Ενδεικτικές Λύσεις

και κάθε άλλη μαθηματικά τεκμηριωμένη λύση είναι αποδεκτή

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 76

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 129

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 123

Α4. α) **Σ** σελ. 157, β) **Λ** σελ. 165, γ) **Σ** σελ. 143, δ) **Σ** σελ. 142, ε) **Λ** πράγματι αν $x\neq 0$ τότε $|\eta\mu x|<|x| \Leftrightarrow -|x|<\eta\mu x<|x|$ οπότε με $x<0$ παίρνουμε $x<\eta\mu x$ διότι $|x|=-x$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Πεδίο ορισμού σύνθεσης $(goh)(x)=g(h(x))$

Πρέπει ($x\in \mathrm{D}_h$ και $h(x)\in \mathrm{D}_g$) $\Leftrightarrow$ ($x>0$ και $\ln x\neq 1$) $\Leftrightarrow$ ($x>0$ και $x\neq e$)

και $g(h(x))=\dfrac{h(x)}{1-h(x)}=\dfrac{\ln x}{1-\ln x}$ άρα

$f:(0,\ e)\cup(e,\ +\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{\ln x}{1-\ln x}$

Β2. Αναζητούμε κατακόρυφες ασύμπτωτες στα σημεία 0 και e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1-\ln x}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\ln x\right)'}{\left(1-\ln x\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}}=-1\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to e^-} f(x)=\lim_{x\to e^-}\frac{\ln x}{1-\ln x}\overset{\left(\frac{1}{0^+}\right)}{=}+\infty$$ άρα η x=e κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Αναζητούμε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{1-\ln x}\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(1-\ln x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}}=-1\in\mathbb{R}$$

Άρα η ευθεία $y=-1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

B3. Θα εξετάσουμε αν έχει λύση η εξίσωση $f(x)=-1$ ή ισοδύναμα $\frac{\ln x}{1-\ln x}=-1\Leftrightarrow \ln x=-1+\ln x\Leftrightarrow 0=1$ αδύνατη, άρα ο αριθμός -1 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f

Σημείωση: Μπορούμε εναλλακτικά να βρούμε το σύνολο τιμών της f το οποίο είναι το $\mathbb{R}-\{1\}$ είτε με τον ορισμό επιλύοντας την εξίσωση $y=\frac{\ln x}{1-\ln x}$ ως προς x είτε με το θεώρημα μονοτονίας και συνέχειας (αλλά η προτεινόμενη λύση είναι η απλούστερη).

B4. Ισχύει $\sqrt[3]{e^2}=e^{\frac{2}{3}}<e^{\frac{3}{3}}=e$ οπότε αρκεί να εφαρμόσουμε το Θ. Bolzano για την συνάρτηση $t(x)=f(x)-\sqrt{x}$ στο διάστημα $\left[1,\ e^{\frac{2}{3}}\right]$.

Πράγματι, η συνάρτηση t είναι συνεχής στο $\left[1,\ e^{\frac{2}{3}}\right]\subseteq(0,\ e)$ ως διαφορά συνεχώς συναρτήσεων στο διάστημα αυτό. Ακόμη:

$$t(1)=f(1)-\sqrt{1}=\frac{\ln 1}{1-\ln 1}=0-1=-1<0$$

$$t\left(e^{\frac{2}{3}}\right)=f\left(e^{\frac{2}{3}}\right)-\sqrt{e^{\frac{2}{3}}}=\frac{\ln e^{\frac{2}{3}}}{1-\ln e^{\frac{2}{3}}}-\sqrt{\left(e^{\frac{1}{3}}\right)^2}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}-e^{\frac{1}{3}}=\frac{2}{3-2}-e^{\frac{1}{3}}=2-e^{\frac{1}{3}}>0$$

διότι $2>e^{\frac{1}{3}}\Leftrightarrow 2^3>e^1\Leftrightarrow 8>e$ που ισχύει.

