρές την ΓΔ και την Γ′Δ άρα κατασκευάζεται.
5. Από το σημείο τομής Γ του τμήματος ΑΒ με το διχοτόμο επίπεδο φέρουμε επίπεδο κάθετο στην ακμή της διέδρου και προβάλλουμε σε αυτό τα σημεία Α και Β.
6. Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ και Α′Δ το ύψος του Α′ΒΓ θα έχουμε ότι τα εμβαδά των δύο τριγώνων είναι όπως ο λόγος των υψών τους. Αλλά τα ύψη είναι γνωστά.

Γενικές Ασκήσεις

1. Ο γ.τ. είναι τα επίπεδα που διχοτομούν τις δύο παραπληρωματικές δίεδρες γωνίες που έχουν τη γωνία των ε και ξ ως αντίστοιχη επίπεδη.
2. Θεωρούμε την ορθή γωνία των ξ και ε′ (όπου ε′//ε), που προβάλλεται στο άλλο επίπεδο ως ορθή. Επειδή η ε′ προβάλλεται ως παράλληλη στην ε, η ξ προβάλλεται ως κάθετη σε αυτή.
3. Οι ευθείες οι παράλληλες στο π που τέμνουν τις ε και ξ έχουν προβολές στο π ευθείες που περνάνε από το μέσο του τμήματος που ορίζουν τα ίχνη των ευθειών ε και ξ. Άρα οι ευθείες που συναντούν τις ε και ξ τέμνονται από την κάθετη στο επίπεδο π στο σημείο αυτό.
4. Προβάλλουμε τα ίχνη της τέμνουσας στις δύο έδρες και στην ακμή της δίεδρης και σχηματίζονται δύο ζεύγη ίσων τριγώνων.
5. Προβάλλουμε τα σημεία στις έδρες και την ακμή της δίεδρης και προκύπτουν δύο τρίγωνα ίσα.
6. Θεωρούμε ότι οι προβολές δε συμπίπτουν και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα των τριών καθέτων οδηγούμαστε σε άτοπο.
7. Τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ του στρεβλού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ προβάλλονται στο κέντρο του παραλληλογράμμου και επομένως αυτά ορίζουν τη διεύθυνση των παραλλήλων.
8. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Θαλή για τα ΜΜ′, ΝΝ′ και την κοινή κάθετο των ασύμβατων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

§13.1 - 4

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Το ύψος είναι κάθετο ενώ η ακμή είναι πλάγια ως προς τα επίπεδα της βάσης.
2. Οι κάθετες τομές ορθού πρίσματος και οι βάσεις είναι παράλληλα σχήματα.
3. Οι ακμές ενός πρίσματος και οι προβολές τους στα επίπεδα των βάσεων σχηματίζουν ίσα ορθογώνια τρίγωνα.
4. $E = \alpha^2\left(3+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $V = \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha^3$.
5. $E_3 = 3\sqrt{3}\rho\left(\frac{\rho}{2}+\upsilon\right)$

   $E_4 = 4\rho\left(\rho+\sqrt{2}\upsilon\right)$

   $E_6 = 3\rho\left(2\upsilon+\sqrt{3}\rho\right)$

   $V_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\rho^2\upsilon$

   $V_4 = 2\rho^2\upsilon$, $V_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^2\upsilon$.
6. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Θαλή για τα επίπεδα των εδρών, στα οποία βρίσκονται τα άκρα του τμήματος και το μεσοπαράλληλο επίπεδο σε αυτά.
7. $E = 6\alpha^2$ και $\alpha = 6$ μ.
8. $\delta = 4\sqrt{29}$, $E = 832$, $V = 1536$
9. $E = 6\alpha^2 = 3\beta^2 = 2\delta^2$, όπου α = ακμή, β = διαγώνιος βάσης και δ = διαγώνιος κύβου.
10. Ακμή $\alpha = 5$, όγκος $V = 150$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Συμπληρώνουμε το πρίσμα σε παραλληλεπίπεδο.
2. Εκφράζουμε το εμβαδόν της κάθετης τομής ως συνάρτηση της ακτίνας του εγγεγραμμένου κύκλου και της περιμέτρου.
3. Ο όγκος πρίσματος εκφράζεται ως γινόμενο μιας κάθετης τομής επί την ακμή και το εμβαδόν με την περίμετρο της κάθετης τομής επί την ακμή.
4. Καθιστούμε το ευθύγραμμο τμήμα διαγώνιο σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με τρεις ακμές δια του Α και τρεις δια του Γ′.
5. Καθιστούμε το τμήμα ΑΓ′ διαγώνιο σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και προβάλλουμε στις τρεις έδρες του που περνάνε από το Α.
6. i) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα που έχουν ως πλευρές τη διαγώνιο και την ακμή του κύβου, ii) Υπολογίζουμε το λόγο της υποτείνουσας προς την προβολή της ακμής σε αυτήν.
7. Τέμνουμε το παραλληλεπίπεδο με το διαγώνιο επίπεδο ΒΒ′Δ′Δ και ανάγεται σε γνωστό πρόβλημα της γεωμετρίας του επιπέδου.

