ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Άσκηση 1

α) Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$. Αν η f είναι συνεχής στο $\left[\alpha,\beta\right]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, να δείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=\eta$.

β) Έστω Α ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A;

<u>Λύση</u>

α) Έστω ότι $f(\alpha)<f(\beta)$ και $f(\alpha)<n<f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-n$, $x\in\left[\alpha,\beta\right]$ παρατηρούμε ότι:

Η g είναι συνεχής στο $\left[\alpha,\beta\right]$ και $g(\alpha)g(\beta)<0$, αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in\left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$ οπότε $f(x_0)=\eta$.

β) Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x\in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

Άσκηση 2

i. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

ii. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

iii. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα A και $x_0 \in A$. Πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0;

Λύση

i. Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν: έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

ii. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$.

iii. Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού A. Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$, όταν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Άσκηση 3

α) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

β) Τι ονομάζουμε σύνθεση gof δύο συναρτήσεων f,g με πεδία ορισμού Α,Β αντίστοιχα; Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της gof;

γ) Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

<u>Λύση</u>

α) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$.

β) Αν f,g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g, και τη συμβολίζουμε με gof, τη συνάρτηση με τύπο $gof : A_1 \to \mathbb{R}$, όπου το πεδίο ορισμού A_1 της gof αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g.

Δηλαδή είναι το σύνολο $A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$. Είναι φανερό ότι η gof ορίζεται αν $A_1 \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

γ) Έστω οι συναρτήσεις f,g,h. Αν $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Άσκηση 4

i. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ το $f(x_0)$;

ii. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano

iii. Πότε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

<u>Λύση</u>

i. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

παρουσιάζει στο x_0 ολικό ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

ii. Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και επιπλέον, ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β).

iii. Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση "1-1", όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Άσκηση 5

i. Να διατυπώσετε το θεώρημα της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής.

ii. Πότε μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

<u>Λύση</u>

i. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

ii. Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν α) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή β) Υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της $f(x_0)$, στο σημείο x_0.

Άσκηση 6

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα [α,β];

Λύση

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β).

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β], όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta)$.

Άσκηση 7

i. Τι ονομάζεται ακολουθία;

ii. Πότε μπορούμε να αναζητήσουμε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$;

<u>Λύση</u>

i. Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha : \mathrm{N}^* \to \mathbb{R}$

ii. Για να έχει νόημα το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ πρέπει η f να είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$. Για να έχει νόημα το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ πρέπει η f να είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(-\infty,\beta)$.

Άσκηση 8

i. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano. Ποια είναι η γεωμετρική του ερμηνεία;

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $|\eta\mu x|$ και $|x|$. Πότε ισχύει η ισότητα;

<u>Λύση</u>

i. Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και επιπλέον, ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$. Δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

Η γεωμετρική ερμηνεία του Θ.Bolzano είναι ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $|\eta\mu x| \le |x|$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=0$.

Άσκηση 9

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $x_0\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$.

<u>Λύση</u>

Έστω το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $x_0\in\mathbb{R}$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0\right)$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu\right)+\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}\right)+\ldots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0$$

$$=\alpha_\nu\lim_{x\to x_0}x^\nu+\alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0}x^{\nu-1}+\ldots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0$$

$$=\alpha_\nu {x_0}^\nu+\alpha_{\nu-1}{x_0}^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0=P(x_0)$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$

Άσκηση 10

Δίνεται η ρητή συνάρτηση $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$.

Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

<u>Λύση</u>

Είναι: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, εφόσον $Q(x_0) \neq 0$.

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$f(x) = -3e^{2x+1} - 5x + 3$.

α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

α) Η συνάρτηση έχει $D_f = \mathbb{R}$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1 \Rightarrow$

$e^{2x_1+1} < e^{2x_2+1} \Rightarrow -3e^{2x_1+1} > -3e^{2x_2+1}$

και $x_1 < x_2 \Rightarrow -5x_1 > -5x_2 \Rightarrow -5x_1 + 3 > -5x_2 + 3$

άρα $-3e^{2x_1+1} - 5x_1 + 3 > -3e^{2x_2+1} - 5x_2 + 3 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει σύνολο τιμών το:

$f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \right)$.

Είναι:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-3e^{2x+1} - 5x + 3 \right) =$

  $-3 \lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x+1} - 5 \lim\limits_{x \to +\infty} x + 3 = -\infty - \infty + 3 = -\infty$

  (αφού $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x+1} = e \lim\limits_{x \to +\infty} (e^x)^2 = e(+\infty) = +\infty$).

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-3e^{2x+1} - 5x + 3) =$

  $-3\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x+1} - 5\lim\limits_{x\to-\infty} x + 3 = 0 + \infty + 3 = +\infty$

  (αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x+1} = e\lim\limits_{x\to-\infty}(e^2)^x = e\cdot 0 = 0$).

Επομένως είναι $f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty)$.

γ) Αφού το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ που περιέχει το 0, θα υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = 0$. Επειδή επιπλέον η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, η x_0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=2x^{2011}+5x-7,\ x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

iii. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f.

Λύση

i. Η συνάρτηση f έχει $D_f=\mathbb{R}$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Έχουμε:

$x_1<x_2\Rightarrow {x_1}^{2011}<{x_2}^{2011}\Rightarrow 2{x_1}^{2011}<2{x_2}^{2011}$

και $x_1<x_2\Rightarrow 5x_1<5x_2\Rightarrow 5x_1-7<5x_2-7$ άρα

$2{x_1}^{2011}+5x_1-7<2{x_2}^{2011}+5x_2-7\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Εξάλλου $f(1)=2+5-7=0$ και επομένως: $f(x)=0\Leftrightarrow x=1$

iii. Είναι: $f(1)=0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε:

- Για κάθε $x<1$, έχουμε: $f(x)<f(1)\Rightarrow f(x)<0$
- Για κάθε $x>1$, έχουμε: $f(x)>f(1)\Rightarrow f(x)>0$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=4\sqrt{e^x-2}+3$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να ορίσετε την f^{-1}.

<u>Λύση</u>

i. Πρέπει: $e^x-2\geq 0 \Leftrightarrow e^x\geq 2 \Leftrightarrow x\geq \ln 2$

Άρα $D_f=\left[\ln 2,+\infty\right)$.

ii. Για κάθε $x_1,x_2\in[\ln 2,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$x_1<x_2 \Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1}-2<e^{x_2}-2 \Rightarrow \sqrt{e^{x_1}-2}<\sqrt{e^{x_2}-2} \Rightarrow$

$4\sqrt{e^{x_1}-2}<4\sqrt{e^{x_2}-2} \Rightarrow 4\sqrt{e^{x_1}-2}+3<4\sqrt{e^{x_2}-2}+3 \Rightarrow$

$f(x_1)<f(x_2)$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\ln 2,+\infty)$. Οπότε αφού η f είναι και συνεχής (πράξεις συνεχών) το σύνολο τιμών της είναι:

$$f\left(\left[\ln 2,+\infty\right)\right)=\left[f\left(\ln 2\right),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)$$

Έχουμε:

$f(\ln 2)=4\sqrt{e^{\ln 2}-2}+3=4\cdot 0+3=3$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(4\sqrt{e^x-2}+3)=+\infty$

Άρα $f\left(\left[\ln 2,+\infty\right)\right)=\left[3,+\infty\right)$

iii. Η f είναι 1-1 ως γνήσια αύξουσα (ii) και επομένως αντιστρέφεται.

Για κάθε $x\in\left[\ln 2,+\infty\right)$ έχουμε: $f(x)=y \Leftrightarrow$

$$4\sqrt{e^x-2}+3=y \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{e^x-2}=\dfrac{y-3}{4} \\ \dfrac{y-3}{4}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} e^x-2=\left(\dfrac{y-3}{4}\right)^2 \\ y\geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\ln\left[\left(\dfrac{y-3}{4}\right)^2+2\right] \\ y\geq 3 \end{cases}.$$

Άρα $f^{-1}(x)=\ln\left(\left(\dfrac{x-3}{4}\right)^2+2\right)$ με $D_{f^{-1}}=[3,+\infty)$.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=2\ln(\sqrt{x-1}+1)+3$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι “1-1”.

iii. Να ορίσετε την f^{-1}.

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(1+x)=2$.

<u>Λύση</u>

i. Πρέπει:

$$\left\{\begin{array}{c} x-1\geq 0 \\ \text{και} \\ \sqrt{x-1}+1>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x\geq 1 \text{ άρα } D_f=[1,+\infty)$$

ii. Έστω $x_1,x_2\in[1,+\infty)$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2\ln(\sqrt{x_1-1}+1)+3=2\ln(\sqrt{x_2-1}+1)+3\Rightarrow$$

$$2\ln\sqrt{x_1-1}=2\ln\sqrt{x_2-1}\Rightarrow$$

$$\ln\sqrt{x_1-1}=\ln\sqrt{x_2-1}\Rightarrow x_1-1=x_2-1\Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι “1-1”.

iii. Έχουμε:

$$f(x)=y\Leftrightarrow y=2\ln(\sqrt{x-1}+1)+3\Leftrightarrow \frac{y-3}{2}=\ln(\sqrt{x-1}+1)\Leftrightarrow$$

$e^{\frac{y-3}{2}}=\sqrt{x-1}+1\Leftrightarrow\left(e^{\frac{y-3}{2}}-1\right)^2=x-1$, πρέπει $e^{\frac{y-3}{2}}-1\geq 0$, επομένως

$$x=(e^{\frac{y-3}{2}}-1)^2+1,\ y\geq 3.$$

Άρα $f^{-1}(x)=(e^{\frac{x-3}{2}}-1)^2+1,\ x\in[3,+\infty)$

iv. $f^{-1}(1+x)=2 \Leftrightarrow (e^{\frac{x+1-3}{2}}-1)^2+1=2 \Leftrightarrow (e^{\frac{x-2}{2}}-1)^2=1 \Leftrightarrow$

$(e^{\frac{x-2}{2}}-1=1$ ή $e^{\frac{x-2}{2}}-1=-1) \Leftrightarrow$

$(e^{\frac{x-2}{2}}=2$ ή $e^{\frac{x-2}{2}}=0$ αδύνατον$) \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{2}=\ln 2 \Leftrightarrow x=2\ln 2+2$.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-3x+2$.

i. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x\in\mathbb{R}$ για τον οποίο η συνάρτηση παίρνει την τιμή 2011.

iii. Να λύσετε την ανίσωση: $3x2^x+2^x<1$

Λύση

i. Η συνάρτηση έχει $D_f=\mathbb{R}$. Για κάθε x_1,x_2 με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}>\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$$

και $x_1<x_2\Rightarrow-3x_1>-3x_2\Rightarrow-3x_1+2>-3x_2+2$

άρα $\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}-3x_1+2>\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}-3x_2+2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x-3x+2\right]=$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x-3\lim\limits_{x\to-\infty}x+2=+\infty-(-\infty)-2=+\infty$, αφού $0<\frac{1}{2}<1$

οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x-3x+2\right]=$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x-3\lim\limits_{x\to+\infty}x+2=0-\infty+2=-\infty$, αφού $0<\frac{1}{2}<1$ οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, έχει σύνολο τιμών το:

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty)$$

Επειδή $2011 \in f(\mathbb{R})$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα, υπάρχει μοναδικός $x \in \mathbb{R}$ για τον οποίο η συνάρτηση παίρνει την τιμή 2011.

iii. Η ανίσωση γίνεται:

$$3x2^x + 2^x < 1 \Leftrightarrow 3x + 1 < \frac{1}{2^x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3x > 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x - 3x + 2 > 3 \Leftrightarrow f(x) > 3 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow x < 0$$

(αφού $f(0) = 3$) και f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=3x^{2011}+2x-5, x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα τη $x=1$.

iii. Να βρείτε το πρόσημο της f.