Άρα απ' το Θ. Bolzano υπάρχει $x_o\in\left(1,\ e^{\frac{2}{3}}\right)$ τέτοιος ώστε

$$t(x_o)=0\Leftrightarrow f(x_o)-\sqrt{x_o}=0\Leftrightarrow \frac{\ln x_o}{1-\ln x_o}-\sqrt{x_o}=0\Leftrightarrow \ln x_o=(1-\ln x_o)\sqrt{x_o}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο $[2,\ 5]$ με $f''(x)=6x^2-42x+60=6(x^2-7x+10)=6(x-2)(x-5)<0\ \ \forall\ x\in(2,\ 5)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[2,\ 5]$ έπεται ότι $f\downarrow$ $[2,\ 5]$ και συνεπώς 1-1 άρα τελικά αντιστρέψιμη.

Γ2. Επειδή $f\downarrow$ $[2,\ 5]$ και συνεχής το σύνολο τιμών της είναι $f([2,\ 5])=[f(5),\ f(2)]=[25,\ 52]$ όπως εύκολα βρίσκουμε (με αντικατάσταση ή με σχήμα Horner).

Γ3i. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο της $A(45,\ g(45))$ είναι $\varepsilon:\ y-g(45)=g'(45)(x-45)$ οπότε αρκεί να βρούμε τις τιμές $g(45)$ και $g'(45)$. Το πεδίο ορισμού της $g(x)=f^{-1}(x)$ είναι το σύνολο τιμών της f δηλ. το $\Delta=[25,\ 52]$ και $g(45)=f^{-1}(45)$. Αν $\alpha=f^{-1}(45)$ τότε $f(\alpha)=45$ και ο αριθμός α θα βρεθεί είτε λύνοντας την εξίσωση $2\alpha^3-21\alpha^2+60\alpha=45 \Leftrightarrow 2\alpha^3-21\alpha^2+60\alpha-45=0$ είτε με παρατήρηση. Ο αριθμός 3 είναι ο μοναδικός ακέραιος διαιρέτης του σταθερού όρου -45 που βρίσκεται μέσα στο πεδίο ορισμού της f και $f(3)=45$ όπως εύκολα βρίσκουμε άρα $g(45)=3$

Σημείωση: Προφανώς η ρίζα $\alpha=3$ της εξίσωσης $2\alpha^3-21\alpha^2+60\alpha=45$ είναι μοναδική γιατί η συνάρτηση f είναι 1-1. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει και άλλη ρίζα $\alpha'\neq\alpha$ τότε $f(\alpha')=f(\alpha) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} \alpha'=\alpha$ άτοπο.

1ος τρόπος: Ισχύει $g(x)=f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(g(x)=f(f^{-1}(x)) \Leftrightarrow f(g(x))=x$ $\forall\ x\in[25,\ 52]$ επομένως $f'(g(x))\cdot g'(x)=1\ \ \forall\ x\in(25,\ 52)$ και με $x=45\in(25,\ 52)$ παίρνουμε:

$f'(g(45))\cdot g'(45)=1\Leftrightarrow f'(3)\cdot g'(45)=1\Leftrightarrow -12g'(45)=1\Leftrightarrow g'(45)=-1/12$ άρα ε : $\boldsymbol{y-3=(-1/12)(x-45)}$

2ος τρόπος: Οι C_f και C_g είναι συμμετρικές ως προς την $y=x$ οπότε αρκεί να βρούμε την συμμετρική της ε ως προς την $y=x$. Το συμμετρικό του σημείου Α(45, 3) ως προς την $y=x$ είναι το Β(3, 45) και η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Β είναι: $y-f(3)=f'(3)(x-3) \Leftrightarrow y-45=-12(x-3)$ οπότε με εναλλαγή των x και y παίρνουμε την ζητούμενη εφαπτομένη που είναι η ευθεία ε : $x-45=-12(y-3) \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{y-3=(-1/12)(x-45)}$

Γ3ii. Η $g=f^{-1}$ είναι απ' την υπόθεση συνεχής στο Δ=[25, 52]

Επιπλέον έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού της f που είναι το [2, 5] άρα είναι θετική στο διάστημα αυτό. Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν Ε είναι ίσο με :

