ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Τρίτη 4 Ιουνίου 2024

Λύσεις

των

θεμάτων

Έκδοση 1η

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς
των Επιμελητών των φακέλων του Λυκείου
του Δικτυακού Τόπου **mathematica.gr**
με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica
https://mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=133&t=75964

Συνεργάστηκαν οι:
Βαρβεράκης Αντρέας, Κακκαβάς Βασίλης,
Καλαθάκης Γιώργης, Κατσίπης Νίκος,
Κωστάκος Γρηγόρης, Μπεληγιάννης Αθανάσιος,
Μπόρης Ροδόλφος, Παπαγρηγοράκης Μιλτιάδης
Πρωτοπαπάς Λευτέρης, Ρίζος Γιώργος, Στόγιας Σωτήρης,
Στεργίου Μπάμπης, Τσιφάκης Χρήστος

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΡΙΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό ζ μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=\zeta$.

Μονάδες 6

Α2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 5

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε η σύνθεση της f με τη g, δηλαδή η συνάρτηση $g\circ f$, ορίζεται αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

β) Ισχύει ότι $|\eta\mu x|\leq|x|$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Ισχύει $(\sigma\varphi x)'=\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}, x\in\mathbb{R}-\{x \mid \eta\mu x=0\}$.

δ) Για κάθε συνάρτηση ισχύει ότι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα είναι το ολικό της μέγιστο.

ε) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α1. Απόδειξη. Στο σχολικό βιβλίο σελ. 76

Α2. Ορισμός. Στο σχολικό βιβλίο σελ. 155

Α3. Θεώρημα. Στο σχολικό βιβλίο σελ. 216

Α4. **α)** Σωστό. Στο σχολικό βιβλίο σελ. 25

β) Σωστό. Στο σχολικό βιβλίο σελ. 52

γ) Λάθος. Στο σχολικό βιβλίο σελ.114

δ) Λάθος. Στο σχολικό βιβλίο σελ.142

ε) Σωστό. Στο σχολικό βιβλίο σελ. 212

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $g:[1,+\infty)\to IR$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

και $h:[1,+\infty)\to IR$ με τύπο $h(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$

Β1. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f=\frac{g}{h}$ και $r=g\cdot h$.

Μονάδες 6

Για τα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1},x>1 \quad \text{και} \quad r(x)=x-\frac{1}{x},x\geq 1$$

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται (μονάδες 2) και ότι $f^{-1}=f$ (μονάδες 5), όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της f.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης r.

Μονάδες 6

Β4. Να λύσετε την εξίσωση $\left(f^{-1}\left(f(x)\right)\right)^2=1+4r(x)$.

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ:

Β1. Το πεδίο ορισμού της f, είναι

$$D_f=D_g\cap D_h\setminus\{x\in D_h\,|\,h(x)=0\}=(1,+\infty),$$

αφού

$$D_g = D_h = [1,+\infty) \text{ και } h(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2-1=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Επίσης, το πεδίο ορισμού της r, είναι:

$$D_r = D_g \cap D_h = [1,+\infty).$$

Οπότε:

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}=\frac{x+1}{x-1},\ \ x>1$$

$$r(x)=g(x)\cdot h(x)=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=x-\frac{1}{x},\ x\geq 1.$$

B2. Για κάθε $x_1, x_2 \in (1,+\infty)$ με $f(x_1)=f(x_2)$ παίρνουμε :

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1+1}{x_1-1}=\frac{x_2+1}{x_2-1} \Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι $1-1$ και έτσι αντιστρέφεται.

$$y=f(x) \Leftrightarrow y=\frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow yx-y=x+1 \Leftrightarrow x(y-1)=y+1$$

Αν $y=1$ είναι αδύνατη.

Για $y\neq 1$ παίρνουμε $x=\frac{y+1}{y-1}$. Πρέπει όμως $x>1 \Leftrightarrow y>1$.

Τότε είναι $f^{-1}(x)=\frac{x+1}{x-1}, x>1$. Επομένως $f^{-1}=f$.

B3. Η συνάρτηση r είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, οπότε η γραφική της παράσταση δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Ας δούμε τώρα αν έχουμε ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Έχουμε :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{r(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(r(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$$

Άρα η γραφική παράσταση της r έχει στο $+\infty$ πλάγια ασύμπτωτη την $y=x$.