Λύση

i. Η συνάρτηση έχει $D_f=\mathbb{R}$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$x_1<x_2 \Rightarrow x_1^{2011}<x_2^{2011} \Rightarrow 3x_1^{2011}<3x_2^{2011}$

και $x_1<x_2 \Rightarrow 2x_1<2x_2 \Rightarrow 2x_1-5<2x_2-5$.

Άρα $3x_1^{2011}+2x_1-5<3x_2^{2011}+2x_2-5 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Έχουμε: $f(1)=0$ άρα $x=1$ ρίζα της $f(x)=0$ και επειδή η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

iii. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και $x=1$ η μοναδική της ρίζα, τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα για κάθε $x<1$ ισχύει $f(x)<f(1)=0$, ενώ για κάθε $x>1$ ισχύει $f(x)>f(1)=0$.

Άσκηση 7

Να βρείτε το $\lim_{x\to1} f(x)$, όταν:

i. $\lim_{x\to1}\dfrac{2x-1}{f(x)}=+\infty$

ii. $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{4x+3}=-\infty$

iii. $\lim_{x\to1}\left[f(x)(3x+4)\right]=+\infty$

<u>Λύση</u>

i. Θέτουμε $\dfrac{2x-1}{f(x)}=g(x)$ και επειδή $\lim_{x\to1} g(x)=+\infty$ είναι $g(x)\neq0$ για τιμές κοντά στο 1.

Επίσης: $\dfrac{2x-1}{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2x-1}{g(x)}$

Οπότε: $\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\dfrac{2x-1}{g(x)}=\lim_{x\to1}\left[(2x-1)\dfrac{1}{g(x)}\right]=0$

ii. Θέτουμε: $\dfrac{f(x)}{4x+3}=h(x)$, οπότε $f(x)=(4x+3)h(x)$

Επίσης $\lim_{x\to1} h(x)=-\infty$

Άρα $\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\left[(4x+3)h(x)\right]=7\cdot(-\infty)=-\infty$

iii. Θέτουμε:

$f(x)(3x+4)=\kappa(x)$, οπότε $\lim_{x\to1}\kappa(x)=+\infty$

Επίσης $3x+4\neq0$ για τιμές κοντά στο 1, οπότε $f(x)=\dfrac{k(x)}{3x+4}$

Άρα $\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\left[\dfrac{1}{3x+4}k(x)\right]=\dfrac{1}{7}(+\infty)=+\infty$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:[1,5]$ της οποίας η γραφική παράσταση περνάει από τα σημεία $A(1,8)$ και $B(5,12)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παίρνει την τιμή $\frac{29}{3}$

iii. Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1,5)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0)=\frac{2f(2)+3f(3)+4f(4)}{9}$$

<u>Λύση</u>

i. Είναι: $f(1)=8$ και $f(5)=12$ και αφού γνησίως μονότονη θα είναι γνησίως αύξουσα ($1<5$ και $f(1)<f(5)$).

ii. Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[1,5]$ άρα έχει σύνολο τιμών το:

$$f([1,5])=[f(1),f(5)]=[8,12]$$

$$\frac{29}{3}\in f([1,5])$$

iii. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x_1,x_2\in D_f$ με $x_1<x_2$ θα είναι $f(x_1)<f(x_2)$.
Έτσι έχουμε:

$$1<2<5\Leftrightarrow f(1)<f(2)<f(5)\Leftrightarrow 8<f(2)<12\Leftrightarrow 16<2f(2)<24$$

$$1<3<5\Leftrightarrow f(1)<f(3)<f(5)\Leftrightarrow 8<f(3)<12\Leftrightarrow 24<3f(3)<36$$

$$1<4<5\Leftrightarrow f(1)<f(4)<f(5)\Leftrightarrow 8<f(4)<12\Leftrightarrow 32<4f(4)<48$$

οπότε:

$$72<2f(2)+3f(3)+4f(4)<108\Leftrightarrow$$

$$8<\frac{2f(2)+3f(3)+4f(4)}{9}<12$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει $x_0\in(1,5)$ τέτοιο ώστε:
$f(x_0)=\frac{2f(2)+3f(3)+4f(4)}{9}$ και αφού f γνησίως αύξουσα θα είναι μοναδικό.

Άσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\ln(3e^x+1)-2$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να ορίσετε την f^{-1}.

iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<f^{-1}(\ln 5-2)-2$.

<u>Λύση</u>

i. Για να ορίζεται η f, πρέπει: $3e^x+1>0$ που αληθεύει για κάθε $x\in R$. Άρα, το πεδίο ορισμού της είναι: $D_f=\mathbb{R}$

ii. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2}\Rightarrow 3e^{x_1}<3e^{x_2}\Rightarrow 3e^{x_1}+1<3e^{x_2}+1\Rightarrow$$

$$\ell n(3e^{x_1}+1)<\ell n(3e^{x_2}+1)\Rightarrow \ell n(3e^{x_1}+1)-2<\ell n(3e^{x_2}+1)-2\Rightarrow$$

$$f(x_1)<f(x_2).$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα $1-1$ οπότε αντιστρέφεται.

iii. Έχουμε:

$$f(x)=y\Leftrightarrow y+2=\ell n(3e^x+1)\Leftrightarrow e^{y+2}=3e^x+1\Leftrightarrow$$

$$e^x=\frac{e^{y+2}-1}{3},\frac{e^{y+2}-1}{3}>0 \text{ οπότε } x=\ell n\frac{1}{3}(e^{y+2}-1), y>-2.$$

Άρα $f^{-1}(x)=\ln\frac{1}{3}(e^{x+2}-1), x\in\left(-2,+\infty\right)$

iv. Έχουμε:

$$f(x)<f^{-1}(\ln 5-2)-2\Leftrightarrow \ln\left(3e^x+1\right)-2<\ln\frac{1}{3}\left(e^{\ln 5}-1\right)-2\Leftrightarrow$$

$$\ln\left(3e^x+1\right)<\ln\frac{4}{3}\Leftrightarrow 3e^x+1<\frac{4}{3}\Leftrightarrow 9e^x+3<4\Leftrightarrow$$

$$e^x<\frac{1}{9}\Leftrightarrow x<\ln\frac{1}{9}\Leftrightarrow x<-\ln 9$$

Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = -2x^3 - 3x - 1$

i. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 2$

iv. Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x) \geq x - 1$

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow -2x_1^3 > -2x_2^3$$

και

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -3x_1 > -3x_2 \Rightarrow -3x_1 - 1 > -3x_2 - 1$$

άρα

$$-2x_1^3 - 3x_1 - 1 > -2x_2^3 - 3x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. Η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα και $1-1$ οπότε αντιστρέφεται.

iii. $f^{-1}(x) = 2 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right) = f(2) \Leftrightarrow x = -23$

iv. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, θα ισχύει:

$$f^{-1}(x) \geq x + 1 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right) \leq f\left(x+1\right) \Leftrightarrow$$

$$x \leq -2\left(x^3 + 3x^2 + 3x + 1\right) - 3\left(x+1\right) - 1 \Leftrightarrow$$

$2x^3 + 6x^2 + 10x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow$ (Σχήμα Horner)

$\left(x+1\right)\cdot\left(2x^2 + 4x + 6\right) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ (αφού $2x^2 + 4x + 6 > 0$ διότι $\Delta = 16 - 48 = -32 < 0$)

Άσκηση 11

Δίνεται η $1-1$ συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f(f(x))+f(x)=3x+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(1)=3$

i. Να βρείτε το $f^{-1}(1)$.

ii. Να βρείτε το $f(3)$

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x)=3$

iv. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+x}{f\left(f\left(x\right)\right)+f(x)-2}$

<u>Λύση</u>

i. Η f είναι $1-1$ στο $\mathbb{R}$ οπότε αντιστρέφεται. Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(1)$ στη δοθείσα σχέση και έχουμε:

$$f\left(f\left(f^{-1}(1)\right)\right)+f\left(f^{-1}(1)\right)=3f^{-1}(1)+2\Leftrightarrow$$

$$f(1)+1=3f^{-1}(1)+2\Leftrightarrow 4-2=3f^{-1}(1)\Leftrightarrow f^{-1}(1)=\frac{2}{3}$$

ii. Για $x=1$ η δοθείσα σχέση γίνεται:

$$f\left(f(1)\right)+f(1)=3\cdot 1+2\Leftrightarrow f(3)+3=5\Leftrightarrow f(3)=2$$

iii. Είναι:

$f^{-1}(x)=3\Leftrightarrow x=f(3)\Leftrightarrow x=2$ (από ii)

iv. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+x}{f\left(f(x)\right)+f(x)-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+x}{3x}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

αφού είναι: $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right| = \frac{|\sigma\upsilon\nu x|}{|x|} \le \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{|x|} \le \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \le \frac{1}{|x|}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|} = 0$

Οπότε από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$. Όμοια και για το $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x}$.

Άσκηση 12

Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\sqrt{x}+\eta\mu(x-1)}{x^2-1}=2$

i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f περνάει από το σημείο $M(1,1)$

ii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|3f(x)-2|-1}{x^2-1}$

<u>Λύση</u>

i. Θέτουμε: $g(x)=\dfrac{f(x)-\sqrt{x}+\eta\mu(x-1)}{x^2-1}\Leftrightarrow f(x)=(x^2-1)g(x)+\sqrt{x}-\eta\mu(x-1).$

Έτσι έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\Big[g(x)(x^2-1)+\sqrt{x}-\eta\mu(x-1)\Big]=1$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα ισχύει: $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$

Άρα η γραφική της παράσταση περνάει από το σημείο $M(1,1)$

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\big[3f(x)-2\big]=1>0$, οπότε $3f(x)-2>0$, κοντά στο x_0

Άρα

$$\lim_{x\to 1}\frac{|3f(x)-2|-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3f(x)-3}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3\left(x^2-1\right)g(x)+3\sqrt{x}-3\eta\mu(x-1)-3}{x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\big[3g(x)\big]+\lim_{x\to 1}\frac{3\left(\sqrt{x}-1\right)}{(x-1)(x+1)}-3\lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu(x-1)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=6+\frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}-\frac{3}{2}\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=$$

$$=6+\frac{3}{4}-\frac{3}{2}=\frac{21}{4}$$

Άσκηση 13

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=2\ln\frac{x+1}{1-x}+3$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

iii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να μελετήσετε την f^{-1} ως προς τη συνέχεια.

iv. Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

<u>Λύση</u>

i. Για να ορίζεται η f, πρέπει:

$$\frac{x+1}{1-x}>0 \Leftrightarrow 1-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<1 \Leftrightarrow |x|^2<1 \Leftrightarrow |x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της είναι το: $D_f=(-1,1)$

ii. Η f είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων f_2 και f_1 με $f_1(x)=2\ln x+3$ και $f_2(x)=\frac{x+1}{1-x}$, αφού για κάθε $x\in(-1,1)$, ισχύει:

$$(f_1 o f_2)(x)=f_1(f_2(x))=2\ln f_2(x)+3=2\ln\frac{x+1}{1-x}+3$$

iii. Για κάθε $x_1,x_2\in(-1,1)$ με $f(x_1)=f(x_2)$ έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2\ln\frac{x_1+1}{1-x_1}+3=2\ln\frac{x_2+1}{1-x_2}+3\Rightarrow\frac{x_1+1}{1-x_1}=\frac{x_2+1}{1-x_2}\Rightarrow$$

$$x_1-x_1x_2+1-x_2=x_2+1-x_1x_2-x_1\Rightarrow x_1=x_2.$$

Άρα η f αντιστρέφεται.