Σύνθετα Θέματα

1. Παρατηρούμε ότι οι πλευρές του τριγώνου είναι διαγώνιοι των εδρών.
2. Η τομή του επιπέδου (Α′, Β, Δ) με τη διαγώνιο είναι το κέντρο ισόπλευρου τριγώνου και τα ύψη σχηματίζουν τις αντίστοιχες των διέδρων.
3. Το επίπεδο που περνάει από τα σημεία Κ, Λ και Ν τέμνει τις ακμές Γ′Δ′, Δ′Α′ και ΑΑ′ σε σημεία που αποδεικνύουμε ότι είναι μέσα, οπότε οι πλευρές του σχηματιζόμενου εξαγώνου είναι ίσες. Επίσης και οι γωνίες είναι ίσες.
4. Εφαρμόζουμε γνωστή πρόταση της γεωμετρίας του επιπέδου σύμφωνα με την οποία το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων παραλληλογράμμου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των τεσσάρων πλευρών του.

§13.5 - 9

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Το ύψος κανονικής πυραμίδας, το απόστημα και το μισό της πλευράς της βάσης σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο. Επίσης, το ύψος, το απόστημα της βάσης και το απόστημα της πυραμίδας συνιστούν επίσης ορθογώνιο τρίγωνο.
2. Η αντίστοιχη της δίεδρης με έδρες τη βάση και μία από τις έδρες κανονικής πυραμίδας έχει αντίστοιχη τη γωνία που σχηματίζουν το απόστημα της πυραμίδας και το απόστημα της βάσης.
3. Εφαρμόζουμε τους τύπους.
4. Απλή εφαρμογή των τύπων.
5. $E_\pi = 87.561$ τ.μ, $V = 2.664.792$ κ.μ.
6. $E_0 = \mu^2\sqrt{7}$, $V = \frac{\mu^3}{\sqrt{6}}$.
7. i) $\frac{1}{3}$, (ii) $\frac{\sqrt{6}}{4}$.
8. $3\sqrt{6}$.
9. $V = \frac{7\sqrt{3}}{16}\alpha^2\upsilon$

   $V = \frac{9\alpha}{4}\sqrt{\frac{3\alpha^2}{4}+2^2}$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Στηριζόμενοι στο ότι ο όγκος μιας πυραμίδας δεν αλλάζει αν η κορυφή της πυραμίδας κινηθεί σε επίπεδο παράλληλο στη βάση της, μετακινούμε μία κορυφή του τετραέδρου παράλληλα σε μία απέναντι ακμή του τετραέδρου, ώστε να γίνει σημείο της απέναντι έδρας του παραλληλεπιπέδου.
2. Προβάλλουμε δύο κορυφές στις απέναντι έδρες και στην ακμή που ορίζουν οι άλλες δύο κορυφές και σχηματίζονται δύο όμοια ορθογώνια τρίγωνα. Από τους λόγους των πλευρών τους προκύπτει το ζητούμενο.
3. Θεωρούμε ως βάση ένα τρίγωνο που έχει τη μετακινούμενη ακμή ως πλευρά. Το εμβαδόν

της βάσης είναι σταθερό διότι έχει σταθερό μήκος βάσης και ύψος. Επίσης, το ύψος της πυραμίδας δεν αλλάζει διότι η απέναντι κορυφή προβάλλεται σε σταθερό επίπεδο.

4. Θεωρούμε το λόγο του ενός τετραέδρου ως προς ένα βοηθητικό που έχουν κοινό ύψος, και το λόγο του βοηθητικού ως προς τον όγκο του δεύτερου που έχουν επίσης κοινό ύψος και πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις προκύπτει το ζητούμενο.
5. Εφαρμόζουμε την προηγούμενη άσκηση δύο φορές και προκύπτει το ζητούμενο.
6. Εφαρμόζουμε την άσκηση 5.
7. Υπολογίζουμε το ύψος της βάσης και από αυτό το απόστημα. Επειδή η γωνία της ακμής και του ύψους της βάσης είναι πλευρές ορθογώνιου τριγώνου, υπολογίζεται το ύψος και από αυτό ο όγκος είναι $V = \frac{\sqrt{3}}{12}\alpha^2$.

