ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

04/06/2024

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη Θεωρήματος, σχολικό βιβλίο, σελ. 76

Α2. Ορισμός, σχολικό βιβλίο, σελ. 155

Α3. Διατύπωση θεωρήματος, σχολικό βιβλίο σελ. 216

Α4. **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για το πεδίο ορισμού της f έχουμε:

$$D_f = \left\{x \in D_g \cap \frac{D_h}{h(x)} \neq 0\right\} = \left\{x \geq \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \neq 0\right\} = \left\{x \geq \frac{1}{x} \neq 1\right\}$$
$$= (1, +\infty)$$

Ο τύπος της f για κάθε $x > 1$:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1}$$

Για το πεδίο ορισμού της r έχουμε:

$$D_r = \left\{x \in D_g \cap D_h\right\} = [1, +\infty)$$

Ο τύπος της g για κάθε $x \geq 1$:

$$r(x) = g(x)h(x) = x - \frac{1}{x}$$

Β2. Για να αποδείξουμε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση της f πρέπει να αποδείξουμε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1».

<u>1ος τρόπος:</u>

Έστω $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ με $f(x_1) = f(x_2)$, έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1} \Leftrightarrow (x_1+1)(x_2-1) = (x_2+1)(x_1-1) \Leftrightarrow$$

$$x_1x_2 - x_1 + x_2 - 1 = x_1x_2 - x_2 + x_1 - 1 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι «1-1» και επομένως αντιστρέφεται.

2^{ος} τρόπος:

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως ρητή. Έχουμε:

$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0, για\ κάθε\ x > 1$

και άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, άρα και «1-1» και επομένως αντιστρέφεται:

Για την αντίστροφη: Για κάθε $x > 1$

Θέτουμε: $y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow y(x-1) = x+1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1}, y \neq 1\ και$

$$\frac{y+1}{y-1} > 1 \text{ ή } \frac{y+1}{y-1} - 1 > 0 \text{ ή } \frac{2}{y-1} > 0 \text{ ή } y - 1 > 0 \text{ ή } y > 1$$

Άρα: $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1$ και επομένως: $f^{-1}(x) = f(x), x > 1$

 # Άλλος τρόπος (πεδίο ορισμού της f^{-1})

Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης μπορεί να βρεθεί ως το σύνολο τιμών της f αξιοποιώντας την μονοτονία της f.

2^{ος} τρόπος:

Για να αποδείξουμε ότι $f^{-1}(x) = f(x)$ για κάθε $x > 1$ αρκεί να αποδείξουμε ότι $f\big(f(x)\big) = x, x > 1$ που αποδεικνύεται εύκολα και επειδή υπάρχει η f^{-1} θα είναι $f^{-1}(x) = f(x), x > 1$.

Β3. Η συνάρτηση r είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και επομένως η γραφική της παράσταση δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Κάθε άλλη ασύμπτωτη θα έχει τη μορφή:

$$y = \lambda x + b,$$

με

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{r(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2} = 1 \text{ και}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(r(x)-x) = -\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

Άρα: $y = x$

B4. Για κάθε $x \in D_f, x \in D_r, f(x) \in D_{f^{-1}}$ ή για κάθε $x > 1, \frac{2}{x-1} > 0$, δηλαδή για κάθε $x > 1$ έχουμε ισοδύναμα:

$\left(f^{-1}(f(x))\right)^2 = 1 + 4r(x) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4(x - \frac{1}{x}) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4x - \frac{4}{x} \Leftrightarrow x^3 = x + 4x^2 - 4 \Leftrightarrow (x-4)(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow$

$$x = 1\ (\alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota), x = -1\ (\alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota), \chi = 4\ (\delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta})$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, +\infty)$ θα είναι συνεχής και στο $x_0 = 2$.

Άρα:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow e^\lambda = \lambda + 1$$

και αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $g(x) = e^x - x - 1$ έχει μοναδική λύση την x=0 (γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου). Άρα $\lambda = 0$ μοναδικό.