- Είναι:

$$f(x)=y\Rightarrow y=2\ln\frac{x+1}{1-x}+3\Rightarrow\frac{x+1}{1-x}=e^{\frac{y-3}{2}}\Rightarrow$$

$$x+1=e^{\frac{y-3}{2}}-x\cdot e^{\frac{y-3}{2}}\Rightarrow(1+e^{\frac{y-3}{2}})\cdot x=e^{\frac{y-3}{2}}-1\Rightarrow x=\frac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{e^{\frac{y-3}{2}}+1}$$

Επειδή:

$$-1<x<1\Rightarrow-1<\frac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{e^{\frac{y-3}{2}}+1}<1\Rightarrow\frac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{e^{\frac{y-3}{2}}+1}<1$$

και $\frac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{e^{\frac{y-3}{2}}+1}>-1$

ή $-1<1$ και $2e^{\frac{y-3}{2}}>0$ που αληθεύουν για κάθε $y\in\mathbb{R}$, παίρνουμε:

$$f^{-1}(x)=\frac{e^{\frac{x-3}{2}}-1}{e^{\frac{x-3}{2}}+1},x\in\mathbb{R}$$

- Η f^{-1} είναι συνεχής ως πηλίκο των συνεχών συναρτήσεων $f_1(x)=e^{\frac{x-3}{2}}-1$ και $f_2(x)=e^{\frac{x-3}{2}}+1$. Η f_1 είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών $g_1(x)=e^x-1$ και $g_2(x)=\frac{x-3}{2}$

  Πράγματι για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει:

  $$\left(g_1 o g_2\right)(x)=g_1\left(g_2\left(x\right)\right)=e^{\frac{x-3}{2}}-1=f_1(x)$$

  Η f_2 είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών $h_1(x)=e^x+1$ και $h_2(x)=\frac{x-3}{2}$.

  Πράγματι για κάθε $x\in R$, ισχύει:

  $$\left(h_1 o h_2\right)(x)=h_1\left(h_2(x)\right)=e^{\frac{x-3}{2}}+1=f_2(x)$$

iv. Είναι:

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1^-}(2\ln\frac{x+1}{1-x}+3)$$

Αν θέσουμε $u=\frac{x+1}{1-x}$ και αφού για $x\to1^-\Leftrightarrow u\to+\infty$, θα έχουμε:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{u\to +\infty} (2\ln u + 3) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \left(2\ln \frac{x+1}{1-x} + 3\right)$$

Αν θέσουμε $u = \frac{x+1}{1-x}$ και αφού για $x \to -1^+ \Leftrightarrow u \to 0$, έχουμε

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{u\to 0} \left(2\ln u + 3\right) = -\infty$$

Άσκηση 14

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=\ln\dfrac{x+2}{2-x}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της fog.

ii. Να βρείτε συνάρτηση h για την οποία να ισχύει: $(hog)(x)=x$.

iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι περιττή.

<u>Λύση</u>

i. Για να ορίζεται η g , πρέπει: $\dfrac{x+2}{2-x}>0\Leftrightarrow x\in(-2,2)$. Άρα το πεδίο ορισμού της g είναι το:

$D_g=(-2,2)$.

Επίσης έχουμε: $D_f=\mathbb{R}^*$ οπότε το πεδίο ορισμού της fog είναι:

$$D_{fog}=\left\{x\in(-2,2)\,/\,\ell n\frac{x+2}{2-x}\neq 0\right\}=\left\{x\in(-2,2)\,/\,\frac{x+2}{2-x}\neq 1\right\}=$$

$$\{x\in(-2,2)\,/\,x\neq 0\}=(-2,0)\cup(0,2)\,.$$

ii. Ισχύει $(hog)(x)=x\Leftrightarrow h\big(g(x)\big)=x\Leftrightarrow h\left(\ln\dfrac{x+2}{2-x}\right)=x$ (1)

Θέτουμε $u=\ln\dfrac{x+2}{2-x}$, οπότε έχουμε:

$u=\ln\dfrac{x+2}{2-x}\Leftrightarrow\dfrac{x+2}{2-x}=e^u\Rightarrow 2e^u-xe^u=x+2\Rightarrow x=\dfrac{2e^u-2}{e^u+1}$ αφού $e^u+1\neq 0$, για κάθε $u\in\mathbb{R}$.

Άρα η (1) γίνεται: $h(u)=\dfrac{2e^u-2}{e^u+1}$ ή $h(x)=\dfrac{2e^x-2}{e^x+1}$.

iii.

- Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $-x\in\mathbb{R}$.
- Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε: $h(-x)=\dfrac{2e^{-x}-2}{e^{-x}+1}=\dfrac{\frac{2}{e^x}-2}{\frac{1}{e^x}+1}=\dfrac{2-2e^x}{1+e^x}=-\dfrac{2e^x-2}{1+e^x}=-h(x).$

  Άρα η h περιττή.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1

Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται στο $A(2,-1)$.
- $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 5$ είναι δύο διαδοχικές ρίζες της $g(x) = 0$.

Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β) $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,5)$.

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(3)\cdot x^4 + 2x^2 + 1}{g(2)\cdot x^3 + 5} = -\infty$

<u>Λύση</u>

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1)\cdot f(x_2) < 0$.

Τότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ που είναι άτοπο.

Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β) Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(-1,5)$ και $g(x) \neq 0$ στο $(-1,5)$ αφού -1 και 5 είναι διαδοχικές ρίζες της $g(x) = 0$.

Άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1,5)$. Επίσης $g(2) = -1 < 0$. Οπότε $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,5)$.

γ) Είναι: $f(2) = -1 < 0$. Άρα από α) είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε $f(3) < 0$. Επίσης από β) $g(2) < 0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(3)\cdot x^4 + 2x^2 + 1}{g(2)\cdot x^3 + 5} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{f(3)}{g(2)} \cdot x \right) = -\infty$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$f(x)=2x^4+3\ln x+1$.

i. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

iii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική ρίζα.

iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $\lambda>0$ για τον οποίο ισχύει:

$$\lambda^4+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda}$$

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση f έχει $D_f=(0,+\infty)$. Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με

$x_1<x_2$ έχουμε: $x_1<x_2\Rightarrow {x_1}^4<{x_2}^4\Rightarrow 2{x_1}^4<2{x_2}^4$ και

$x_1<x_2\Rightarrow \ln x_1<\ln x_2\Rightarrow 3\ln x_1<3\ln x_2\Rightarrow 3\ln x_1+1<3\ln x_2+1$

άρα $2{x_1}^4+3\ln x_1+1<2{x_2}^4+3\ln x_2+1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

ii. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ άρα έχει σύνολο τιμών το:

$f((0,+\infty))=(\lim\limits_{x\to0^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))$.

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(2x^4+3\ln x+1)=0-\infty+1=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^4+3\ln x+1)=(+\infty)+(+\infty)+1=+\infty$

Επομένως είναι: $f((0,+\infty))=(-\infty,+\infty)$.

iii. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, άρα η εξίσωση $f(x)=\alpha$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$, έχει μοναδική ρίζα.

iv. Έχουμε:

$$\lambda^4 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow 2\lambda^4 + 1 = 3(\ln 1 - \ln\lambda) \Leftrightarrow$$

$$2\lambda^4 + 1 = -3\ln\lambda \Leftrightarrow 2\lambda^4 + 3\ln\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow f(\lambda) = 0$$

Αρκεί να δείξουμε λοιπόν ότι υπάρχει μοναδικό $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε $f(\lambda) = 0$. Αυτό ισχύει αφού $0 \in f((0,+\infty))$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση: $2f^3(x)-3=2x-3f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε την f^{-1}.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

iv. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

Λύση

i. $2f^3(x)-3=2x-3f(x)\Leftrightarrow 2f^3(x)+3f(x)=2x+3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $x=x_0$ είναι $2f^3(x_0)+3f(x_0)=2x_0+3$.

Αφαιρώντας κατά μέλη, έχουμε:

$$2\left[f^3(x)-f^3(x_0)\right]+3\left[f(x)-f(x_0)\right]=2(x-x_0)\Leftrightarrow$$

$$2\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\right]+3\left[f(x)-f(x_0)\right]=2(x-x_0)\Leftrightarrow$$

$$f(x)-f(x_0)=\frac{2(x-x_0)}{2\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\right]+3}$$

Αφού $2f^2(x)+2f(x)f(x_0)+2f^2(x_0)+3\neq 0,$ διότι είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς $f(x)$ με διακρίνουσα:

$$\Delta=4f^2(x_0)-4\cdot 2(2f^2(x_0)+3)=4f^2(x_0)-16f^2(x_0)-24=$$

$$-12f^2(x_0)-24=-12\left[f^2(x_o)+2\right]<0$$

Άρα: $\left|f(x)-f(x_0)\right|=\dfrac{2\left|x-x_0\right|}{2f^2(x)+2f(x)f(x_0)+2f^2(x_0)+3}\leq 2\left|x-x_0\right|$.

