23/12/2023

ΤΕΤΡΑΝΤΑΣ

Τετραντας/Ετησια Έκδοση , Τευχος 2-3
2023

ISSN: 2732-995X

Μαθηματικό Περιοδικό

Θεματικές Περιοχές

- Καινοτόμες διδακτικές πρακτικές και μέθοδοι στα Μαθηματικά της Πρωτοβάθμιας & Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης.
- Ειδική Αγωγή και Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια & Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.
- Ιστορία, Φιλοσοφία των Μαθηματικών.
- Διεπιστημονικές Προσεγγίσεις στα Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια & Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.

ΤΕΤΡΑΝΤΑΣ

Εξαμηνιαία Περιοδική Έκδοση Μαθηματικού Περιεχομένου για την Πρωτοβάθμια & Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση

ISSN: 2732-995X

Εκδότης: Βασίλειος Καραγιάννης, Μαθηματικός

Συντονιστής: Ιωάννης Καραγιάννης, Σύμβουλος Εκπαίδευσης Ν. Κυκλάδων ΔΔΕ Α΄ Αθήνας

Επιμέλεια: Τσομαρέλη Τριανταφυλλιά, Σύμβουλος Εκπαίδευσης Ν. Κυκλάδων

Όλες οι εργασίες που υποβάλλονται για δημοσίευση στο περιοδικό προωθούνται για ανώνυμη (τυφλή) κρίση από επιτροπή δύο κριτών (peer reviewing), αφού πρώτα αφαιρεθούν τα στοιχείατων συγγραφέων. Για το λόγο αυτό, τα κυρίως κείμενα θα πρέπει να μην περιέχουν αναφορές με τρόπο που να οδηγεί στην ταυτοποίηση οποιουδήποτε μέλους της συγγραφικής ομάδας.

Περιεχόμενα

Η διδασκαλία Μαθηματικών Γυμνασίου και Λυκείου με τη βοήθεια της διαδραστικής αφίσας Επαυξημένης Πραγματικότητας (AR) «Μαθηματική Περιπλάνηση στο Πι & Φι»

Σταματάρου Ευαγγελία
Μαθηματικός ΠΕ03 - M.Sc., Δ.Δ.Ε. Δωδεκανήσου
estamatarou@sch.gr
Σύρμου Ελένη
Μαθηματικός ΠΕ03 - M.Sc, Δ.Δ.Ε. Δωδεκανήσου
lsyrmou@hotmail.com

Περίληψη

Η χρήση νέων τεχνολογικών μέσων στη διδασκαλία είναι τα τελευταία χρόνια βασικό εργαλείο της διδασκαλίας μια και αποδεδειγμένα μπορεί να αλλάξει τον τρόπο που μαθαίνουμε στην πράξη. Βασικό χαρακτηριστικό του m-learning, με τη χρήση των κινητών συσκευών στην εκπαιδευτική διαδικασία, είναι ότι επιτρέπει στους/στις μαθητές/τριες να οικοδομούν τη γνώση τους σε διαφορετικό πλαίσιο μάθησης πέρα από τον χρόνο και τον χώρο. Στην παρούσα εργασία, επιχειρείται η αξιοποίηση των κινητών συσκευών στο πλαίσιο ενός project διαδραστικής αφίσας επαυξημένης πραγματικότητας, με θέμα την περιπλάνηση στα Μαθηματικά Γυμνασίου και Λυκείου. Βασικός στόχος της σχετικής εκπαιδευτικής δράσης είναι η ανάδειξη μιας καινοτόμου διδακτικής προσέγγισης που θα κινήσει το ενδιαφέρον των μαθητών/τριών για τα Μαθηματικά ξεπερνώντας τους χρονικούς και τοπικούς περιορισμούς της διδακτικής πράξης.

Λέξεις-Κλειδιά: εκπαίδευση, κινητές συσκευές, μάθηση μέσω δραστηριότητας

Εισαγωγή

Η χρήση των κινητών συσκευών (mobile learning) τα τελευταία χρόνια αξιοποιείται σε μεγάλο βαθμό τόσο στο πλαίσιο της τυπικής όσο και της ημιτυπικής ή άτυπης εκπαίδευσης. Θεωρείται μια καινούργια προοπτική που ανοίγεται ως εξέλιξη στην ψηφιακή μάθηση, έχοντας πάντα, βέβαια, και την υποστήριξη της τεχνολογίας τόσο σε υλικό όσο και λογισμικό μέρος. Με τη χρήση των σύγχρονων φορητών συσκευών στην εκπαίδευση, δεν περιορίζεται η μάθηση αυστηρά σε συγκεκριμένο πλαίσιο, αλλά επιχειρείται ένας συνδυασμός του σχολικού χώρου, αλλά και του χρόνου. Στα παραδοσιακά μαθησιακά περιβάλλοντα οι μαθητές/τριες προσλαμβάνουν πληροφορίες ή γνώσεις σε πρώτο χρόνο και συνήθως τις εφαρμόζουν σε δεύτερο χρόνο, σε μελλοντικό επίπεδο. Σύμφωνα με τον Azuma (1997), ως επαυξημένη πραγματικότητα ορίζεται η συνύπαρξη του πραγματικού κόσμου με εικονικά αντικείμενα. Η επαυξημένη πραγματικότητα έχει τα εξής τρία χαρακτηριστικά: να συνδυάζει τον κανονικό κόσμο με τον εικονικό, να αλληλεπιδρά σε πραγματικό χρόνο και να είναι τρισδιάστατες οι απεικονίσεις. Με τη χρήση των κινητών συσκευών (mobile learning) γίνεται σε πρώτο χρόνο η εφαρμογή της γνώσης «Just in time learning» (Ally, 2009), με αποτέλεσμα να κρατάει σε εγρήγορση το ενδιαφέρον των μαθητών/τριών.

Επίσης, μπορούν να εφαρμοστούν πιο ενεργητικές στρατηγικές μάθησης(active learning)και οι εκπαιδευόμενοι/ες να μάθουν στο δικό τους πλαίσιο, το οποίο θα οδηγήσει σε μάθηση υψηλότερου επιπέδου (Cochrane, 2013, & Stoerger, 2013). Οι μαθητές/τριες μπορούν να έχουν πρόσβαση στο περιεχόμενο από ηλεκτρονικά αποθετήρια (repositories)ή να δημιουργήσουν το δικό τους περιεχόμενο, χωρίς χρονικούς ή τοπικούς περιορισμούς. Το περιεχόμενο που δημιουργείται μπορεί στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί και από άλλους εκπαιδευόμενους (Traxler, 2009).

Διαδραστική αφίσα επαυξημένης πραγματικότητας

Η εκπαιδευτική δραστηριότητα «Μαθηματική Περιπλάνηση στο Πι & Φι» είναι ουσιαστικά μία διαδραστική αφίσα (AR) επαυξημένης πραγματικότητας, με εφαρμογή στα Μαθηματικά Γυμνασίου, Λυκείου, χωρίς να αποκλείει μια διευρυμένη προσέγγιση (εικόνα 1). Βασικός σκοπός είναι να χρησιμοποιηθεί από την εκπαιδευτική κοινότητα παρέχονταςτη δυνατότητα να αξιοποιήσει μαθηματικές γνώσεις, μέσα από τη χρήση των νέων τεχνολογιών και ειδικότερα των φορητών συσκευών. Επιμέρους σκοπός θα λέγαμε ότι είναι η μαθηματική περιπλάνηση του χρήστη-επισκέπτη της συγκεκριμένης διαδραστικής αφίσας, μέσα από το λογισμικό επαυξημένης πραγματικότητας με οπτική αναγνώριση εικόνας (AugmentedReality - Blippar), στον κόσμο των Μαθηματικών από την αρχαιότητα έως σήμερα.

Το υλικό που περιέχεται μέσα στη διαδραστική αφίσα έχει δημιουργηθεί στο πλαίσιο δημιουργικών εργασιών, απλών δράσεων καθώς και για τις ανάγκες της «ημέρας των Μαθηματικών». Επίσης, υπάρχουν και τροποποιημένες εργασίες από το διαδίκτυο εφαρμοσμένες από εκπαιδευτικούς και μαθητές/τριες σε εκπαιδευτικές μονάδες.

Με αφορμή τις χαρακτηριστικές φιγούρες γνωστών μαθηματικών δημιουργήθηκαν τα διαδραστικά εικονίδια: «Αφήγηση», «Βίντεο», «Ασκήσεις» και «Αποθετήριο».

- Αφήγηση: Στο συγκεκριμένο εικονίδιο υπάρχουν αφηγήσεις για τη ζωή και το έργο των μαθηματικών με τις φωνές μαθητών/τριών που συμμετείχαν στην συγκεκριμένη εκπαιδευτική δράση.
- Βίντεο: Παρουσιάσεις σε μορφή βίντεο,από μαθητές/τριες που συμμετείχαν στη συγκεκριμένη εκπαιδευτική δράση αλλά και επιλογές από το διαδίκτυο,με επιλεγμένη μουσική επένδυση.
- Ασκήσεις: Διαδραστικές ασκήσεις online σε προγράμματα όπως google forms, liveworksheets, learning apps.
- Αποθετήριο: Εκπαιδευτικό υλικό σε υπερσυνδέσμους που παραπέμπουν σε βίντεο στο youtube, κείμενα ηλεκτρονικής μορφής σε pdf και αρχεία στο geogebra.org και στο photodentro.edu.gr.

Η διαδραστική αφίσα AR «Μαθηματική Περιπλάνηση στο Πι & Φι» δίνει τη δυνατότητα σε μαθηματικούς και μαθητές/τριες να αφήσουν το αποτύπωμά τους ανεβάζοντας υλικό που έχουν δημιουργήσει σε σχέση με τα Μαθηματικά. Η μαθηματική περιπλάνηση λαμβάνει χώρο σε ένα ιδιαίτερο μαθησιακό περιβάλλον μιας διαδραστικής αφίσας AR (επαυξημένης πραγματικότητας), με φιγούρες-σκίτσα γνωστών μαθηματικών από την αρχαιότητα έως σήμερα.

Εικόνα 1. Διαδραστική αφίσα AR

Η διαδραστική αφίσα (AR) μπορεί να αξιοποιηθεί με τους παρακάτω τρόπους:
Α. Για την ανάδειξη:

- της ιστορικής εξέλιξης των Μαθηματικών από την αρχαιότητα μέχρι και τον 20^{ο} αιώνα, μέσα από τη ζωή και το έργο σημαντικών μαθηματικών και φιλοσόφων,
- της χρησιμότητας των Μαθηματικών στην καθημερινή ζωή,
- της συνεισφοράς των Μαθηματικών στην εξέλιξη άλλων επιστημονικών πεδίων όπως π.χ. Αστρονομίας, Βιολογίας, Ιατρικής κ.ά.,
- της ανάγκης να αναπτυχθούν νέοι τομείς στα Μαθηματικά (π.χ. Τριγωνομετρία) για να απαντηθούν ερωτήματα που προέκυπταν στην προσπάθεια κάποιων σημαντικών μαθηματικών να εξηγήσουν αυτά που συμβαίνουν γύρω μας.

Β. Για τις ανάγκες διδασκαλίας στο σχολείο, όπως:

- συγκρότηση τράπεζας υλικού σε σχέση με τα Μαθηματικά που έχει δημιουργηθεί στο πλαίσιο δημιουργικών εργασιών, απλών δράσεων και για την ημέρα των Μαθηματικών,
- αυτοαξιολόγηση και αξιολόγηση μαθητών με online ασκήσεις,
- υλοποίηση εκπαιδευτικών σεναρίων στο πλαίσιο της «ανεστραμμένης» τάξης.

Ενδεικτικές εφαρμογές Μαθηματικών Γυμνασίου και Λυκείου με AR

Στο πλαίσιο χρήσης της διαδραστικής αφίσας από την εκπαιδευτική κοινότητα γίνεται μια ενδεικτική αξιοποίηση, με την παράθεση εφαρμογών για το Γυμνάσιο και Λύκειο. Το σκεπτικό είναι να υποστηριχθεί η εκπαιδευτική διαδικασία σε κατάλληλες θεματικές ενότητες, είτε κατά την προετοιμασία των μαθητών/τριών από το σπίτι είτε στη διάρκεια της διδασκαλίας μέσα στην τάξη είτε, τέλος, με τη μορφή ασκήσεων αξιολόγησης.

Α. Εφαρμογή στο Γυμνάσιο – Πυθαγόρειο Θεώρημα

Προϋπόθεση για τη συγκεκριμένη διδασκαλία που ακολουθεί είναι οι μαθητές/τριες να διαθέτουν τη διαδραστική αφίσα (AR) επαυξημένης πραγματικότητας «Μαθηματική

Περιπλάνηση στο Πι και Φι» καθώς και μια φορητή συσκευή με κάμερα, όπως κινητό ή tablet.

Με τη διδασκαλία αυτή επιδιώκεται, μέσω κατασκευής και παρατήρησης, οι μαθητές/τριες να ανακαλύψουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Η βασική ιδέα είναι οι έννοιες – τετράγωνο υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου καθώς και τα τετράγωνα των κάθετων πλευρών του, να πάψουν να είναι αφηρημένες και να οπτικοποιηθούν. Η οπτικοποίηση αυτή βοηθά τους/τις μαθητές/τριες να κάνουν τις εικασίες τους, να διερευνήσουν, να πειραματιστούν και, στο τέλος, να ανακαλύψουν. Το μάθημα υλοποιείται με το πλαίσιο της «ανεστραμμένης τάξης», δηλαδή με τη μορφή μιας σύγχρονης διδασκαλίας, της οποίας έχει προηγηθεί ενημέρωση των μαθητών/τριών. Η ενημέρωση αυτή τους προτρέπει να δουν σχετικά βίντεο πριν το μάθημα, αξιοποιώντας τη διαδραστική αφίσα AR

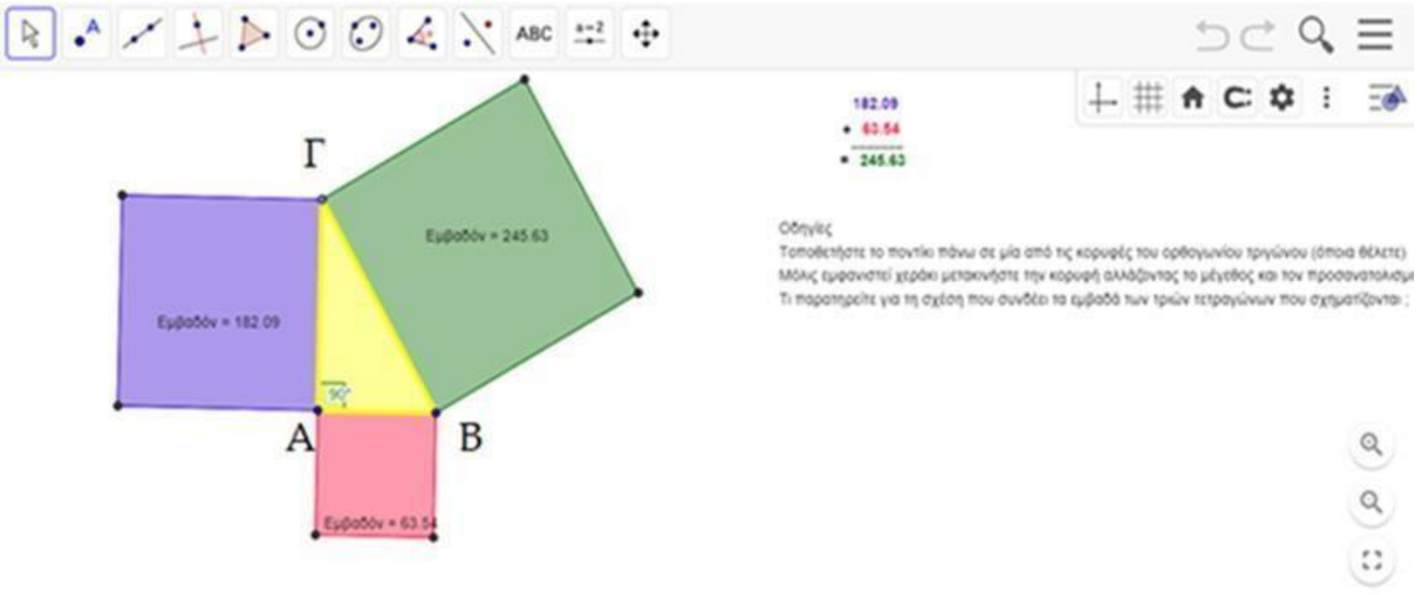
«Μαθηματική Περιπλάνηση στο Πι και Φι» στο σπίτι τους. Κατά τη διάρκεια της σύγχρονης διδασκαλίας, παρέχεται υλικό που δίνει τη δυνατότητα στους/στις μαθητές/τριες για πειραματισμό και ανακάλυψη. Στο τέλος του μαθήματος, ανατίθεται στους/στις μαθητές/τριες, σχετική εργασία για το σπίτι. Η εργασία αυτή γίνεται μέσα από αλληλοεπίδραση των μαθητών/τριών με τη διαδραστική αφίσα AR και ειδικότερα με τη φιγούρα του Πυθαγόρα (εικόνα 2) και περιλαμβάνει: online άσκηση αξιολόγησης, παρακολούθηση βίντεο για τη ζωή και το έργο του Πυθαγόρα, ακρόαση ηχητικού αρχείου που αφορά στον Πυθαγόρα και περαιτέρω διερεύνηση με το αρχείο GeoGebra που έχειτύχει επεξεργασίας από τους/τις μαθητές/τριεςστο σχολείο.

Προτρέπουμε, λοιπόν, τους/τις μαθητές/τριες (πριν το μάθημα) να δουν τα βίντεο: «Το Πυθαγόρειο Θεώρημα με έναν διαφορετικό τρόπο» και «Πυθαγόρειο Θεώρημα» από το

«Αποθετήριο» του εικονιδίου με τη φιγούρα του Πυθαγόρα, στοχεύοντας στη διαδραστική αφίσα. Το πρώτο βίντεο παρουσιάζει, μέσω μιας «έξυπνης» κατασκευής με νερό, ότι το εμβαδόν του τετραγώνου που σχηματίζεται με πλευρά την υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου, ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων που σχηματίζονται από κάθε μια από τις κάθετες πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου. Στο δεύτεροβίντεο εξηγείται με παραστατικό τρόπο, μέσω οπτικοποίησης των τετραγώνων των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου, η σχέση που συνδέει αυτά τα τετράγωνα.

Εικόνα 2.Πυθαγόρας σε επαυξημένη πραγματικότητα

Ανιχνεύουμε στην τάξη προαπαιτούμενες γνώσεις και στη συνέχεια ανοίγουμε από το «Αποθετήριο» για επεξεργασία το αρχείο δυναμικής γεωμετρίας GeoGebra (εικόνα 3).



Εικόνα 3. Αρχείο δυναμικής γεωμετρίας GeoGebra – Πυθαγόρειο Θεώρημα

Ταυτόχρονα, ζητάμε από τους/τις μαθητές/τριες να συμπληρώσουν ένα φύλλο εργασίας που κάποια από τα ερωτήματά του βασίζονται στο δυναμικό σχήμα του αρχείου GeoGebra. Τα ερωτήματα αυτά καθοδηγούν τους μαθητές στη διατύπωση του Πυθαγορείου Θεωρήματος καθώς και στη διαπίστωση ότι αυτό είναι χρήσιμο στην εύρεση άγνωστης πλευράς ορθογωνίου τριγώνου, όταν είναι γνωστές οι άλλες δύο πλευρές. Τέλος, αναθέτουμε τις παρακάτω εργασίες για το σπίτι:

- Online άσκηση από το εικονίδιο «Ασκήσεις» που βρίσκεται στη φιγούρα του Πυθαγόρα της διαδραστικής αφίσας AR, για την αξιολόγηση των μαθητών. Μετά την ολοκλήρωση των απαντήσεων στα ερωτήματα της άσκησης, οι απαντήσεις έρχονται αυτόματα στο email μας.
- Διερεύνηση και περαιτέρω πειραματισμός στο αρχείο δυναμικής γεωμετρίας GeoGebra από το εικονίδιο «Αποθετήριο» που βρίσκεται στη φιγούρα του Πυθαγόρα της διαδραστικής αφίσας AR.
- Παρακολούθηση video σχετικού με τη ζωή και το έργο του Πυθαγόρα, από το εικονίδιο «Βίντεο» που βρίσκεται στη φιγούρα του Πυθαγόρα της διαδραστικής αφίσας AR ή ακρόαση του ηχητικού αρχείου που υπάρχει στο εικονίδιο «Αφήγηση».
- Παρακολούθηση του video: «Πυθαγόρας & Μουσική Κλίμακα» από το εικονίδιο «Αποθετήριο» που βρίσκεται στη φιγούρα του Πυθαγόρα της διαδραστικής αφίσας AR.

Β. Εφαρμογή στο Λύκειο – Θεώρημα Θαλή

Προϋπόθεση για τη συγκεκριμένη διδασκαλία είναι οι μαθητές/τριες να διαθέτουν τη διαδραστική αφίσα (AR) επαυξημένης πραγματικότητας «Μαθηματική Περιπλάνηση στο Πι και Φι» καθώς και μια φορητή συσκευή με κάμερα, όπως κινητό ή tablet.

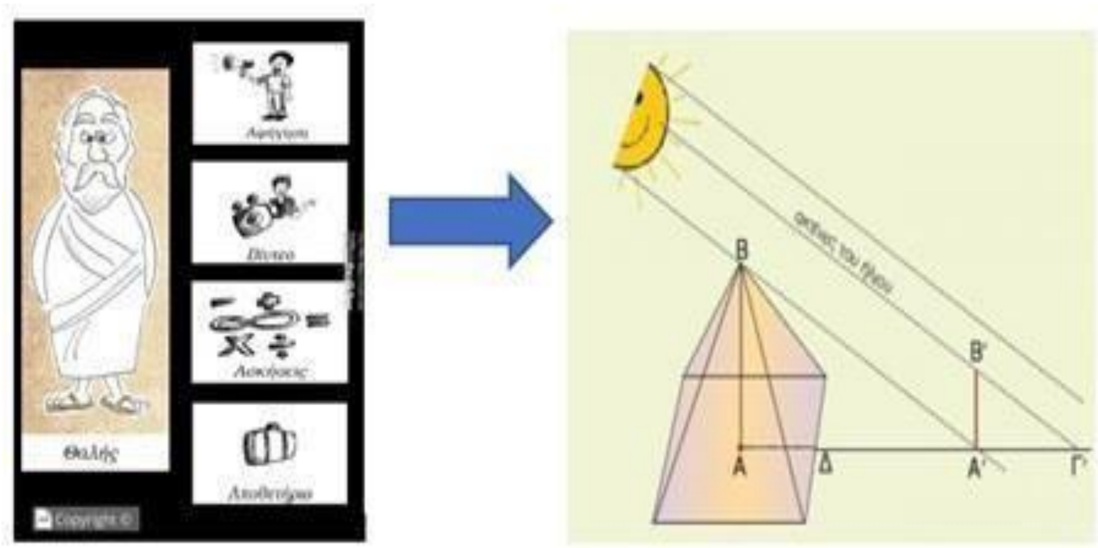
Με τη διδασκαλία αυτή επιδιώκεται, μέσω κατασκευής και παρατήρησης, οι μαθητές/τριες να ανακαλύψουν το Θεώρημα του Θαλή. Η βασική ιδέα είναι η έννοια των ανάλογων πλευρών να μπορεί να γίνει εφαρμόσιμη και να οπτικοποιηθεί. Η οπτικοποίηση αυτή βοηθά τους μαθητές να κάνουν τις εικασίες τους, να διερευνήσουν, να πειραματιστούν και, στο τέλος, να ανακαλύψουν.

Το μάθημα υλοποιείται με το πλαίσιο της «ανεστραμμένης τάξης» δηλαδή με τη μορφή μιας σύγχρονης διδασκαλίας, της οποίας έχει προηγηθεί ενημέρωση των μαθητών/τριών. Η ενημέρωση αυτή τους προτρέπει να δουν σχετικά βίντεο πριν το μάθημα, αξιοποιώντας τη διαδραστική αφίσα AR «Μαθηματική Περιπλάνηση στο Πι και Φι» στο σπίτι τους. Κατά τη διάρκεια της σύγχρονης διδασκαλίας, παρέχεται υλικό που δίνει τη δυνατότητα στους/στις μαθητές/τριες για πειραματισμό και ανακάλυψη. Στο τέλος, του μαθήματος ανατίθενται στους/στις μαθητές/τριες, σχετικές εργασίες για το σπίτι. Οι εργασίες αυτές που γίνονται μέσα από αλληλοεπίδραση των μαθητών με την διαδραστική αφίσα AR, περιλαμβάνουν: online άσκηση αξιολόγησης, παρακολούθηση βίντεο για τη ζωή και το έργο του Θαλή, ακρόαση ηχητικού αρχείου που αφορά στον Θαλή και περαιτέρω διερεύνηση με το αρχείο GeoGebra.