Γ2. Η f είναι συνεχής στο διάστημα [0,2) και παραγωγίσιμη σε αυτό με $f'(x) = -2 < 0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in [0,2)$ και επομένως είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [0,2].

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(2, +\infty)$ και παραγωγίσιμη σε αυτό με $f'(x) = -2(x-2) < 0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x > 2$ και επομένως είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$.

Άρα $f'(x) < 0\ \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in [0,2) \cup (2, +\infty)$ και είναι και συνεχής στο $x_0 = 2$, επομένως είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Η f έχει ολικό μέγιστο στο σημείο x=0, το $f(0) = 5$.

Γ3. i) Θα εξετάσουμε αρχικά την συνέχεια της f στο [0,3]: Η f είναι συνεχής στο [0,3] αφού είναι συνεχής και στο $x_0 = 2$.

Θα εξετάσουμε τώρα αν η f είναι παραγωγίσιμη στο [0,3] και επειδή η είναι παραγωγίσιμη στα διαστήμα [0,2) και (2,3) αρκεί να εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $x_0 = 2$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{4-2x}{x-2} = -2$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-x^2+4x-4}{x-2} = 0$$

Άρα η f **δεν** είναι παραγωγίσμη στο $x_0 = 2$ και επομένως οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού **δεν** ισχύουν στο διάστημα [0,3].

ii) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Δ(0,f(0)), Ε(3, f(3)) είναι:

$$\lambda_{\Delta E} = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = -\frac{5}{3}$$

Θα εξετάσουμε επομένως αν υπάρχει $\xi \in (0,3)$, τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = -\frac{5}{3}$$

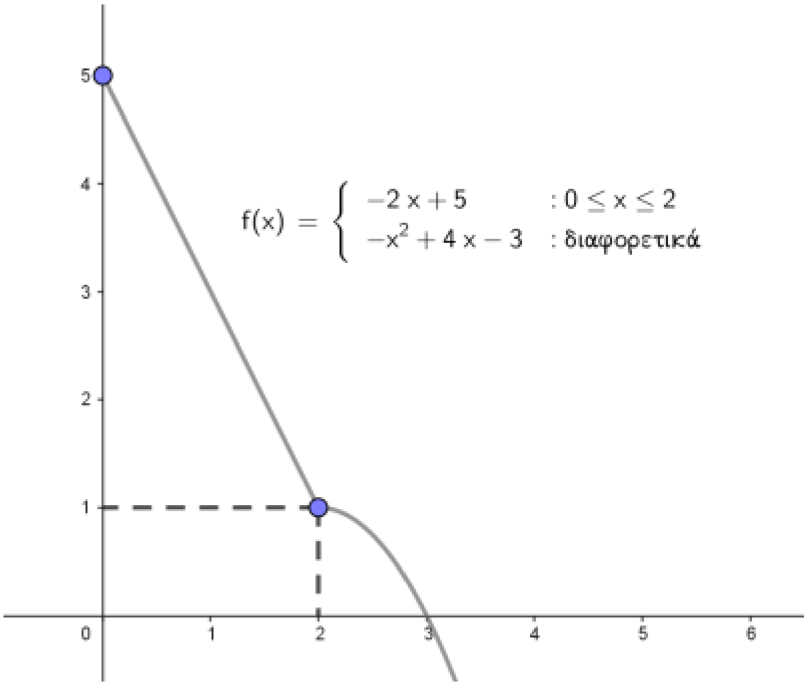
ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Γ(ξ,f(ξ)) να είναι παράλληλη στην ΔΕ.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\xi \in (0,2)$, τότε: $f'(\xi) = -2 \neq -\frac{5}{3}$
- Αν $\xi \in (2,3)$, τότε: $f'(\xi) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2\xi + 4 = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow \xi = \frac{17}{6} \in (2,3)$.

Άρα η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\Gamma\left(\frac{17}{6}, f\left(\frac{17}{6}\right)\right)$ είναι παράλληλη στην ΔΕ.