B4. Θα πρέπει $\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_{f^{-1}} \\ x \in D_r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$

Για $x > 1$ έχουμε :

$$\left(f^{-1}\left(f(x)\right)\right)^2 = 1 + 4r(x) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 1\right)\left(x - 4\right) = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 4 + e^{\lambda}, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3 + \lambda, & x \geq 2 \end{cases},$$

με $\lambda \in IR$

Γ1. Να αποδείξετε ότι λ = 0.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και στη συνέχεια να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατά της.

Μονάδες 6

Γ3. i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα $[0, 3]$.

(μονάδες 4)

ii) Να βρείτε, αν υπάρχει, $\xi \in (0, 3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $\Gamma(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\Delta(0, f(0))$ και $E(3, f(3))$.

(μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Κινητό σημείο Μ ξεκινά από το σημείο Α(2, 0) και κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα υ = 0,5 μονάδες μήκους το δευτερόλεπτο. Αν Ο είναι η αρχή των αξόνων, να υπολογίσετε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η γωνία $\hat{\omega} = \widehat{AOM}$ τη χρονική στιγμή κατά την οποία το κινητό σημείο Μ θα συναντήσει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ:

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ άρα $f(2) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \Leftrightarrow e^{\lambda} = \lambda + 1$, που ισχύει μόνο για $\lambda = 0$, διότι γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq x + 1$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Γ2. Έχουμε ότι

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 5, 0 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3, x \geq 2 \end{cases}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,2)$ με $f'(x) = -2 < 0$ για κάθε $x \in (0,2)$

Επίσης η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(2,+\infty)$ με $f'(x) = -2(x-2) < 0$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$
$f(x)$		↘		

Τελικά για κάθε $x \in (0,2) \cup (2,+\infty)$ είναι $f'(x) < 0$. Επιπλέον η f είναι συνεχής στα σημεία 0 και στο 2, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

Παρατηρούμε επίσης ότι για κάθε $x \geq 0$ έχουμε :

$$x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq f(0)$$

Άρα η f παρουσιάζει στο μηδέν ολικό μέγιστο το $f(0) = 5$.

Γ3. (i). Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 2:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -2 \text{ και } \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 0$$

Η συνάρτηση δεν παραγωγίζεται στο 2, οπότε f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του ΘΜΤ στο $[0,3]$

(ii). Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Δ και Ε έχει κλίση $\lambda = \dfrac{f(3)-f(0)}{3-0} = -\dfrac{5}{3}$

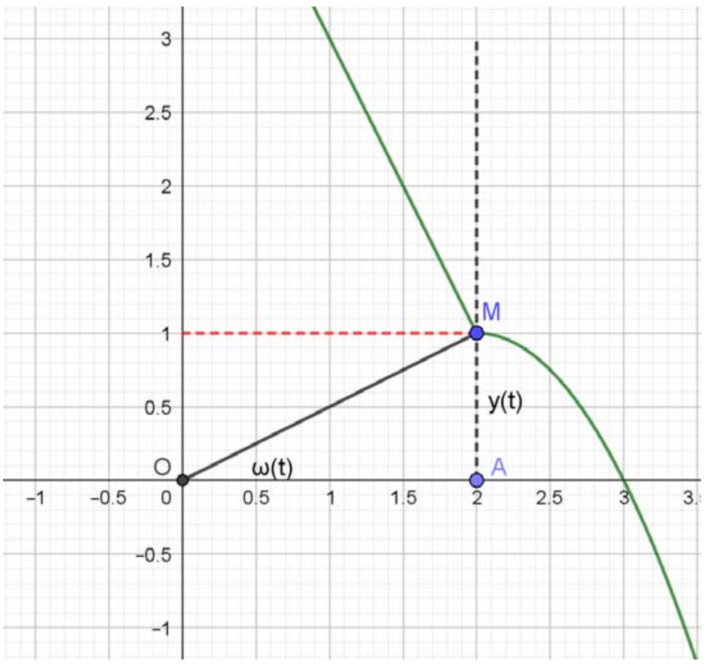
Επειδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2 και $f'(x) = -2 \neq -\dfrac{5}{3}$ για κάθε $x \in [0,2)$,αναζητούμε $\xi \in (2,+\infty)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2\xi + 4 = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow \xi = \frac{17}{6}$$

Υπάρχει λοιπόν $\xi \in (0,3)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $\Gamma(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Δ και Ε.

Γ4. Έστω σημείο $M(2,y)$ της κατακόρυφης ευθείας στο Α(2,0).

Έχουμε $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{y}{2}$,οπότε για κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$ θα είναι $\varepsilon\varphi\omega(t) = \dfrac{y(t)}{2}$, $t \geq 0$.