Οπότε $-2\left|x-x_0\right|\leq f(x)-f(x_0)\leq 2\left|x-x_0\right|$

Αλλά $\lim\limits_{x\to x_0}\left[-2\left|x-x_0\right|\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\left[2\left|x-x_0\right|\right]=0$ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, θα ισχύει:

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

ii. Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία $y=\alpha$ έχει με τη C_f ένα τουλάχιστον κοινό σημείο, δηλαδή η εξίσωση $\alpha=f(x)$ έχει για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ λύση στο $\mathbb{R}$.

$$\alpha=f(x)\Leftrightarrow f(x)-\alpha=0\Leftrightarrow \left(f(x)-\alpha\right)\left(\underbrace{2\left(\overbrace{f^2(x)+\alpha f(x)+\alpha^2}^{*}\right)+3}_{>0}\right)=0, \quad \textbf{(1)}$$

(*) την παράσταση $f^2(x)+\alpha f(x)+\alpha^2$ την αντιμετωπίζουμε σαν τριώνυμο ως προς $f(x)$ έτσι έχουμε $\Delta=-3\alpha^2\le 0\Rightarrow f^2(x)+\alpha f(x)+\alpha^2\ge 0\Rightarrow f^2(x)+\alpha f(x)+\alpha^2+3\ge 3>0$

$(1)\Leftrightarrow 2\left(f^3(x)-\alpha^3\right)+3\left(f(x)-\alpha\right)=0\Leftrightarrow 2f^3(x)+3f(x)=2\alpha^3+3\alpha\Leftrightarrow$

$2x+3=2\alpha^3+3\alpha\Leftrightarrow x=\dfrac{2\alpha^3+3\alpha-3}{2}$, δηλαδή για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ έχουμε λύση, άρα το σύνολο τιμών είναι το $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ τότε $f^3(x_1)=f^3(x_2)\Rightarrow 2f^3(x_1)=2f^3(x_2)$.

Επίσης $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 3f(x_1)=3f(x_2)$ και προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε:

$2f^3(x_1)+3f(x_1)=2f^3(x_2)+3f(x_2)\Rightarrow 2x_1+3=2x_2+3\Rightarrow x_1=x_2$.

Άρα η f είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται. Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f που είναι το $\mathbb{R}$.

Είναι: $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$

Οπότε: $2f^3(x)+3f(x)=2x+3\Leftrightarrow 2y^3+3y=2f^{-1}(y)+3$

Άρα $f^{-1}(x)=\dfrac{2x^3+3x-3}{2}, x\in\mathbb{R}$

iii. $f(x)=0\Leftrightarrow x=f^{-1}(0)=\dfrac{2\cdot 0^3+3\cdot 0-3}{2}=-\dfrac{3}{2}$

iv. Η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και η f , οπότε τα κοινά τους σημεία είναι στην $y=x$.

$f^{-1}(x)=f(x)\Leftrightarrow f^{-1}(x)=x\Leftrightarrow \dfrac{2x^3+3x-3}{2}=x$

$\Leftrightarrow 2x^3+3x-3=2x \Leftrightarrow 2x^3+x-3=0 \Leftrightarrow x=1$

<u>Παρατήρηση</u>: Τις προτάσεις

Α) Αν η f είναι γνησίως μονότονη τότε και η f^{-1} είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας.

Β) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$, (αν υπάρχουν), βρίσκονται στην ευθεία $y=x$.

<u>Πρέπει να τις αποδεικνύουμε για να τις χρησιμοποιήσουμε σε μία άσκηση.</u>

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2f(x)-\eta\mu f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
1. Να αποδείξετε ότι $|2f(x)-x|\le|f(x)|$.

2.Να αποδείξετε ότι $|f(x)|\le|x|$.

3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

4.Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu\left(f(x)\right)}{f(x)}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$

<u>Λύση</u>

1. Από την υπόθεση έχουμε:
$2f(x)-\eta\mu f(x)=x\Rightarrow 2f(x)-x=\eta\mu f(x)\Rightarrow|2f(x)-x|=|\eta\mu f(x)|\le|f(x)|$ **(1)**

2. Ισχύει

$$\big||2f(x)|-|x|\big|\le|2f(x)-x|\overset{(1)}{\le}|f(x)|\Rightarrow\big||2f(x)|-|x|\big|\le|f(x)|\Rightarrow$$
$$\Leftrightarrow -|f(x)|\le\underline{|2f(x)|-|x|\le|f(x)|}\Rightarrow|2f(x)|-|f(x)|\le|x|\Rightarrow|f(x)|\le|x|$$

3. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε: $|f(x)|\le|x|\Rightarrow -|x|\le f(x)\le|x|$, **(2)** όμως $\lim\limits_{x\to 0}\left(-|x|\right)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$, οπότε η **(2)** από το κριτήριο της παρεμβολής μας δίνει: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0.$

4. Θέτουμε $f(x)=u$ και αφού $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, τότε $u\to 0$, οπότε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\left(f(x)\right)}{f(x)}=\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$$
$$2f(x)-\eta\mu f(x)=x\overset{\gamma\iota\alpha\, x\neq 0}{\Rightarrow}2\frac{f(x)}{x}-\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=1\Rightarrow\frac{f(x)}{x}\left(2-\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right)=1.$$

Όμως $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right)=2-1=1\neq 0$, οπότε για x κοντά στο 0 θα ισχύει:

$$\frac{f(x)}{x}\left(2-\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right)=1\Rightarrow\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2-\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2-\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}}=1.$$

Άσκηση 5

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1,0)$ και $B(2,3)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να βρείτε το πρόσημο της f.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(2e^x+1)=3$.

iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(3x+5)\le 0$.

Λύση

i. Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη και με $-1<2$ είναι $f(-1)=0<f(2)=3$, η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Είναι: $f(-1)=0$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (άρα και 1-1) η τιμή που μηδενίζει την f είναι μοναδική. Επομένως για:

$$x<-1\Rightarrow f(x)<f(-1)\Rightarrow f(x)<0$$

$$x>-1\Rightarrow f(x)>f(-1)\Rightarrow f(x)>0.$$

Άρα $f(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$.

iii. Αφού η f είναι 1-1 έχουμε:

$$f(2e^x+1)=3\Leftrightarrow f(2e^x+1)=f(2)\Leftrightarrow 2e^x+1=2\Leftrightarrow$$

$$2e^x=1\Leftrightarrow e^x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\ln\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\ln 2$$

iv. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε:

$$f(3x+5)\le 0\Leftrightarrow f(3x+5)\le f(-1)\Leftrightarrow 3x+5\le -1\Leftrightarrow 3x\le -6\Leftrightarrow x\le -2.$$

Άσκηση 6

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2x+1}{x-1}=2017.$
- $|g(x)-2|\le|f(x)-1|$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1.
- $f(x)=f(x+1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

1. Να βρείτε τον αριθμό $f(1)$.
2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής στο 1.
3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 2.
4. Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[1,2]$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 g(x)=3$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.

<u>Λύση</u>

1. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1 θα ισχύει: $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

Θέτουμε $\dfrac{f(x)-2x+1}{x-1}=h(x)\overset{x\neq 1}{\Rightarrow}f(x)=(x-1)h(x)+2x-1$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1}h(x)=2017$.

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}[(x-1)h(x)+2x-1]=0\cdot 2017+2-1=1$. Άρα $f(1)=1$.

2. Αφού η σχέση $|g(x)-2|\le|f(x)-1|$, ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, θέτοντας $x=1$ παίρνουμε: $|g(1)-2|\le|f(1)-1|=0\Rightarrow g(1)-2=0\Rightarrow g(1)=2$.

Επίσης έχουμε:
$|g(x)-2|\le|f(x)-1|\Leftrightarrow -|f(x)-1|\le g(x)-2\le|f(x)-1|\Leftrightarrow 2-|f(x)-1|\le g(x)\le 2+|f(x)-1|$ **(1).**
Όμως χρησιμοποιώντας ότι $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)=1$, έχουμε:
$\lim\limits_{x\to 1}(2-|f(x)-1|)=\lim\limits_{x\to 1}(2+|f(x)-1|)=2$, οπότε από το κριτήριο της παρεμβολής η **(1)** μας δίνει: $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=2=g(1)$. Άρα η συνάρτηση g είναι συνεχής στο 1.

3. Αφού η σχέση $f(x)=f(x+1)$, ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, θέτοντας $x=1$ παίρνουμε: $f(2)=f(1)=1$.

Έχουμε: $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}f(x+1)\overset{\text{Θέτω: } x+1=u,\text{ όταν } x\to 1 \text{ τότε } u\to 2}{=}\lim\limits_{u\to 2}f(u)$, οπότε $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=1=f(2)$ που σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 2.

4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $t(x)=x^2g(x)-3$ που είναι συνεχής στο $[1,2]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.
Επίσης για x=2 η σχέση $|g(x)-2|\le|f(x)-1|$ μας δίνει: $|g(2)-2|\le|f(2)-1|=0\Rightarrow g(2)=2.$
Έχουμε: $t(1)=1^2g(1)-3=2-3=-1<0$ και $t(2)=2^2g(2)-3=4\cdot 2-3=5>0$, οπότε $t(1)t(2)<0$. Άρα ισχύει το Θ.Bolzano οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $t(\xi)=0\Rightarrow \xi^2g(\xi)=3$.

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.
1. Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.
2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.
3. Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:
   a. Η συνάρτηση f αντιστρέφεται.
   b. Ισχύει: $f^{-1}(x+y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

1. Αφού η σχέση $f(x+y)=f(x)+f(y)$ ισχύει για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$, θέτουμε $x=y=0$ έτσι έχουμε: $f(0+0)=f(0)+f(0)\Rightarrow f(0)=0$.

2. Έστω $x\in\mathbb{R}$, τότε και $-x\in\mathbb{R}$.Θέτουμε στη σχέση $f(x+y)=f(x)+f(y)$ όπου $y=-x$ και παίρνουμε:

$f(x-x)=f(x)+f(-x)\Leftrightarrow f(0)=f(x)+f(-x)\Leftrightarrow f(x)+f(-x)=0\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$,
άρα η συνάρτηση f είναι περιττή.

3.
a. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$. **(1)**
Η σχέση $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για $x=x_1$ και $y=-x_2$ γίνεται

$f(x_1-x_2)=f(x_1)+f(-x_2)\Leftrightarrow f(x_1-x_2)=f(x_1)-f(x_2)\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(x_1-x_2)=0$.
Αφού όμως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$, θα είναι υποχρεωτικά $x_1-x_2=0\Leftrightarrow x_1=x_2$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι 1-1, άρα αντιστρέφεται.

b. Έστω $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $f(x)=\alpha\Leftrightarrow x=f^{-1}(\alpha)$, $f(y)=\beta\Leftrightarrow y=f^{-1}(\beta)$, έτσι έχουμε
$\alpha+\beta=f(x)+f(y)=f(x+y)\Leftrightarrow f^{-1}(\alpha+\beta)=x+y\Leftrightarrow f^{-1}(\alpha+\beta)=f^{-1}(\alpha)+f^{-1}(\beta)$
Άρα $f^{-1}(x+y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[-3,3]$ για την οποία ισχύει $3x^2+4f^2(x)=27$ για κάθε $x\in[-3,3]$.

i. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(-3,3)$.

iii. Να βρεθεί ο τύπος της f.

iv. Αν επιπλέον $f(1)=\sqrt{6}$ να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{x}$.

<u>Λύση</u>

i. Αν ρ ρίζα της $f(x)=0$, τότε έχουμε:
$3\rho^2+4f^2(\rho)=27 \Leftrightarrow \rho^2=9 \Leftrightarrow \rho=3$ ή $\rho=-3$.

ii. Επειδή η συνάρτηση f, ως συνεχής στο $[-3,3]$, είναι συνεχής στο $(-3,3)$ και δεν μηδενίζεται στο διάστημα αυτό, διατηρεί πρόσημο στο $(-3,3)$.

iii.