Γ4. Εδώ ζητάμε τον ρυθμό μεταβολής της $\omega(t_o)$, όπου t_o η χρονική στιγμή που το κινητό, κινούμενο κατακόρυφα προς τα πάνω και ξεκινώντας από το σημείο Α(2,0), συναντά τη γραφική παράσταση της f. Το κινητό συναντά την C_f όταν x=2 στο f(2)=1.



Η ταχύτητα με την οποία κινείται κατακόρυφα το κινητό είναι:

$\upsilon = 0{,}5 \Leftrightarrow y'(t) = 0{,}5 \Leftrightarrow y(t) = 0{,}5t + c$ με $y(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$.

Άρα το κινητό διανύει κατακόρυφα διάστημα $y(t) = 0{,}5t, t \geq 0$.

Ακόμα: $y(t_0) = 1 \Leftrightarrow 0{,}5t_0 = 1 \Leftrightarrow t_0 = 2sec$

Από το τρίγωνο (ΑΟΜ) έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{(AM)}{(OA)} = \frac{y(t)}{2} = \frac{0{,}5t}{2} \text{ και } \varepsilon\varphi\omega(t_0) = \frac{1}{2}$$

Άρα έχουμε: $(\varepsilon\varphi\omega(\mathrm{t}))'=\left(\frac{0{,}5t}{2}\right)' \Leftrightarrow \left(1 + \varepsilon\varphi^2\omega(t)\right)\omega'(t) = \frac{1}{4}$

Για $t = t_0$: $(1 + \frac{1}{4})\omega'(t_0) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \omega'(t_0) = \frac{1}{5}$ σε rad/sec.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της $(0, +\infty)$ με:

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x} + a\right)x - (lnx + ax)}{x^2} = \frac{1 - lnx}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - lnx = 0 \Leftrightarrow x = e$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < e \text{ (η f γν. αύξουσα για } 0 < x \leq e\text{)}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > e \text{ (η f γν. φθίνουσα για } x \geq e\text{)}$$

Επομένως η f έχει ολικό μέγιστο (μοναδικό) στο $x_0 = e$, το:

$$f(e) = \frac{lne + ae}{e} = \frac{1 + ae}{e} = \frac{1}{e} + a.$$

Από το σύνολο τιμών της f που δίνεται προκύπτει ότι η f έχει ακρότατη τιμή (μέγιστη) την $1 + \frac{1}{e}$. Άρα:

$$\frac{1}{e} + a = 1 + \frac{1}{e} \Leftrightarrow a = 1$$

Δ2. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, στο οποίο ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις, αφού η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$(ως πηλίκο συνεχών στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$) και επιπλέον:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -ln4 + 1 < 0$$

$$f(1) = 1 > 0$$

Επομένως, υπάρχει $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, τέτοιο, ώστε: $f(x_0) = 0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (αφού είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (0,e]) η f είναι «1-1», άρα το x_0 είναι μοναδικό στο διάστημα (0,e]).

Ακόμα έχουμε:

$$f([e, +\infty) = \left(\lim_{x \to +\infty} f(x), f(e)\right] = (1, 1 + \frac{1}{e}]$$

και $0 \notin \left(1, 1 + \frac{1}{e}\right]$ η f δεν έχει ρίζα στο διάστημα $[e, +\infty)$.

Άρα τελικά το $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ *είναι μοναδικό.*

2ος τρόπος:

Μπορούμε να βρούμε τις εικόνες: $f\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\right)$ και $f([1,e),\ f([e,+\infty)$ αξιοποιώντας την μονοτονία της f , και να διαπιστώσουμε την ρίζα και την μοναδικότητα της στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},1\right)$

Δ3. i) Παρατηρούμε ότι:

$$f(4)=\frac{ln4+4}{4}=\frac{2ln2+4}{4}=\frac{ln2+2}{2}=f(2)$$

Έχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $x\in(0,e]$ *είναι ισοδύναμα*:

$f(x)=f(4)\Leftrightarrow f(x)=f(2)\Leftrightarrow x=2$, διότι η f «1-1» στο διάστημα (0,e] ως γνησίως αύξουσα σε αυτό.