Σύνθετα Θέματα

1. Αν ΑΒ είναι η κάθετη σε επίπεδο, στο σημείο Β, προβάλλουμε τις κορυφές Δ και Γ στο επίπεδο αυτό και προκύπτει ότι ο αρχικός όγκος του τετραέδρου ισούται με τον όγκο του τετραέδρου που έχει κορυφές τα Α, Β και τις προβολές στο επίπεδο των δύο άλλων.
2. Η κάθετη τομή ενός πρίσματος, από σημείο Μ εσωτερικό του πρίσματος, περιέχει τις αποστάσεις του Μ από τις έδρες και σχηματίζεται ισόπλευρο τρίγωνο στο οποίο το άθροισμα των αποστάσεων του σημείου Μ από τις πλευρές του τριγώνου είναι σταθερό.
3. Τα μέσα τριών ακμών που περνάνε από την ίδια κορυφή του κύβου, μαζί με την κορυφή αυτή σχηματίζουν ένα τετράεδρο, με ακμές βάσης ίσες με το μισό της διαγωνίου τετραγώνου πλευράς α. Υπολογίζουμε το ύψος της βάσης, το εμβαδόν της βάσης, το ύψος του τετραέδρου και εν τέλει τον όγκο του, το οκταπλάσιο του οποίου αφαιρείται από τον όγκο του κύβου.

§13.10 - 12

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Απλή εφαρμογή των τύπων.
2. Εφαρμόζουμε τους τύπους.
3. Εφαρμογή των τύπων.
4. Υπολογίζουμε τον όγκο κυλίνδρου ενός εκατοστού ύψους, που έχει την ίδια βάση.
5. Εξισώνουμε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας με το εμβαδόν του κύκλου ακτίνας 4 και υπολογίζουμε την ακτίνα του κυλίνδρου.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Από τους τύπους του όγκου και του εμβαδού της ολικής επιφάνειας απαλείφουμε την ακτίνα ρ.
2. Υπολογίζουμε τον όγκο των δύο κυλίνδρων που σχηματίζονται. Θέτουμε x την απόσταση του Μ από το Α και διπλασιάζοντας τον όγκο του μικρού κυλίνδρου βρίσκουμε τον όγκο του μεγάλου.
3. Υπολογίζουμε τη διαφορά των δύο κυλίνδρων που σχηματίζονται κατά την περιστροφή του ορθογωνίου και βρίσκουμε τον ζητούμενο όγκο. Αθροίζουμε τα εμβαδά, λαμβάνοντας υπόψη τόσο τις κυρτές επιφάνειες των δύο κυλίνδρων, όσο και τους δύο κυκλικούς δακτυλίους που αποτελούν τις βάσεις των κυλίνδρων.

§13.13 - 15

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Υπολογίζουμε τη γενέτειρα του κώνου από το ύψος και την ακτίνα και εφαρμόζουμε τους τύπους.
2. Απαλείφουμε τη γενέτειρα μεταξύ του τύπου της κυρτής επιφάνειας και της σχέσης που συνδέει την ακτίνα, το ύψος και την ακμή και προσδιορίζουμε την ακτίνα του κώνου.
3. Από το ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα τη γενέτειρα και κάθετη πλευρά την ακτίνα βρίσκουμε το ύψος του κώνου. Μετά, με εφαρμογή των τύπων, υπολογίζουμε τα ζητούμενα.
4. Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο που παράγεται ο κώνος προκύπτει το ύψος και η γενέτειρα του κώνου. Με αυτά υπολογίζουμε τον όγκο και την επιφάνεια.
5. Υπολογίζουμε την ακμή λ και στη συνέχεια το ύψος υ. Κατόπιν αντικαθιστούμε στους τύπους του όγκου και του εμβαδού.
6. Υπολογίζουμε το λ και μετά το λόγο των εμβαδών που είναι $\sqrt{5}$.
7. Υπολογίζουμε το λόγο των δύο επιφανειών αφού υπολογίσουμε την ακμή από το ύψος και την ακτίνα.
8. Απλή εφαρμογή των τύπων.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Χωρίζουμε τον κώνο με επίπεδο παράλληλο στη βάση. Τότε, ο μικρός κώνος που αποτέμνεται είναι το μισό του αρχικού.
2. Ο όγκος που παράγεται κατά την περιστροφή του τριγώνου ΑΒΓ ισούται με τον όγκο του ΑΜΚ μείον ογκ(ΓΛΚ) μείον όγκ.(ΒΓΜΠ).
3. Αν φέρουμε δύο επίπεδα παράλληλα στη βάση που να χωρίζουν την κυρτή επιφάνεια του κώνου σε τρία ίσα μέρη, ο