Προτρέπουμε, λοιπόν,τους/τις μαθητές/τριες (πριν το μάθημα) να δουν τα βίντεο: «Θαλής ο Μιλήσιος πρακτικές εφαρμογές του θεωρήματος των αναλογιών»και

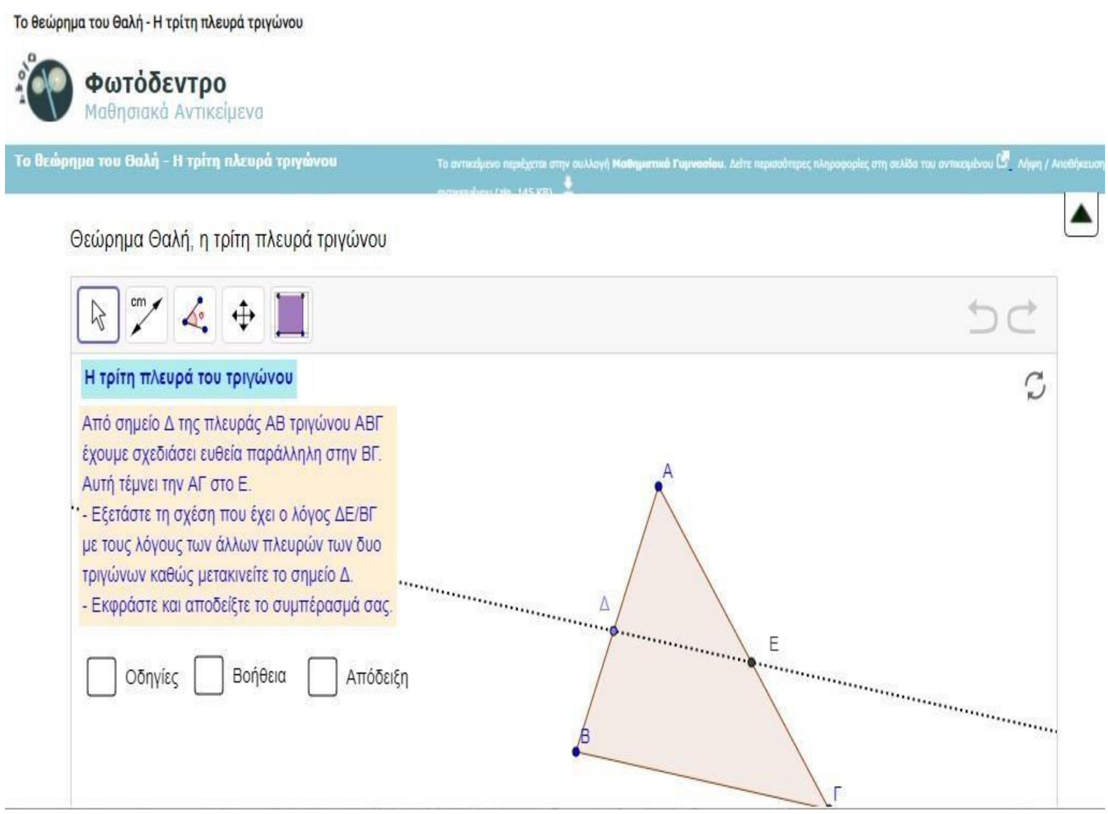
«Θαλής ο Μιλήσιος& ημέτρηση του ύψους της πυραμίδας» από το «Αποθετήριο» του εικονιδίου με τη φιγούρα του Θαλή, στοχεύοντας στη διαδραστική αφίσα.

Το πρώτο βίντεο παρουσιάζει μια έξυπνη και εύστοχη ανασκόπηση των πρακτικών εφαρμογών του Θαλή, όπως για παράδειγμα τις μετεωρολογικές προβλέψεις, βάσει των οποίων καθορίζονταν οι επιχειρηματικές δραστηριότητες σχετικά με τα αγροτικά προϊόντα. Επίσης, ο Θαλής αξιοποιώντας την ιδιότητα των αναλογιών κατάφερε να διαμοιράσει τα νερά του ποταμού, με αποτέλεσμα να καταστεί βατός από τις στρατιωτικές δυνάμεις της εποχής, ενώ ο υπολογισμός του ύψους ενός δέντρου με βάση τη σκιά του είναι ιδιαίτερα εντυπωσιακός. Στο δεύτερο βίντεο εξηγείται με παραστατικό τρόπο, μέσω της διατύπωσης και απόδειξης του Θεωρήματος του Θαλή, η ιστορική μέτρηση του ύψους της πυραμίδας (εικόνα 4).



Εικόνα 4. Μέτρηση ύψους πυραμίδας

Ανιχνεύουμε στην τάξη προαπαιτούμενες γνώσεις και, στη συνέχεια, ανοίγουμε από το «Αποθετήριο» για επεξεργασία,το αρχείο δυναμικής γεωμετρίας GeoGebra (εικόνα 5).



Εικόνα 5. Αρχείο δυναμικής γεωμετρίας GeoGebra – Θεώρημα Θαλή

Ταυτόχρονα, ζητάμε από τους/τις μαθητές/τριες να συμπληρώσουν ένα φύλλο εργασίας που κάποια από τα ερωτήματά του βασίζονται στο δυναμικό σχήμα του αρχείου GeoGebra. Τα ερωτήματα αυτά καθοδηγούν τους μαθητές στη διατύπωση του Θεωρήματος Θαλή καθώς και στη διαπίστωση ότι αυτό είναι χρήσιμο στην εύρεση των λόγων των πλευρώντων τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΓ όπου Δ τυχαίο σημείο της ΑΒ και ΔΕ //ΒΓ.

Τέλος, αναθέτουμε τις παρακάτω εργασίες για το σπίτι.

- Online άσκηση από το εικονίδιο «Ασκήσεις» που βρίσκεται στη φιγούρα του Θαλή της διαδραστικής αφίσας AR, για την αξιολόγηση των μαθητών. Μετά την ολοκλήρωση των απαντήσεων στα ερωτήματα της άσκησης, οι απαντήσεις έρχονται αυτόματα στο email μας.
- Παρακολούθηση video σχετικού με τη ζωή και το έργο του Θαλή, από το εικονίδιο «Βίντεο» που βρίσκεται στη φιγούρα του Θαλή της διαδραστικής αφίσας AR ή ακρόαση του ηχητικού αρχείου που υπάρχει στο εικονίδιο «Αφήγηση»
- Παρακολούθηση του video «Ημέρα των Μαθηματικών» που βρίσκεται στο εικονίδιο βαλίτσα «Γυμνάσιο Κρεμαστής Ρόδου», στοχεύοντας στην εικόνα «You» της διαδραστικής αφίσας. Οι μαθητές/τριες, έχοντας παρακολουθήσει στο συγκεκριμένο video τρεις μεθόδους υπολογισμού του ιστού της σημαίας στο προαύλιο του σχολείου, στη συνέχεια υπολογίζουν το ύψος ενός δέντρου ή ενός φανοστάτη στον περιβάλλοντα χώρο του σπιτιού τους.

Συμπεράσματα

Στο σύγχρονο μαθησιακό περιβάλλον η χρήση των κινητών συσκευών, όπως φαίνεται και μέσω της συγκεκριμένης εκπαιδευτικής δράσης είναι μια καινοτομία που δε στηρίζεται στους παραδοσιακούς ρόλους εκπαιδευτικού-εκπαιδευόμενου. Οι σύγχρονες φορητές συσκευές αποτελούν ένα αδιαμφισβήτητα μεγάλο κομμάτι της καθημερινότητας των μαθητών και η χρήση τους ως εκπαιδευτικό εργαλείο μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να καλλιεργήσουν μια πληθώρα από δεξιότητες(Vandoninck, Nouwen, Zaman, 2019).

Η αναζήτηση πληροφορίας από τους μαθητές μπορεί εύκολα να εκτραπεί σε έναν «περίπατο» στο αχανές σύμπαν του διαδικτύου (ΙΤΥΕ, 2018). Από την άλλη πλευρά, μέσα από δραστηριότητες και εκπαιδευτικά σενάρια, όπως η «Μαθηματική περιπλάνηση στο Πι& Φι»,με κατάλληλη διαμόρφωση, οι μαθητές μπορούν να αποκομίσουν το μέγιστο δυνατό μαθησιακό αποτέλεσμα στο νέο ψηφιακό περιβάλλον των κινητών συσκευών. Σε αυτό το σκεπτικό είναι πολύ σημαντική, η δημιουργία φύλλων εργασίας από τους εκπαιδευτικούς πριν τη χρήση των εφαρμογών της διαδραστικής αφίσας με AR στην τάξη. Ο σχεδιασμός εκπαιδευτικών εφαρμογών θα πρέπει να γίνεται σε συνεργασία με εκπαιδευτικούς, οι οποίοι θα λαμβάνουν υπόψη και τους παράγοντες αυτούς, ανοίγοντας με αυτό τον τρόπο νέους δρόμους για να μάθουν οι μαθητές/τριες αξιοποιώντας με έναν διαφορετικό τρόπο το κινητό τους τηλέφωνο.

Εν κατακλείδι, η εξέλιξη αυτή του e-learning και του m-learning στα σύγχρονα εκπαιδευτικά δεδομένα είναι μάλλον αναπόφευκτη, οπότε σίγουρα θα πρέπεινα προετοιμαστεί μέσω της κατάλληλης επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Azuma, R. (1997). *A Survey of Augmented Reality.* Teleoperators and Virtual Enviroments 6(4), pp. 355-385.

Ally, M., &Prieto-Blazquez, J. (2014). What is the future of mobile learning in education?.

InternationalJournalofEducationalTechnologyinHigherEducation,11(1), 142-151.

Cochrane, T. (2013). M-Leaming., As a catalyst for pedagogical change. In Z. L. Berge & L.

Y. Muilenburg (Eds.), *Handbook of mobile learning. New York, NY: Routledge.*

Ekpaidefsi Epimorfoton B' Epipedou T.P.E., Systada: Filologika, Geniko meros, IIYE, Patra, 2018.

Traxler, J. (2009). Learning in a Mobile Age. *International Journal of Mobile and Blended learning,* 7(1), 1-12.

Vandoninck, S., Nouwen, M., & Zaman, B. (2019). Smartphones in the classroom. In Smartphone Cultures (pp. 137–149). https://doi.org/10.4324/9781315307077-11.

Ποσοτική έρευνα για τις εξωσχολικές δραστηριότητες μαθητών/-τριών Λυκείου για το σχολικό έτος 2021-2022

Μαθητές Α΄ Τάξης Γενικού Λυκείου Κρεμαστής Ρόδου
Επιμέλεια υλικού-Συντονισμός ομάδων μαθητών:
Κατσίλλη Μαρία, Λουκάς Κυριάκος, Ρένεσης Γιώργος
Εκπαιδευτικοί κλ. ΠΕ03 Μαθηματικών
Τεχνική βοήθεια: Μουστάκας Λουκάς,
Διδάσκων στο Μητροπολιτικό Κολλέγιο Ρόδου

Περίληψη

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε τους τελευταίους μήνες και έλαβε χώρα στο Γενικό Λύκειο Κρεμαστής Ρόδου , με την συμβολή τριών εκπαιδευτικών και εξειδικευμένου στο στατιστικό λογισμικό SPSS επιμορφωτή, ο οποίος βοήθησε τις μαθήτριες/-ές να εξάγουν τα επαγωγικά στατιστικά αποτελέσματα της έρευνας, συμπληρώνοντας τα περιγραφικά αποτελέσματα που είχαν προηγηθεί.

Σκοπός της έρευνας είναι να μελετήσει τις δραστηριότητες των νέων, καθώς και τις συνήθειες τους γενικότερα στον εξωσχολικό χώρο.

Για την βαθύτερη διερεύνηση των αποτελεσμάτων τέθηκαν οι μεταβλητές: φύλο, τάξη, τόπος κατοικίας. Επιλέχθηκε αντιπροσωπευτικό δείγμα μαθητών το οποίο περιλαμβάνει μαθητές Λυκείου (ηλικίας 15-18), κορίτσια και αγόρια και κάτοικοι των ακόλουθων χωριών της Ρόδου: Κρεμαστής, Παστίδας, Μαριτσά, Παραδείσι, Ιαλυσός κ.α.

Οι ερευνητές-μαθητές, για την πραγματοποίηση της ποσοτικής ερευνητικής μελέτης, ακολούθησαν την παρακάτω μεθοδολογία. Αρχικά, σχεδίασαν κατάλληλο ερωτηματολόγιο για την υλοποίησή της. Δείτε εδώ το ερωτηματολόγιο

Αφού μοίρασαν το ερωτηματολόγιο σε δείγμα μαθητριών/-των περίπου 75 ατόμων, κατέγραψαν τα αποτελέσματα στο excel και εφάρμοσαν περιγραφική ανάλυση. Στο πλαίσιο αυτό, παρακολούθησαν μια παρουσίαση εξειδικευμένου επιμορφωτή, προκειμένου να βοηθηθούν στην εξαγωγή επαγωγικών στατιστικών αποτελεσμάτων της έρευνάς τους.

Τα παιδιά που συμμετείχαν στη δράση είναι μαθητές της Α' Λυκείου.

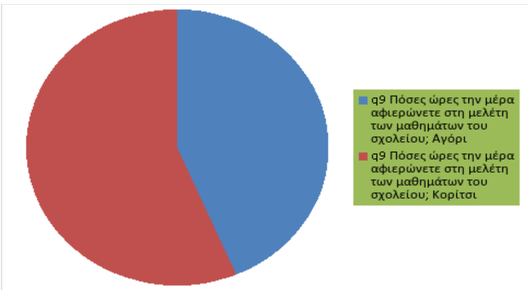
Λέξεις-Κλειδιά: Εξωσχολικές δραστηριότητες, Λύκειο.

Αποτελέσματα

"Ποσοτική έρευνα για τις εξωσχολικές δραστηριότητες μαθητών/-τριών Λυκείου"

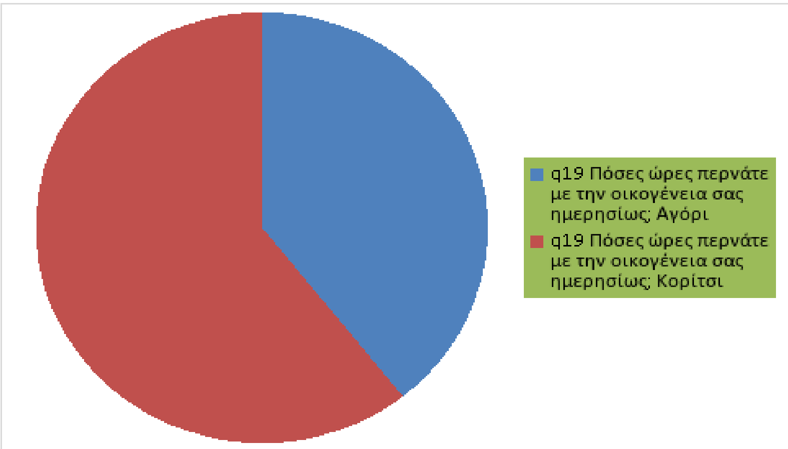
ΤΟ ΦΥΛΟ ΩΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ:

Παρατηρούμε στην ερώτηση 9 τα κορίτσια αφιερώνουν περισσότερη ώρα μελέτης από ότι τα αγόρια. Ενώ ακόμα, στην ερώτηση 14,διαπιστώνουμε ότι παρόλο που αφιερώνουν περισσότερη ώρα στις σχολικές υποχρεώσεις από τα αγόρια , φαίνεται να ασχολούνται επιπλέον περισσότερο με κάποιο hobby ή να έχουν κάποια άλλη ενασχόληση σε σύγκριση με τα αγόρια .



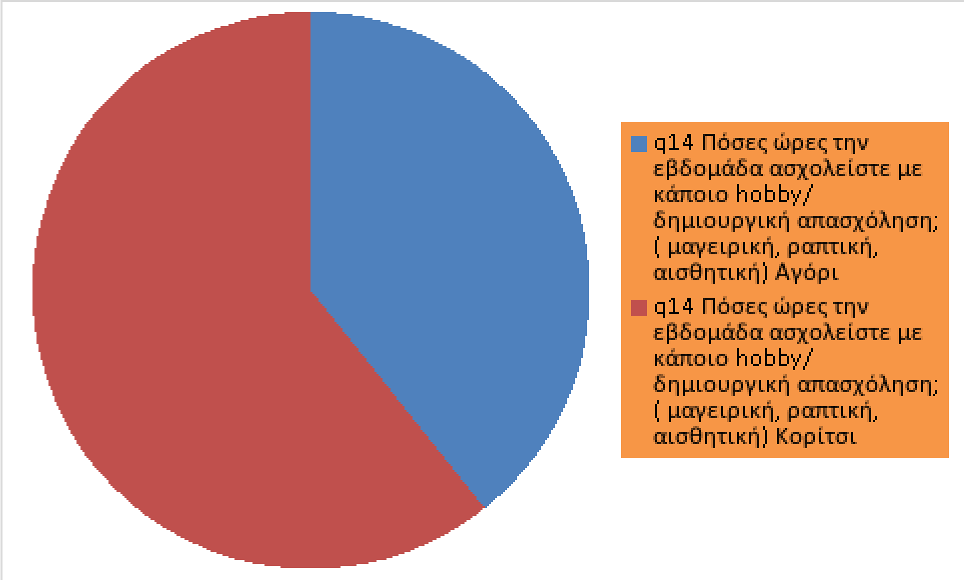
Πόσες ώρες την μέρα αφιερώνετε στη μελέτη των μαθημάτων του σχολείου;	Αγόρι	1.69
	Κορίτσι	2.18

Παρατηρούμε ότι τα κορίτσια αφιερώνουν περισσότερο χρόνο, σε αντίθεση με τα αγόρια, με τους γονείς τους μέσα στην ημέρα. Ίσως σε αυτό μπορεί να οφείλεται η πολύωρη ενασχόληση των αγοριών με την σωματική άσκηση και τις ηλεκτρονικές συσκευές. Κι όμως παρατηρούμε ότι τα κορίτσια ασχέτως που με βάση τα αποτελέσματα διαθέτουν λιγότερο ελεύθερο χρόνο στην καθημερινότητα τους, βρίσκουν την ευκαιρία να περνάνε και με την οικογένεια τους .



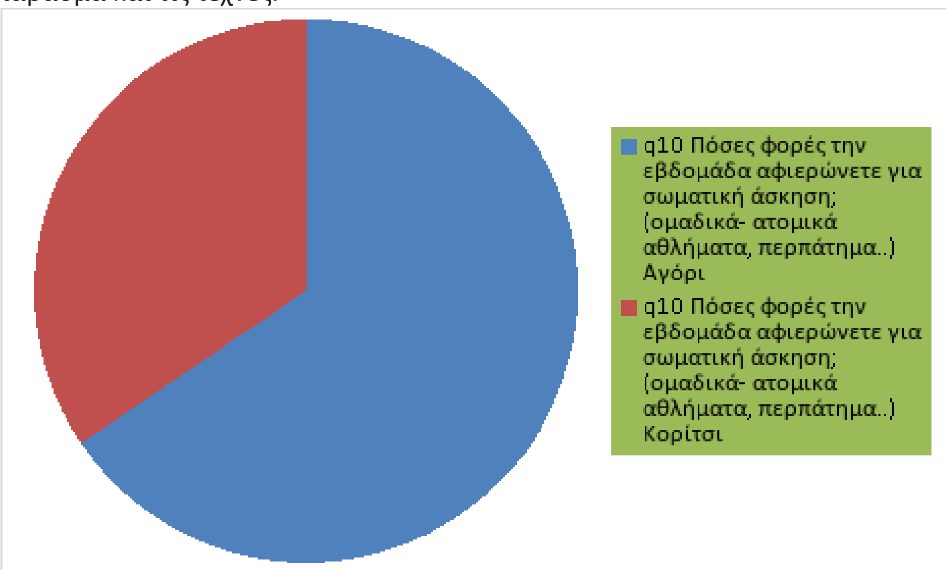
Πόσες ώρες περνάτε με την οικογένεια σας ημερησίως;	Αγόρι	1.03
	Κορίτσι	1.59

Εδώ παρατηρούμε ότι τα κορίτσια υπερτερούν αυτήν την φορά. Ασχολούνταιπερισσότερο με δημιουργικά χόμπι και τέχνες σε σχέση με τα αγόρια.



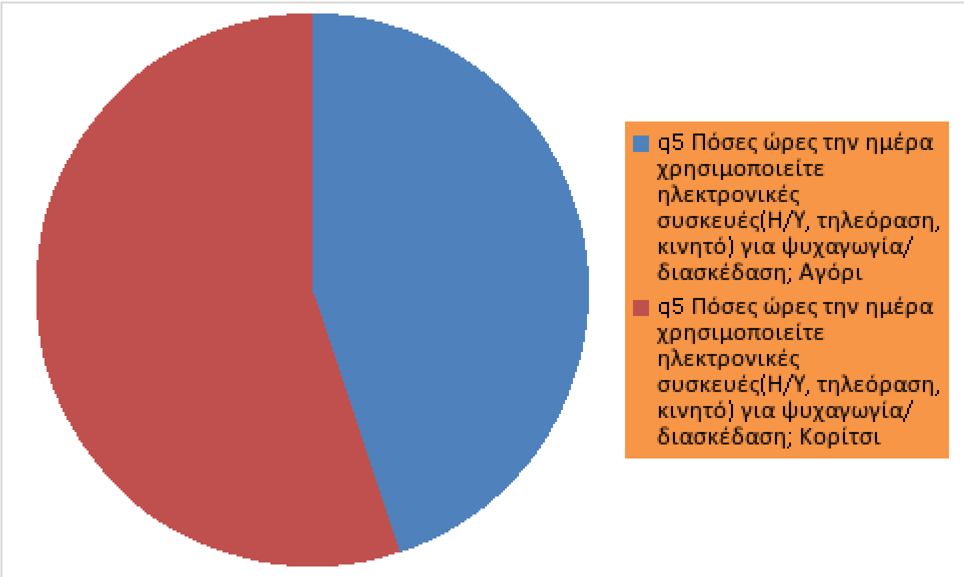
Πόσες ώρες την εβδομάδα ασχολείστε με κάποιο hobby/δημιουργική απασχόληση; (μαγειρική, ραπτική, αισθητική)	Αγόρι	.84
	Κορίτσι	1.31

Σε αυτήν την ερώτηση βλέπουμε τα αγόρια να υπερτερούν κατά πολύ σε αντίθεση με τα κορίτσια. Ως συμπέρασμα, τα αγόρια του σχολείου μας ασχολούνται περισσότερο με τον αθλητισμό, ενώ τα κορίτσια όπως συναντήσαμε και σε προηγούμενες ερωτήσεις προτιμούν το διάβασμα και τις τέχνες.



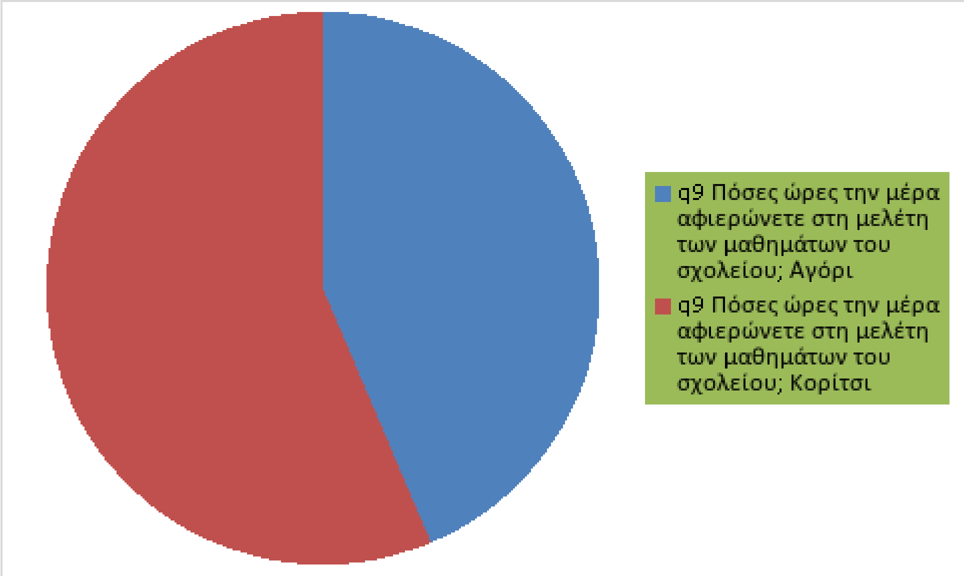
Πόσες φορές την εβδομάδα αφιερώνετε για σωματική άσκηση;(ομαδικά- ατομικά αθλήματα, περπάτημα..)	Αγόρι	2.34
	Κορίτσι	1.23

Παρατηρούμε στην ερώτηση αυτή, ότι τα κορίτσια χρησιμοποιούν τις ηλεκτρονικές συσκευές για περισσότερο χρόνο από ότι τα αγόρια.