- Αν $f(x)<0$, τότε από τη σχέση $3x^2+4f^2(x)=27$ έχουμε:

$$f(x)=-\frac{\sqrt{27-3x^2}}{2},\ x\in[-3,3]$$

- Αν $f(x)>0$, τότε από τη σχέση $3x^2+4f^2(x)=27$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{\sqrt{27-3x^2}}{2},\ x\in[-3,3]$$

iv. $f(1)=\sqrt{6}>0$ άρα από το ερώτημα (Γ3) έχουμε:

$$f(x)=\frac{\sqrt{27-3x^2}}{2},x\in[-3,3].$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sqrt{27-3x^2}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{27-3x^2}-3\sqrt{3}}{2x}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{27-3x^2-27}{2x(\sqrt{27-3x^2}+3\sqrt{3})}=\lim_{x\to 0}\frac{-3x}{2(\sqrt{27-3x^2}+3\sqrt{3})}=0$$

Άσκηση 9

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$\sqrt{x^2+2x+9}\le 3+xf(x)\le x^8\eta\mu\frac{2}{x}+\frac{x}{3}+3$ για κάθε $x>0$. Να βρείτε:

i. Το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{2x}$.

ii. Το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}x^7\eta\mu\frac{2}{x}$.

iii. Το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

iv. Το $f(0)$.

<u>Λύση</u>

i. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+2x+9-9}{2x\left(\sqrt{x^2+2x+9}+3\right)}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x+2)}{2x\left(\sqrt{x^2+2x+9}+3\right)}=\frac{1}{6}$

ii. Επειδή $\left|\eta\mu\frac{2}{x}\right|\le 1$ για κάθε $x\ne 0$, έχουμε:

$\left|x^7\eta\mu\frac{2}{x}\right|=\left|x^7\right|\cdot\left|\eta\mu\frac{2}{x}\right|\le\left|x^7\right|\Leftrightarrow-\left|x^7\right|\le x^7\eta\mu\frac{2}{x}\le\left|x^7\right|$

Αλλά $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\left|x^7\right|\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left|x^7\right|=0$

Οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^7\eta\mu\frac{2}{x}\right)=0$

iii. Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$\sqrt{x^2+2x+9}\le 3+xf(x)\le x^8\eta\mu\frac{2}{x}+\frac{x}{3}+3\Leftrightarrow$

$$\frac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{x} \le f(x) \le \frac{x^8\eta\mu\frac{2}{x}+\frac{x}{3}}{x}$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{x} = 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{2x} = \frac{1}{3}$ (από i ερώτημα).

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^8\eta\mu\frac{2}{x}+\frac{x}{3}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^7\eta\mu\frac{2}{x}+\frac{1}{3}\right) = 0+\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ (από ii ερώτημα)

Άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{3}$

iv. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, είναι συνεχής και στο $x=0$. Άρα $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{3}$.

Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(fof)(x)+2f(x)=2x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(2)=5$.

i. Να βρείτε το $f(5)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να βρείτε το $f^{-1}(2)$.

iv. Να λύσετε την εξίσωση: $f\left(f^{-1}(2x^2+7x)-1\right)=2$.

<u>Λύση</u>

i. Η σχέση $(fof)(x)+2f(x)=2x+1$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε για $x=2$ έχουμε:

$$f(f(2))+2f(2)=2\cdot 2+1\Leftrightarrow f(5)+10=5\Leftrightarrow f(5)=-5$$

ii. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε έχουμε:

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f(f(x_1))=f(f(x_2))$ (επειδή η f είναι συνάρτηση) και

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2f(x_1)=2f(x_2)$

άρα $f(f(x_1))+2f(x_1)=f(f(x_2))+2f(x_2)\Rightarrow 2x_1+1=2x_2+1\Rightarrow x_1=x_2$

οπότε η f είναι $1-1$, άρα αντιστρέφεται.

iii. Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(2)$ και έχουμε:

$$f(f(f^{-1}(2)))+2f(f^{-1}(2))=2f^{-1}(2)+1\Rightarrow f(2)+4=2f^{-1}(2)+1\Rightarrow$$

$$5+4-1=2f^{-1}(2)\Rightarrow f^{-1}(2)=4.$$

iv. Έχουμε:

$$f(f^{-1}(2x^2+7x)-1)=2\Leftrightarrow f^{-1}(2x^2+7x)-1=f^{-1}(2)\Leftrightarrow$$

$$f^{-1}(2x^2+7x)=5\Leftrightarrow 2x^2+7x=f(5)\Leftrightarrow 2x^2+7x+5=0\Leftrightarrow$$

$x_1=-1$ ή $x_2=-\dfrac{5}{2}$.

Άσκηση 11

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει $f(\alpha)=2\beta$ και $f(\beta)=2\alpha$ με $0<\alpha<\beta$. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $[\alpha,\beta]$, τότε:

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$.
2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $f(x_0)=\alpha+\beta$.
3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2x$, έχει ακριβώς μια λύση στο (α,β).

Λύση

1. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο $[\alpha,\beta]$ και $0<\alpha<\beta\Leftrightarrow 2\alpha<2\beta\overset{\text{υπόθεση}}{\Leftrightarrow} f(\beta)<f(\alpha)$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$.

2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\alpha-\beta$, η οποία είναι συνεχής (f συνεχής) και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$ γιατί αν,

$x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ με $x_1<x_2\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow f(x_1)-\alpha-\beta>f(x_2)-\alpha-\beta\Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)$.

Οπότε το σύνολο τιμών της g είναι
$g([\alpha,\beta])=[g(\beta),g(\alpha)]=[f(\beta)-\alpha-\beta,f(\alpha)-\alpha-\beta]=[\alpha-\beta,\beta-\alpha]$ και επειδή το $0\in\left[\underset{-}{\alpha-\beta},\underset{+}{\beta-\alpha}\right]$, τότε υπάρχει ακριβώς ($g$ γνησίως φθίνουσα) ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=\alpha+\beta$

3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-2x$, η οποία είναι συνεχής (αφού f συνεχής) και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$ γιατί αν,

$x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ με $x_1<x_2\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}f(x_1)>f(x_2)$ **(1)** και $x_1<x_2\Leftrightarrow -2x_1>-2x_2$ **(2)**.

Προσθέτοντας τις **(1)**, **(2)** έχουμε: $f(x_1)-2x_1>f(x_2)-2x_2\Leftrightarrow h(x_1)>h(x_2)$

Οπότε το σύνολο τιμών της h είναι
$h([\alpha,\beta])=[h(\beta),h(\alpha)]=[f(\beta)-2\beta,f(\alpha)-2\alpha]=[2(\alpha-\beta),2(\beta-\alpha)]$ και επειδή το $0\in\left[\underbrace{2(\alpha-\beta)}_{-},\underbrace{2(\beta-\alpha)}_{+}\right]$, τότε υπάρχει ακριβώς ($h$ γνησίως φθίνουσα) ένα $x_1\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $h(x_1)=0\Leftrightarrow f(x_1)=2x_1$.

Άσκηση 12

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x)g(x)=-e^{x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

1. Αν $f(2017)>0$, να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων f και g.

2. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(2017)x^4+3x^3+1}{\left(|\theta|-|\eta\mu\theta|\right)x^3+\left(\theta-1\right)x-1}$, $\theta\in\mathbb{R}$.

3. Αν $f(1)<e$ και $g(-2)>-2$, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τέμνει την ευθεία $y=x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in\left(-2,1\right)$.

Λύση

1. Είναι $f(x)g(x)=-e^{x}<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $f(x)g(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως οι συναρτήσεις f,g δεν έχουν ρίζες στο $\mathbb{R}$ και αφού είναι και συνεχείς θα διατηρούν σταθερό πρόσημο, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και μάλιστα ετερόσημες.

Η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε όλο το $\mathbb{R}$ και επειδή $f(2017)>0$, θα είναι $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η $g(x)<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

2. Αφού $g(x)<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε $g(2017)<0$.

- Αν $\theta=0$ τότε $|\eta\mu\vartheta|=|\vartheta|\Leftrightarrow|\vartheta|-|\eta\mu\vartheta|=0$ και το όριο γίνεται

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(2017)x^4+3x^3+1}{-x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(2017)x^4}{-x}=-g(2017)\lim_{x\to+\infty}x^3=-g(2017)(+\infty)\overset{g(2017)<0}{=}+\infty$$

- Αν $\theta\neq0$ τότε $|\eta\mu\vartheta|<|\vartheta|\Leftrightarrow|\vartheta|-|\eta\mu\vartheta|>0$ και το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g\left(2017\right)x^4+3x^3+1}{\left(|\theta|-|\eta\mu\theta|\right)x^3+\left(\theta-1\right)x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g\left(2017\right)x^4}{\left(|\theta|-|\eta\mu\theta|\right)x^3}=\frac{g\left(2017\right)}{|\theta|-|\eta\mu\theta|}\lim_{x\to+\infty}x=$$

$$=\frac{g\left(2017\right)}{|\theta|-|\eta\mu\theta|}(+\infty)\underset{|\theta|-|\eta\mu\theta|>0}{\overset{g(2017)<0}{=}}-\infty.$$

3. Πρέπει να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $g(x)=x$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $\left(-2,1\right)$.

Έστω η συνάρτηση $h(x)=g(x)-x$, η οποία είναι συνεχής (ως άθροισμα συνεχών) στο $\left[-2,1\right]$.

Είναι $h(1)=g(1)-1<-1-1=-2<0,$ γιατί: $f(1)g(1)=-e\Leftrightarrow g(1)=\dfrac{-e}{f(1)}<-1$ αφού

$$f(1)<e\Leftrightarrow\frac{e}{f(1)}>1\Leftrightarrow-\frac{e}{f(1)}<-1.$$

Επίσης $h(-2)=g(-2)+2>-2+2=0\Leftrightarrow h(-2)>0$.

Άρα η h είναι συνεχής στο $\left[-2,1\right]$ και $h(-2)h(1)<0$, οπότε ισχύει το Θ.Bolzano που σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(-2,1\right)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0 \Leftrightarrow g(x_0)=x_0$.

Άσκηση 13

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x)=\alpha^{2x}+2\alpha^x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R},\ \alpha\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

ii. Αν $f(0)=-2$ να βρείτε τον τύπο της f.

iii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2f(x)-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}$, $\alpha<2$.

iv. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2f(x)-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}$, $\alpha>3$

Λύση

i. Είναι $f^2(x)=\alpha^{2x}+2\alpha^x+1=\left(\alpha^x+1\right)^2\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

ii. Επειδή $f(0)=-2$ είναι $f(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα $f(x)=-\left(\alpha^x+1\right)=-\alpha^x-1$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2f(x)-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2\alpha^x-2-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x\cdot\left[-2\left(\dfrac{\alpha}{3}\right)^x-2\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-1\right]}{3^x\cdot\left[3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+4\right]}=\dfrac{-1}{4}$, αφού $0<\dfrac{\alpha}{3}<1, 0<\dfrac{1}{3}<1$ και $0<\dfrac{2}{3}<1$ άρα

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\alpha}{3}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=0$

iv. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2f(x)-3^x}{3\cdot2^x+4\cdot3^x}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2\alpha^x-2-3^x}{3\cdot2^x+4\cdot3^x}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x\cdot\left[-2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^x-2\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-\left(\dfrac{3}{2}\right)^x\right]}{2^x\left[3+4\left(\dfrac{3}{2}\right)^x\right]}=-\infty$, αφού $\dfrac{\alpha}{2}>1,\dfrac{3}{2}>1$ και $0<\dfrac{1}{2}<1$ άρα

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=+\infty$

Άσκηση 14

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x^4+1\le 4f(x)\le x^4+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{1}{4}\le f(0)\le \dfrac{1}{2}$ και $\dfrac{1}{2}\le f(1)\le \dfrac{3}{4}$.

ii. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^4 f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5 f\left(\dfrac{1}{x}\right)+4\eta\mu 3x}{2x^2+3\eta\mu x}$.

iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[0,1]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)-\xi=0$.