μικρός κώνος που δημιουργείται θα είναι το $\frac{1}{3}$ του αρχικού. Επίσης ο μικρός κώνος μαζί με το μεσαίο κόλουρο κώνο αποτελούν τα $\frac{2}{3}$ του αρχικού κώνου.

4. Απλή εφαρμογή του τύπου.
5. Χρησιμοποιούμε την ομοιότητα των δύο τριγώνων.
6. Χρησιμοποιούμε τους τύπους του κώνου.

§13.16 - 18

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Η ακτίνα της σφαίρας, η ακτίνα του κύκλου τομής και η απόσταση του επιπέδου από το κέντρο συνιστούν ορθογώνιο τρίγωνο.
2. Από το εμβαδόν της τομής υπολογίζουμε την ακτίνα της τομής και στη συνέχεια υπολογίζουμε την απόσταση δ του επιπέδου από το κέντρο.
3. Υπολογίζουμε την ακτίνα του κύκλου της τομής και μετά βρίσκουμε το εμβαδόν της.
4. Η ζητούμενη ακτίνα είναι ύψος ορθογώνιου τριγώνου που ορίζεται από το κέντρο της σφαίρας, το φωτεινό σημείο και ένα σημείο του κύκλου.
5. Απλή εφαρμογή του τύπου, $Ε = 400π$.
6. Αν ρ και ρ′ είναι οι ακτίνες των σφαιρών, ο λόγος των επιφανειών τους είναι το τετράγωνο του λόγου των ακτινών τους.
7. Εφαρμόζουμε τον τύπο του όγκου της σφαίρας, $V = 36π$.
8. Ο λόγος των όγκων δύο σφαιρών είναι ίσος με τον κύβο του λόγου των ακτινών τους.
9. $Ε = π(ρ^2 – ρ'^2)$.
10. Ο συνολικός όγκος του σχήματος αποτελείται από τον όγκο ενός κυλίνδρου ακτίνας ρ και ύψους ρ και τον όγκο μιας σφαίρας ακτίνας ρ.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Υπολογίζουμε τους όγκους των τριών στερεών από τους τύπους και αποδεικνύουμε τις σχέσεις του προβλήματος.
2. Αν Μ τυχόν σημείο της τομής και Κ και Λ τα κέντρα της σφαίρας, το επίπεδο (Κ, Λ, Μ) τέμνει τις σφαίρες κατά μέγιστους κύκλους και το τρίγωνο ΚΛΜ έχει γνωστά μήκη πλευρών. Επομένως η προβολή του Μ στην ΚΛ είναι σταθερό σημείο και επειδή οι σφαίρες είναι σχήματα εκ περιστροφής, το Μ είναι σημείο κύκλου.
3. Υπολογίζουμε τους όγκους των τριών στερεών και παίρνουμε τους λόγους του κυλίνδρου προς τη σφαίρα και του κώνου προς τη σφαίρα.

Σύνθετα Θέματα

1. Εξισώνουμε τα εμβαδά των δύο επιφανειών και βρίσκουμε ότι το ύψος είναι διπλάσιο της ακτίνας.
2. Αν δ είναι η απόσταση της βάσης του κώνου ή του κυλίνδρου από το κέντρο της σφαίρας εκφράζουμε τους όγκους σε συνάρτηση του δ και μηδενίζοντας την παράγωγο ως προς δ βρίσκουμε πότε ο όγκος γίνεται μέγιστος.
3. Ο κύβος έχει διαγώνιο ίση με τη διάμετρο της σφαίρας. Το οκτάεδρο αποτελείται από δύο τετραγωνικές πυραμίδες, με βάσεις εγγεγραμμένες σε μέγιστο κύκλο της σφαίρας.
4. Από τα δοσμένα μεγέθη υπολογίζουμε τα εμβαδά και τους όγκους των στερεών.
5. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα ΙΙ, §13.18 για τον υπολογισμό των τριών όγκων. Η ζητούμενη σχέση αποδεικνύεται αντικαθιστώντας τους υπολογισθέντες όγκους και τις προβολές των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα κατά τα γνωστά από τη γεωμετρία του επιπέδου.