1ος τρόπος:

$$\int_{25}^{52} g(x)dx=\int_{25}^{52} f^{-1}(x)dx \underset{\substack{f(u)=x\\ dx=f'(u)du}}{\overset{u=f^{-1}(x)}{=}} \int_{5}^{2} uf'(u)du=\int_{5}^{2} u\left(6u^2-42u+60\right)du$$

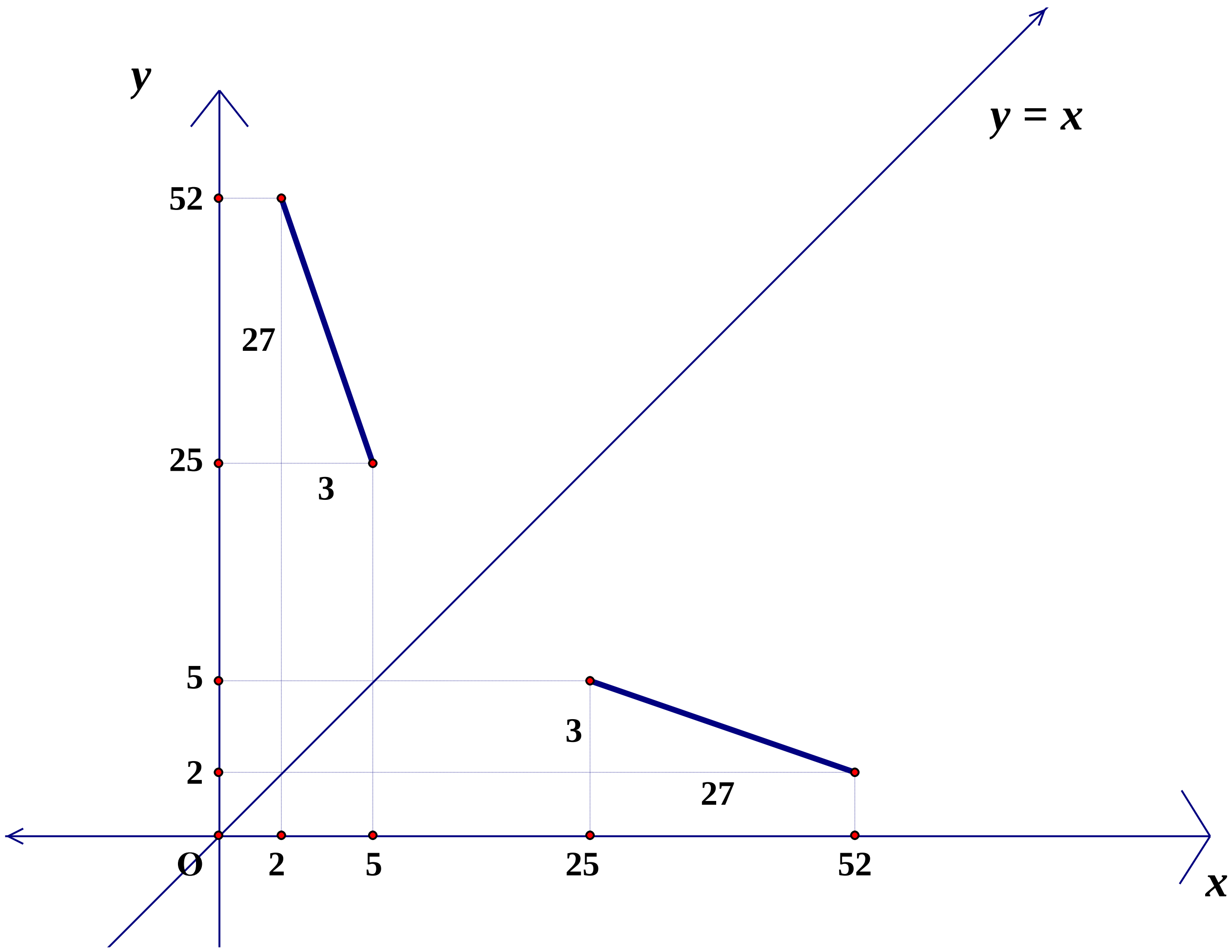
$$=\int_{5}^{2}\left(6u^3-42u^2+60u\right)du=...=\boxed{\frac{189}{2}\ \tau\mu}$$