Πόσες ώρες την ημέρα χρησιμοποιείτε ηλεκτρονικές συσκευές(Η/Υ, τηλεόραση, κινητό) για ψυχαγωγία/διασκέδαση;	Αγόρι	2.16
	Κορίτσι	2.67

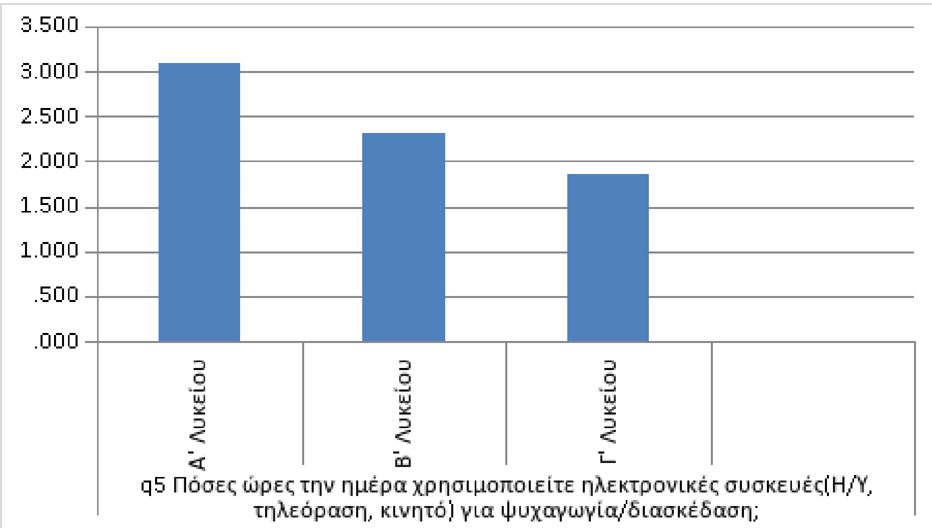
Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της ερώτησης αυτής τα κορίτσια φαίνεται πωςαφιερώνουν περισσότερο χρόνο στα σχολικά μαθήματα από τα αγόρια



Πόσες ώρες την μέρα αφιερώνετε στη μελέτη των μαθημάτων του σχολείου;	Αγόρι	1.69
	Κορίτσι	2.18

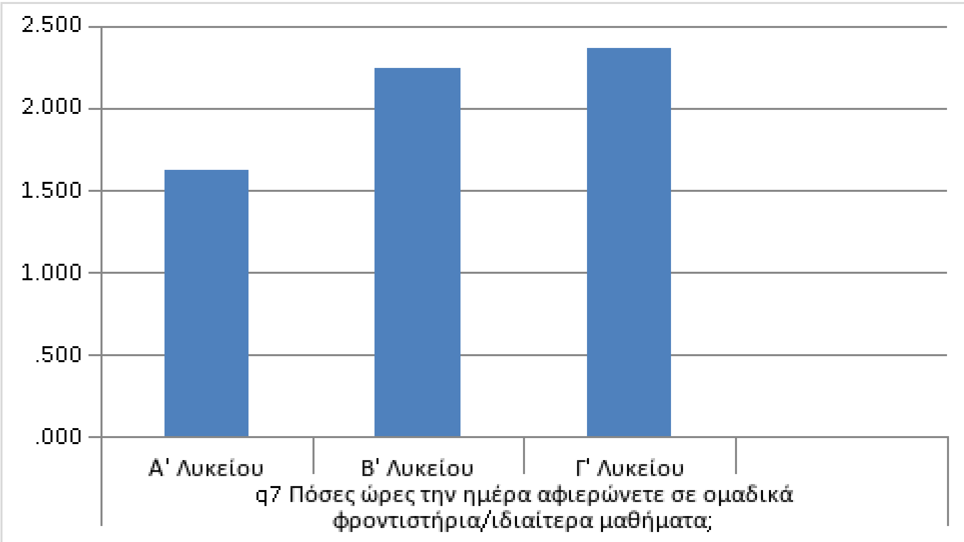
Η ΤΑΞΗ ΩΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

Από την ερώτηση 5 μπορούμε να καταλάβουμε πως η χρήση ηλεκτρονικών συσκευών διαφέρει ανά τάξη. Φαίνεται πως τα παιδιά της Α' Λυκείου αφιερώνουν περισσότερο χρόνο στην χρήση Η/Υ, τηλεόρασης, κινητού ενώ όσο ανεβαίνει η τάξη από την Ά στην Β΄ Λυκείου μειώνεται με αποτέλεσμα η Γ΄ Λυκείου να αφιερώνει λιγότερο χρόνο σε ηλεκτρονικές συσκευές.



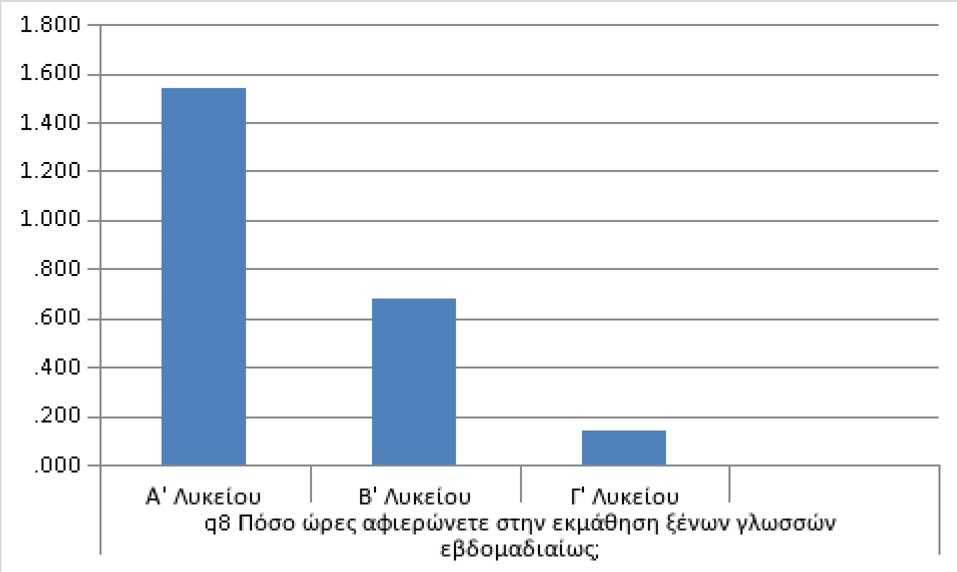
Πόσες ώρες την ημέρα χρησιμοποιείτε ηλεκτρονικές συσκευές(Η/Υ, τηλεόραση, κινητό) για ψυχαγωγία/διασκέδαση;	Α' Λυκείου	3.08
	Β' Λυκείου	2.32
	Γ' Λυκείου	1.86

Από την ερώτηση συμπεραίνουμε ότι το μεγαλύτερο ποσοστό μαθητών που αφιερώνει περισσότερο χρόνο σε φροντιστήρια είναι στην Γ΄ Λυκείου ενώ τα ποσοστά μειώνονται όσο μικραίνει η τάξη. Οι μαθητές της Β΄ Λυκείου αφιερώνουν πιο λίγο χρόνο σε φροντιστήρια από εκείνους της Γ΄ ενώ οι μαθητές της Ά εμφανίζουν τα μικρότερα ποσοστά.



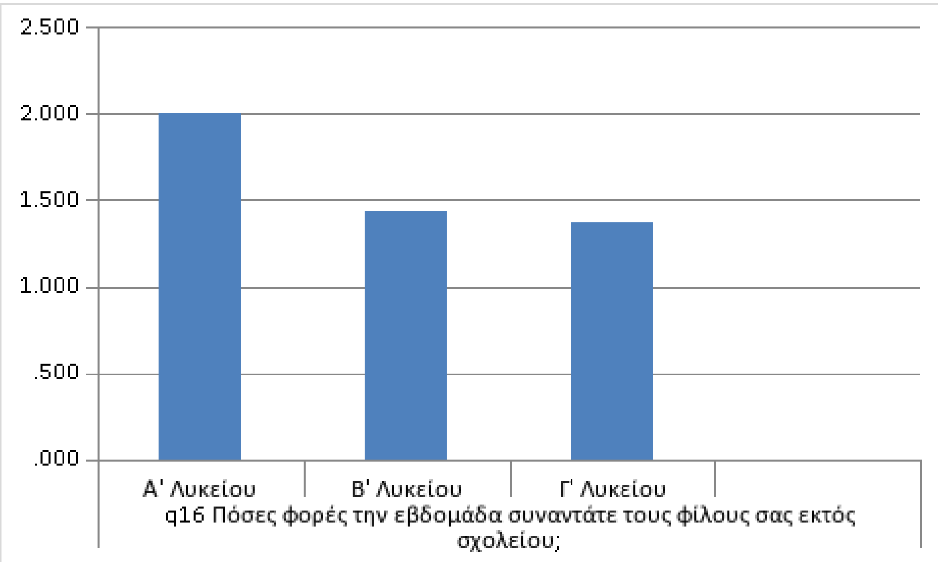
Πόσες ώρες την ημέρα αφιερώνετε σε ομαδικά φροντιστήρια/ιδιαίτερα μαθήματα;	Α' Λυκείου	1.63
	Β' Λυκείου	2.24
	Γ' Λυκείου	2.36

Από την ερώτηση καταλαβαίνουμε πως οι μαθητές της Ά Λυκείου έχουν περισσότερο χρόνο να αφιερώσουν στην εκμάθηση μιας ξένης γλώσσας συγκριτικά με τους μαθητές της Β΄ και Γ΄ Λυκείου όπου φαίνεται το μεγαλύτερο ποσοστό να μην ασχολείται με ξένες γλώσσες.



Πόσο ώρες αφιερώνετε στην εκμάθηση ξένων γλωσσών εβδομαδιαίως;	Α' Λυκείου	1.54
	Β' Λυκείου	.68
	Γ' Λυκείου	.14

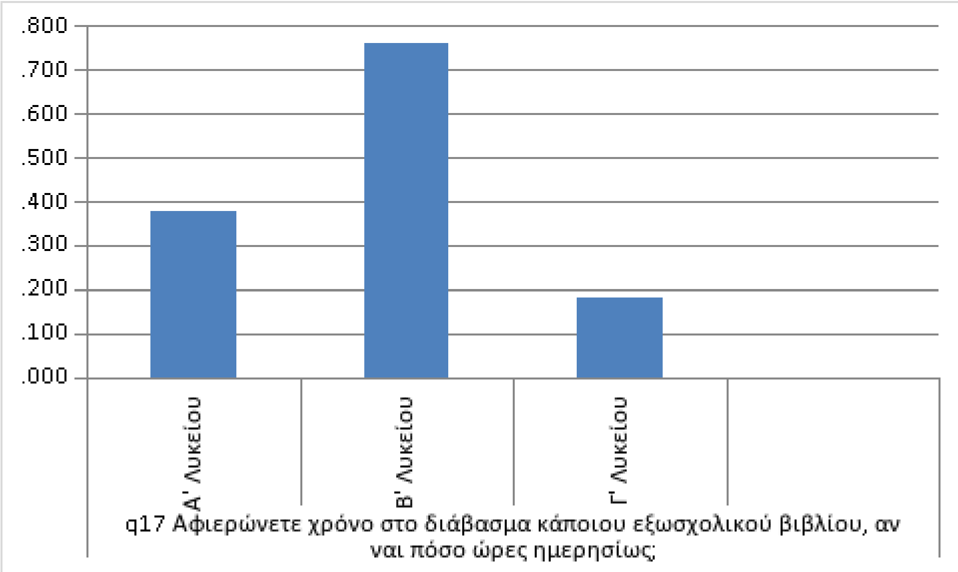
Από την ερώτηση 16 διαπιστώνουμε πως οι μαθητές της Α' Λυκείου συναντούν τους φίλους τους συχνότερα από τους μαθητές της Β' Λυκείου ενώ οι μαθητές της Γ' Λυκείου πολύ λιγότερο.



Πόσες φορές την εβδομάδα συναντάτε τους φίλους σας εκτός σχολείου;	Α' Λυκείου	2.00
	Β' Λυκείου	1.44
	Γ' Λυκείου	1.36

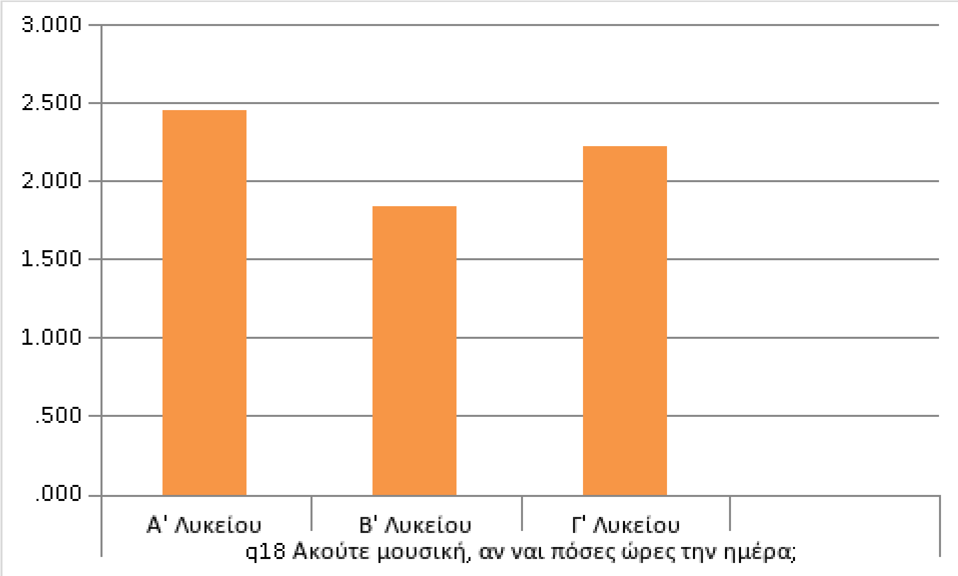
Στην συγκεκριμένη ερώτηση, φαίνεται πως οι μαθητές της Β' Λυκείου ασχολούνται με την ανάγνωση εξωσχολικών βιβλίων περισσότερο από τις άλλες τάξεις. Ενώ, στο ερώτημα 18 παρατηρούμε πως η Α' και Γ΄ τάξεις του λυκείου ακούνε μουσική σε μεγαλύτερο βαθμό.

Ωστόσο, το συγκεκριμένο συμπέρασμα πιθανόν αφορά μόνο τους συγκεκριμένους μαθητές, για αυτό και δεν θεωρείται αξιόπιστο.



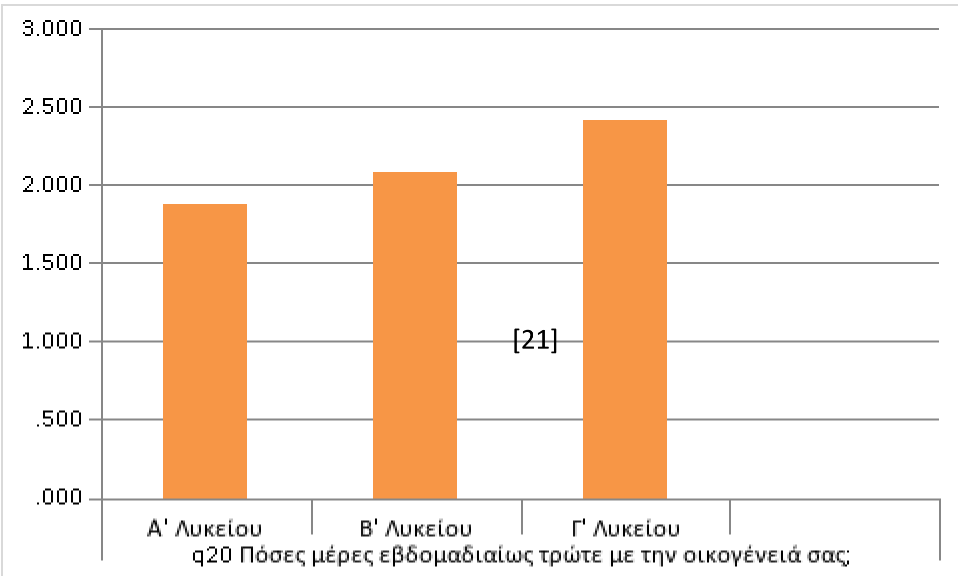
Αφιερώνετε χρόνο στο διάβασμα κάποιου εξωσχολικού βιβλίου, αν ναι πόσο ώρες ημερησίως;	Α' Λυκείου	.38
	Β' Λυκείου	.76
	Γ' Λυκείου	.18

Στη συγκεκριμένη ερώτηση που τέθηκε στους μαθητές του σχολείου, με βάση τα αποτελέσματα, μπορούμε εύκολα να καταλάβουμε ότι τα παιδιά της Α' Λυκείου ακούνε περισσότερη μουσική από τα παιδιά σε άλλες τάξεις. Πιθανών επειδή διαθέτουν περισσότερο ελεύθερο χρόνο. Ενώ, οι μαθητές της Β' Λυκείου αφιερώνουν λιγότερο χρόνο στο να ακούνε μουσική. Παράλληλα, όπως είναι φανερό τα παιδιά της Γ' Λυκείου ακούνε μουσική για περισσότερο χρόνο από τα παιδιά της Β'. Ίσως ακούν μουσική ενώ διαβάζουν συγχρόνως, για την καλύτερη απόδοση τους.



Ακούτε μουσική, αν ναι πόσες ώρες την ημέρα;	Α' Λυκείου	2.46
	Β' Λυκείου	1.84
	Γ' Λυκείου	2.23

Ρωτήσαμε επίσης τους μαθητές πόσες μέρες εβδομαδιαίως τρώνε με την οικογένεια τους και από τα αποτελέσματα βγάλαμε ορισμένα συμπεράσματα. Αναλυτικότερα, μέσα από την συγκεκριμένη ερώτηση έγινε αντιληπτό ότι τα παιδιά της Α' Λυκείου τρώνε για λιγότερες μέρες την εβδομάδα με την οικογένεια τους σε αντίθεση με τους μαθητές της Β' Λυκείου οι οποίοι επιλέγουν να περνούν περισσότερο χρόνο μαζί τους, τουλάχιστον την ώρα του φαγητού. Τέλος, καταλάβαμε ότι οι μαθητές της Γ' Λυκείου αφιερώνουν περισσότερο χρόνο σε αυτή τη διαδικασία. Αυτό ίσως να μπορεί να δικαιολογηθεί από το γεγονός ότι οι μαθητές της Γ' διαβάζουν για περισσότερο χρόνο σε σχέση με παιδιά άλλων τάξεων λόγω των πανελληνίων και χρειάζονται έστω και αυτόν τον ελάχιστο χρόνο για να χαλαρώσουν από το διάβασμα.



Πόσες μέρες εβδομαδιαίως τρώτε με την οικογένειά σας;	Α' Λυκείου	1.88
	Β' Λυκείου	2.08
	Γ' Λυκείου	2.41

Βιβλιογραφικές αναφορές

Ξενόγλωσση

Arcavi A. (2003). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. Educational Studies in Mathematics, 52, 215-241.

Ben-Zvi, D., &Arcavi, A. (2001). Junior high school students' construction of global views of data and data representations. *Educational studies in mathematics*, *45*(1-3), 35-65.

Ben-Zvi, D., Gil, E., &Apel, N. (2007). What is hidden beyond the data? Young students reason and argue about some wider universe. In *Proceedings of the Fifth International Forum for Research on Statistical Reasoning, Thinking and Literacy. Warwick, UK: University of Warwick*.

Friel, S. N., & Bright, G. W. (1996). Building a Theory of Graphicacy: How Do Students Read Graphs? Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New York. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 395 277)

Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2007). How Students Learn Statistics Revisited: A Current Review of Research on Teaching and Learning Statistics. *International Statistical Review,* 75 (3), 372–396.

Paparistodemou, E., &Meletiou-Mavrotheris, M. (2010, July). Engaging young children in informal statistical inference. In *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics, Ljubljana, Slovenia. Voorburg, the Netherlands: ISI*.

Tufte, E. R. (2001). *The visual display of quantitative information.* Cheshire, CT: GraphicsPress.

Ελληνόγλωση

Αδαμόπουλος, Λ., Δαμιανού, Χ., &Σβέρκος, Α. (1999). ***Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Γ΄ Ενιαίου Λυκείου.***Πάτρα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας και Εκδόσεων «Διόφαντος».

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., &Ρεκούμης, Κ. (2007). *Μαθηματικά Β΄Γυμνασίου*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., &Ρεκούμης, Κ. (2007). *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου*.Βιβλιο εκπαιδευτικού. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

Το Μαθηματικό έργο του Γεμίνου του Ροδίου και η συμβολή του στη θεμελίωση της Μαθηματικής Επιστήμης στην Αρχαία Ελλάδα

Καραγιάννης Ιωάννης, Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών

karagiiv01@yahoo.gr

Τσομαρέλη Τριανταφυλλιά, Σύμβουλος Εκπαίδευσης Αγγλικών

rtsomareli@yahoo.com

Καραγιάννης Βασίλειος, Μαθηματικός

vkaragiannis98@gmail.com

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται ένα τμήμα από το μαθηματικό έργο του Γεμίνου του Ροδίου, Αστρονόμου, Γεωγράφου, Μετεωρολόγου και Μαθηματικού του 2^{ου}-1^{ου} αιώνα π.Χ., ο οποίος έζησε και εργάστηκε στη Ρόδο. Παρότι το έργο του Γεμίνου έχει χαθεί, διασώζονται τμήματά του, κυρίως από αποσπάσματα και αναφορές άλλων μεταγενέστερωνιστορικών. Στο Μαθηματικό έργο του Γεμίνου συγκαταλέγονται έργα στα οποία καταγράφεται και ταξινομείται η μαθηματική επιστήμη μέχρι το 1^{ο} μισό του 1^{ου} αιώνα π.Χ.

Τα έργα αυτά έθεσαν τη βάση σε θέματα κατηγοριοποίησης της μαθηματικής γνώσης, δημιουργώντας τις συνθήκες για περαιτέρω θεμελίωση και ανάπτυξη της Μαθηματικής επιστήμης στην Αρχαία Ελλάδα.

Abstract

This paper presents a part of the mathematical work of Geminus of Rhodes, Mathematician, Astronomer, Geographer and Meteorologist of the 2nd-1st century BC, who lived and worked in Rhodes. Although Geminus’ work is lost, parts of it have survived, mainlythrough extracts and references by subsequent historians. The mathematical work of Geminus includes works in which the mathematical science until the 1st half of the 1st century BC is recorded and classified.

These works laid the foundation for the categorization of mathematical knowledge, creating the conditions for further consolidation and development of the Mathematical Science in Ancient Greece.

Λέξεις κλειδιά

Γεμίνος , Μαθηματικές έννοιες, ορισμοί, αξιώματα, θεωρήματα, προτάσεις, θεμελίωση και ταξινόμηση μαθηματικής επιστήμης, φιλοσοφία, αρχαία Ελλάδα.

Εισαγωγή

Ο Γεμίνος ήταν Αστρονόμος, Μαθηματικός, Μετεωρολόγος και Γεωγράφος που, όπως συμφωνούν οι περισσότεροι ερευνητές, έζησε και δημιούργησε στη Ρόδο τον 2^{ο}-1^{ο} αιώνα π.Χ. (110-40 π.Χ.). Στους ερευνητές ο Γεμίνος είναι περισσότερο γνωστός ως Αστρονόμος επειδή διασώθηκε και μεταφράστηκε σε αρκετές γλώσσες ένα από τα έργα του, το έργο

«Εισαγωγή είς τα φαινόμενα», ενώ το σύνολο του μαθηματικού έργου του έχει χαθεί και υπάρχουν μόνο «σπαράγματα» που διασώθηκαν από μεταγενέστερους ιστορικούς.