- Αν $x\in[e,+\infty)$ είναι ισοδύναμα:

  $f(x)=f(4)\Leftrightarrow x=4$, διότι η f «1-1» στο διάστημα $[e,+\infty)$ ως γνησίως φθίνουσα σε αυτό.

Άρα η εξίσωση $f(x)=f(4)$ έχει μοναδικές ρίζες τις $x_1=2, x_2=4$.

ii) Έχουμε ισοδύναμα:

$$2^x\le x^2\Leftrightarrow xln2\le 2lnx\Leftrightarrow\frac{ln2}{2}\le\frac{lnx}{x}\Leftrightarrow\frac{ln2}{2}+1\le\frac{lnx}{x}+1$$
$$\Leftrightarrow f(x)\ge f(2)$$

Έχουμε τις περιπτώσεις:

- $x\in(0,e]$, με την f γνησίως αύξουσα και άρα:

$$f(x)\ge f(2)\Leftrightarrow 2\le x\le 2$$

- $x\in[e,+\infty)$, με την f γνησίως φθίνουσα και άρα:

$$f(x)\ge f(2)\Leftrightarrow e\le x\le 4$$

Άρα η δοθείσα ανίσωση έχει λύσεις στο διάστημα [2,4].

Δ4. Ζητάμε το:

$$E(\Omega)=\int_{-ln2}^{0}\left|f(e^x)\frac{1-x}{e^x}\right|dx\ \ (1)$$

Θέτουμε:

$$e^x = y \Leftrightarrow x = lny \; και \; dx = \frac{1}{y}dy$$

$$x = -ln2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$x = 0 \Leftrightarrow y = 1$$

$$(1) \Leftrightarrow E(\Omega) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left| f(y)\frac{1 - lny}{y}\frac{1}{y} \right| dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left| \frac{lny + y}{y}\frac{1 - lny}{y^2} \right| dy =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left| \left(\frac{lny}{y} + 1\right) f'(y) \right| dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(y) f'(y) dy| \; (2)$$

Η f έχει ρίζα το $x_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, δηλαδή $f(x_0) = 0$ και είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό, δηλαδή $f'(y) > 0$, $y \in [\frac{1}{2}, 1]$ και ακόμα:

$$\frac{1}{2} < y < x_0 \Rightarrow f(y) < f(x_0) \Rightarrow f(y) < 0$$

$$x_0 < y < 1 \Rightarrow f(x_0) < f(y) \Rightarrow f(y) > 0$$

Άρα από τη (2) έχουμε:

$$E(\Omega) = -\int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(y) f'(y) dy + \int_{x_0}^{1} f(y) f'(y) dy = -\left[\frac{f(x_0)^2 - f\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}\right]$$

$$+ \frac{f(1)^2 - f(x_0)^2}{2} = \frac{f\left(\frac{1}{2}\right)^2 + f(1)^2}{2}$$

$$= 2(ln2)^2 - 2ln2 + 1 \; τ.μ.$$

διότι $f(x_0) = 0$.

<u>2ος τρόπος</u>

Θέτουμε:

$$f(e^x) = u$$

$$du = f'(e^x)e^x dx = \frac{1-x}{e^x} dx$$

$$-ln2 \le x \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le e^x \le 1 \le f\left(\frac{1}{2}\right) \le f(e^x) \le f(1) \; (f \; γν. \; αύξουσα)$$

Άρα: $E(\Omega) = \int_{-ln2}^{0} \left| f(e^x) \frac{1-x}{e^x} \right| dx = \int_{f\left(\frac{1}{2}\right)}^{f(1)} |u| \, du$

$$= -\int_{f\left(\frac{1}{2}\right)}^{0} u du + \int_{0}^{f(1)} u du = \frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)+f^2(1)}{2} = 2(ln2)^2 - 2ln2 + 1\ \tau.\mu.$$

τ.μ.(αφού $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0, f(1) > 0)$

Επιστημονική Επιμέλεια:

Καραγιάννης Ιωάννης

Σύμβουλος Εκπαίδευσης ΠΕ03 Ν. Κυκλάδων & 9ης ομάδας σχολείων ΔΔΕ Α΄ Αθήνας