2ος τρόπος :

$$\int_{25}^{52} g(x)dx=\int_{25}^{52} f^{-1}(x)dx \underset{\substack{f(u)=x\\ dx=f'(u)du}}{\overset{u=f^{-1}(x)}{=}} \int_{5}^{2} uf'(u)du \overset{\text{ΠΟ}}{=} \left[uf(u)\right]_5^2-\int_{5}^{2} f(u)du$$

$$=2f(2)-5f(5)-\int_{5}^{2}\left(2u^3-21u^2+60u\right)du=...=\boxed{\frac{189}{2}\ \tau\mu}$$

3ος τρόπος: Σχεδιάζουμε ένα πρόχειρο σχήμα και αξιοποιούμε την συμμετρία των C_f και C_g ως προς την $y=x$



Με βάση το παραπάνω σχήμα είναι:

$$\mathrm{E} = 2\cdot 27 + \int_2^5 f(x)dx - 3\cdot 25 = 54 + \int_2^5 \left(2x^3 - 21x^2 + 60x\right)dx - 75$$

$$= \ldots = -21 + \frac{231}{2} = \boxed{\frac{189}{2}\ \tau\mu}$$

Σημείωση: Προφανώς η C_f δεν είναι ευθύγραμμο τμήμα (τότε θα είχαμε δύο ίσα τραπέζια με εμβαδόν Ε=(1/2)(5+2)27) αλλά αυτό δεν μας ενδιαφέρει για τον υπολογισμό του εμβαδού. Πράγματι, αυτό που μας ενδιαφέρει είναι ότι τα καμπυλόγραμμα τραπέζια που δημιουργούνται είναι ισεμβαδικά!

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο (–3, 3) με

$$f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{9-x^2}}\left(-2x\right)=1-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}=\frac{\sqrt{9-x^2}-x}{\sqrt{9-x^2}} \quad \text{και}$$

$$f''(x)=\left(1-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\right)'=-\frac{\sqrt{9-x^2}-x\frac{1}{2\sqrt{9-x^2}}(-2x)}{9-x^2}$$

$$=-\frac{\sqrt{9-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2}=-\frac{9-x^2+x^2}{\left(9-x^2\right)\sqrt{9-x^2}}=\frac{-9}{\left(9-x^2\right)\sqrt{9-x^2}}<0$$

Δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του διαστήματος Δ=[–3, 3] με $f''(x)<0$ $\forall$ $x\in(-3,\ 3)$ και επειδή είναι και συνεχής στο Δ (ως πράξεις συνεχών) συμπεραίνουμε ότι f κοίλη σε όλο το διάστημα Δ

Δ2. Βρίσκουμε τις ρίζες της f'

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{9-x^2}=x\Leftrightarrow\begin{cases}9-x^2=x^2\\ x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\frac{9}{2}\\ x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