<u>Λύση</u>

i. Η σχέση $x^4+1\le 4f(x)\le x^4+2$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Για $x=0$, έχουμε:

$$1\le 4f(0)\le 2\Leftrightarrow \frac{1}{4}\le f(0)\le\frac{1}{2}$$

Για $x=1$, έχουμε:

$$2\le 4f(1)\le 3\Leftrightarrow \frac{1}{2}\le f(1)\le\frac{3}{4}$$

ii.Για $x\ne 0$, θέτουμε όπου x το $\dfrac{1}{x}$ στη δοσμένη σχέση και έχουμε:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^4+1\le 4f\left(\frac{1}{x}\right)\le\left(\frac{1}{x}\right)^4+2\Leftrightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{4}x^4\le x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)\le\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x^4$$

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}x^4\right)=\dfrac{1}{4}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}x^4\right)=\dfrac{1}{4}$

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}x^4 f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{4}$

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5 f\left(\frac{1}{x}\right)+4\eta\mu 3x}{2x^2+3\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)+4\frac{\eta\mu 3x}{x}}{2x+3\frac{\eta\mu x}{x}}=\frac{\frac{1}{4}+4\cdot 3}{0+3}=\frac{49}{12}$$

αφού $\lim\limits_{x\to 0} x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{4}$ (από ii), $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{x}=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{3x}=3\lim\limits_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=3\cdot 1=3$

iv. Έστω $g(x)=f(x)-x$

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$. Επίσης ισχύει:

$g(0)\cdot g(1)=f(0)\cdot[f(1)-1]<0$ αφού $\frac{1}{4}\le f(0)\le\frac{1}{2}\Rightarrow f(0)>0$ και $\frac{1}{2}\le f(1)\le\frac{3}{4}\Rightarrow f(1)<1$.

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε
$g(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)-\xi=0$

Άσκηση 15

i.Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x)-4}{x}=2$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

ii. Δίνεται η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$xg(x)+2\le 2συνx-ημx+x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$, αν είναι γνωστό ότι υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f^2(x)+ημ^2(2x)}{εφ^2x+x^2g(x)}$

Λύση

i. Θέτουμε: $h(x)=\dfrac{2f(x)-4}{x}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{xh(x)+4}{2}$

Έτσι, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xh(x)+4}{2}=2$$

ii. Είναι:

$xg(x)+2\le 2συνx-ημx+x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε έχουμε: $xg(x)\le 2συνx-ημx+x-2$

- Αν $x>0$, τότε: $g(x)\le\dfrac{2συνx-ημx+x-2}{x}\Leftrightarrow g(x)\le\dfrac{2(συνx-1)}{x}-\dfrac{ημx}{x}+1$ και

  επομένως $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\le 2\cdot 0-1+1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\le 0.$

- Αν $x<0$, τότε: $g(x)\ge\dfrac{2συνx-ημx+x-2}{x}\Leftrightarrow g(x)\ge\dfrac{2(συνx-1)}{x}-\dfrac{ημx}{x}+1$ και επομένως

  $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\ge 2\cdot 0-1+1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\ge 0.$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 f^2(x)+\eta\mu^2(2x)}{\epsilon\phi^2 x + x^2 g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\left[f^2(x)+\dfrac{\eta\mu^2(2x)}{x^2}\right]}{x^2\left[\left(\dfrac{\epsilon\phi x}{x}\right)^2+g(x)\right]} = \frac{4+4}{1+0} = 8.$$

Αφού $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2(2x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} 4\,\dfrac{\eta\mu^2(2x)}{(2x)^2} = 4\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu(2x)}{(2x)}\right)^2 = 4\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu u}{u}\right)^2 = 4$ και

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\epsilon\phi x}{x}\right)^2 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 = 1$$

Άσκηση 16

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $3f(x)+2f^3(x)=4x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της.

ii. Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}, αν γνωρίζετε ότι αυτά βρίσκονται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y=x$.

iv. Να λυθεί η εξίσωση: $f\left(2e^{x-1}\right)=f\left(3-x\right)$.

Λύση

i. Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία $y=\alpha$ έχει με τη C_f ένα τουλάχιστον κοινό σημείο, δηλαδή η εξίσωση $\alpha=f\left(x\right)$ έχει για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ λύση στο $\mathbb{R}$.

$$\alpha=f\left(x\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)-\alpha=0\Leftrightarrow\left(f\left(x\right)-\alpha\right)\left(\underbrace{2\left(\overbrace{f^2\left(x\right)+\alpha f\left(x\right)+\alpha^2}^{*}\right)+3}_{>0}\right)=0,\ \textbf{(1)}$$

(*) την παράσταση $f^2\left(x\right)+\alpha f\left(x\right)+\alpha^2$ την αντιμετωπίζουμε σαν τριώνυμο ως προς $f\left(x\right)$ έτσι έχουμε $\Delta=-3\alpha^2\le0\Rightarrow f^2\left(x\right)+\alpha f\left(x\right)+\alpha^2\ge0\Rightarrow f^2\left(x\right)+\alpha f\left(x\right)+\alpha^2+3\ge3>0$

$\left(1\right)\Leftrightarrow 2f^3\left(x\right)-2\alpha^3+3f\left(x\right)-3\alpha=0\Leftrightarrow 2f^3\left(x\right)+3f\left(x\right)=2\alpha^3+3\alpha\Leftrightarrow$

$4x+1=2\alpha^3+3\alpha\Leftrightarrow x=\dfrac{2\alpha^3+3\alpha-1}{4}$, δηλαδή για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ έχουμε λύση, άρα το σύνολο τιμών είναι το $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε έχουμε:

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f^3(x_1)=f^3(x_2)\Rightarrow 2f^3(x_1)=2f^3(x_2)$

και $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 3f(x_1)=3f(x_2)$

άρα $2f^3(x_1)+3f(x_1)=2f^3(x_2)+3f(x_2)\Rightarrow 4x_1+1=4x_2+1$

οπότε η f είναι $1-1$, άρα αντιστρέφεται.

Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ στη δοθείσα σχέση και έχουμε:

$3f\left(f^{-1}(x)\right)+2\left[f\left(f^{-1}(x)\right)\right]^3=4f^{-1}(x)+1\Rightarrow$

$3x+2x^3=4f^{-1}(x)+1\Rightarrow$

$f^{-1}(x)=\dfrac{2x^3+3x-1}{4}.$

ii. Για κάθε $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$x_1<x_2\Rightarrow {x_1}^3<{x_2}^3\Rightarrow 2{x_1}^3<2{x_2}^3$

και $x_1<x_2\Rightarrow 3x_1<3x_2\Rightarrow 3x_1-1<3x_2-1$

άρα

$2{x_1}^3+3x_1-1<2{x_2}^3+3x_2-1\Rightarrow \dfrac{2{x_1}^3+3x_1-1}{4}<\dfrac{2{x_2}^3+3x_2-1}{4}\Rightarrow$
$f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2),$

οπότε f^{-1} γνησίως αύξουσα.

iii. Έχουμε:

$f^{-1}(x)=f(x)\Leftrightarrow f^{-1}(x)=x\Leftrightarrow$

$\dfrac{2x^3+3x-1}{4}=x\Leftrightarrow 2x^3-x-1=0\Leftrightarrow x=1.$

iv. Η f είναι $1-1$, οπότε έχουμε:

$f(2e^{x-1})=f(3-x)\Leftrightarrow 2e^{x-1}=3-x\Leftrightarrow 2e^{x-1}+x-3=0$ (1)

Η (1) έχει προφανή ρίζα την $x=1$.

Έστω $g(x)=2e^{x-1}+x-3$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$x_1<x_2\Rightarrow x_1-1<x_2-1\Rightarrow e^{x_1-1}<e^{x_2-1}\Rightarrow 2e^{x_1-1}<2e^{x_2-1}$

και $x_1<x_2\Rightarrow x_1-3<x_2-3$

άρα $2e^{x_1-1}+x_1-3<2e^{x_2-1}+x_2-3\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$

Οπότε g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επομένως η ρίζα $x=1$ είναι μοναδική.

Άσκηση 17

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει
$f^2(x)+4\eta\mu^2 x = x^2-3x+4f(x)\eta\mu x+10$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-2\eta\mu x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.
ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f αν $f(0)=\sqrt{10}$.
iii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+\sigma\upsilon\nu x-1-\sqrt{10}}{x}$.

<u>Λύση</u>

i. Είναι:

$f^2(x)+4\eta\mu^2 x = x^2-3x+4f(x)\eta\mu x+10 \Leftrightarrow$
$\left[f(x)-2\eta\mu x\right]^2 = x^2-3x+10>0,$ (1) γιατί $\Delta=9-40=-31<0$ που σημαίνει ότι το τριώνυμο $x^2-3x+10$ είναι ομόσημο του $1>0$. Οπότε $f(x)-2\eta\mu x\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και αφού η $g(x)=f(x)-2\eta\mu x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

ii. Είναι: $f(0)=\sqrt{10}$, οπότε $g(0)=f(0)-2\eta\mu 0=f(0)=\sqrt{10}>0$ και από (i) έχουμε:
$g(x)>0\Leftrightarrow f(x)-2\eta\mu x>0$. Άρα $f(x)-2\eta\mu x=\sqrt{x^2-3x+10}\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2-3x+10}+2\eta\mu x$.

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{10}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-3x+10}+2\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{10}-1}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x^2-3x+10}-\sqrt{10}}{x}+2\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)\overset{(*)}{=}-\frac{3\sqrt{10}}{20}+2+0=-\frac{3\sqrt{10}}{20}+2.$$

$$(*)\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x^2-3x+10}-\sqrt{10}}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2-3x+10}-\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{x^2-3x+10}+\sqrt{10}\right)}{x\left(\sqrt{x^2-3x+10}+\sqrt{10}\right)}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-3x}{x\left(\sqrt{x^2-3x+10}+\sqrt{10}\right)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-3}{\sqrt{x^2-3x+10}+\sqrt{10}}\right)=\frac{-3}{2\sqrt{10}}=-\frac{3\sqrt{10}}{20}$$

$$(*)\lim_{x\to 0}\left(2\frac{\eta\mu x}{x}\right)=2\cdot 1=2,\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=0$$

Άσκηση 18

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x+1}-1$ και $g(x)=2-x$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g.

ii. Να ορισθεί η συνάρτηση fog.

iii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

iv. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης fofog.