Γενικές Ασκήσεις

1. Σχηματίζουμε το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων του τυχαίου σημείου Μ από τις κορυφές του τετραέδρου και εφαρμόζουμε το Θεώρημα των διαμέσων στα διάφορα τρίγωνα που σχηματίζονται. Καταλήγουμε σε μία σχέση που περιέχει σταθερά τμήματα εκτός από ένα, το οποίο όταν μηδενιστεί καθιστά την ποσότητα ελάχιστη.
2. Το επίπεδο πρέπει να βρίσκεται μεταξύ των δύο απέναντι ακμών για να τέμνει τις υπόλοιπες τέσσερις. Οι πλευρές του τετραπλεύρου που σχηματίζεται από την τομή είναι ανά δύο παράλληλες στις ακμές στις οποίες είναι παράλληλο το επίπεδο. Άρα το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.
3. Από την ευθεία ε φέρουμε επίπεδο παράλληλο στη ζ που τέμνει την ξ σ’ ένα σημείο. Από αυτό το σημείο φέρουμε επίπεδο που να περιέχει την ξ και να είναι παράλληλο στην ε, που την τέμνει σε κάποιο σημείο και από αυτό το σημείο φέρουμε επίπεδο που να περιέχει τη ζ και να είναι παράλληλο στην ξ. Τέλος, συμπληρώνουμε το παραλληλεπίπεδο με άλλα τρία επίπεδα παράλληλα σ’ αυτά που κατασκευάσαμε.
4. Υπολογίζουμε το λόγο των όγκων των δύο τετραέδρων στα οποία χωρίζεται το αρχικό τετράεδρο από το διχοτόμο επίπεδο με δύο τρόπους και εξισώνουμε τα αποτελέσματα. Κατά τον πρώτο τρόπο θεωρούμε ότι έχουν ως βάσεις τα δύο τρίγωνα στα οποία χωρίζεται μία έδρα, οπότε έχουν κοινό ύψος. Στη δεύτερη περίπτωση εκφράζου-

με τον όγκο με βάσεις τις έδρες που είναι εκατέρωθεν του διχοτόμου επιπέδου, αλλά και πάλι έχουν κοινό ύψος.

5. Ανά δύο τα τμήματα αυτά διχοτομούνται διότι είναι διαγώνιοι παραλληλογράμμων. Επομένως τα τρία τμήματα διχοτομούνται σ' ένα σημείο.

6. Θεωρούμε δύο από τις διαμέσους. Αυτές είναι συνεπίπεδες διότι ανήκουν στο επίπεδο που περνάει από μία ακμή και από το μέσο της απέναντι ακμής. Επειδή τα κέντρα βάρους των εδρών χωρίζουν τις διαμέσους σε λόγο 1:2, η ευθεία που συνδέει τα κέντρα βάρους είναι παράλληλη στην απέναντι ακμή. Επομένως, στο διάμεσο επίπεδο σχηματίζονται δύο όμοια τρίγωνα και από τις αναλογίες τους προκύπτει ο ζητούμενος λόγος.

Θεωρούμε τη διάμεσο ΝΠ που κείται στο διάμεσο επίπεδο ΑΒΝ. Η διάμεσος τέμνει τη διάμεσο ΑΛ έστω σε σημείο Μ′. Από το Π φέρουμε ευθεία παράλληλη στη διάμεσο ΑΛ και σχηματίζονται όμοια τρίγωνα, που από τις αναλογίες των πλευρών τους προκύπτει ότι το σημείο Μ′ χωρίζει τη διάμεσο σε λόγο 3:1, άρα είναι το σημείο τομής των διαμέσων.