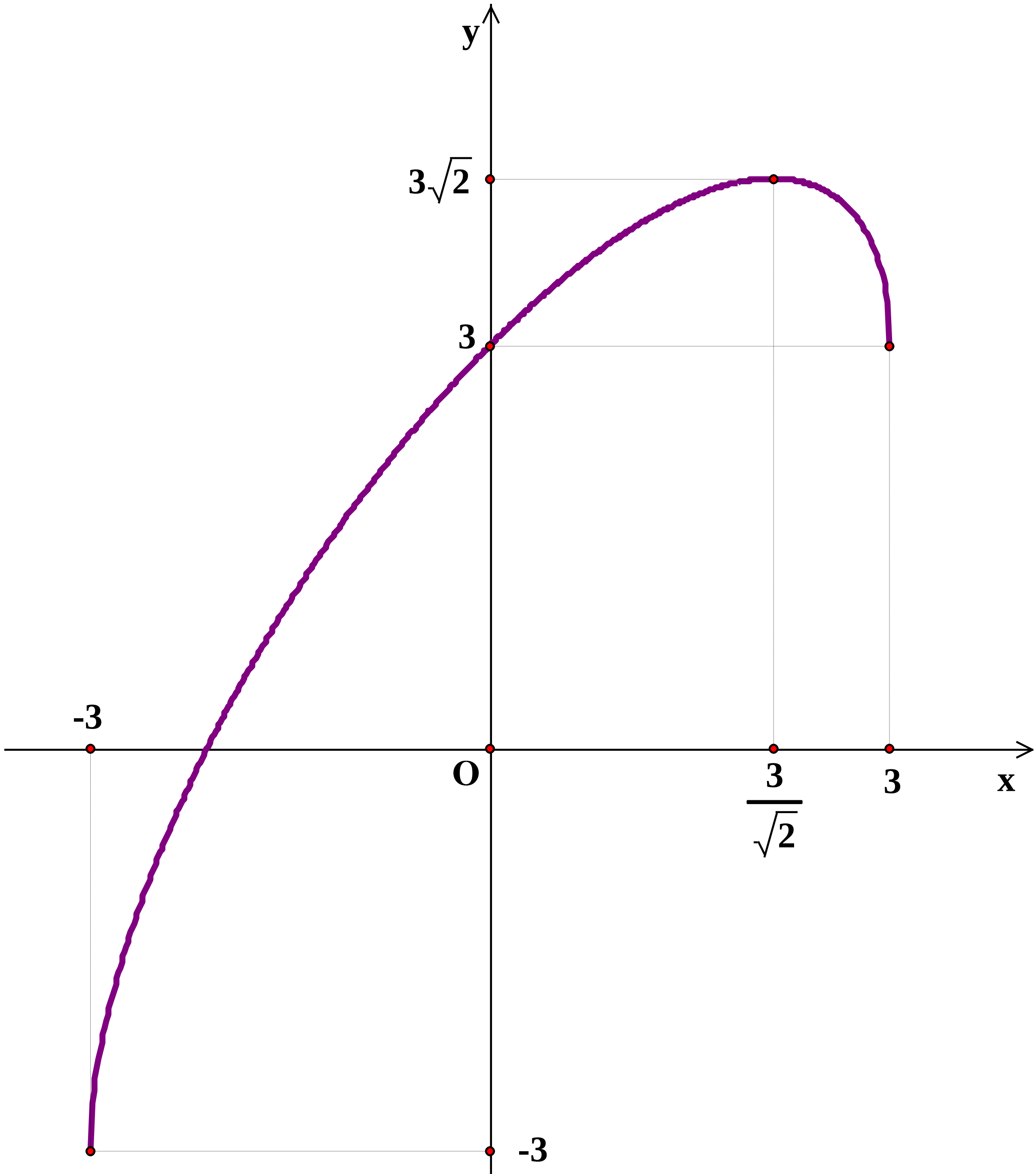
Σχεδιάζουμε τον πίνακα προσήμων της f'

x	-3		0		$\frac{3}{\sqrt{2}}$		$+3$
f'			+		0	–	
f	-3	↗			$3\sqrt{2}$	↘	3

Μονοτονία: $f\uparrow\left[-3,\ \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$ και $f\downarrow\left[\frac{3}{\sqrt{2}},\ 3\right]$

Ακρότατα:
- η f παρουσιάζει στο σημείο $x=-3$ ελάχιστο το -3
- η f παρουσιάζει στο σημείο $x=\frac{3}{\sqrt{2}}$ μέγιστο το $3\sqrt{2}$