Ο σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να αναδείξει τη συμβολή του Γεμίνου στην ιστορική θεμελίωση της μαθηματικής επιστήμης στην αρχαία Ελλάδα. Η παρούσα εργασία ανήκει στο πεδίο της ιστορικής βιβλιογραφικής έρευνας, συνοψίζοντας και ταξινομώντας υλικό που έχει ήδη δημοσιευθεί και είναι σχετικό με το μαθηματικό έργο του Γεμίνου.

Στα επόμενα κατηγοριοποιούμε το μαθηματικό έργο του Γεμίνου, ανά θεματική περιοχή, ώστε να γίνει αντιληπτή η συμβολή του στη θεμελίωση της μαθηματικής γνώσης στην αρχαία Ελλάδα. Από τις πηγές και τα αποσπάσματα που εμπεριέχουν, σε ό,τι αφορά στο μαθηματικό έργο του Γεμίνου, προκύπτουν οι επόμενες θεματικές περιοχές μέσα στα πλαίσια των οποίων διατύπωσε τις απόψεις του:

α) Ταξινόμηση της μαθηματικής επιστήμης

β) Παραδοχές σε ορισμούς, αξιώματα και ερμηνεία μαθηματικών εννοιών

γ) Διατυπώσεις και αποδείξεις προτάσεων και θεωρημάτων

δ) Ιστορικές αναφορές του στο έργο άλλων Μαθηματικών και Αστρονόμων, της εποχής του και προγενέστερων.

Το Μαθηματικό έργο του Γεμίνου

Α. Γενικά

Ο Γεμίνος έγραψε ένα εκτεταμένο μαθηματικό έργο το οποίο αποτελούσε άγνωστος αριθμός βιβλίων. Ο τίτλος αυτού του έργου δεν είναι ακριβώς γνωστός. Ωστόσο έχουν αναφερθεί ο τίτλος «Φιλοκαλία» από τον Πρόκλο (Σπανδάγος 2001, σελ. 164), ο τίτλος «εν τω περί της των μαθηματικών τάξεως» από τον Πάππο (Σπανδάγος, 2001 σελ. 39) και ο τίτλος «εν τω έκτω της των μαθημάτων θεωρίας» από τον Ευτόκιο (Σταμάτης, 1976 σελ. 212). Στο έργο αυτό ο Γεμίνος, σύμφωνα με τις παραπάνω πηγές, διαχώρισε τα μαθηματικά σε κατηγορίες-κλάδους και συγκεκριμένα στην Αριθμητική, τη Γεωμετρία, τη Μηχανική, την Αστρονομία, τη Γεωδαισία, την Κανονική (Θεωρητική Μουσική) και τη Λογιστική (Πρακτική Αριθμητική). Ιστορικά αυτός ο διαχωρισμός της επιστήμης των μαθηματικών είναι ίσως ο πρώτος τόσο πλήρης και σαφής για τα δεδομένα της εποχής (Σπανδάγος, 2012, σελ. 14). Αξίζει να αναφέρουμε ότι η πρώτη προσπάθεια διαχωρισμού και ταξινόμησης των επιστημών έγινε από τον επίσης Ρόδιο σπουδαίο ιστορικό των μαθηματικών Εύδημο τον πρεσβύτερο τον 4^{ο}-3^{ο} αι. π.Χ. στα έργα του με τίτλους Αριθμητική Ιστορία, Γεωμετρική Ιστορία και Αστρολογική Ιστορία (Παπαδομαρκάκης, Τσομαρέλη κ.α., 2011, σελ. 24-26).

Για το μαθηματικό έργο του Γεμίνου υπάρχουν εκτεταμένα αποσπάσματα στα παρακάτω έργα, από όπου αντλούνται και τα σχετικά στοιχεία για τις απόψεις του Γεμίνου σχετικά με τις μαθηματικές έννοιες, ορισμούς, αξιώματα, προτάσεις και θεωρήματα (Σπανδάγος, 2002,σελ. 14):

α) στο «Σχόλια εις το α΄ βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδου» του Πρόκλου (410-485 μ.Χ.).

β) στο «Μαθηματικής επιστήμης εις τα Φυσικά του Αριστοτέλους» του Σιμπλικίου (5^{ος} αι. μ.Χ.).

γ) στο «Σχόλια εις το περί των επιπέδων ισορροπιών του Αρχιμήδους» και στο «Σχόλια εις τα Κωνικά του Απολλωνίου» του Ευτόκιου (490-560 μ.Χ.).

δ) στο «Δαμιανού του Ηλιοδώρου Λαρισαίου κεφάλαια των οπτικών υποθέσεων, βιβλίο β΄» του Δαμιανού (5^{ος} αι. μ.Χ.).

ε) στο «Σχόλια εις τα Στοιχεία του Ευκλείδου» του Al Naiziri (9^{ος} αι. μ.Χ.).

στ) στο “Anomyni variae Collections” του Ήρωνος (Ed. Fridecus Hultsch).

Β. Κατηγοριοποίηση των απόψεων του Γεμίνου ανά θεματική περιοχή

1. Ταξινόμηση της μαθηματικής επιστήμης

α) Ο Γεμίνος ασχολήθηκε επιμελώς με την ταξινόμηση της μαθηματικής επιστήμης. Η ταξινόμηση που προκρίνει ο Γεμίνος είναι αυτή του διαχωρισμού των μαθηματικών σε δύο βασικά μέρη. Το ένα μέρος αφορά τα νοητά όντα και το άλλο μέρος αφορά τα αισθητά. Το πρώτο μέρος υποδιαιρείται στην Αριθμητική και στη Γεωμετρία και το δεύτερο σε έξι επιστήμες: την Αστρονομία, τη Μηχανική, την Οπτική, τη Γεωδαισία, τη Θεωρητική Μουσική και την Πρακτική Αριθμητική (Σπανδάγος, 2002, σελ. 15). Είναι εκπληκτικό ότι ο διαχωρισμός αυτός, στο μεγαλύτερο μέρος του, ισχύει ακόμα και σήμερα. Επίσης αξίζει να παρατηρήσουμε ότι διαχωρίζει την Αριθμητική από την πρακτική Αριθμητική. Το πιθανότερο είναι ότι με τον όρο Αριθμητική εννοεί τη σημερινή Άλγεβρα και με τον όρο πρακτική Αριθμητική εννοεί την επίλυση πρακτικών καθημερινών προβλημάτων, καθώς και τη Λογιστική, με ενδεχόμενο να συμπεριλαμβάνει σε αυτήν και τη Στατιστική ίσως με άλλο όνομα της εποχής του. Ιστορικά η πρώτη διάκριση της πρακτικής και θεωρητικής αριθμητικής έγινε από τον Εύδημο το Ρόδιο τον πρεσβύτερο τον $4^{ο}$-$3^{ο}$ αιώνα π.Χ., στο έργο του «Αριθμητική Ιστορία» που είχε ως αντικείμενο τις πυθαγόρειες απόψεις σχετικά με τους αριθμούς και τις σχέσεις τους με τη μουσική (Παπαδομαρκάκης-Τσομαρέλη κ.α, 2011, σελ. 24-26). Δύο αιώνες αργότερα ο Γεμίνος τόνισε περισσότερο αυτή τη διάκριση συμπεριλαμβάνοντας στην πρακτική Αριθμητική και συλλογές αριθμητικών μεγεθών από παρατηρήσεις για φυσικά και αστρονομικά φαινόμενα που ο ίδιος κατέγραφε και αξιοποιούσε συντάσσοντας ημερολόγια-παραπήγματα (Καραγιάννης -Τσομαρέλη, 2011, σελ. 108-109).

β) Διέκρινε τις γραμμές σε σύνθετες και απλές. Οι απλές γραμμές υποδιαιρούνται σε αυτές που διαμορφώνουν ένα σχήμα και σε εκείνες που δεν ορίζουν κάποιο σχήμα, αλλά εκτείνονται απεριόριστα. Την πρώτη κατηγορία των γραμμών τις ονόμασε

«σχηματοποιούσαι», όπως είναι για παράδειγμα η περιφέρεια ενός κύκλου, η περιφέρεια μιας έλλειψης, η κισσοειδής καμπύλη κ.α. Στη δεύτερη κατηγορία κατέταξε τις ευθείες, τις παραβολές, τις υπερβολές και την κογχοειδή καμπύλη (Σπανδάγος, 2002, σελ. 18).

γ) Ταξινόμησε τις διάφορες γραμμές που δεν ήταν σύνθετες (σύμφωνα με την παραπάνω ταξινόμηση) και τις διέκρινε σε «απλές» και σε «μικτές». Στις «απλές» γραμμές κατέταξε τον κύκλο και την ευθεία και τις «μικτές» τις χώρισε σε «επίπεδες» και σε «γραμμές σε στερεά». Οι «επίπεδες» γραμμές διακρίνονται με τη σειρά τους σε αυτές που τέμνουν τον εαυτό τους και εκείνες που εκτείνονται απεριόριστα. Για παράδειγμα, μια επίπεδη γραμμή που τέμνει τον εαυτό της είναι η κισσοειδής καμπύλη. Οι «γραμμές σε στερεά» διακρίνονται στις «τομές στερεών» και στις «γραμμές περί των στερεών». Για παράδειγμα

«γραμμές σε στερεά» είναι οι κωνικές τομές και οι σπειροειδείς καμπύλες, ενώ στις «γραμμές περί των στερεών» ανήκουν η κυλινδρική έλικα και η σφαιρική έλικα (Σπανδάγος, 2002, σελ.18).

δ) Ταξινόμησε τις διάφορες επιφάνειες σε απλές και σε μικτές, περίπου με τον ίδιο τρόπο που το έπραξε με τις γραμμές. Θεωρούσε απλές τις επίπεδες επιφάνειες και τις σφαιρικές. Παραδείγματα μικτών επιφανειών αποτελούν ο τόρος, οι κωνοειδείς επιφάνειες και τα διάφορα ελλειψοειδή. Γενικότερα ο Γεμίνος σημειώνει εμφατικά ότι υπάρχουν μόνο τρεις ομοιομερείς δηλαδή ομοιόμορφες γραμμές και αυτές είναι: η ευθεία, ο κύκλος και η κυλινδρική έλικα. Με τον ίδιο τρόπο σημειώνει ότι υπάρχουν μόνο δύο ομοιομερείς επιφάνειες, το επίπεδο και η σφαίρα (Tannery, 1915, vol.I, σελ. 223).

ε) Ασχολήθηκε και με την «Ανώτερη Γεωμετρία», αφού διέκρινε τις καμπύλες στις σπειροειδείς, τις κογχοειδείς και τις κισσοειδείς για τις οποίες πιθανότατα απέδειξε τις κύριες ιδιότητές τους (Tittel, 1895).

1. Παραδοχές σε ορισμούς, αξιώματα και ερμηνεία μαθηματικών εννοιών

Ο Γεμίνος ασχολήθηκε επισταμένα με τη Γεωμετρία, αμφισβητώντας έντονα ορισμένες από τις θέσεις του Ευκλείδη. Συγκεκριμένα:

Όρισε τη Γεωμετρία, και καθόρισε τις αρχές της καθώς και τους σκοπούς της Οπτικής, ως επιστήμης. Ιστορικά είναι ο πρώτος που καθόρισε το ακριβές αντικείμενο της επιστήμης της Οπτικής, αφού διέκρινε την Οπτική στη γνήσια, την Κατοπτρική και τη Σκηνογραφική. Επίσης παρέθεσε τους κανόνες της Οπτικής, αφού διατύπωσε τη θεωρία ότι το φως μεταδίδεται κατά μήκος ευθειών γραμμών ή ακολουθεί πορεία τεθλασμένης γραμμής στην περίπτωση της ανακλάσεως (Heath, 1981, σελ. 223).

Ο Γεμίνος, σε ό,τι αφορά στη Γεωμετρία, ασχολήθηκε πρώτα με τους κανόνες και τις υποθέσεις και στη συνέχεια με τα συμπεράσματα, τα θεωρήματα και τα διάφορα προβλήματα. Όπως χαρακτηριστικά ανέφερε πρώτα με «τάς αρχάς και τάς υποθέσεις και ύστερον τα μετά τας αρχάς» (Tannery, 1915, σελ.350).

Η διάκριση των υποθέσεων γίνεται μεταξύ των προτάσεων που θεωρούνται ως δεδομένες αλλά η απόδειξή τους δεν είναι δυνατόν να δοθεί, και των προτάσεων ή των συμπερασμάτων τα οποία είναι θέματα για περιγραφή και απόδειξη. Ο Γεμίνος έδωσε τους κανόνες σύμφωνα με τους οποίους συνίσταται μια μαθηματική πρόταση σε ορισμό, αίτημα ή αξίωμα. Συγκεκριμένα:

α) Έθεσε σε αυστηρή εξέταση και θεμελίωση τους ορισμούς και διαχώρισε τα αιτήματα από τα αξιώματα, συζητώντας παράλληλα τη γνησιότητα ή την αλήθεια των αιτημάτων που διαμορφώθηκαν από τον Ευκλείδη για κάθε κατηγορία (Heath,1981, σελ. 223). Παρακάτω παραθέτουμε μεταφρασμένο το απόσπασμα από το έργο του Πρόκλου που αναφέρεται στη θέση αυτή του Γεμίνου:

«Ο Γεμίνος πολύ σωστά σχολιάζει ότι κάποιοι επινόησαν αποδείξεις για μη επιδεχόμενες αποδείξεων προτάσεις και προσπάθησαν να καθιερώσουν αυτό που όλοι γνωρίζουν διαμέσου των λιγότερο γνωστών μέσων όρων, όπως έκανε ο Απολλώνιος όταν προσπάθησε να αποδείξει την αλήθεια του αξιώματος ότι τα πράγματα που είναι ίσα με το ίδιο πράγμα είναι και μεταξύ τους ίσα. Άλλοι δε και αυτά ακόμη που έχουν ανάγκη από απόδειξη τα θεώρησαν αυταπόδεικτα, όπως έκανε ο ίδιος ο Ευκλείδης με το πέμπτο και το τέταρτο αίτημά του. Δεν χρειάζεται να παραδεχθούμε, λέει ο Γεμίνος, ότι τα αντίστροφα των προτάσεων αυτών είναι μη αποδείξιμα. Έτσι, σύμφωνα με την ταξινόμηση του Γεμίνου, φαίνεται ότι υπάρχουν τρία αξιώματα εφόσον τα άλλα δύο και τα αντίστροφα τους απαιτούν να στηριχθούν με απόδειξη» (Μετάφραση: Σπανδάγος, 2001, σελ 372). Επιπλέον, ο Γεμίνος λέει ότι αποτελεί πλεονασμό να συμπεριληφθεί μεταξύ των αξιωμάτων η πρόταση: Δύο γραμμές δεν ορίζουν ένα χωρίο, αν μπορεί να καθιερωθεί με απόδειξη(Σπανδάγος, 2001, σελ. 367). Σχετικά με το τέταρτο αίτημα του Ευκλείδη, ο Πρόκλος, σε άλλο σημείο του έργου του, αναφέρει ότι: «Αν παραδεχτούμε ότι η πρόταση αυτή είναι αυταπόδεικτη και δεν απαιτεί απόδειξη, δεν είναι αίτημα σύμφωνα με το Γεμίνο, αλλά αξίωμα, γιατί αποδίδει μια εσωτερική ιδιότητα στις ορθές γωνίες και δεν ζητά να παραχθεί κάτι με απλή θεώρηση. Ούτε είναι αίτημα, σύμφωνα με την ταξινόμηση του Αριστοτέλη, διότι σύμφωνα με την άποψη αυτή ένα αίτημα απαιτεί και απόδειξη. Αλλά αν πούμε ότι μπορεί να αποδειχθεί και επιχειρήσουμε να το αποδείξουμε, ούτε τότε, σύμφωνα με την άποψη του Γεμίνου, θα βρισκόταν μεταξύ των αιτημάτων» (Μετάφραση: Σπανδάγος, 2001, σελ. 372).

β) Έδωσε μεγάλη σημασία στη διατύπωση των ορισμών και τους εξέτασε με προσοχή, ιστορικά κυρίως, παραθέτοντας τις διάφορες εναλλακτικές διατυπώσεις που είχαν προταθεί για τις θεμελιώδεις έννοιες γραμμή, επιφάνεια, σχήμα, γωνίες, σημείο κ.α. (όπως προκύπτει από το στοιχείο 1 γ και δ).

γ) Εξέτασε διάφορα φιλοσοφικά ζητήματα όπως την έννοια του απείρου, καθώς και το ερώτημα αν μια γραμμή μπορεί να αποτελείται από αδιαίρετα τμήματα. Το παραπάνω ερώτημα το προσέγγισε σε συνδυασμό με την πρόταση 10 του α΄ βιβλίου των «Στοιχείων» του Ευκλείδη[1] (M. Halma, 1819). Αναφορά στο όνομά του και την ενασχόληση του Γεμίνου με τη φιλοσοφική θεωρία του απείρου ή του «απέραντου», όπως συνήθως το ονόμαζε, υπάρχει σε κείμενο του Ανδρόνικου του Ροδίου[2] (Καραγιάννης, Τσομαρέλη, 2018, σελ.72). Μελέτησε για παράδειγμα κατά πόσο η έννοια του απείρου είναι συνυφασμένη με την πεπερασμένη διάσταση της φύσης όπως την αντιλαμβανόμαστε οι άνθρωποι (Manitius, 1898). Είχε, για τον λόγο αυτό, διατυπώσει και τις επιφυλάξεις του ως προς τη γεωμετρική έννοια της ευθείας, αφού σε ένα πεπερασμένο «κόσμο» (Σύμπαν) η απεραντοσύνη της ευθείας δεν θα είχε νόημα. Αυτό και το αξίωμα των παραλλήλων ευθειών ήταν η αρχική αμφισβήτηση του Ευκλείδη από τον Γεμίνο.

[1] «Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖ**ν**» (να διχοτομηθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα).

[2] Ανδρόνικος ο Ρόδιος: Ιστορικός και Συγγραφέας κατά τον 2ο- 1ο αιώνα π. Χ.

1. Διατυπώσεις και αποδείξεις προτάσεων και θεωρημάτων

α) Ο Γεμίνος τόνιζε επιμένοντας, όπως προκύπτει από τις πηγές όλων των ιστορικών που προαναφέραμε, ότι είναι μάταιο να επιχειρήσει να αποδείξει κανείς το αυταπόδεικτο, αλλά είναι επίσης μεγάλο λάθος να υποθέτει κανείς προτάσεις που απαιτούν πραγματικά απόδειξη, και ως παράδειγμα είχε πάντα τον Ευκλείδη για το τέταρτο και το πέμπτο αξίωμα.[3] Ο Γεμίνος έδωσε μεγάλη προσοχή στη διάκριση των αιτημάτων και των αξιωμάτων και παράθεσε απόψεις προγενέστερων μαθηματικών και φιλοσόφων, ενώ παράλληλα παρουσίασε και τις δικές του απόψεις, τολμώντας να αμφισβητήσει και κυρίαρχες για την εποχή αντιλήψεις (Tittel, 1895).

Ειδικά στο σημείο αυτό θα σταθούμε παρουσιάζοντας μια ιστορική αλήθεια, όπως προκύπτει από τις πηγές τόσο του Πρόκλου όσο και του Συμπλικίου, αλλά και των άλλων ιστορικών πηγών που αναφέραμε. Αμφισβητώντας λοιπόν έντονα το πέμπτο αξίωμα του Ευκλείδη, αυτό δηλαδή των παραλλήλων, προσπάθησε να δώσει ο ίδιος έναν ορισμό παρόμοιο με αυτόν του Ποσειδωνίου του Ροδίου από τον οποίο ο Γεμίνος είχε επηρεαστεί πολύ. Στηριζόμενος στην έννοια της ίσης απόστασης μεταξύ δύο ευθειών, ο Γεμίνος έδωσε τον ακόλουθο ορισμό: «Δύο ευθείες είναι παράλληλες αν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και η απόσταση μεταξύ τους, αν προεκταθούν επ΄ αόριστο και προς τις δύο κατευθύνσεις τους ταυτόχρονα, είναι παντού η ίδια» (Heath,1990 vol.II, σελ. 229). Σημειώνει ακόμα ότι η απόσταση στην οποία αναφέρεται είναι το μικρότερο ευθύγραμμο τμήμα που μπορεί να σχεδιαστεί μεταξύ των παραλλήλων (αποφεύγοντας με τον τρόπο αυτό να μιλήσει για κάθετο ευθύγραμμο τμήμα ή για την έννοια της ορθής γωνίας για να μην υιοθετήσει κάποιο από τα αξιώματα του Ευκλείδη).

Ο Γεμίνος προσπάθησε να αποδείξει το αξίωμα της παραλληλίας. Αρχικά έθεσε δύο θεωρήματα τα οποία προηγουμένως θα έπρεπε να αποδείξει (Manitius, 1898).

Θεώρημα πρώτο: Το τμήμα που εκφράζει την απόσταση μεταξύ δύο ευθειών, όπως αυτή ορίζεται παραπάνω, είναι κάθετο και στις δύο ευθείες.

Θεώρημα δεύτερο: Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι κάθετο σε δύο ευθείες και τέμνει και τις δύο, τότε οι δύο ευθείες είναι παράλληλες και η απόστασή τους είναι το περιεχόμενο κάθετο ευθύγραμμο τμήμα.

Αμέσως μετά ο Γεμίνος απέδειξε τις προτάσεις 27, 28, 29, 30, 31, 33, 34 του α΄ βιβλίου των «Στοιχείων» του Ευκλείδη καθώς και το αντίστροφο της πρότασης 28 επίσης του α΄ βιβλίου των «Στοιχείων» του Ευκλείδη.

Η απόδειξη που επιχείρησε να δώσει ο Γεμίνος για να αποδείξει το αξίωμα των παραλλήλων που αναφέρεται από τον Heath (Heath, 1990 vol. II, σελ. 229) ήταν φαινομενικά σωστή, όμως δεν ευσταθεί διότι πριν χρησιμοποιηθεί ο ορισμός των παραλλήλων που έδωσε ο Γεμίνος πρέπει να αποδειχθεί ότι: «Ο Γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από μία ευθεία είναι επίσης ευθεία», κάτι όμως το οποίο δεν μπορεί να αποδειχθεί χωρίς τη χρήση κάποιου αξιώματος.

Ο Γεμίνος εξέτασε τη φύση των γεωμετρικών στοιχείων, τις διαφορετικές απόψεις που υπήρχαν σχετικά με τη διάκριση θεωρημάτων και προβλημάτων, τη φύση αλλά και τις προϋποθέσεις, ώστε να επιδέχεται λύση ένα πρόβλημα, καθώς και την έννοια του «πορίσματος» όπως την είχε διατυπώσει ο Ευκλείδης στο χαμένο έργο του «Πορίσματα». Μελέτησε ακόμα τα δύο είδη αντίστροφων προτάσεων, δηλαδή τις πλήρεις και τις μερικές, καθώς και τα θεωρήματα των γεωμετρικών τόπων (Σπανδάγος, 2002, σελ. 22).

β) Απέδειξε την πρόταση: «Αν φέρουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα από ένα τυχαίο σημείο, έτσι ώστε να τέμνουν μια ομοιόμορφη γραμμή και να σχηματίζουν με αυτή ίσες γωνίες, τότε τα τμήματα είναι ίσα» (Manitius, 1898).

[3] Το τέταρτο ήταν το αίτημα της ισότητας των ορθών γωνιών και το πέμπτο ήταν το αίτημα των παραλλήλων.

γ) Απέδειξε ότι υπάρχουν τρεις ομοιόμορφες[4] γραμμές, η ευθεία, η περιφέρεια του κύκλου και η κυλινδρική έλικα. Ειδικά για την κυλινδρική έλικα αναδιατύπωσε την αλήθεια των απόψεων του Απολλωνίου (Evans J., Berggren J., 2006).

δ) Απέδειξε το θεώρημα: «Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα διολισθαίνει με τα άκρα του πάνω στις πλευρές μιας ορθής γωνίας, τότε το μέσο του διαγράφει περιφέρεια κύκλου, ενώ το καθένα από τα άλλα σημεία του διαγράφει περιφέρεια ελλείψεως» (Ver Eecke Paul, 1948, σελ. 95). Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε ότι δεν γνωρίζουμε την απόδειξη του θεωρήματος αυτού που δόθηκε από τον Γεμίνο (Ver Eecke Paul, 1948 , σελ. 96).

Μεταγενέστερες όμως αποδείξεις δόθηκαν από τον ερευνητή Paul Ver Eecke ως μια πιθανή προσέγγιση της απόδειξης του Γεμίνου και η οποία στηρίζεται στην εφαρμογή των όμοιων τριγώνων που σχηματίζονται και στην αναλογία των πλευρών τους (Ver Eecke Paul, 1948, σελ. 95-96).