Θεωρούμε ότι η συνάρτηση $\omega(t)$ είναι παραγωγίσιμη.

Είναι τότε

$$\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(\omega(t))}\right)\omega'(t) = \frac{y'(t)}{2} \Leftrightarrow \omega'(t)\left(1+\varepsilon\varphi^2(\omega(t))\right) = \frac{y'(t)}{2} \qquad (1)$$

Ας είναι t_0 η χρονική στιγμή που το κινητό σημείο Μ συναντά την γραφική παράσταση της f.

Τότε $y(t_0)=1$, οπότε $\varepsilon\varphi(\omega(t_0))=\frac{1}{2}$.

Συνεπώς επειδή $y'(t)=\frac{1}{2}$ για κάθε $t\geq 0$, από την σχέση (1) παίρνουμε ότι

$\omega'(t_0)=\frac{1}{5}\ \text{rad/sec}$.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\frac{\ln x+\alpha x}{x}$$

όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

Δίνεται ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $f((0,+\infty))=\left(-\infty,1+\frac{1}{e}\right]$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι α = 1.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει μοναδική ρίζα, x_0 , η οποία ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Μονάδες 6

Δ3. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = f(4) έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις $x_1=2$ και $x_2=4$.

(μονάδες 3)

ii) Να λύσετε την ανίσωση $2^x\leq x^2$ στο διάστημα $(0,+\infty)$.

(μονάδες 5)

Μονάδες 8

Δ4. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x)=f(e^x)\cdot\frac{1-x}{e^x}$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες x = –ln2 και x = 0, και περικλείεται από αυτές, τον άξονα $x'x$ και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Αφού $f(x)=\dfrac{\ln x+\alpha x}{x}=\dfrac{\ln x}{x}+\alpha$,

$x>0$, παίρνουμε :

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}+\alpha\right)'=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot x'}{x}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

Με $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\ln x}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=e$

Η παράγωγος μηδενίζεται μόνο στο $x=e$

Επίσης

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}>0 \Leftrightarrow 1-\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x<1 \Leftrightarrow x<e$$

και

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}<0 \Leftrightarrow 1-\ln x<0 \Leftrightarrow \ln x>1 \Leftrightarrow x>e$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$ Συνεπώς η έχουμε ότι η f έχει ολικό μέγιστο μόνο στη θέση $x=e$ με τιμή $f(e)=\dfrac{1}{e}+\alpha$.

x	$-\infty$	0		e		$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}+1$	$\searrow$	0

Αφού η f έχει από τα δεδομένα μέγιστο το $\dfrac{1}{e}+1$, συμπεραίνουμε ότι $\alpha=1$.

Δ2. Για την τιμή του α που βρέθηκε στο Δ1 έχουμε $f(x)=\frac{\ln x}{x}+1$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $\Delta_1=(0,e]$ και $\Delta_2=[e,+\infty)$ οπότε για το σύνολο τιμών της σε καθένα από αυτά βρίσκουμε ότι:

$$f(\Delta_1)=\left(-\infty,1+\frac{1}{e}\right] \text{ γιατί } \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ln x}{x}+1\right)=-\infty \text{ αφού } \lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ln x}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln x\right)=-\infty$$

και

$$f(\Delta_2)=\left(1,1+\frac{1}{e}\right] \text{ γιατί } \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}+1\right)=1 \text{ αφού } \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο διάστημα $\Delta_2=[e,+\infty)$, διότι $0\notin f(\Delta_2)$ έχει όμως μοναδική ρίζα στο $\Delta_1=(0,e]$, διότι $0\in f(\Delta_1)$. Η ρίζα αυτή είναι μοναδική λόγω της μονοτονίας της f στο διάστημα $\Delta_1=(0,e]$.

Επίσης, οι τιμές $f\left(\frac{1}{2}\right)=-2\ln2+1=1-\ln4=\ln e-\ln4=\ln\frac{e}{4}<0$ και $f(1)=\frac{\ln1}{1}+1=1>0$ εξασφαλίζουν ότι η μοναδική ρίζα βρίσκεται στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},1\right)$, λόγω του θεωρήματος Bolzano.