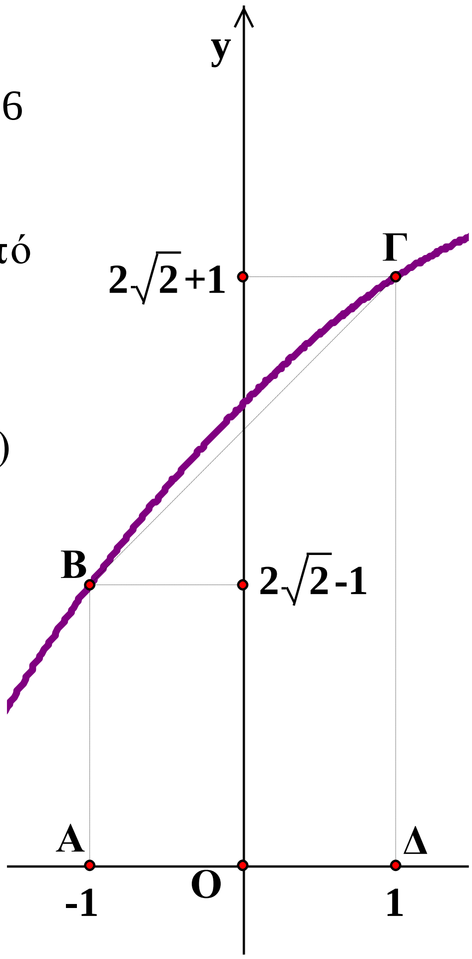
Δ3. Γράφουμε πάνω πάνω στην κόλλα του τετραδίου μας τον πίνακα μεταβολών της f (με γραμμές τις x, f'', f', f) και κάτω ακριβώς απ' το 0 του πίνακα σχεδιάζουμε τον άξονα των y (ώστε να αποτυπώσουμε με τον καλύτερο δυνατό τρόπο το γράφημα).



Δ4. Η f είναι κοίλη επομένως η C_f είναι κάτω από κάθε εφαπτομένη της εκτός απ' τα σημεία επαφής. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της (0, f(0)) είναι:

$y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y-3=1x \Leftrightarrow y=x+3$ οπότε $f(x) \leq x+3$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=0 άρα

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx<\int_{-1}^{1}(x+3)dx=\left[\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{2}+3-\left(\frac{1}{2}-3\right)=6$$



Σχεδιάζοντας ξανά την C_f στην περιοχή από –1 έως 1 παρατηρούμε ότι το ζητούμενο ολοκλήρωμα που είναι το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τραπεζίου ΑΒΓΔ (γεωμετρική ερμηνεία του ολοκληρώματος) είναι μεγαλύτερο απ' το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ όπου Α(–1, 0), Β(–1, f(–1)), Γ(1, f(1)), Δ(1, 0) το οποίο είναι ίσο με $\frac{2\sqrt{2}+1+2\sqrt{2}-1}{2}\cdot 2=4\sqrt{2}$

Άρα τελικά $4\sqrt{2}<\int_{-1}^{1} f(x)dx<6$

Σχόλια:

1) Το ότι η C_f είναι πάνω από την ευθεία ΒΓ στο διάστημα [–1, 1] μπορεί να αποδειχθεί και αλγεβρικά ως εξής: Η εξίσωση της ΒΓ: $y - y_Γ = λ_{ΒΓ}(x - x_Γ)$ είναι

$y-\left(2\sqrt{2}+1\right)=\frac{2\sqrt{2}+1-2\sqrt{2}+1}{1-(-1)}(x-1)\Leftrightarrow y=x+2\sqrt{2}$ και

$f(x)>x+2\sqrt{2}\Leftrightarrow x+\sqrt{9-x^2}>x+2\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{9-x^2}>2\sqrt{2}\Leftrightarrow 9-x^2>8\Leftrightarrow x^2<1\Leftrightarrow -1<x<1$

που ισχύει $\forall\ x\in[-1,\ 1]$

2) Μπορούμε να βελτιώσουμε το κάτω φράγμα αν υπολογίσουμε το εμβαδόν του τριγώνου μεταξύ της C_f και της χορδής ΒΓ που ισούται με $3-2\sqrt{2}$ (απλή άσκηση με τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου) οπότε τότε θα παίρναμε την καλύτερη προσέγγιση:

$$3+2\sqrt{2}<\int_{-1}^{1}f(x)dx<6$$

Πράγματι, $4\sqrt{2}\cong 5{,}66<5{,}83\cong 3+2\sqrt{2}<\int_{-1}^{1}f(x)dx\cong 5{,}89<6$

Κατασκευή και επίλυση θεμάτων: Χρήστος Ηρακλείδης