ε) Είναι πολύ πιθανό ο Γεμίνος αρχικά να προσπάθησε να λύσει το «Δήλιον πρόβλημα» και κατόπιν να προσπάθησε να κατασκευάσει όργανο για τη χάραξη της κισσοειδούς καμπύλης. Δυστυχώς δεν διασώθηκε μεγάλο μέρος του μαθηματικού έργου του Γεμίνου, τοοποίο είναι πιθανό να περιέχει τις αποδείξεις αυτές, αφού οι όποιες αναφορές του δηλώνουν ότι είχε προσεγγίσει τη λύση του.

στ) Ο Γεμίνος είχε ασχοληθεί ιδιαίτερα με ένα έργο του Ευκλείδη που ονομαζόταν «Πορίσματα» το οποίο έχει χαθεί. Αυτό προκύπτει από την αναφορά του στα σωζόμενα αποσπάσματα του έργου του «Εν τω περί της των μαθηματικών τάξεως» που αναφέρεται από τον Πρόκλο «Πορισμάτων δε του Ευκλείδου αναπόδεικτων τούτων…». Στο κείμενο αυτό έχουν χαθεί οι προηγούμενες και οι επόμενες λέξεις κατά την μετεγγραφή (Tannery, 1915).

Τέλος, είναι ιδιαίτερα χρήσιμο να αναφερθούμε στους μαθηματικούς υπολογισμούς που υπάρχουν στο κεφάλαιο με τίτλο «Περί εξελιγμού[5]» στο έργο του «Εισαγωγή εις τα φαινόμενα». Στο κεφάλαιο αυτό ο Γεμίνος, με πολύπλοκους υπολογισμούς και τεχνάσματα, επιδίδεται σε μετρήσεις γωνιών και αποστάσεων χρησιμοποιώντας τους «πίνακες χορδών του Ιππάρχου», καθώς και ιδιότητες όρων της αριθμητικής προόδου (όπως τους διαδοχικούς όρους της). Είναι αναπάντητο όμως το ερώτημα με ποιον τρόπο ή με τη χρήση ποιων αστρονομικών οργάνων ο Γεμίνος κατέληξε στις μετρήσεις αυτές, οι οποίες είναι απόλυτα ακριβείς. Περαιτέρω έρευνες σχετικά με το θέμα αυτό θέτουν το ερώτημα «Ποια ηςχέση του Γεμίνου με τον μηχανισμό των Αντικυθήρων;», υπονοώντας ότι ο Γεμίνος χρησιμοποιούσε όργανο μετρήσεων παρόμοιο σε δυνατότητες με αυτό του μηχανισμού των Αντικυθήρων (Καραγιάννης, Τσομαρέλη, 2011, σελ.145-148).

2. Ιστορικές αναφορές του στο έργο άλλων Μαθηματικών και Αστρονόμων, της εποχής του και προγενέστερων.

α) Ανέφερε ότι πριν την εποχή του Απολλωνίου οι Μαθηματικοί της εποχής θεωρούσαν ότι ο κώνος προέρχεται από την περιστροφή ενός ορθογωνίου τριγώνου γύρω από μια κάθετη πλευρά του και επομένως είχαν την αντίληψη ότι όλοι οι κώνοι είναι ορθοί (Σταμάτης, 1976, σελ. 52).

β) Έδωσε την περιπατητική εξήγηση του ονόματος των Μαθηματικών, αφού υποστήριξε ότι τον όρο αυτό τον χρησιμοποίησαν πρώτοι οι Πυθαγόρειοι για την Αριθμητική και τη Γεωμετρία και αργότερα επεκτάθηκε από μεταγενέστερους συγγραφείς για να αποδώσει την έννοια που εμείς σήμερα ονομάζουμε Εφαρμοσμένα Μαθηματικά (Σπανδάγος 2002, σελ.15).

[4] Ομοιομορφία (ή ομοιομέρεια) ονομάζεται η ιδιότητα, σύμφωνα με την οποία κάθε τμήμα της γραμμής συμπίπτει με κάθε άλλο τμήμα της, του ίδιου μήκους.

[5] Εξελιγμός ονομάζεται το ελάχιστο χρονικό διάστημα που περιέχει ακέραιο αριθμό σεληνιακών μηνών, ακέραιο αριθμό ημερών και ακέραιο αριθμό αποκαταστάσεων της Σελήνης.

γ) Αναφέρεται στον Ίππαρχο το Ρόδιο, σε ό,τι αφορά στην ακρίβεια των αστρονομικών μετρήσεων του, στο τελευταίο κεφάλαιο του βιβλίου του «Εισαγωγή εις τα φαινόμενα» που ονομάζεται «Εξελιγμός», καθώς επιβεβαιώνει την ορθότητά τους με διαφορετική μαθηματική προσέγγιση από αυτήν του Ιππάρχου σε ορισμένες περιπτώσεις. Επίσης αναφέρεται σε άλλους μαθηματικούς και αστρονόμους όπως τον Ποσειδώνιο το Ρόδιο, στου οποίου τη σχολή πιθανόν υπήρξε μαθητής, τον Άτταλο το Ρόδιο, τον Εύδημο το Ρόδιο, τον Ερατοσθένη, τον Αρίσταρχο το Σάμιο κ.α (Λεξικό Σούδας, 2011, Gelder H.Van, 1900, σελ.123).

Συμπεράσματα

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι ο Γεμίνος ο Ρόδιος είχε μεγάλη συνεισφορά στα θέματα της ταξινόμησης και της κατηγοριοποίησης της μαθηματικής γνώσης, στην ερμηνεία μαθηματικών εννοιών, στη διατύπωση, στην απόδειξη και στην επαλήθευση προτάσεων και θεωρημάτων, καθώς και σε ιστορικές αναφορές στο έργο προγενέστερων Μαθηματικών και Αστρονόμων. Ίσως δε ήταν ο πρώτος που με τόσο συστηματικό τρόπο έβαλε τα θεμέλια, την τάξη και τους κανόνες για τους μετέπειτα μαθηματικούς και φιλοσόφους για τη διατύπωση θεωριών, προτάσεων και συμπερασμάτων με αυστηρά μαθηματικό τρόπο. Από την άλλη πλευρά διαπιστώνουμε ότι ο Γεμίνος ο Ρόδιος είχε κριτικήδιάθεση και σκέψη, διατύπωνε την άποψή του και δεν δίσταζε να αμφισβητήσει θέματα για τα οποία υπήρχε έως τότε καθολική αποδοχή, που όμως σε κάποιες περιπτώσεις, όπως απέδειξε και η μετέπειτα έρευνα, δεν ήταν τόσο «καθολική» όσο νομίζαμε. Αν και ο Γεμίνοςείναι περισσότερο γνωστός στους ερευνητές ως Αστρονόμος, εν τούτοις η συνεισφορά του στη θεμελίωση και την ταξινόμηση της μαθηματικής επιστήμης στον αρχαίο κόσμο ήταν σημαντική.

Βιβλιογραφία

Bekker August Immanuel (1854) «Λεξικό Σουίδα (Σούδα)», Γεωργιάδης-Βιβλιοθήκη των Ελλήνων (ανατύπωση 2011), Αθήνα.

Evans J. and Berggren (2006) “Géminos: Introduction aux phénomènes”, Princeton University Press, New York.

Gelder H. Van (1900) “Geschichte der alten Rhodier”, Haag, (Ανατύπωση 1991, Σύλλογος διατήρησης της Αρχιτεκτονικής και Πολιτιστικής Κληρονομιάς Ρόδου, Ρόδος), Ρόδος.

Halma M (1819*)* **«**Γεμίνου: Είσαγωγή είς τά φαινόμενα», ed. M. Halma, Paris.

Heath Thomas (1981 και 1990) “A History of Greek Mathematics” (vol.II), Dover, N.York.

Καραγιάννης Ι. και Τσομαρέλη (2011) **«**Γεμίνος ο Ρόδιος: Μια ιστορική προσέγγιση τηςζωής και του έργου του», Αυτοέκδοση, Ρόδος.

Καραγιάννης Ι. και Τσομαρέλη (2018) «Αρχαίοι Ρόδιοι και Κώοι επιφανείς-Μια ιστορική προσέγγιση της ζωής και του έργου τους», Αυτοέκδοση, Ρόδος.

Manitius Carolus (1898) “Gemini Elementa astronomiae”, Teubneri, Stutgardiae.

Παπαδομαρκάκης Ι. και Τσομαρέλη κ.α. (2011), «Αρχαίοι Ρόδιοι Μαθηματικοί και Αστρονόμοι», Αυτοέκδοση, Ρόδος.

Σπανδάγος Ευάγγελος (2001**) «**Σχόλια είς τό πρώτο των Ευκλείδου Στοιχείων του Πρόκλου, τόμος Α», Αίθρα, Αθήνα.

Σπανδάγος Ευάγγελος (2001) «Η Συναγωγή του Πάππου του Αλεξανδρέως, τόμος Β»,Αίθρα, Αθήνα.

Σπανδάγος Ευάγγελος (2002) **«**Η Εισαγωγή εις τα Φαινόμενα του Γεμίνου του Ροδίου», Αίθρα, Αθήνα**.**

Σταμάτης Ευάγγελος (1976) **«**Απολλωνίου Κωνικά»,τόμος Δ, Τ.Ε.Ε., Αθήνα. **Tannery Paul** (1915) “Mémoires scientifiques” (vol. I-II), Gauthier-Villars, Paris.**Tittel Karl** (1895) “De Gemini Studiis Mathematici”, Leipzig.

Ver Eecke Paul (1948) “Proclus de Lycie”, descle de Brouwer, Bruges.

Σχεδιασμός Μαθήματος στα Μαθηματικά της Α΄ Γυμνασίου στο πλαίσιο διδασκαλίας για τον θεσμό του μέντορα

Θεοφίλου Μαριέττα, Μαθηματικός, 1ο Γυμνάσιο Ρόδου,
theofilou.m@gmail.com

Περίληψη

Το συγκεκριμένο σχέδιο διδασκαλίας έχει σχεδιαστεί για να χρησιμοποιηθεί ως δειγματική διδασκαλία στο πλαίσιο του θεσμού του Μέντορα σχολικής μονάδας. Έχει επιλεχθεί η ενότητα των εφεξής γωνιών της Α΄ τάξης του Γυμνασίου και έχει παρουσιαστεί σε κανονική τάξη του 1ου Γυμνασίου Ρόδου.

Οι δραστηριότητες και το φύλλο εργασίας στηρίζονται στη διερευνητική ομαδοσυνεργατική μάθηση.
Λέξεις Κλειδιά: Σχέδιο Μαθήματος, Μαθηματικά ,Εφεξής γωνίες, Μέντορας.

ΣΧΕΔΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΣΤΙΣ ΕΦΕΞΗΣ ΓΩΝΙΕΣ

Ονοματεπώνυμο δημιουργού: Μαριέττα ΘεοφίλουΤάξη: Α΄ Γυμνασίου
Μάθημα: Γεωμετρία
Διδακτική ενότητα: Εφεξής γωνίες
Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας : Μία διδακτική ώρα Χώρος υλοποίησης: Αίθουσα διδασκαλίας

Σύντομη περιγραφή

Εισάγεται στους μαθητές/τριες για πρώτη φορά , η έννοια των εφεξής γωνιών. Η έννοια αποτελεί την βάση για τον ορισμό των διαδοχικών γωνιών, την εύρεση του αθροίσματος δύο ή περισσοτέρων γωνιών και τον ορισμό των συμπληρωματικών και παραπληρωματικών γωνιών.

Διδακτικοί στόχοι

Επιθυμούμε οι μαθητές και οι μαθήτριες μετά το τέλος της διδακτικής διαδικασίας

- Να μπορούν να εντοπίζου τα κοινά σημεία δύο ή περισσοτέρων γωνιών.
- Να μπορούν να αναγνωρίζουν αν δύο γωνίες είναι εφεξής.
- Να σχεδιάζουν εφεξής γωνίες
- Να διατυπώνουν τον ορισμό των εφεξής γωνιών.

Παράλληλοι στόχοι

Να αναπτύξουν την κριτική τους ικανότητα και δεξιότητες συνεργασίας.

Προαπαιτούμενες γνώσεις και δεξιότητες

Για την επίτευξη των διδακτικών στόχων που τίθενται, οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν:

- την έννοια της γωνίας και των στοιχείων της.
- να ονομάζουν γωνίες
- να μετρούν γωνίες, χρησιμοποιώντας το μοιρογνωμόνιο.
- να κατασκευάζουν γωνίες με γνωστό μέτρο.
- να αποτυπώνουν γωνίες σε διαφανές χαρτί.

Γνωστική δυσκολία

οι μαθητές-τριες δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν ότι οι γωνίες δενείναι εφεξής, όταν έχουν κοινή κορυφή, κοινή πλευρά και κοινά εσωτερικά σημεία.

Διδακτική στρατηγική: καθοδηγούμενη μεικτή ανακάλυψη

Η διδακτική προσέγγιση της ενότητας στηρίζεται στη διερευνητική μάθηση μέσω δράσεων και του φύλλου εργασίας.

Τρόπος οργάνωσης: οι μαθητές θα εργαστούν σε ομάδες των 4-5 ατόμων και ατομικά .

Μέσα διδασκαλίας

φύλλο εργασίας, χάρτινα ομοιώματα γωνιών σε διαφορετικά χρώματα, διαφανές χαρτί, γεωμετρικά όργανα, πίνακας, φορητός υπολογιστής και βιντεοπροβολέας , μαθηματικό λογισμικό Geogebra και μαθησιακά αντικείμενα από το φωτόδεντρο

Πορεία διδασκαλίας

Ετυμολογία της λέξης εφεξής

- διαχρονικό δάνειο από την αρχαία ελληνική ἐφεξῆς < ἐπί + ἑξῆς > στο εξής.
- σημασιολογικό δάνειο από την Γαλλική λέξη adjacent(ο διπλανός,ο πλαϊνός)

Έλεγχος προαπαιτούμενων γνώσεων

(προβολή http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2208)

- για να υπενθυμίσουμε στα παιδιά την έννοια της γωνίας και των στοιχείων της
- στο σχήμα της δραστηριότητας τοποθετούμε νέα σημεία, ώστε να διαπιστώσουμε:
- αν τα παιδιά αναγνωρίζουν ποια σημεία ανήκουν στην κυρτή η μη κυρτή γωνία και
- αν μπορούν να ονομάζουν τις γωνίες σε δοσμένο σχήμα._

Αφόρμηση

(προβολή **http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2233)**

Ένα ραντάρ στο αεροδρόμιο Ελευθέριος Βενιζέλος στην Αθήνα.ελέγχει τις περιοχές:

- Κύθηρα-Κω
- Κω – Χίο

Στην δραστηριότητα του φωτόδεντρου διαφοροποιούνται τα ερωτήματα ώστε τα παιδιάνα προϊδεαστούν στην έννοια των εφεξής γωνιών.

Δραστηριότητα της σελ 173 του σχολικού βιβλίου και πειραματισμός με γωνίες από χαρτόνι (http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2184)

- στη δραστηριότητα του σχολικού βιβλίου ζητείται από τα παιδιά να αναγνωρίσουν τα κοινά σημεία δύο γωνιών

Με γωνίες από χαρτόνι τα παιδιά πειραματίζονται στις σχετικές θέσεις δύο γωνιών ώστε :

- να εντοπίσουν με χειραπτικό τρόπο τα κοινά σημεία δύο γωνιών στο επίπεδο.
- να ανακαλύψουν ότι δύο γωνίες του επιπέδου, με κοινή κορυφή και κοινή πλευρά, μπορεί νά έχουν και άλλα κοινά σημεία, (άρση της υπάρχουσας γνωστικής δυσκολίας.
- να αντιληφθούν ότι γωνίες με κοινή κορυφή και κοινή πλευρά υπάρχουν και στο χώρο. Η παρατήρηση αυτή θα τα οδηγήσει στη πληρέστερη διατύπωση του ορισμού των εφεξής γωνιών.

Διανέμεται το φύλλο εργασίας με τις παρακάτω δραστηριότητες1η δραστηριότητα

- παρατηρούν, αναγνωρίζουν τα κοινά στοιχεία δύο γωνιών και οδηγούνται στον **ορισμό** των **εφεξής γωνιών.**

2η δραστηριότητα

σε σχήματα με σχετικές θέσεις γωνιών **παρατηρούν**, **αναγνωρίζουν τα κοινά σημεία, ελέγχουν αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του ορισμού, προβληματίζονται** και **συμπεραίνουν** ποιες γωνίες είναι εφεξής

3η δραστηριότητα

- σχεδίαση εφεξής γωνιών με αποτύπωση σε **διαφανές χαρτί.4η δραστηριότητα**
- σχεδίαση εφεξής γωνιών με χρήση **γεωμετρικών οργάνων.5η δραστηριότητα (ατομική)**
- αναγνωρίζουν τις εφεξής γωνίες που υπάρχουν σε γεωμετρικό σχήμα.

Ανακεφαλαίωση

(προβολή http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2363)
με αφετηρία το δυναμικό σχήμα της δραστηριότητας που προβάλλεται, τα παιδιά καθοδηγούν τον διδάσκοντα ώστε να γίνουν οι δοσμένες γωνίες εφεξής, πειραματίζονται με νέες γωνίες , θέτουν τα δικά τους ερωτήματα και απαντούν στα ερωτήματα της δεύτερης δραστηριότητας που αφορούν τις εφεξής γωνίες.

Η εργασία για το σπίτι στοχεύει:

- στη σχεδίαση εφεξής γωνιών με γεωμετρικά όργανα.
- στην αναγνώριση εφεξής γωνιών σε γεωμετρικά σχήματα
- στην επανάληψη εννοιών :αντικείμενες, κάθετες ημιευθείες ,διχοτόμος γωνίας
- στην επανάληψη δεξιοτήτων: κατασκευή γωνιών με γνωστό μέτρο, κατασκευή διχοτόμου γωνίας, σύγκριση γωνιών.

Επέκταση

- Η 3 και 4 δραστηριότητα του φύλλου εργασίας , θα μας οδηγήσουν στο επόμενο μάθημα στην εύρεση του αθροίσματος γωνιών.
- Η άσκηση 1 από τις εργασίες για το σπίτι ,θα μας βοηθήσει να εισάγουμε σεεπόμενο μάθημα την έννοια των παραπληρωματικών και συμπληρωματικών γωνιών.

Το φύλλο αξιολόγησης στοχεύει:

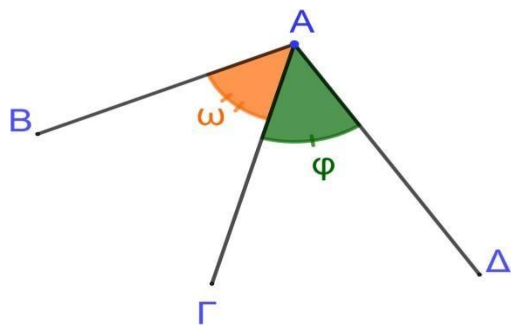
- Να διαπιστωθεί αν τα παιδιά μπορούν να σχεδιάζουν εφεξής γωνίες
- Να διαπιστωθεί αν τα παιδιά μπορούν να αναγνωρίσουν εφεξής γωνίες σε ένα γεωμετρικό σχήμα

Φύλλο εργασίας στις εφεξής γωνίες

1η δραστηριότητα

Να παρατηρήσετε το διπλανό σχήμα και να γράψετε τα κοινά στοιχεία των γωνιών $\hat{\omega}$ και $\hat{\phi}$.

1. ....
2. ....

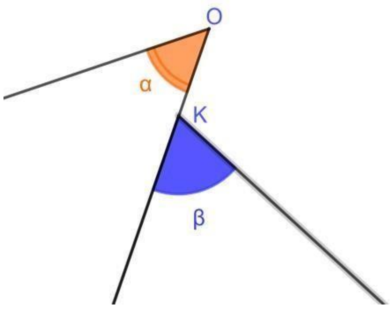


Δύο γωνίες, όπως οι γωνίες $\hat{\omega}$ και $\hat{\phi}$, που βρίσκονται στο ίδιο ------------- και έχουν την

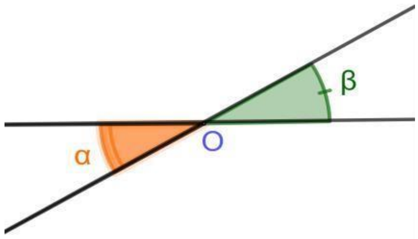
- - -   - - - - - -   , μία---------------------------------- και κανένα άλλο κοινό σημείο, θα τις ονομάσουμε **εφεξής γωνίες.**

2η δραστηριότητα

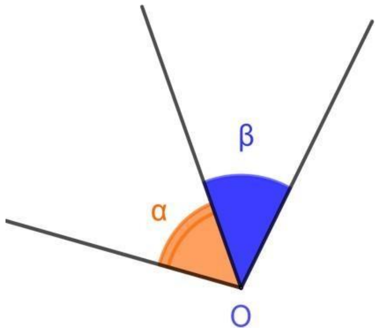
Να βάλετε σε κύκλο τα σχήματα, που οι γωνίες α και β είναι εφεξής.



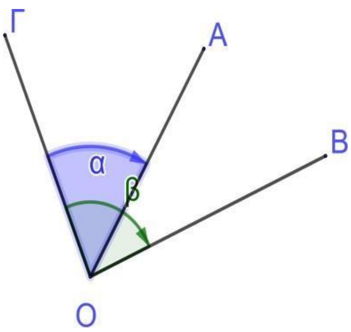
σχήμα 1



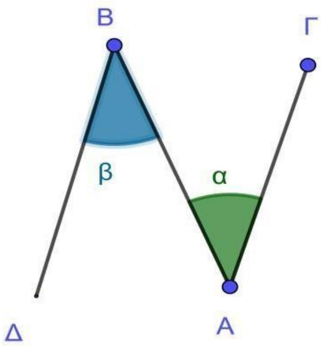
σχήμα 2



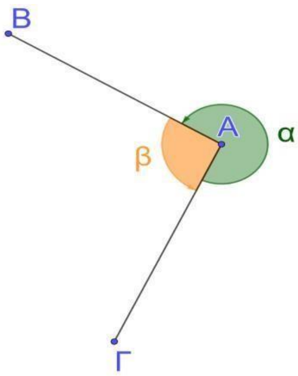
σχήμα 3



σχήμα 4



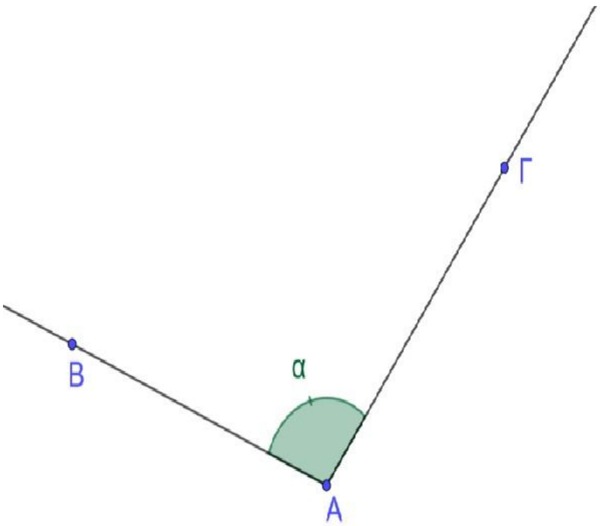
σχήμα 5

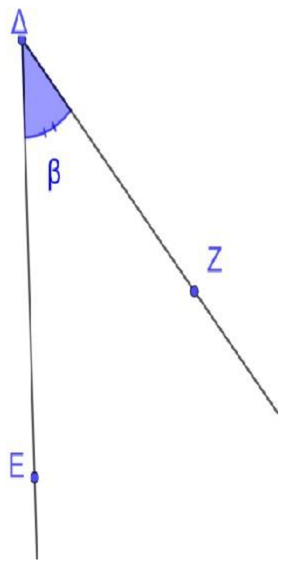


σχήμα 6

3η δραστηριότητα

Δίνονται οι γωνίες $\widehat{BA\Gamma}$ και $\widehat{E\Delta Z}$, να τις αποτυπώσετε σε **διαφανές χαρτί,** να τις φέρετε σε θέση τέτοια, ώστε να γίνουν εφεξής.