<u>Λύση</u>

i. Για να ορίζεται η f, πρέπει: $x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$

Άρα το πεδίο ορισμού της είναι το: $D_f=[-1,+\infty)$.

Το πεδίο ορισμού της g είναι το: $D_g=\mathbb{R}$ (πολυωνυμική)

ii. Το πεδίο ορισμού της fog είναι:

$$D_{fog}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,2-x\geq -1\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\leq 3\}=(-\infty,3]\neq\varnothing$$

Άρα για κάθε $x\in(-\infty,3]$ έχουμε:

$$(fog)(x)=f\left(g(x)\right)=\sqrt{2-x+1}-1=\sqrt{3-x}-1$$

iii. Για κάθε $x_1,x_2\in[-1,+\infty)$ έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\sqrt{x_1+1}-1=\sqrt{x_2+1}-1\Rightarrow x_1=x_2.$$

Άρα, η f αντιστρέφεται.

Έστω $f(x)=y\Leftrightarrow y=\sqrt{x+1}-1\Leftrightarrow y+1=\sqrt{x+1}$, (πρέπει $y\geq -1$) $\Leftrightarrow x=(y+1)^2-1$ οπότε $f^{-1}(x)=(x+1)^2-1$ με $x\geq -1$

iv. Για κάθε $x_1,x_2\in[-1,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow x_1+1<x_2+1\Rightarrow\sqrt{x_1+1}-1<\sqrt{x_2+1}-1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$x_1 < x_2 \Rightarrow 2 - x_1 > 2 - x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$.

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα.

$D_{fofog} = D_{fo(fog)} = \left\{x \in (-\infty, 3] / \sqrt{3-x} - 1 \geq -1\right\} = (-\infty, 3] \neq \varnothing$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \left(-\infty, 3\right]$ με

$$x_1 < x_2 \overset{\text{g γν. φθίνουσα}}{\Rightarrow} g(x_1) > g(x_2) \overset{\text{f γν. αύξουσα}}{\Rightarrow} f(g(x_1)) > f(g(x_2)) \Rightarrow$$

$$f\left(f\left(g\left(x_1\right)\right)\right) > f\left(f\left(g\left(x_2\right)\right)\right).$$

Άρα η συνάρτηση fofog είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, 3\right]$.

Άσκηση 19

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+\kappa\eta\mu x}{x-x^2}, & x<0 \\ \lambda, & x=0 \\ \sqrt{8x^2+x+16}-3x, & x>0 \end{cases}$

i. Να βρείτε τα κ,λ.

ii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

iii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2\ln(8x+1)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Λύση

i. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0=0$

f : συνεχής στο $x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2x+\kappa\eta\mu x}{x-x^2}\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2+\kappa\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x}}{1-x}=\frac{2+\kappa\cdot 1}{1}=2+\kappa$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{8x^2+x+16}-3x\right)=4$$

$f(0)=\lambda$

Άρα: $\lambda=4$ και $2+\kappa=4 \Leftrightarrow \kappa=2$

ii. Για $\kappa=2$ και $\lambda=4$ έχουμε: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+2\eta\mu x}{x-x^2}, & x<0 \\ 4, & x=0 \\ \sqrt{8x^2+x+16}-3x, & x>0 \end{cases}$ οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{8x^2+x+16}-3x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{8x^2+x+16-9x^2}{\sqrt{8x^2+x+16}+3x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(-1+\frac{1}{x}+\frac{16}{x^2}\right)}{x\left(\sqrt{8+\frac{1}{x}+\frac{16}{x^2}}+3\right)} = \left(+\infty\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{8}+3}\right) = -\infty$$

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+2\eta\mu x}{x-x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2+2\frac{\eta\mu x}{x}}{1-x} = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{1-x}\left(2+2\frac{\eta\mu x}{x}\right)\right] = 0,$$

αφού: $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \le \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow \frac{-1}{|x|} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \frac{1}{|x|}$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|} = 0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$

iv. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2\ln(8x+1),\ x \in [0,1]$

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ (ως σύνθεση και αποτέλεσμα πράξεων συνεχών)

Επίσης:

$$g(0) = f(0) = 4 > 0$$

$$g(1) = f(1) - 2\ln 9 = 2 - 2\ln 9 = 2\ln\frac{e}{9} < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano έχουμε ότι η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2\ln(8x+1)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Άσκηση 20

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{4(x^3-2x^2)}, & x\in(-\infty,0)\cup(0,2)\\ \\ \dfrac{\kappa x+1}{2(x^2-4)}, & x\in(2,+\infty)\end{cases}$ και η $g:\mathbb{R}-\{0,1\}\to\mathbb{R}$

για την οποία ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x\cdot g(x)+2x}{3x}=5$ και $g(x+3)=g(x)+f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Να βρείτε:

i. Το κ αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

ii. Το όριο $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

iii. Το όριο $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$.

iv. Το όριο $\lim\limits_{x\to 3}g(x)$.

<u>Λύση</u>

i. Είναι: $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-5x+6}{4(x^3-2x^2)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-2)(x-3)}{4x^2(x-2)}=-\dfrac{1}{16}$

$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\kappa x+1}{2(x-2)(x+2)}$

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 2^+}(\kappa x+1)=2\kappa+1$

και $\lim\limits_{x\to 2^+}2(x-2)(x+2)=0$

Αν $2\kappa+1\neq 0\Leftrightarrow \kappa\neq-\dfrac{1}{2}$ τότε το $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=+\infty$ ή $-\infty$.

Αν $2\kappa+1=0\Leftrightarrow \kappa=-\dfrac{1}{2}$ τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{-\frac{1}{2}x+1}{2(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-(x-2)}{4(x-2)(x+2)} = -\frac{1}{16}.$$

Δηλαδή υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ αν και μόνο αν $\kappa = -\frac{1}{2}$

ii. Είναι: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-5x+6}{4\left(x^3-2x^2\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(x-2\right)\left(x-3\right)}{4x^2\left(x-2\right)} = -\infty$

iii. Θέτουμε:

$h(x) = \frac{\eta\mu x g(x)+2x}{3x} \Leftrightarrow \eta\mu x g(x) = 3xh(x) - 2x$ και για $x \neq 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{3xh(x)-2x}{\eta\mu x} = 3\cdot 5 \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}} - 2\lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}} = 15-2 = 13$$

iv. Είναι: $\lim\limits_{x\to 3} g(x) \overset{x=u+3}{=} \lim\limits_{u\to 0} g(u+3) = \lim\limits_{u\to 0}\left[g(u)+f(u)\right] = 13+(-\infty) = -\infty$

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=-2x^5-2kx^3+2k^5$, $x\in\mathbb{R}$ και $k>0$.
α) Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0,k)$.
δ) Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-f(x)+2k^5}{\eta\mu^3 x}=\lambda^2$, $\lambda\in\mathbb{R}$, να βρείτε τη καμπύλη στην οποία βρίσκονται τα σημεία $M(k,\lambda)$.

<u>Λύση</u>

α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:
$x_1<x_2\Rightarrow x_1^5<x_2^5\Rightarrow -2x_1^5>-2x_2^5$ **(1)** και
$x_1<x_2\Rightarrow x_1^3<x_2^3\overset{-2k<0}{\Rightarrow}-2kx_1^3>-2kx_2^3\Rightarrow -2kx_1^3+2k^5>-2kx_2^3+2k^5$. **(2)**
Προσθέτοντας τις **(1)**, **(2)** έχουμε: $-2x_1^5-2kx_1^3+2k^5>-2x_2^5-2kx_2^3+2k^5\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.
Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει σύνολο τιμών το:

$f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)$. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(-2x^5-2kx^3+2k^5)=\lim_{x\to+\infty}(-2x^5)=-2(+\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-2x^5-2kx^3+2k^5)=\lim_{x\to-\infty}(-2x^5)=-2(-\infty)=+\infty$$

Επομένως είναι: $f(\mathbb{R})=(-\infty,+\infty)$

γ) Για τη συνεχή συνάρτηση f στο $[0,k]$, ισχύουν:

- $f(0)=2k^5>0$
- $f(k)=-2k^5-2k^4+2k^5=-2k^4<0$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,k)$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ η ρίζα είναι μοναδική.

δ)
$$\lim_{x\to0}\frac{-f(x)+2k^5}{\eta\mu^3x}=\lim_{x\to0}\frac{2x^5+2kx^3-2k^5+2k^5}{\eta\mu^3x}=\lim_{x\to0}\frac{x^3(2x^2+2k)}{\eta\mu^3x}=$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + 2k}{\frac{\eta\mu^3 x}{x^3}} = 2k = \lambda^2$$, αφού $\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$.

Δηλαδή οι συντεταγμένες των σημείων $M(k, \lambda)$, ικανοποιούν την εξίσωση: $y^2 = 2x$.

Άρα ανήκουν σε μία παραβολή με εξίσωση $y^2 = 2x$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=3\ln 2x+e^{3x}+4x-2$.

i. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία την f.

ii. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=e^{\frac{3}{2}}$

iv. Να βρείτε τον πραγματικό θετικό αριθμό μ για το οποίο ισχύει:

$$3\ln 4\mu-3\ln(2\mu^2+2)-4(\mu^2+1)=e^{3(\mu^2+1)}-e^{6\mu}-8\mu$$

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση f έχει $D_f=(0,+\infty)$. Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$x_1<x_2 \Rightarrow 2x_1<2x_2 \Rightarrow \ln 2x_1<\ln 2x_2 \Rightarrow 3\ln 2x_1<3\ln 2x_2$

και $x_1<x_2 \Rightarrow 3x_1<3x_2 \Rightarrow e^{3x_1}<e^{3x_2}$

και

$x_1<x_2 \Rightarrow 4x_1<4x_2 \Rightarrow 4x_1-2<4x_2-2.$

Άρα $3\ln 2x_1+e^{3x_1}+4x_1-2<3\ln 2x_2+e^{3x_2}+4x_2-2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

ii. Είναι:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(3\ln 2x+e^{3x}+4x-2)=-\infty+1+0-2=-\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to 0}\ln 2x=\lim\limits_{u\to 0}\ln u=-\infty$, και $\lim\limits_{x\to 0} e^{3x}=\lim\limits_{u\to 0} e^{u}=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(3\ln 2x+e^{3x}+4x-2)=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln 2x=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{3x}=\lim\limits_{u\to+\infty} e^{u}=+\infty$

iii. $f(x)=e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$, (αφού η f γνησίως αύξουσα άρα και 1-1) και η ρίζα είναι μοναδική.

iv. Είναι:

$$3\ln 4\mu-3\ln(2\mu^2+2)-4(\mu^2+1)=e^{3(\mu^2+1)}-e^{6\mu}-8\mu \Leftrightarrow$$

$$3\ln 4\mu+e^{6\mu}+8\mu=3\ln 2(\mu^2+1)+e^{3(\mu^2+1)}+4(\mu^2+1) \Leftrightarrow$$

$$3\ln 2\cdot(2\mu)+e^{3(2\mu)}+4\cdot(2\mu)-2=3\ln 2(\mu^2+1)+e^{3(\mu^2+1)}+4(\mu^2+1)-2 \Leftrightarrow$$

$f(2\mu)=f(\mu^2+1) \Leftrightarrow \mu^2+1=2\mu \Leftrightarrow \mu=1$ (Διπλή ρίζα).