8. Θεωρούμε δύο από τα τετράεδρα που χωρίζεται το αρχικό. Αυτά έχουν κοινή βάση και επειδή θα είναι ισοδύναμα θα έχουν ίσα ύψη. Άρα το σημείο Μ είναι σε τέτοια θέση ώστε να περιέχει μία ακμή και να τέμνει την απέναντι στο μέσο της. Αλλά αυτό συμβαίνει για κάθε ζεύγος τετραέδρων. Άρα, το Μ είναι το κέντρο βάρους του τετραέδρου.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ

Ο

Π

Σ

Τ

Υ

Χ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΝΟΜΑΤΩΝ

Α

Β

Γ

Δ

Ε

Ζ

Η

Θ

Ι

Κ

Λ

Μ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ

1) Αλιμπινίση Α., Δημάκου Γ., κ.ά., Θεωρητική γεωμετρία Β' Λυκείου, ΟΕΔΒ.
2) F.G.-M., Ασκήσεις Γεωμετρίας (Ιησουϊτών), μετάφραση στα ελληνικά Δ. Γκιόκα, Εκδόσεις Καραββία, τόμοι 1-4, Αθήνα, 1952.
3) Ιωαννίδη Ι., Γεωμετρία, Εκδόσεις Κορφιάτη, τόμοι 1-12, Αθήναι, 1973.
4) Ιωαννίδη Ι., Επίπεδος Γεωμετρία, Εκδόσεις Π. Γρηγορόπουλου.
5) Κανέλλου Σ. Γ., Ευκλείδειος Γεωμετρία, ΟΕΔΒ, 1976.
6) Κισκύρα Ν.Α., Θεωρήματα και Προβλήματα Γεωμετρίας, 1957.
7) Νικολάου Ν., Θεωρητική Γεωμετρία, ΟΕΔΒ, 1973.
8) Νικολάου Ν., Μεγάλη Γεωμετρία, Αθήναι.
9) Ντάνη Ι., Γεωμετρία Τεύχη 1-2.
10) Πάλλα Α., Μεγάλη Γεωμετρία.
11) Πανάκη Ι. Ρ., Γεωμετρία του Τριγώνου, Εκδόσεις Gutenberg.
12) Παπαμιχαήλ Δ., Σκιαδά Α., Θεωρητική Γεωμετρία, ΟΕΔΒ.
13) Παπανικολάου Γ., Θεωρητική Γεωμετρία, Αθήναι.
14) Σταμάτη Ε., Ευκλείδεια Γεωμετρία, τόμοι Ι - ΙΙΙ, ΟΕΣΒ, αρχαίο κείμενο και μετάφραση των Στοιχείων του Ευκλείδη, ΟΕΣΒ, Αθήνα, 1975.
15) Τσαρούχη Χ., Θεωρήματα και Προβλήματα Γεωμετρίας, 1969.
16) Τόγκα Π. Γ., Θεωρητική Γεωμετρία.
17) Τόγκα Π. Γ., Ασκήσεις και Προβλήματα Γεωμετρίας.
18) Τσίντσιφα Γ., Γεωμετρία, Εκδόσεις Σύγχρονου Βιβλιοπωλείου.

ΞΕΝΗ

1) Berger M., Pansu P., Berry J., Saint-Raymond X., Problems in Geometry, Springer-Verlag, 1984.
2) Blumenthal L.M., A Modern View of Geometry, Dover, N.Y 1961.
3) Bonola R., Non-Euclidean Geometry, Dover, 1955.
4) Caronnet Th., Exercices de Geometrie, 8eme edition, Librairie Vuibert, 1-7 livres, Paris.
5) Coxeter H., Introduction to Geometry, Wiley & Sons Inc, N.Y. 1969.
6) Coxeter H. and Greitzer S., Geometry Revisited, MAA, 1975.
7) Dorrie H., 100 Great Problems of Elementary Mathematics, Dover Pub. Inc, N.Y., 1965.
8) Eves H., A survey of Geometry, Allyn of Bacon Inc, Boston, 1974.
9) Forder H., The Foundations of Euclidean Geometry, Dover, 1958.
10) Hollinger A., Problemes de Geometrie, Bucurest.
11) Jacobs H., Geometry, W. H. Freeman & Co.

12) Knorr W.R., The Ancient Tradition of Geometric Problems, Dover, N.Y. 1986.
13) Lebosse G., Hemery G., Geometrie, 1960.
14) Ogilvy C.S., Excursions in Geometry, Dover Pub. Inc., N.Y. 1969.
15) Posamentier A., Salkid Ch., Challenging Problems in Geometry, Dover Pull. Inc., 1970.
16) Sved M., Journey into Geometries, MAA, 1991.
17) Tuller A., Introduction to Geometries, Van Nostrand Reinhold, 1967.
18) Yale P. B., Geometry and Symmetry, Dover Pub. Inc., N.Y., 1968.

Κωδικός βιβλίου: 0-22-0239
ISBN 978-960-06-5317-5

ΙΤΥΕ
"ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ"
ινστιτουτο
τεχνολογιας
υπολογιστων & εκδοσεων

(01) 000000 0 22 0239 6