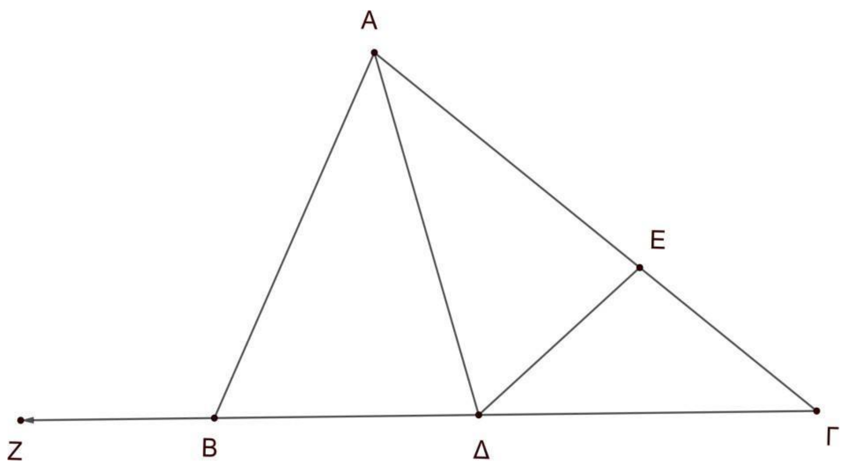


4η δραστηριότητα

Να σχεδιάσετε δύο εφεξής γωνίες με μέτρα 48º και 104º

5η δραστηριότητα

Να γράψετε όλα τα ζεύγη των εφεξής γωνίες που υπάρχουν παρακάτω σχήμα.



Εργασία για το σπίτι

Η θεωρία είναι στη σελίδα **173** του σχολικού βιβλίου.
Να λύσετε στις ασκήσεις 1 και 3 της σελ. 175 του σχολικού βιβλίου και στις παρακάτω ασκήσεις:

Άσκηση 1

α) Να σχεδιάσετε δύο εφεξής γωνίες που οι μη κοινές πλευρές τους να είναι αντικείμενες ημιευθείες.
β) Να σχεδιάσετε δύο εφεξής γωνίες που οι μη κοινές πλευρές τους να είναι κάθετεςημιευθείες.

Άσκηση 2

α) Να σχεδιάσετε δύο εφεξής γωνίες $\widehat{AOB}$ =46º και $\widehat{BO\Gamma}$ =70º

β) Να σχεδιάσετε τη διχοτόμο Οx της γωνίας $\widehat{AOB}$ και τη διχοτόμο Οy της γωνίας $\widehat{BO\Gamma}$

γ) Να μετρήσετε με το μοιρογνωμόνιο τις γωνίες $\widehat{AO\Gamma}$ και $\widehat{xoy}$

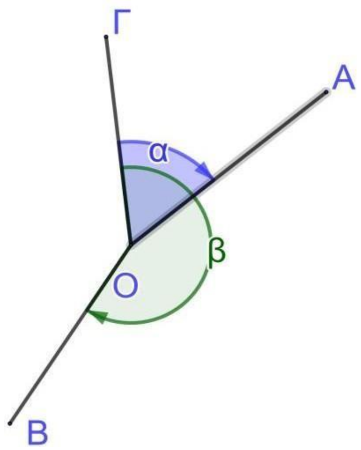
δ) Να συγκρίνεται την γωνία $\widehat{xoy}$ με την γωνία $\widehat{AO\Gamma}$

ΦΥΛΛΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ (ατομικό)
(Διάρκεια 6 min)

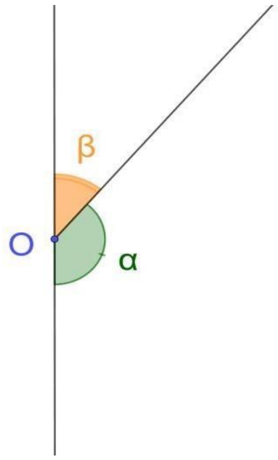
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:...

Άσκηση 1

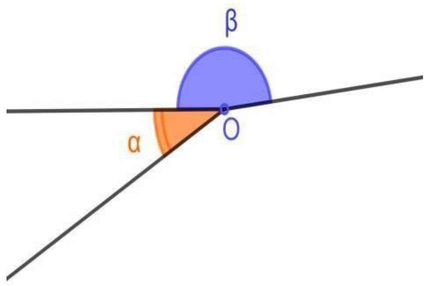
Να βάλετε σε κύκλο τα σχήματα, που οι γωνίες α και β είναι εφεξής.



σχήμα 1



σχήμα 2



σχήμα 3

Άσκηση 2

Να σχεδιάσετε με γεωμετρικά όργανα δύο εφεξής γωνίες .

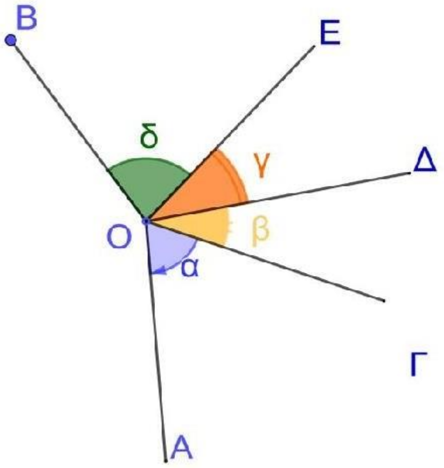
Άσκηση 3

Παρατηρήστε το διπλανό σχήμα και να γράψετε 3 ζεύγη εφεξής γωνιών:

α) . ...

β) ....

γ) ....



Βιβλιογραφία - Δικτυογραφία - Εκπαιδευτικό Υλικό

Αργυρόπουλος Η., κ.α., Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ Γενικού Λυκείου, τεύχος α΄, εκδόσεις Διόφαντος, Αθήνα.

Βανδουλάκης Ι, κ.α., «Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου» (Σχολικό βιβλίο), εκδόσεις Διόφαντος , Αθήνα.

Βανδουλάκης Ι, κ.α., «Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου» (Εμπλουτισμένο βιβλίο), εκδόσεις Διόφαντος , Αθήνα.

Βανδουλάκης Ι, κ.α., «Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου» (βιβλίο εκπαιδευτικού), εκδόσεις Διόφαντος , Αθήνα.

Περιοδικό Ευκλείδης Α΄(2013)**,** τεύχος 90, εκδόσεις: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Αθήνα

Διαθεματικό ενιαίο πλαίσιο προγράμματος σπουδών μαθηματικών

Εργαστήριο Μαθηματικών Διδακτικής και Πολυμέσων του Πανεπιστημίου Αιγαίου

«Δομή εκπαιδευτικού σεναρίου, από την ταχύρυθμη επιμόρφωση εκπαιδευτικών στην εξ αποστάσεως εκπαίδευση Τ4Ε Δομή σχεδίου μαθήματος από το Εξειδικευμένο TEMPLATE για εκπαιδευτικά σενάρια μαθηματικών (SOCIOCONSTRUCTIONIST LEARNING) https://photodentro.edu.gr/ls/handle/8585/126?&locale=el»

Οδηγίες διδασκαλίας και διαχείρισης της ύλης στα Μαθηματικά Γυμνασίου από το Ι.Ε.Π. για το σχολικό έτος 2022-2023.

Φωτόδεντρο https://dschool.edu.gr/ http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2208
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2233
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2184
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2363

Μια προσέγγιση εννοιών της συνδυαστικής μέσω τεχνικών απαρίθμησης σε παιδιά νηπιαγωγείου.

Ταμβακά Ελπίδα
M.Sc., Σύμβουλος Εκπαίδευσης Νηπιαγωγών Νομού Δωδεκανήσου
elpida.ta@gmail.com

Περίληψη

Στην εργασία αυτή, παρουσιάζουμε μια δράση που πραγματοποιήθηκε στο 18ο νηπιαγωγείο Ρόδου με αφορμή ένα πρόγραμμα Erasmus, όπου έγινε μια προσπάθεια προσέγγισης εννοιών της συνδυαστικής θεωρίας και κυρίως την έννοια της απαρίθμησης. Οι δραστηριότητες που υλοποιήθηκαν είχαν σαν προτεραιότητα τις αναπαραστάσεις και τις συστηματικές καταγραφές των λύσεων σε προβλήματα απαρίθμησης, ελκυστικά στα παιδιά αυτής της ηλικίας αλλά και με στόχο την ανάπτυξη δεξιοτήτων που θα φανούν αργότερα χρήσιμες στην εξέλιξη της τροχιάς αυτών των εννοιών. Τα αποτελέσματα ήταν πολύ ενθαρρυντικά και η προσέγγιση κάλυψε διαθεματικά αρκετές έννοιες του προγράμματος σπουδών για το νηπιαγωγείο. Η χρήση χειραπτικού υλικού και ψηφιακών εργαλείων, βοήθησε επίσης στην καλύτερη προσέγγιση των εννοιών αυτών. Πραγματοποιήθηκε επίσης και αντίστοιχη παρουσίαση σε εκπαιδευτικούς όλων των κρατών που συμμετείχαν στις αντίστοιχες κινητικότητες του προγράμματος και διάχυση των αποτελεσμάτων.

Λέξεις κλειδιά: Συνδυαστική, Απαρίθμηση, Νηπιαγωγείο

Εισαγωγή

Το πρόγραμμα σπουδών του νηπιαγωγείου παρέχει ένα κοινό πλαίσιο για την οργάνωση της μάθησης και της διδασκαλίας χωρίς να στερεί από τους εκπαιδευτικούς τη δυνατότητα να οργανώσουν μαθησιακές εμπειρίες που πηγάζουν από τις ειδικές ανάγκες, τα ενδιαφέροντα και τις κλίσεις των παιδιών καθώς και από τις δικές τους ιδέες και στόχους (ΙΕΠ, 2014). Αυτό το πλαίσιο διαμορφώνεται, μεταξύ άλλων, από τις αρχές σύμφωνα με τις οποίες τα παιδιά μαθαίνουν με ποικίλες διδακτικές προσεγγίσεις και εκφράζουν αυτά που γνωρίζουν μέσω διαφορετικών μέσων αναπαράστασης και πως η συστηματική παρατήρηση είναι ένα σημαντικό εργαλείο για την καταγραφή των αναγκών, των ενδιαφερόντων και της μαθησιακής προόδου των παιδιών (Δαφέρμου, κ.α., 2019).

Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε μια προσέγγιση εννοιών της συνδυαστικής θεωρίας σε παιδιά νηπιαγωγείου με δραστηριότητες που αναπτύσσουν τεχνικές απαρίθμησης, οι οποίες πραγματοποιήθηκαν με αφορμή μια δράση που πραγματοποιήθηκε στο 18ο νηπιαγωγείο Ρόδου, στο πλαίσιο του προγράμματος Erasmus με τίτλο “Connection of Fairy Tales and STEAM” κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους 2020-2021, όπου συμμετείχαν εκπαιδευτικοί (νηπιαγωγοί από Ελλάδα, Σλοβενία, Σερβία, Βουλγαρία και Τουρκία.

Αρχικά τέθηκαν στα παιδιά ερωτήσεις για προβληματισμό όπως:

- Έχετε αναρωτηθεί ποτέ με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δύο στοιχεία από ένα σύνολο τριών στοιχείων;
- Έχετε σκεφτεί με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 3 στοιχεία στη σειρά;

Με ερέθισμα αυτά τα ερωτήματα ξεκίνησε ένας διάλογος με τα παιδιά και ακολούθησαν σχετικές δραστηριότητες (Βενιζέλου κ.α., 1994). Μετά το τέλος του σχολικού έτους ακολούθησε επίσκεψη των εταίρων στο σχολείο, παρακολούθηση κάποιων δραστηριοτήτων και παρουσίαση του προγράμματος σε ειδική εκδήλωση με τη συμμετοχή ενός μαθηματικού ως ειδικού παρατηρητή των δραστηριοτήτων καθώς και τα αποτελέσματα της διδακτικής αυτής προσέγγισης, τα οποία ήταν πολύ ενθαρρυντικά.

Θεωρητικό πλαίσιο

Βασικός στόχος της διδασκαλίας θα πρέπει να είναι η ανάδειξη των βασικών χαρακτηριστικών της μαθηματικής γνώσης, όπως η γενίκευση, η βεβαιότητα, η ακρίβεια και η συντομία. Ειδικά χαρακτηριστικά για τη διδασκαλία των μαθηματικών είναι η ενεργή και εντατική συμμετοχή στην προσπάθεια επίλυσης ενός προβλήματος, ο ιδιαίτερος τρόπος μελέτης και επίλυσης προβλημάτων και ο επεξεργασμένος γλωσσικός και συμβολικός κώδικας έκφρασης των νοημάτων που χαρακτηρίζουν την αυθεντική μαθηματική δραστηριότητα. Στόχος των προγραμμάτων σπουδών των μαθηματικών είναι ο μαθηματικός γραμματισμός. Πρόκειται για την ικανότητα κάποιου να αναλύει, να ερμηνεύει και να παρεμβαίνει στον κοινωνικό του περίγυρο, χρησιμοποιώντας ως εργαλείο τα μαθηματικά, να αναλύσει και να ερμηνεύσει τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά για τη λήψη αποφάσεων στο κοινωνικό περιβάλλον. Έτσι, ένας «μαθηματικά εγγράμματος» άνθρωπος: Κατανοεί ότι «οι μαθηματικές έννοιες, δομές και ιδέες έχουν εφευρεθεί ως εργαλεία για την οργάνωση των φαινομένων του φυσικού, κοινωνικού και πνευματικού κόσμου» (Freudenthal, 1983). Έχει την «ικανότητα να κατανοεί, να κρίνει, να δημιουργεί και να χρησιμοποιεί τα μαθηματικά σε μια ποικιλία ενδο- και εξω- μαθηματικών πλαισίων και καταστάσεων στις οποίες τα μαθηματικά παίζουν ή θα μπορούσαν να διαδραματίσουν ρόλο» και επομένως να λειτουργούν κριτικά σε μια δημοκρατική κοινωνία (Niss, 1996, 2003).

Μαθησιακοί στόχοι στα μαθηματικά είναι επίσης η ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης (δημιουργική και κριτική σκέψη, στοχαστική σκέψη και γνώση), η ανάπτυξη ειδικών μαθηματικών διαδικασιών (πειραματισμός, διερεύνηση, διατύπωση και δοκιμή περιπτώσεων). Η υλοποίηση των παραπάνω στόχων επιχειρείται να διασφαλιστεί μέσα από τέσσερις βασικές διαδικασίες: α) το μαθηματικό συλλογισμό και την επιχειρηματολογία, β) τη δημιουργία συνδέσμων, γ) την επικοινωνία μέσω της φυσικής γλώσσας, αλλά και των συμβόλων, των διαφόρων μορφών αναπαράστασης και των εργαλείων τεχνολογίας και δ) τη μεταγνωστική επίγνωση.

Ένας άλλος βασικός στόχος του προγράμματος σπουδών για τα μαθηματικά είναι η επίλυση προβλημάτων, με έμφαση στις στρατηγικές επίλυσής του που αποτελούν τον πυρήνα της διαδικασίας ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης και σκέψης. Μια σημαντική στιγμή στη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων είναι ο προβληματισμός, καθώς τα παιδιά θα έχουν την ευκαιρία να ελέγξουν τη δύναμη και το εύρος των λύσεων και να επανεξετάσουν τον τρόπο σκέψης τους. Οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να δίνουν ακριβείς περιγραφές των βημάτων που ακολουθούν σε μια διαδικασία σκέψης, να διατυπώνουν επιχειρήματα και να τα εκφράζουν καθαρά και γενικότερα, να μπορούν να αποτυπώνουν τα αποτελέσματα της εργασίας τους τόσο στη φυσική γλώσσα όσο και χρησιμοποιώντας μαθηματικά σύμβολα αλλά και άλλα μέσα αναπαράστασης όπως σχήματα, διαγράμματα κ.λπ.

Τα ερευνητικά δεδομένα στον τομέα της διδακτικής των μαθηματικών καθιστούν σαφές ότι οι μαθητές ακολουθούν μια εξελικτική πορεία μάθησης και αναπτύσσουν μαθηματικά νοήματα. Όταν οι δάσκαλοι το κατανοούν αυτό και οργανώνουν τις δραστηριότητες των παιδιών με αναφορά σε αυτό, χτίζουν περιβάλλοντα μάθησης μαθηματικών γνώσεων που μπορούν να υποστηρίξουν αποτελεσματικά την επιτυχή μάθηση των μαθητών στα μαθηματικά (Clements & Sarama, 2009).

Η έννοια της μαθησιακής και διδακτικής τροχιάς είναι εξαιρετικά σημαντική, καθώς προσφέρει απαντήσεις σε κρίσιμα διδακτικά ερωτήματα, όπως: ποιοι είναι οι αντίστοιχοι μαθησιακοί στόχοι, ποιο είναι το σημείο εκκίνησης, πώς και πού μεταφέρεσαι κάθε φορά, πώς επιτυγχάνεις τον μαθησιακό στόχο που είχε αρχικά τεθεί.

Κάθε μαθησιακή και διδακτική τροχιά αποτελείται από τρία μέρη: 1) ένα μαθηματικό στόχο (συστάδες εννοιών, δεξιοτήτων και ικανοτήτων), 2) ένα μονοπάτι (προοδευτικά αναπτυσσόμενα επίπεδα σκέψης που οδηγούν στον στόχο), 3) ένα σύνολο διδακτικών δραστηριοτήτων, που θα προσφέρουν την κατάλληλη υποστήριξη στους μαθητές για να αναπτύξουν υψηλότερα επίπεδα σκέψης.

Οι τροχιές ανάπτυξης της «αίσθησης του αριθμού» χωρίζονται σε υπο-τροχιές και μερικές από αυτές είναι: Αναγνώριση και έκφραση του αριθμού μέσα από τις διάφορες παραστάσεις του, αναπαράσταση και διερεύνηση πράξεων με αριθμούς.

Οι έννοιες και οι διαδικασίες της γεωμετρίας επίσης, υποστηρίζουν την προσέγγιση πολλών μαθηματικών εννοιών. Χρησιμοποιούνται για την επίλυση ενός προβλήματος δημιουργώντας κατάλληλα διαγράμματα, υποστηρίζουν τη δημιουργία νοητικών εικόνων και την κατανόηση συμβόλων, υποστηρίζουν την κατανόηση σχηματισμών για την απόδοση αριθμητικών σχέσεων, υποστηρίζουν την έννοια και τη χρήση της αριθμητικής γραμμής, υποστηρίζουν γραφήματα ή άλλες μαθηματικές διαδικασίες που βασίζονται σε δισδιάστατες ή τρισδιάστατες συσκευές (πράξεις, υποδιαιρέσεις μονάδων, πίνακες κ.λπ.).

Η εισαγωγή των Στοχαστικών Μαθηματικών από την προσχολική και την πρώτη σχολική ηλικία είναι ένα νέο στοιχείο στο πρόγραμμα σπουδών. Τα παιδιά με τη βοήθεια του δασκάλου, εκτελούν πειράματα, συλλέγουν και οργανώνουν δεδομένα, διατυπώνουν ερωτήσεις που περιορίζονται στον πληθυσμό της τάξης τους, αναπαριστούν τα δεδομένα τους κάνοντας απλά διαγράμματα, παρατηρούν και συγκρίνουν πληροφορίες, συνδυάζουν μικρό αριθμό αντικειμένων.

Δραστηριότητες

Οι βασικές κατηγορίες προβλημάτων αφορούν στο πλήθος των διαφορετικών τρόπων που μπορεί να ολοκληρωθεί μια διαδικασία-πείραμα και είναι οι ακόλουθες:

Συνδυασμοί των ν στοιχείων ενός συνόλου ανά κ στοιχεία, οι διατάξεις των ν στοιχείων ανά κ στοιχεία με ή χωρίς επανάληψη, οι μεταθέσεις των ν στοιχείων οι κυκλικές μεταθέσεις των ν στοιχείων η επιλογή στοιχείων κ στοιχείων από στοιχεία ν στοιχεία με ή χωρίς επανατοποθέτηση.

Οι βασικές αρχές και τεχνικές απαρίθμησης είναι: η απλή καταγραφή και μέτρηση διαβάζοντας τον αριθμό δυνατά (σε νεαρή ηλικία), η προσθετική αρχή (για παράδειγμα αν έχουμε 3 βιβλία μαθηματικών και 2 βιβλία ιστορίας και θέλουμε να διαλέξουμε ένα βιβλίο από αυτά, συνολικά έχουμε 3+2=5 διαφορετικές επιλογές) και η πολλαπλασιαστική αρχή (για παράδειγμα αν έχουμε 3 βιβλία μαθηματικών και 2 βιβλία ιστορίας και θέλουμε να επιλέξουμε ένα βιβλίο μαθηματικών και ένα βιβλίο ιστορίας, συνολικά έχουμε 3·2=6 διαφορετικές επιλογές). Οι αλγεβρικές γνώσεις που υποστηρίζουν την επίλυση προβλημάτων συνδυαστικής είναι: οι φυσικοί αριθμοί, η μέτρηση, η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση και ως καρτεσιανό γινόμενο.

Ερευνητικά ερωτήματα και προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

- Τι περιμένουμε από τα παιδιά;
- Τι παρεμβάσεις μπορούν να κάνουν οι εκπαιδευτικοί;

Αρχικά να τονίσουμε ότι δεν είναι απαραίτητο τα παιδιά να βρουν το πλήθος όλων των λύσεων αλλά να καταγράψουν μερικές από αυτές. Τα παιδιά πρέπει να χρησιμοποιήσουν άτυπες αναπαραστάσεις και υλικά αυθόρμητα, να καταλαβαίνουν πότε μας ενδιαφέρει η σειρά και η επανάληψη και πότε όχι, να αναγνωρίσουν ομοιότητες και διαφορές στα προβλήματα, να παρατηρούν εάν η καταγραφή γίνεται τυχαία ή συστηματικά και να τα καθοδηγούν ώστε να φτάσουν σε οργανωμένες αναπαραστάσεις και συστηματικές καταγραφές των λύσεων.

Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να διευκολύνουν τα παιδιά στη χρήση υλικών ή προγραμμάτων υπολογιστή για αναπαραστάσεις. Έρευνα με λογισμικό microworld (μικρόκοσμο) έδειξε ότι τα παιδιά μπορούν να κατανοήσουν την έννοια της ταξινόμησης σε μια προσομοιωμένη συγκεκριμένη κατάσταση και να δημιουργήσουν πιθανές ταξινομήσεις – διευθετήσεις και επίσης αποκαλύφθηκε μια ισχυρή σχέση μεταξύ του επιπέδου ικανότητας παραγωγής τους και στο να δίνουν προσοχή και να ερμηνεύουν τα σχόλια που είναι διαθέσιμα στον μικρόκοσμο. (Frantzeskaki, et al, 2020).

Δραστηριότητες που υλοποιήθηκαν στα παιδιά του νηπιαγωγείου

1η Δραστηριότητα

Υπάρχουν τρεις διαφορετικές γεύσεις παγωτού (βανίλια, σοκολάτα, μπανάνα). Θέλουμε να διαλέξουμε δύο από αυτά. Μπορείτε να καταγράψετε κάποιες περιπτώσεις; Πόσες και ποιες διαφορετικές επιλογές έχουμε;

Ερευνητικά ερωτήματα

- Ποια είναι η λύση αν θέλουμε να επιλέξουμε δύο διαφορετικές γεύσεις;
- Ποια είναι η λύση αν μας ενδιαφέρει και η σειρά επιλογής;
- Ποια είναι η λύση αν μας επιτραπεί να έχουμε δύο ίδιες γεύσεις;

Γενίκευση

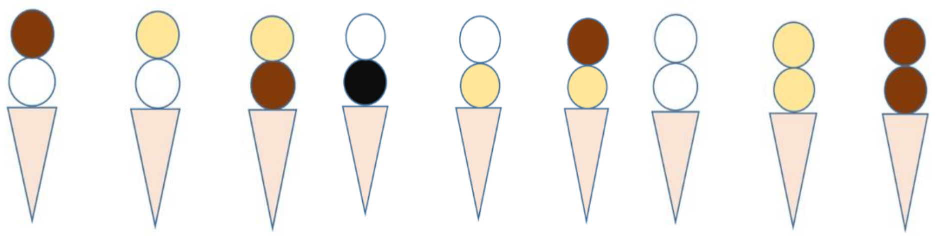
Το πρόβλημα είναι να βρουν τον αριθμό των συνδυασμών των 3 στοιχείων ανά 2. Αν μας ενδιαφέρει και η σειρά, αναζητούμε τον αριθμό των διατάξεων των 3 ανά 2 με επανάληψη ή χωρίς επανάληψη.