Δ3. (i) Επειδή $2<e<4$ και $f(2)=f(4)$, και η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $\Delta_1=(0,e]$ και $\Delta_2=[e,+\infty)$ η εξίσωση $f(x)=f(4)$ έχει δύο ακριβώς ρίζες τη $x=2$ στο διάστημα $\Delta_1=(0,e]$ και τη $x=4$. στο διάστημα $\Delta_2=[e,+\infty)$

(ii) Διαδοχικά έχουμε:

$$2^x\le x^2\Leftrightarrow \ln2^x\le\ln x^2\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}+1\le\frac{\ln2}{2}+1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x)\le f(2)\Leftrightarrow f(x)-f(2)\le0$$

Από τη μονοτονία σε καθένα από τα διαστήματα $\Delta_1=(0,e]$ και $\Delta_2=[e,+\infty)$ βρίσκουμε αντίστοιχα ότι :

$$f(x)\ge f(2)\Leftrightarrow 2\le x\le e \text{ και } f(x)\le f(2)\Leftrightarrow f(x)\le f(4)\Leftrightarrow e\le x\le 4$$

Επομένως η ανίσωση αληθεύει στο διάστημα $[2,4]$

Δ4. Το ζητούμενο εμβαδό E είναι ίσο με

$$E=\int_{-\ln(2)}^{0}|g(x)|dx=\int_{-\ln(2)}^{0}\left|f(e^x)\frac{1-x}{e^x}\right|dx$$

και επειδή στο διάστημα $[-\ln(2),0]$ είναι $1-x>0$, άρα $E=\int_{-\ln(2)}^{0}|f(e^x)|\frac{1-x}{e^x}dx$.

Θέτοντας $e^x=u$ έχουμε $E=\int_{1/2}^{1}|f(u)|\frac{1-\ln u}{u^2}du=\int_{1/2}^{1}|f(u)|f'(u)du$

Όμως στο $\left(\frac{1}{2},1\right)$ η f έχει μοναδική ρίζα (Δ2) και είναι γνησίως αύξουσα, άρα $f(x)<0$ στο $\left[\frac{1}{2},x_0\right)$ και $f(x)>0$ στο $(x_0,1]$.

Άρα

$$E=-\int_{1/2}^{x_0}f(u)f'(u)du+\int_{x_0}^{1}f(u)f'(u)du=-\left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_{1/2}^{x_0}+\left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_{x_0}^{1}=\frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2}+\frac{f^2(1)}{2}=\frac{(1-\ln 4)^2}{2}+\frac{1}{2}.$$

ΑΛΛΕΣ ΛΥΣΕΙΣ:

Β2. (Αντιστρεψιμότητα της συνάρτησης). Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με

$f'(x)=-\frac{2}{(x-1)^2}<0$. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$ και συνεπώς 1-1 .

Άρα αντιστρέφεται.

Β2. (Αντιστρεψιμότητα της συνάρτησης). Για $x>1$ και $y\in f((1,+\infty))$ είναι :

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\frac{x+1}{x-1}\Leftrightarrow yx-y=x+1\Leftrightarrow x(y-1)=y+1$$

Αν $y=1$ είναι αδύνατη.

Για $y\neq 1$ παίρνουμε $x=\frac{y+1}{y-1}$. Πρέπει όμως $x>1\Leftrightarrow y>1$.

Άρα για κάθε $y>1$ η εξίσωση $y=f(x)$ έχει μοναδική λύση ως προς x. Η f συνάρτηση είναι 1-1,οπότε αντιστρέφεται.

B3. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}(r(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$ η γραφική παράσταση της r έχει στο $+\infty$ πλάγια ασύμπτωτη την $y=x$.

B4. Η εξίσωση ορίζεται για $x>1$.

Για κάθε $x>1$: $f^{-1}(f(x))=x$, οπότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$x^2=1+4\left(x-\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow x^2-4x+\frac{4}{x}-1=0$. Η εξίσωση έχει προφανή λύση την $x=4$.

Θεωρώ τη συνάρτηση : $k(x)=x^2-4x+\frac{4}{x}-1$, με $x>1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με

$k'(x)=2x-4-\frac{4}{x^2}=\frac{2x^3-4x^2-4}{x^2}$ και $k''(x)=2+\frac{8}{x^3}>0$ για κάθε $x>1$, άρα η k' είναι γνησίως αύξουσα και «1-1». Επειδή $\lim\limits_{x\to1^+}k'(x)=-6$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}k'(x)=+\infty$, οπότε η συνεχής συνάρτηση k' έχει σύνολο τιμών το $k'((1,+\infty))=(-6,+\infty)$.

Το $0\in k'((1,+\infty))$, $k'(2)=-1$, $k'(3)=\frac{14}{9}$, άρα υπάρχει $\rho\in(2,3)\subset(1,+\infty):k'(\rho)=0$ και το ρ είναι μοναδικό αφού η k' «1-1».