Λύση

- Ας πούμε α, β, γ τα 3 στοιχεία από τα οποία θα επιλέξουμε τα 2. Ο αριθμός των συνδυασμών 3 ανά 2 είναι 3. Οι 3 πιθανές επιλογές είναι: {α, β}, {α, γ}, {β, γ}.
- Το πλήθος των διατάξεων των 3 ανά 2 χωρίς επανάληψη είναι 6. Οι 6 αυτές πιθανές επιλογές είναι: {α, β}, {α, γ}, {β, γ}, {β, α}, {γ, α}, {γ, β}.
- Το πλήθος των διατάξεων των 3 ανά 2 με επανάληψη είναι 9. Οι 9 αυτές πιθανές επιλογές είναι: {α, β}, {α, γ}, {β, γ}, {β, α}, {γ, α}, {γ, β}, {α, α}, {β, β}, {γ, γ}.

Παράλληλα οφέλη και προστιθέμενη αξία

Η επέκταση του γνωστικού πεδίου αυτής της δραστηριότητας μπορεί να επιτευχθεί με χρήση γεωμετρικών σχημάτων στην αναπαράσταση των λύσεων. Προτείναμε στα παιδιά να αναπαραστήσουν με όποιο τρόπο θέλουν τις λύσεις τους, προτείναμε τις παρακάτω ιδέες και έτσι αναφερθήκαμε και στο τρίγωνο και τον κύκλο.



Σχήμα 1. Αναπαραστάσεις των λύσεων της 1ης δραστηριότητας

Παρόμοια προτεινόμενα προβλήματα

1. Θέλουμε να επιλέξουμε δύο χρώματα ανάμεσα σε τρία χρώματα (λευκό, μπλε, κόκκινο). Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να το κάνουμε αυτό; Τι διαφορά έχει αν μας επιτραπεί να επιλέξουμε ξανά το ίδιο χρώμα;
2. Θέλουμε να διαλέξουμε δύο παιδιά από τα τρία. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να το κάνουμε αυτό; (προφανώς το πρόβλημα δεν επιτρέπει την επανάληψη)
3. Θέλουμε να επιλέξουμε δύο σχήματα και να τα βάλουμε στη σειρά από ένα κυκλάκι, ένα τριγωνάκι, ένα τετραγωνάκι και ένα αστεράκι. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό; Με πόσους τρόπους βάζουμε τρία από αυτά τα σχήματα στη σειρά; Με πόσους αν θέλουμε να βάλουμε στη σειρά και τα τέσσερα σχήματα; Να κάνετε αναπαράσταση των επιλογών σας και με σχεδίαση αλλά και με χειραπτικό υλικό.

2η Δραστηριότητα

Θέλουμε να βάλουμε τρία παιδιά στη σειρά, την Άννα, τον Βασίλη και τον Γιώργο. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

Παραλλαγή προβλήματος

Θέλουμε να φτιάξουμε έναν τριψήφιο αριθμό χρησιμοποιώντας μόνο τα ψηφία 1, 2, 3 με κάθε ψηφίο να χρησιμοποιείται μία φορά. Πόσοι είναι αυτοί οι αριθμοί;

Γενίκευση προβλήματος

Θέλουμε να βρούμε όλες τις μεταθέσεις των τριών στοιχείων. Εδώ προφανώς μας ενδιαφέρει η σειρά και δεν έχει νόημα να επαναλαμβάνουμε στοιχεία.

Λύση

Αν κωδικοποιήσουμε τα παιδιά με τα γράμματα Α, Β, Γ τότε οι τρόποι είναι: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

Παραλλαγή: Οι αριθμοί που γίνονται είναι οι παρακάτω έξι με αύξουσα σειρά μεγέθους: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Γενίκευση: Υπάρχουν 6 λύσεις για όλα αυτά τα προβλήματα. Παρατηρήστε ότι 6=3·2·1

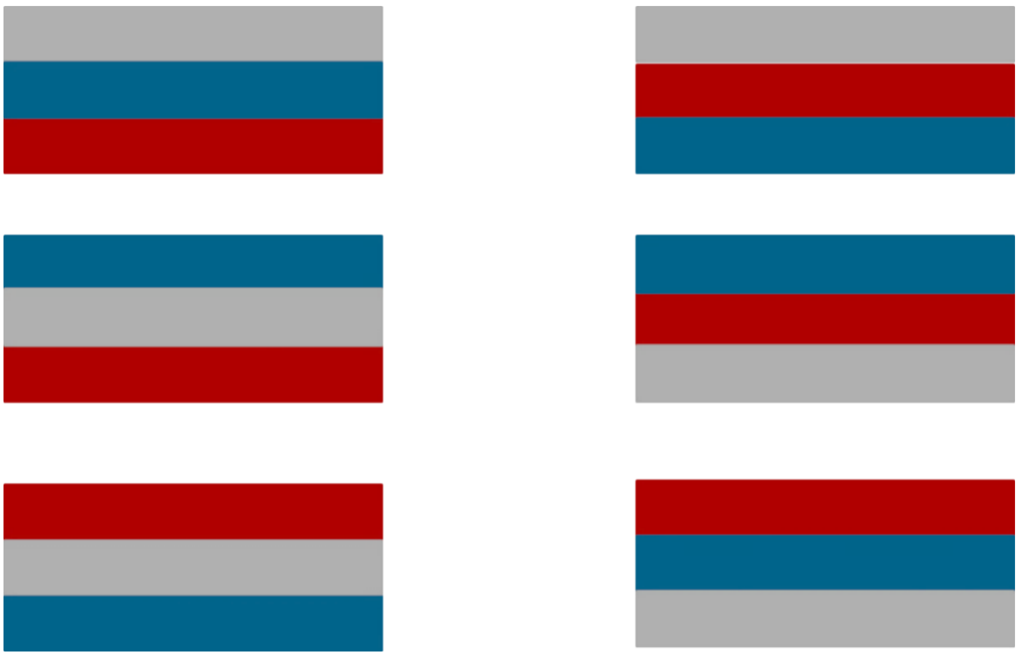
Μπορείτε επίσης να παρατηρήσετε αν υπάρξει συστηματική καταγραφή και μοτίβο των λύσεων, κάτι που δείχνει ανώτερο επίπεδο σκέψης.

3η Δραστηριότητα

Θέλουμε να φτιάξουμε μια σημαία με τρεις οριζόντιες λωρίδες χρωμάτων (λευκό, μπλε και κόκκινο). Πόσες τέτοιες διαφορετικές σημαίες μπορούμε να φτιάξουμε;

Λύση

Εδώ δόθηκε χειραπτικό υλικό και τα παιδιά χωρίστηκαν σε ομάδες εργασίας, όπου μετά από ενασχόληση με το πρόβλημα καταλήξανε συνεργατικά στις λύσεις που απεικονίζονται παρακάτω οι οποίες και προβλήθηκαν στην ολομέλεια της τάξης με τη βοήθεια υπολογιστή και βιντεοπροβολέα στην αίθουσα του σχολείου.



Σχήμα 2. Αναπαραστάσεις των λύσεων της $3^{ης}$ δραστηριότητας

$4^{η}$ Δραστηριότητα

Θέλουμε να επιλέξουμε ένα αγόρι ανάμεσα σε τρία αγόρια και ένα κορίτσι ανάμεσα σε τέσσερα κορίτσια. Πόσα διαφορετικά τέτοια ζευγάρια υπάρχουν;

Λύση

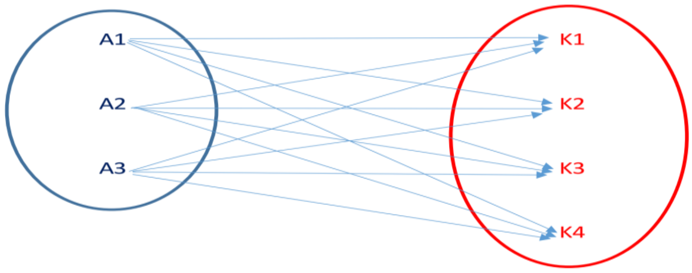
Στη Συνδυαστική Θεωρία υπάρχει η βασική αρχή της απαρίθμησης ή πολλαπλασιαστική αρχή, όπου το πλήθος των διαφορετικών περιπτώσεων υπολογίζεται αν πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό των τρόπων με τους οποίους ολοκληρώνεται κάθε ανεξάρτητο στάδιο. Στο προηγούμενο πρόβλημα έχουμε τις ακόλουθες 12 περιπτώσεις:

(Α1, Κ1), (Α1, Κ2), (Α1, Κ3), (Α1, Κ4),

(Α2, Κ1), (Α2, Κ2), (Α2, Κ3), (Α2, Κ4),

(Α3, Κ1), (Α3, Κ2), (Α3, Κ3), (Α3, Κ4)

Παρατηρήστε ότι 12=3·4 (κάθε ένα από τα 3 αγόρια με καθένα από τα 4 κορίτσια)



	A1	A2	A3
K1	A1, K1	A2, K1	A3, K1
K2	A1, K2	A2, K2	A3, K2
K3	A1, K3	A2, K3	A3, K3
K4	A1, K4	A2, K4	A3, K4

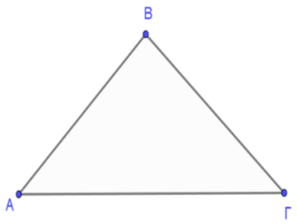
Σχήμα 3. Αναπαραστάσεις των λύσεων της 4ης δραστηριότητας

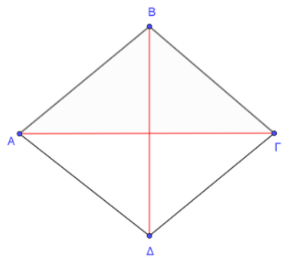
5η Δραστηριότητα: Γεωμετρικά προβλήματα απαρίθμησης

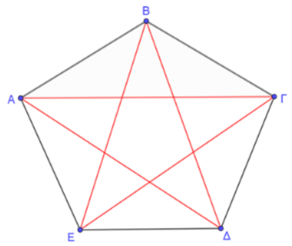
- Πλήθος ευθύγραμμων τμημάτων 3 ή 4 σημείων ανά 3 μη συνευθειακά.
- Πλήθος διαγώνιων τετράπλευρων και πενταγώνων.
- Πλήθος τριγώνων από 4 σημεία σε κύκλο.
- Πλήθος τετραγώνων σε ένα πλέγμα 2x2 ή 3x3.

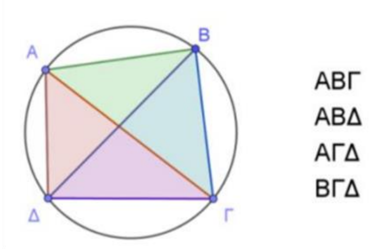
Λύση προβλημάτων

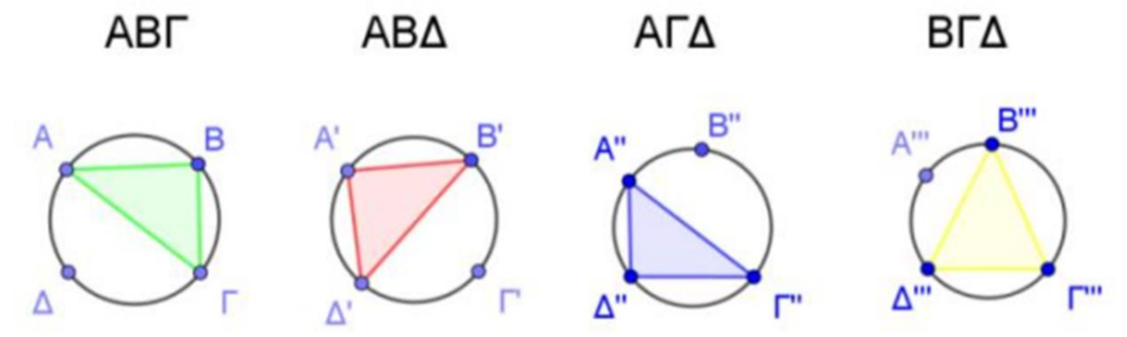
Τα προβλήματα αυτά προσεγγίστηκαν με γεωμετρικές αναπαραστάσεις που περιγράφονται στα παρακάτω σχήματα.

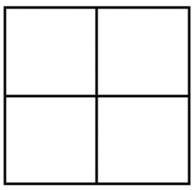


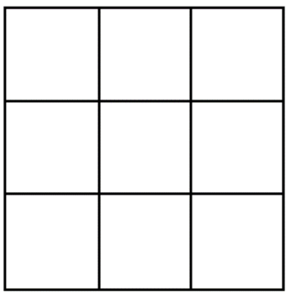












Σχήμα 4. Αναπαραστάσεις των λύσεων της 5ης δραστηριότητας

6η Δραστηριότητα: Διαμερισμός ενός συνόλου με σχετικά μικρό πλήθος στοιχείων

- Έχουμε ένα κουτί με 3 όμοιες σφαίρες. Πώς μπορούμε να τις μοιράσουμε;
- Έχουμε ένα κουτί με 4 όμοιες σφαίρες. Πώς μπορούμε να τις μοιράσουμε;
- Έχουμε ένα κουτί με 5 όμοιες σφαίρες. Πώς μπορούμε να τις μοιράσουμε;
- Μπορείτε να χωρίσετε το σύνολο {Α, Β, Γ} σε ομάδες;
- Μπορείτε να χωρίσετε το σύνολο {Α, Β, Γ, Δ} σε ομάδες;

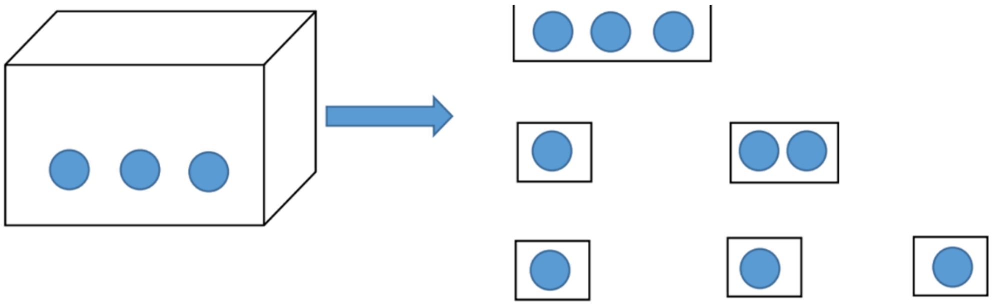
Προτεινόμενη προσέγγιση των λύσεων αυτών των προβλημάτων

- Υπάρχουν 3 τρόποι για το πρώτο ερώτημα και η ιδέα βασίζεται στις ακόλουθες προσθέσεις και στα σχήματα (ανάλογα προσεγγίζονται και τα υπόλοιπα ερωτήματα):

$3 + 0 = 0 + 3 = 3$

$1 + 2 = 2 + 1 = 3$

$1 + 1 + 1 = 3$



Σχήμα 5. Αναπαραστάσεις των λύσεων της 6ης δραστηριότητας

Ανάλογα, στην περίπτωση της διαμέρισης του 4, έχουμε 5 τρόπους (σε 2 ομάδες, 3 ομάδες ή σε 4 ομάδες και μπορούμε να έχουμε και αντίστοιχες αναπαραστάσεις):

4 + 0 = 0 + 4 = 4 ●●●●
1 + 1 + 2 = 4 ● και ● και ●●
1 + 1 + 1 + 1 = 4 ● και ● και ● και ●
1 + 3 = 3 + 1 = 4 ● και ●●●
2 + 2 = 4 ●● και ●●

Εργαζόμαστε παρόμοια για την διαμέρισης του 5.

Επέκταση δραστηριότητας

Ας δούμε τι μπορεί να αλλάξει αν τα στοιχεία του συνόλου θεωρηθούν διακριτά. Θα μελετήσουμε την περίπτωση των 4 στοιχείων. Παρατηρήστε ότι υπάρχουν 15 τρόποι και είναι 15=1+6+4+3+1 όπου κάθε ομάδα συνδέεται με συνδυασμούς.

{A, B, C, D} και { }	4 + 0 = 4
{A} και {B} και {C, D}	1 + 1 + 2 = 4
{A} και {C} και {B, D}	1 + 1 + 2 = 4
{A} και {D} και {C, B}	1 + 1 + 2 = 4
{B} και {C} και {A, D}	1 + 1 + 2 = 4
{C} και {D} και {A, B}	1 + 1 + 2 = 4
{B} και {D} και {A, C}	1 + 1 + 2 = 4
{A} και {B, C, D}	1 + 3 = 4
{B} και {A, C, D}	1 + 3 = 4
{C} και {B, A, D}	1 + 3 = 4
{D} και {B, C, A}	1 + 3 = 4
{A, B} και {C, D}	2 + 2 = 4
{A, C} και {B, D}	2 + 2 = 4
{A, D} και {C, B}	2 + 2 = 4
{A} και {B} και {C} και {D}	1+1+1+1 = 4

Ιδέες και προτάσεις για άλλες δραστηριότητες

Στην πληροφορική χρησιμοποιούνται ειδικές γλώσσες που βασίζονται στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης. Ένα bit (δυαδικό ψηφίο) μπορεί να οριστεί ως μια ποσότητα πληροφοριών που μπορεί να αποθηκευτεί από μια δυαδική συσκευή ή άλλο φυσικό σύστημα που μπορεί να υπάρχει σε μία από δύο διαφορετικές καταστάσεις (π.χ. απενεργοποίηση - ενεργοποίηση του διακόπτη). Βασικά, οι υπολογιστές αντιλαμβάνονται μόνο δύο ψηφία, το 0 και το 1. Με αυτά τα ψηφία γίνονται λέξεις (μεταθέσεις) που είναι συσκευές με επανάληψη των ψηφίων 0 και 1, όπως:

- 00, 01, 10, 11 ($2^2 = 2\cdot2 = 4$ λέξεις με 2 ψηφία)
- 000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111 ($2^3 = 2\cdot2\cdot2 = 8$ λέξεις με 3 ψηφία)

Μπορεί να ζητηθεί από τα παιδιά να δημιουργήσουν λεξούλες με αυτά τα ψηφία.

Να συζητούν με τα παιδιά πώς έφτασαν στις λύσεις και πως τις κατέγραψαν και να προτείνουν ιδέες για συστηματική καταγραφή και αναπαράσταση των λύσεων, δίνοντας έμφαση στο πλεονέκτημα που θα έχουν για να βρουν όλες τις λύσεις με τα συγκεκριμένα βήματα της καταγραφής τους.

Συνδυαστική Θεωρία

Η συνδυαστική θεωρία μπορεί να μας βοηθήσει να μετρήσουμε το πλήθος των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορεί να πραγματοποιηθεί μια διαδικασία (πείραμα). Υπάρχουν τύποι που υπολογίζουν τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους ολοκληρώνονται τέτοιες διαδικασίες. Με τη βοήθειά τους λύνουμε παρόμοια προβλήματα με μεγαλύτερους αριθμούς που δυσκολεύουν την καταγραφή όλων των περιπτώσεων.

Συνδυασμοί των ν στοιχείων ενός συνόλου ανά κ στοιχεία: Ο παρακάτω τύπος μας δείχνει τον αριθμό των τρόπων με τους οποίους μπορεί να ληφθεί ένα δείγμα κ στοιχείων από ένα μεγαλύτερο σύνολο ν διακριτών αντικειμένων όπου η σειρά δεν έχει σημασία και οι επαναλήψεις δεν επιτρέπονται.

$$\binom{\nu}{\kappa}=\frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}$$

Το σύμβολο ν!, που ονομάζεται παραγοντικό, αντιπροσωπεύει την πράξη $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot\nu$.

Στην περίπτωση της 1ης δραστηριότητας μας έχουμε:

$$\binom{3}{2}=\frac{3!}{2!\cdot(3-2)!}=\frac{1\cdot2\cdot3}{1\cdot2\cdot1}=\frac{6}{2}=3$$

Ανάλογοι τύποι υπάρχουν για τον υπολογισμό του πλήθους των μεταθέσεων, των διατάξεων με ή χωρίς επανάληψη και άλλων πιο πολύπλοκων διαδικασιών. Για παράδειγμα το πλήθος των μεταθέσεων των ν στοιχείων

υπολογίζεται από τον τύπο $M_\nu = \nu!$, ενώ το πλήθος των διατάξεων των ν στοιχείων ανά κ στοιχεία με επανάληψη από τον τύπο ν^κ.

Συμπεράσματα

Με βάση τις παρατηρήσεις μας κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων και των συζητήσεων με τα παιδιά και την αποκρυπτογράφηση των αναπαραστάσεων των λύσεων, συμπεραίνουμε καταρχάς ότι είναι εφικτή η διδασκαλία εννοιών της συνδυαστικής σε παιδιά του νηπιαγωγείου φτάνει να προβλεφθούν οι δυσκολίες και τα κρίσιμα σημεία της διδασκαλίας μας. Η απαίτηση να κάνουμε χρήση μικρών αριθμών στις ζητούμενες δραστηριότητες είναι ξεκάθαρη προφανώς. Επίσης η χρήση της γλώσσας να μην είναι αυστηρή με βάση την ορολογία της συνδυαστικής αλλά κοντά στις γλωσσικές εμπειρίες της ηλικίας αυτής. Δεν είναι απαιτούμενη επίσης, η εύρεση όλων των λύσεων, αλλά να γίνει προσπάθεια καθοδήγησης μέσα από βιωματικές καταστάσεις και κατάλληλες αναπαραστάσεις προς την κατεύθυνση αυτή. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν μετά από κάποια προσωπική ενασχόληση των παιδιών να τα καθοδηγούν προς τον εντοπισμό ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ των προβλημάτων και στην άτυπη κατηγοριοποίησή τους. Αυτή η πρακτική τους βοηθά στη γενίκευση και τη μεθοδολογία που θα ακολουθήσει στις μεγαλύτερες τάξεις με βάση τις αντίστοιχες μαθησιακές τροχιές.

Τα παιδιά πρέπει να χρησιμοποιήσουν τη φαντασία τους σε κατάλληλα επιλεγμένα προβλήματα με αγαπημένα θέματα για αυτά, κοντά στο πλαίσιο του περιβάλλοντός τους, συνδεδεμένα όσο το δυνατόν περισσότερο με τοπικά ήθη, έθιμα, γιορτές και την ιστορία του τόπου τους αλλά και τα τρέχοντα γεγονότα.

Προτείνεται, οι εκπαιδευτικοί να παρουσιάζουν τα προβλήματα σε παιγνιώδη μορφή και ως εκ τούτου η ερευνητική σκέψη και τα συναισθήματα θα ενεργοποιηθούν ταυτόχρονα.

Αναφορές

Frantzeskaki, K.; Kafoussi, S.; Fessakis, G., (2020). Developing Preschoolers' Combinatorial Thinking with the Help of ICT: The Case of Arrangements. International Journal for Technology in Mathematics Education, v27 n3 p157-166 2020. Διαθέσιμο: https://eric.ed.gov/?q=source%3A%22International+Journal+for+Technology+in+Mathematics+Education%22&id=EJ1270438 .

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Dordrecht: Reidel.

Niss, M. (1996). Goals of mathematics teaching. In A. J. Bishop et al. (Eds.), International handbook of mathematics education (pp. 11-47). Dordrecht: Kluwer, Academic Publishers.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project. In A. Gagatsis & S. Papastavridis (Eds.), 3rd Mediterranean conference on mathematical education. Athens, Jan. 2003, pp. 115-124. Athens: Hellenic Math. Society.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). Early Childhood Mathematics Education Research Learning Trajectories for Young Children. New York: Routledge.

Βενιζέλου, Γ., Καλαμπαλίκη Ε., Καλοστύπη, Α., Κονταξάκης, Γ., Λαυρεντάκη, Φ., Μαυροειδής, Γ., Πατρίκη, Α., (1994). Βιβλίο δραστηριοτήτων για το νηπιαγωγείο, βιβλίο νηπιαγωγού, Αθήνα, ΟΕΔΒ.

Δαφέρμου, Χ., Κουλούρη, Π., Μπασαγιάννη, Ε. , (2019). Οδηγός Νηπιαγωγού, Εκπαιδευτικοί σχεδιασμοί, Δημιουργικά περιβάλλοντα μάθησης. ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.

ΙΕΠ, (2014). Πρόγραμμα Σπουδών Νηπιαγωγείου.

Ένα διδακτικό σενάριο στο πλαίσιο στην Άλγεβρα της Α ΄Γενικού Λυκείου στο πλαίσιο των Νέων Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών.

Καμπουράκη Αντωνία Ειρήνη
Μαθηματικός Δ.Ε.
tkambouraki@hotmail.com
Χατζηαντώνης Νεκτάριος
Μαθηματικός Δ.Ε.
nektarios_82@hotmail.com

Περίληψη

Στην εργασία αυτή, παρουσιάζουμε ένα διδακτικό σενάριο στο πλαίσιο του επιμορφωτικού προγράμματος «Επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα Προγράμματα Σπουδών και το εκπαιδευτικό υλικό Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης» ΟΠΣ (MIS) 5035543, στο Επιχειρησιακό Πρόγραμμα «Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση 2014-2020.

Το διδακτικό σενάριο αφορά στην ύλη της Α΄ Γενικού Λυκείου και στην θεματική ενότητα των συνόλων.

Λέξεις Κλειδιά: Άλγεβρα, Σύνολα, Νέα Προγράμματα Σπουδών

Δομή & Περιεχόμενο Διδακτικού Σεναρίου

1. ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Θεματική του διδακτικού σεναρίου: Ε.2 Σύνολα

Δημιουργός/οί: Καμπουράκη Αντωνία Ειρήνη, Χατζηαντώνης Νεκτάριος

Βαθμίδα – Τάξη: Α Λυκείου **Διδακτικές ώρες**: 2

Ενότητα του ΠΣ και Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ):

Αλ. Σν.10.2. Να αναπαριστούν τα σύνολα με διάφορους τρόπους (αναγραφή, περιγραφή στοιχείων, διάγραμμα Venn)

Αλ. Σν. 10.3. Να εξετάζουν αν ένα αντικείμενο ανήκει ή όχι σε ένα σύνολο και να δηλώνουν αυτή τη σχέση συμβολικά.

Αλ. Σν. 10.4. Να αναγνωρίζουν και να δηλώνουν σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων με χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων και λεκτικά με κατάλληλη χρήση των συνδέσμων «ή» και «και».

Ειδικότερα:

α) Να καταγράφουν τα στοιχεία ενός συνόλου όταν αυτό δίνεται με περιγραφή των στοιχείων του και να το αναπαριστούν με διαγράμματα Venn και αντίστροφα.

β) Να αναγνωρίζουν πότε δύο σύνολα είναι ίσα και να χρησιμοποιούν τους σωστούς συμβολισμούς.

γ) Να διακρίνουν πότε ένα σύνολο είναι υποσύνολο ενός άλλου και να το συμβολίζουν ορθά.

δ)Να ορίζουν την έννοια του κενού συνόλου ως το σύνολο που δεν περιέχει στοιχεία, όπως και τον συμβολισμό του.

ε) Να εκτελούν πράξεις με σύνολα. Να αναγνωρίζουν τα στοιχεία του συνόλου που προκύπτει από την τομή ή την ένωση δύο ή περισσοτέρων συνόλων όπως και τα στοιχεία του συμπληρώματος ενός συνόλου.

Προαπαιτούμενες δυνατότητες μαθητών/τριών (γνωστικές και κοινωνικο-πολιτισμικές):

Οι μαθητές/μαθήτριες:

α) Γνωρίζουν ότι τα αντικείμενα που αποτελούν ένα σύνολο ονομάζονται στοιχεία ή μέλη του συνόλου.

β) Μπορούν να διακρίνουν ένα καλά ορισμένο σύνολο.

γ) Συμβολίζουν τα σύνολα με κεφαλαία γράμματα του ελληνικού ή του λατινικού αλφαβήτου.

δ)Αντιλαμβάνονται την έννοια του συνόλου ως συλλογής ομοειδών αντικειμένων της εμπειρίας ή και της διανόησής μας καθώς και την παραδοχή ότι κάθε αντικείμενο δεν μπορεί να περιέχεται στο σύνολο παρά μόνο μία φορά.

ε)Κάνουν ορθή χρήση των συνδέσμων «ή» και «και» στην ελληνική γλώσσα.

στ)Να κατέχουν ομαδοσυνεργατικές δεξιότητες.

2. ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΛΑΙΣΙΩΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ

2.1. Περί μαθητή και μάθησης

Τα Σύνολα ήταν και παραμένουν η πιο ολοκληρωμένη περιγραφή της πραγματικότητας. Ξεπερνώντας τη μυθολογία των "τύπων", βοηθούν σε μια απλή και καθαρή προσέγγιση των σχέσεων ανάμεσα στα στοιχεία της πραγματικότητας. Επιπλέον, η θεωρία των Συνόλων συνδέει τα Μαθηματικά με τη λογική, στοιχείο πολύ σημαντικό για τους στόχους ενός σύγχρονου σχολείου.

Η έννοια του συνόλου είναι θεμελιώδης έννοια στα μαθηματικά. Ένας από τους λόγους είναι ότι με τη γλώσσα των συνόλων μπορούμε να γενικεύσουμε διάφορες μαθηματικές ιδιότητες ή προτάσεις .Η έννοια του συνόλου είναι πρωταρχική, δηλαδή δεν προκύπτει από κάποιες απλούστερες έννοιες. Η ευρύτερη έννοια του συνόλου υπηρετεί την μεγάλη ιδέα της Μαθηματικής δομής. Η αναγραφή των στοιχείων ενός συνόλου εγείρει το ερώτημα της αναγνώρισης της γενικής σχέσης που διέπει τα στοιχεία του συνόλου.

Οι δραστηριότητες ενσωματώνουν την αναπαράσταση συνόλου με αναγραφή και περιγραφή των στοιχείων του, τη σωστή χρήση των συμβόλων ανήκει δεν ανήκει, ισότητα συνόλων, υποσύνολο συνόλου, κενό σύνολο, όπως επίσης και τις πράξεις συνόλων, ένωση, τομή και συμπλήρωμα.

Οι μαθητές μέσω της δραστηριότητας και των πρακτικών διαχείρισης φιλοδοξούμε να:

- Αναπτύξουν θετικά κίνητρα, αυτοπεποίθηση, εστίαση στις θετικές πτυχές των εμπειριών, υπομονή, και επιμονή στην αντιμετώπιση οποιασδήποτε μαθηματικής κατάστασης.
- Εκτιμήσουν την ομορφιά και την κομψότητα των μαθηματικών.
- Αναπτύξουν πνεύμα περιέργειας και αγάπη για τα μαθηματικά.

Πιθανή σημεία δυσκολίας προκύπτουν στην αναγραφή των στοιχείων ενός συνόλου όταν αυτό περιγράφεται, στον συμβολισμό του ανήκει ή όχι. Παρατηρείται συχνά σύγχυση της έννοιας του κενού συνόλου, με το σύνολο που έχει ως στοιχείο του το 0. Τέλος οι σύνδεσμοι «ή» και «και» πολλές φορές παρερμηνεύονται.

2.2. Έργα

2.2.1 Παρατίθενται στο Παράρτημα

2.2.2 Χαρακτηριστικά της μαθηματικής δραστηριότητας που επιδιώκεται να αναδειχθούν κατά την ενασχόληση των μαθητών με καθένα από τα συγκεκριμένα έργα

Τα έργα που δίνονται εμπλέκουν τους μαθητές σε διαδικασίες σκέψης ενώ συμμετέχουν ενεργά στο περιεχόμενο και πραγματοποιούν συνδέσεις. Επιπλέον είναι προσεγγίσιμα από όλους τους μαθητές, περιλαμβάνουν προκλήσεις που είναι εφικτές και αναπτύσσουν την κατανόηση και εκμάθηση διαδικασιών. Τέλος, εμπεριέχουν ποικιλία μεθόδων και στρατηγικών δίνουν έμφαση στην διαδικασία επίλυσης αντί για την απάντηση. Η ατμόσφαιρα της τάξης υποστηρίζει τον διαμοιρασμό ιδεών και προσεγγίσεων, αξιοποιεί διαφορετικές ιδέες και οπτικές, προωθεί ανταλλαγή απόψεων και κριτική ανάλυση , αναγνωρίζει ότι οι μαθητές μπορούν να μάθουν ο ένας από τον άλλο. Οι ερωτήσεις του εκπαιδευτικού βοηθούν στην κατανόηση του νοήματος και της διεργασίας και την εξαγωγή συμπερασμάτων.

2.3 Διδακτικές ενέργειες – διδακτικές πρακτικές

2.3.1 Ρόλος ή ρόλοι του/της εκπαιδευτικού

Ο εκπαιδευτικός επιδιώκει να δημιουργήσει ένα περιβάλλον μάθησης που θα ενθαρρύνει την ενεργό συμμετοχή των μαθητών, θα προωθεί τη συνεργασία και την αλληλεπίδραση μεταξύ τους και θα βοηθά τους μαθητές να αναπτύξουν τις δεξιότητες και τις γνώσεις που απαιτούνται για την επίτευξη των στόχων του μαθήματος. Επιπλέον, ο εκπαιδευτικός είναι ευαίσθητος στις ανάγκες και τις δυσκολίες των μαθητών και προσφέρει την ανάλογη υποστήριξη και καθοδήγηση σε κάθε μαθητή ξεχωριστά.

Με γνώμονα τα παραπάνω, ο εκπαιδευτικός χωρίζει την τάξη σε ομάδες των 6 παιδιών και μοιράζει φύλλο εργασίας με τα έργα Α1,Α2 για την 1η διδακτική ώρα και Β1,Β2 για τη 2η αντίστοιχα. Οι μαθητές εργάζονται ομαδοσυνεργατικά. Κατόπιν συζητούν τις απαντήσεις τους στην ολομέλεια. Ο εκπαιδευτικός με τη βοήθεια των μαθητών δίνει το θεωρητικό πλαίσιο που προκύπτει από τις απαντήσεις των ομάδων. Κατόπιν περνάει στο στάδιο της αξιολόγησης, προτρέποντας τους μαθητές να απαντήσουν στις δραστηριότητες αυτοαξιολόγησης (1η για την 1η διδακτική ώρα και 2η κ 3η για την 2η διδακτική ώρα αντίστοιχα.)

2.3.2 <u>Ρόλος ή ρόλοι του/της μαθητή/τριας</u> 2.3.3 **<u>Διαχείριση του δυναμικού της τάξης</u>**

Οι μαθητές ενθαρρύνονται να «κάνουν» Μαθηματικά μέσα από διαδικασίες που υποβοηθούν την εξερεύνηση και τη δημιουργία. Εμπλέκονται ενεργά μέσω:

1. της ενεργούς αλληλεπίδρασης με άλλους μαθητές
2. της διερεύνησης μαθηματικών εννοιών με διαφορετικούς τρόπους
3. της εμπλοκής τους σε συζητήσεις με σκοπό την ανάπτυξη της μαθηματικής επιχειρηματολογίας
4. της διάθεσης ικανοποιητικού χρόνου για την ανάπτυξη και επεξεργασία των ιδεών τους.

Παράλληλα η συνεργασία και η ενεργή συμμετοχή των μαθητών στη διαδικασία μάθησης, συντελεί στην αντιμετώπιση της μαθηματικοφοβίας (δηλαδή στην αντιμετώπιση συναισθημάτων άγχους, νευρικότητας και αποφυγής όταν ο μαθητής έρχεται αντιμέτωπος με μαθηματικά προβλήματα, Stuart, 2000). Οι αιτίες μπορεί να αναζητηθούν στην έλλειψη αυτοπεποίθησης στις μαθηματικές ικανότητες του ίδιου του μαθητή, οι αντιλήψεις του εκπαιδευτικού, των άλλων μαθητών, του οικογενειακού ή κοινωνικού περιβάλλοντος.

2.3.4 <u>Διαχείριση 'πρακτικών' παραμέτρων, όπως ο χρόνος και οι υλικοτεχνικές υποδομές</u>)

Τάξη 50 τ.μ. με 24 μαθητές/μαθήτριες-Διάρκεια διδακτικής ώρας: 45 λεπτά

Διδασκαλία 2 διδακτικών ωρών.

1η διδακτική ώρα: Χρόνος εργασίας ομάδων: 20 λεπτά (Α1, Α2)
Χρόνος συζήτησης στην ολομέλεια: 15 λεπτά
Χρόνος αξιολόγησης-αυτοαξιολόγησης: 10 λεπτά (Αυτοαξιολόγηση 1η)

2η διδακτική ώρα: Χρόνος εργασίας ομάδων: 20 λεπτά (Β2, Β2)
Χρόνος συζήτησης στην ολομέλεια: 15 λεπτά
Χρόνος αξιολόγησης-αυτοαξιολόγησης: 10 λεπτά (Αυτοαξιολόγηση 2η &3η)

3. ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Αξιολόγηση για μάθηση και ανατροφοδότηση του διδακτικού έργου

3.1. <u>Αξιολόγηση μάθησης/ μαθητή</u>

Οι μαθητές συμμετείχαν ενεργά στο μάθημα, έδειξαν ενθουσιασμό, εργάστηκαν σε ομάδες αποτελεσματικά ενισχύοντας το πνεύμα συνεργασίας. Κατά τη διάρκεια της 2ης δραστηριότητας αξιολόγησης οι μαθητές καθυστέρησαν αρκετά με τον άρρητο π και τον περιοδικό δεκαδικό. Δεν μπορούσαν με σιγουριά να τους εντάξουν στα σύνολα των αριθμών. Προβληματίστηκαν και χρειάστηκαν να συνεργαστούν και μεταξύ τους οι ομάδες για να ολοκληρώσουν την δραστηριότητα.

3.2. <u>Για το διδακτικό έργο</u>

Κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων Α1 και Α2 οι μαθητές έδειξαν μεγαλύτερο ενδιαφέρον και ζήλο, λόγω της φύσης τους. Το είδαν περισσότερο σαν παιχνίδι, και μπόρεσαν να τις ολοκληρώσουν χωρίς εμπόδια. Κατά την διάρκεια της 1ης δραστηριότητας αξιολόγησης, τα προβλήματα που προέκυψαν αφορούσαν προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών που δεν είχαν κατακτηθεί από μεγάλη μερίδα των μαθητών και οδήγησαν σε καθυστέρηση τις ομάδες αλλά και σε αλλαγή πεδίου γνώσης. Η επιλογή της 1ης δραστηριότητας αξιολόγησης έδωσε την ευκαιρία διάταξης των συνόλων των φυσικών, ακεραίων, ρητών , πραγματικών αριθμών. Όσον αφορά στις δραστηριότητες Β1 και Β2 οι μαθητές δούλεψαν χωρίς ιδιαίτερα προβλήματα.

Αναμενόμενος ήταν ο προβληματισμός στην λεκτική περιγραφή των πράξεων μεταξύ συνόλων, ο οποίος όμως ξεπεράστηκε με τη βοήθεια ενός πίνακα αντιστοιχίας που δόθηκε από τον εκπαιδευτικό. Ο πίνακας περιείχε την αντιστοιχία του διαγράμματος Venn, της συμβολικής γλώσσας συνόλων και της λεκτικής τους περιγραφής. Η αποτελεσματικότητά του έργου αποδείχθηκε στις δραστηριότητες αυτοαξιολόγησης που έγιναν με ευκολία και ορθότητα από τους μαθητές.

4. ΑΝΑΣΤΟΧΑΣΜΟΣ

Οι εφαρμογές ήταν αρκετές για να υποστηρίξουν την ενεργοποίηση και τη συμμετοχή των μαθητών, την κατανόηση και την άρση παρερμηνειών. Οι μαθητές ανέπτυξαν μια ποικιλία δεξιοτήτων , εργαλείων και στρατηγικών να συνδέουν την αναπαράσταση των στοιχείων ενός συνόλου με 3 διαφορετικούς τρόπους, όπως και την έννοια του υποσυνόλου, του κενού συνόλου και των πράξεων της ένωσης, της τομής και του συμπληρώματος. Αλληλοεπίδρασαν μεταξύ τους αποτελεσματικά , όπως συνέβη και με το διδάσκοντα. Οι δραστηριότητες κάλυψαν πλήρως την ανάπτυξη του μαθηματικού γραμματισμού των μαθητών /τριών. Προσέφεραν την ευκαιρία συμμετοχής στη μαθηματική δραστηριότητα μέσα στη σχολική τάξη αναδεικνύοντας ότι τα μαθηματικά είναι παντού και τα χρησιμοποιούμε χωρίς να το αντιλαμβανόμαστε. Η κατανόηση της έννοιας του συνόλου και του υποσυνόλου μας βοηθά να αντιληφθούμε και να δομήσουμε μέσα από ένα διαφορετικό πλαίσιο την πραγματικότητά μας. Στις δραστηριότητες παρατηρήσαμε ότι οι μαθητές/μαθήτριες ασχολήθηκαν με ενθουσιασμό. Ακολούθησε συζήτηση στην ομάδα και κατόπιν στην ολομέλεια. Συνεργάστηκαν χωρίς ιδιαίτερα προβλήματα, καθώς οι οδηγίες ήταν σαφείς και οι στόχοι που εξυπηρετούσαν επιτεύχθηκαν με ευκολία.

5. ΠΗΓΕΣ/ΠΟΡΟΙ ΠΡΟΣ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ

Αξιοποιήθηκαν πόροι και εργαλεία τα οποία ανέπτυξαν μαθηματικές διεργασίες και πρακτικές όπως ο συλλογισμός, η επικοινωνία και ο αναστοχασμός, που ενδυναμώνουν τη μάθηση των μαθηματικών και υποστηρίζουν σημαντικές ικανότητες και δεξιότητες για τον πολίτη του 21ου αιώνα. Οι μαθητές κατανοούν και είναι σε θέση να αξιοποιήσουν το μαθηματικό λόγο εντοπίζοντας κρίσιμες μαθηματικές ιδέες, αναλύοντας και ερμηνεύοντας διαφορετικά αναπαραστασιακά συστήματα.

6 . ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ – ΔΙΚΤΥΟΓΡΑΦΙΑ

1. Κείμενο Φιλοσοφίας Μαθηματικών
2. Οδηγός Εκπαιδευτικού
3. Νέο Πρόγραμμα Σπουδών
4. Σχολικό Βιβλίο Άλγεβρα Α΄ Λυκείου
5. Άλγεβρα Α' Λυκείου. Εκδόσεις Πατάκη
6. Άλγεβρα Α΄ Λυκείου, Εκδόσεις Σαββάλας

7 . ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ (Παράθεση των έργων και άλλων υλικών που αξιοποιούνται στην τάξη)

Έργο .Α1 Οι μαθητές χωρίζονται σε ομάδες των 6 ατόμων και δουλεύουν με ατομικά φύλλα εργασίας και χρωματιστούς μαρκαδόρους.

1. Φτιάξτε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και καταγράψτε τα ονόματά σας μέσα στο πλαίσιο.
2. Κυκλώστε με κόκκινο μαρκαδόρο τα ονόματα των αγοριών.
3. Κυκλώστε με πράσινο μαρκαδόρο τα ονόματα των κοριτσιών.
4. Κυκλώστε με μπλε μαρκαδόρο τα ονόματα των αγοριών που έχουν καστανά μάτια.
5. Κυκλώστε με κίτρινο μαρκαδόρο τα ονόματα των ενήλικων κοριτσιών.
6. Καταγράψτε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:

Ω= Τα ονόματα των ατόμων της ομάδας σας.
Α= Τα στοιχεία του κόκκινου συνόλου.
Β= Τα στοιχεία του πράσινου συνόλου

Γ= Τα στοιχεία του μπλε συνόλου

Δ = Τα στοιχεία του κίτρινου συνόλου.

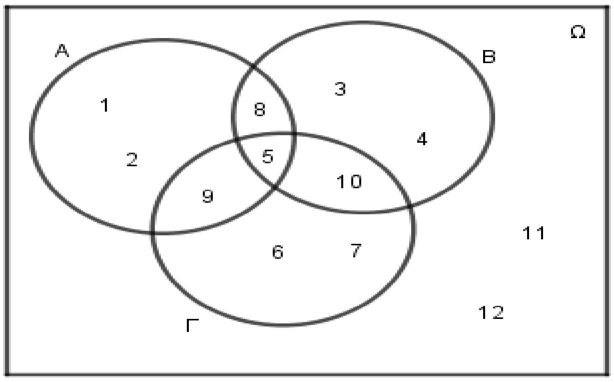
Ποια σχέση συνδέει τα στοιχεία του συνόλου Α και Γ;

5. Πόσα στοιχεία έχει το σύνολο Δ; Πως συμβολίζεται;

Είναι το σύνολο Δ υποσύνολο του Β;

6. Ποια η σχέση των συνόλων Β, Γ και Δ με το σύνολο Ω;

Α2. Να ανοίγουν πλακίδια (όπως στο scramble/λεξιμαχία) με έτοιμες λέξεις και οι μαθητές/ήτριες να φτιάχνουν μικρότερες λέξεις χρησιμοποιώντας μία φορά το κάθε πλακίδιο. Αν θεωρήσουμε ότι το σύνολο Ω αποτελείται από το σύνολο των γραμμάτων της λέξης «ΑΡΓΟΠΟΡΙΑ», φτιάξτε όσο το δυνατόν περισσότερα υποσύνολα αυτού, με λέξεις της Ελληνικής



Γλώσσας. Καταγράψτε τα αποτελέσματά σας. Για παράδειγμα:

Ανοίγει η λέξη: ΑΡΓΟΠΟΡΙΑ

Πιθανές απαντήσεις ΑΡΓΟ, ΑΡΓΑ, ΑΓΟΡΙΑ, ΓΟΠΑ κ.λπ

π.χ. S = {Α, Ρ, Γ, Ο}, πλήθος στοιχείων, να χρησιμοποιήσουν το σύμβολο $\subseteq$.

<u>Άσκηση αυτοαξιολόγησης 1^{η}:</u>

Ερωτήσεις Κατανόησης Ι (Σχολικού Βιβλίου)

1. Στους παρακάτω πίνακες να συμπληρώσετε με το σύμβολο " $\sqrt{\ }$ " εκείνα τα τετραγωνάκια των οποίων ο αντίστοιχος αριθμός ανήκει στο αντίστοιχο σύνολο.

2. Πώς ονομάζονται οι αριθμοί για τους οποίους έχουν συμπληρωθεί τα τετραγωνάκια μόνο της τελευταίας γραμμής;

3. Να χρησιμοποιήσετε τα διαγράμματα του Venn για να παραστήσετε τις διαδοχικές σχέσεις εγκλεισμού των συνόλων □ , □ , □ και να τοποθετήσετε μέσα σε αυτά τους αριθμούς αυτούς.

	-3,5	**0**	$\sqrt{10}$	$-\frac{13}{5}$
$\in$□				
$\in$□				
$\in$□				
$\in$□				

<u>Β1.</u> Αν δίνεται το σύνολο των αριθμών 1, 2, 3, 4,….,17

1. Να γράψετε τα παρακάτω σύνολα:

α. Α των άρτιων από τους παραπάνω αριθμούς.

β. Β των περιττών από τους παραπάνω αριθμούς.

γ. Γ των αριθμών , από τους παραπάνω, που είναι πολλαπλάσια του 3,

δ. Δ των αριθμών, από τους παραπάνω, που είναι διαιρέτες του 12,

2. Να αναπαραστήσετε τα παραπάνω σύνολα με διάγραμμα Venn.

3. Να αναπαραστήσετε με αναγραφή τα παρακάτω σύνολα:

$$A\cup B,\ A\cap B,\ A',\ B',\ A\cup\Gamma,\ A\cap\Gamma,\ B\cup\Gamma,\ B\cap\Gamma$$

Β2. Θεωρούμε τα σύνολα:

Α={ οι μαθητές της Γ' Γυμνασίου που παίζουν ποδόσφαιρο}

Β={οι μαθητές της Γ' Γυμνασίου που παίζουν μπάσκετ}

Σε ποιο σύνολο ανήκει ένας μαθητής που:

Α) Παίζει μπάσκετ και ποδόσφαιρο;

Β) Παίζει τουλάχιστον ένα από τα δύο αθλήματα;

Γ) Παίζει μπάσκετ και δεν παίζει ποδόσφαιρο;

Δ) Παίζει ποδόσφαιρο και δεν παίζει μπάσκετ;

Ε) Δεν παίζει κανένα από τα δύο αθλήματα;

Άσκηση αυτοαξιολόγησης 2^{η}:

Δίνεται το παρακάτω διάγραμμα Venn. Να αναπαραστήσετε με αναγραφή τα παρακάτω σύνολα:

Α, Β, Γ, Ω, $A\cap B,\ A\cap\Gamma,\ B\cap\Gamma,\ A\cup B,\ B\cup\Gamma,\ A',B',\ (A\cup B)'$

Άσκηση αυτοαξιολόγησης 3^{η}:

Θεωρούμε τα σύνολα:

Α={ οι μαθητές ενός Γυμνασίου}

Β={οι παίκτες μιας ομάδας ποδοσφαίρου}

Τι συμπεραίνετε για εκείνον που ανήκει σε καθένα από τα παρακάτω σύνολα;

$$A\cup B,\ A\cap B,\ A',\ B',\ A'\cap B,\ B'\cup A,\ (A\cup B)'$$