Για κάθε $1<x<\rho\Rightarrow k'(x)<k'(\rho)\Rightarrow k'(x)<0$, ενώ για κάθε $x>\rho\Rightarrow k'(x)>k'(\rho)\Rightarrow k'(x)>0$, άρα η k είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,\rho]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\rho,+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to1^+}k(x)=0$ και η k συνεχής και γν. φθίνουσα στο $(1,\rho]$, άρα $k((1,\rho])=[k(\rho),0)$, δηλ. η $k(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο $(1,\rho]$. Στο διάστημα $[\rho,+\infty)$ η $k(x)=0$ έχει ρίζα το $x=4$ η οποία είναι και μοναδική.

Γ2. Για $x\in[0,2)$ είναι $f'(x)=(-2x+5)'=-2$

Για $x\in(2,+\infty)$ είναι $f'(x)=(-x^2+4x-3)'=-2x+4$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f΄(x)		$-$	‖	$-$
f(x)		$\searrow$		

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα $[0,2)$ και $[2,+\infty)$ και αφού η f είναι συνεχής στο $x_0=2$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

Δ2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{1}{2},1\right]$ και επιπλέον

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}-\ln 2}{\frac{1}{2}}=1-\ln 4=\ln\frac{e}{4}<0 \text{ και } f(1)=\frac{\ln 1}{1}+1=1>0$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Από την άλλη η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$, οπότε η ρίζα αυτή είναι μοναδική στο διάστημα $\Delta_1=(0,e]$.

Για το άλλο διάστημα παρατηρούμε ότι

$$f(x)=\frac{\ln x+x}{x}>0\text{, αφού } \ln x>1$$

Επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 , η οποία μάλιστα ανήκει στο $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Δ4. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το $E=\int_{-\ln 2}^{0}|g(x)|dx=\int_{-\ln 2}^{0}\left|f(e^x)\frac{1-x}{e^x}\right|dx$

Στο διάστημα $[-\ln(2),0]$ είναι $1-x>0$ και είναι $f(e^x)=\frac{x}{e^x}+1=\frac{x+e^x}{e^x}$

Για $x\in[-\ln 2,0]\Leftrightarrow -\ln 2\le x\le 0\overset{e^x\nearrow}{\Leftrightarrow}e^{-\ln 2}\le e^x\le e^0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le e^x\le 1$, οπότε

$f\left(e^x\right)<0$ για $\frac{1}{2}\le e^x\le x_o \Leftrightarrow -\ln 2\le x\le \ln x_o$ και $f\left(e^x\right)>0$ για $x_o\le e^x\le 1\Leftrightarrow \ln x_o\le x\le 0$.

Τότε είναι

$$E=\int_{-\ln 2}^{0}\left|f(e^x)\frac{1-x}{e^x}\right|dx=-\int_{-\ln 2}^{\ln x_o}\frac{x+e^x}{e^x}\cdot\frac{1-x}{e^x}dx+\int_{\ln x_o}^{0}\frac{x+e^x}{e^x}\cdot\frac{1-x}{e^x}dx$$

$$I=\int_{\ln x_o}^{0}\left(\frac{x}{e^x}+1\right)\cdot\frac{1-x}{e^x}dx=\int_{\ln x_o}^{0}\left(\frac{x}{e^x}+1\right)\cdot\frac{e^x(1-x)}{e^{2x}}dx=\int_{\ln x_o}^{0}\left(\frac{x}{e^x}+1\right)\left(\frac{x}{e^x}+1\right)'dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{e^x}+1\right)^2\right]_{\ln x_0}^{0}=\frac{1}{2}\left[(1)^2-\cancel{\left(\frac{\ln x_0}{x_0}+1\right)^2}\right]=\frac{1}{2}\text{, γιατί } f\left(x_0\right)=0$$

Όμοια

$$J=-\int_{-\ln 2}^{\ln x_o}\left(\frac{x}{e^x}+1\right)\times\frac{1-x}{e^x}dx=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{e^x}+1\right)^2\right]_{-\ln 2}^{\ln x_0}=-\frac{1}{2}\left[\cancel{\left(\frac{\ln x_0}{x_0}+1\right)^2}-\left(-2\ln 2+1\right)^2\right]=2\ln^2 2-2\ln 2$$

Άρα $E=I+J=2\ln^2 2-2\ln 2+\frac{1}{2}$.