Άσκηση 3

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι συνθήκες:

- $\left|3\eta\mu x-2xf(x)\right|\le\frac{1}{2}x^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- $4f(x)+3f(x+1)=2x^2-2013$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

ii. Να βρείτε το $f(1)$.

iii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x-1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

<u>Λύση</u>

i. Ισχύει: $\left|3\eta\mu x-2xf(x)\right|\le\frac{1}{2}x^2,\ x\in\mathbb{R}$

- Για $x>0$, έχουμε: $\left|3\eta\mu x-2xf(x)\right|\le\frac{1}{2}x^2\Leftrightarrow-\frac{1}{2}x^2\le 3\eta\mu x-2xf(x)\le\frac{1}{2}x^2\Leftrightarrow$

  $$-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\frac{\eta\mu x}{x}\le f(x)\le\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}$$

  αλλά: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\frac{3}{2}$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\frac{3}{2}$

- Για $x<0$, έχουμε: $\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\le f(x)\le-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}$ αλλά $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\frac{3}{2}$

  και $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\frac{3}{2}$

  οπότε λόγω του κριτηρίου παρεμβολής έχουμε:

  $$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\frac{3}{2}$$

  Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\frac{3}{2}$ και επομένως $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\frac{3}{2}$.

ii. Η σχέση $4f(x)+3f(x+1)=2x^2-2013$ ισχύει για κάθε $x \in R$ άρα και για $x=0$ οπότε έχουμε: $4f(0)+3f(1)=-2013$. Αλλά f συνεχής οπότε:

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{3}{2}\ .$$

Άρα $4\cdot\frac{3}{2}+3f(1)=-2013 \Leftrightarrow f(1)=-673$.

iii. Αρκεί να υπάρχει $x_o \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=g(x_0) \Leftrightarrow f(x_0)-g(x_0)=0$
Έστω $h(x)=f(x)-g(x),\ x\in[0,1]$. Είναι:

$$h(0)=f(0)-g(0)=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}>0$$

$$h(1)=f(1)-g(1)=-673<0$$

Οπότε: $h(0)h(1)=-\frac{673}{2}<0$

Επειδή η h είναι συνεχής στο [0,1], ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων, από το θεώρημα Bolzano συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=g(x_0)$.

Άσκηση 4

Θεωρούμε τη συνεχή και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

- $4\eta\mu(x-2)\le(x-2)f(x)\le x^2-4$, για κάθε $x\in(0,2)$.
- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+1}{x}=5$.

1. Να βρείτε τους αριθμούς $f(0)$ και $f(2)$.
2. Αν $g(x)=4-e^x-f(x)$, $x\in(0,2)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $t(x)=\ln(-f(x)+4)$, $x\in(0,2)$ τέμνει την $y=x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,2)$.

<u>Λύση</u>

1. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,2]$ θα είναι συνεχής και στα άκρα 0 και 2, οπότε θα ισχύει: $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$ και $\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)$.

- $4\eta\mu(x-2)\le(x-2)f(x)\le x^2-4\overset{x<2\Leftrightarrow x-2<0}{\Rightarrow}x+2\le f(x)\le4\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}$ **(1)**

  Όμως $\lim\limits_{x\to2}(x+2)=4$ και $\lim\limits_{x\to2}4\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}\overset{x-2=u,\ x\to2\Rightarrow u\to0}{=}4\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=4$, οπότε η **(1)** από το κριτήριο της παρεμβολής μας δίνει: $\lim\limits_{x\to2}f(x)=4$. Άρα $f(2)=4$.
- Θέτουμε $\dfrac{f(x)+1}{x}=s(x)\Rightarrow f(x)=xs(x)-1$ και $\lim\limits_{x\to0}s(x)=5$.

  Έχουμε: $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(xs(x)-1)=0\cdot5-1=-1$. Άρα $f(0)=-1$.

2. Έστω $x_1,x_2\in(0,2)$ με $x_1<x_2$.

Τότε: $x_1<x_2\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow-f(x_1)>-f(x_2)$ **(2)** και

$x_1<x_2\overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow}e^{x_1}<e^{x_2}\Leftrightarrow4-e^{x_1}>4-e^{x_2}$ (3).

Προσθέτοντας τις **(2)** και **(3)** έχουμε: $4-e^{x_1}-f(x_1)>4-e^{x_2}-f(x_2)\Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)$ που σημαίνει ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $A=(0,2)$.

Αφού η συνάρτηση g είναι συνεχής (άθροισμα συνεχών συναρτήσεων) και γνησίως φθίνουσα στο $A=(0,2)$, το σύνολο τιμών της θα είναι: $g(A)=\left(\lim\limits_{x\to2^-}g(x),\lim\limits_{x\to0^+}g(x)\right)=(-e^2,4)$ γιατί

$\lim\limits_{x\to2^-}g(x)=\lim\limits_{x\to2^-}(4-e^x-f(x))=4-e^2-4=-e^2$ και $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(4-e^x-f(x))=4-e^0+1=4$.

3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,2)$ έτσι ώστε να ισχύει: $t(x_0)=x_0$.

Είναι:

$t(x_0)=x_0\Leftrightarrow\ln(-f(x_0)+4)=x_0\Leftrightarrow e^{x_0}=-f(x_0)+4\Leftrightarrow4-f(x_0)-e^{x_0}=0\Leftrightarrow g(x_0)=0$

Επειδή το $0 \in g(A) = \left(-e^2, 4\right)$ και η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A = \left(0, 2\right)$, υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, 2\right)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$. Άρα και $t(x_0) = x_0$.

Άσκηση 5

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f^2(x)=x^2+x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+f(x)}{x}=-\dfrac{1}{2}$.

1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.
2. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=-\sqrt{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.
3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-f(x)\right)$.
4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο $g(x)=x-f(x)$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left(-\infty,0\right)$.

<u>Λύση</u>

1. Είναι $x^2+x+1>0$ γιατί $\Delta=-3<0$ που σημαίνει ότι το τριώνυμο είναι ομόσημο του 1>0. Άρα $f^2(x)=x^2+x+1>0\Rightarrow f^2(x)\neq 0\Rightarrow f(x)\neq 0$ και επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε: $f(x)<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η f δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.

2. Αφού $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1+f(x)}{x}\cdot x-1)=-\dfrac{1}{2}\cdot 0-1=-1<0$, θα υπάρχει x_1 (κοντά στο 0) με $f(x_1)<0$ και λαμβάνοντας υπόψη το **(1)** ερώτημα θα έχουμε $f(x)<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Οπότε: $f^2(x)=x^2+x+1\Rightarrow f(x)=-\sqrt{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

3. $$\lim_{x\to-\infty}\left(x-f(x)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)}{x-\sqrt{x^2+x+1}}=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-x-1}{x-\sqrt{x^2+x+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x-1}{x-\sqrt{x^2+x+1}}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}=-\frac{1}{2}.$$

4. Αφού , $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-f(x)\right)=-\dfrac{1}{2}<0$, υπάρχει ρ_1 κοντά στο $\left(-\infty\right)$ έτσι ώστε $g(\rho_1)<0$.
Αφού $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x-f(x)\right)=0+1=1>0$, υπάρχει ρ_2 κοντά στο 0 έτσι ώστε $g(\rho_2)>0$.
Έχουμε $g(\rho_1)g(\rho_2)<0$ και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\left[\rho_1,\rho_2\right]\subseteq\left(-\infty,0\right)$, οπότε ισχύει το Θ. Bolzano άρα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0\in\left(\rho_1,\rho_2\right):g(x_0)=0$.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

1. Αν $1<f(x)<e$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=e^x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

2. Αν $f(0)>1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=e^x+x\eta\mu\frac{1}{x}$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα.

3. Αν $f(k)+f(2k)=4k$, $k>0$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\frac{f(x)-k}{x-2k}=\frac{f(x)-2k}{x-k}$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(k,2k)$.

4. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g:[1,3]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(x)-x$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[1,3]$ έτσι ώστε $g(\xi)=\frac{f(1)+2f(2)+3f(3)}{6}-\frac{7}{3}$.

<u>Λύση</u>

1. Έστω $h(x)=f(x)-e^x$, $x\in[0,1]$.

- Αφού η σχέση $1<f(x)<e$, ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θέτοντας $x=0$ και $x=1$ παίρνουμε: $1<f(0)<e$ και $1<f(1)<e$, αντίστοιχα.
- Είναι $h(0)=f(0)-e^0>1-1=0\Rightarrow h(0)>0$ και $h(1)=f(1)-e^1<e-e=0\Rightarrow h(1)<0$, οπότε ισχύει: $h(0)h(1)<0$.
- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[0,1]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Από τα παραπάνω ισχύει το Θ.Bolzano για την h, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0\Rightarrow f(x_0)=e^{x_0}$.

2. Έστω $\varphi(x)=f(x)-e^x-x\eta\mu\frac{1}{x}$, $x>0$ η οποία είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων στο $(0,+\infty)$.

- Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}(x\eta\mu\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{1}{x}=u,u\to+\infty}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\eta\mu u}{u}=0$, αφού: $\left|\frac{\eta\mu u}{u}\right|\le\frac{1}{|u|}\Leftrightarrow-\frac{1}{|u|}\le\frac{\eta\mu u}{u}\le\frac{1}{|u|}$ και $\lim\limits_{u\to+\infty}(-\frac{1}{|u|})=\lim\limits_{u\to+\infty}(\frac{1}{|u|})=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\eta\mu u}{u}=0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(f(x)-e^x-x\eta\mu\frac{1}{x})=f(0)-1-0=f(0)-1>0$. Τότε θα υπάρχει x_1 κοντά στο 0 ώστε $\varphi(x_1)>0$.

- Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\eta\mu\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{1}{x}=u,u\to 0}{=}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$.

  Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-e^x-x\eta\mu\frac{1}{x})=0-(+\infty)-1=-\infty$. Τότε θα υπάρχει x_2 κοντά στο $+\infty$ ώστε $\varphi(x_2)<0$.
- Είναι $\varphi(x_1)\varphi(x_2)<0$ και η συνάρτηση φ συνεχής στο $[x_1,x_2]\subseteq(0,+\infty)$, ισχύει το Θ. Bolzano οπότε υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)\subseteq(0,+\infty)$, με $x_0>0$, τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=0$.

3. Έστω $t(x)=\left(f(x)-k\right)\left(x-k\right)-\left(f(x)-2k\right)\left(x-2k\right)$, $x\in[k,2k]$, $k>0$.
- Είναι $t(k)=-\left(f(k)-2k\right)\left(k-2k\right)=k\left(f(k)-2k\right)<0$, γιατί

  $k<2k\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f(k)<f(2k)=4k-f(k)\Leftrightarrow 2f(k)<4k\Leftrightarrow f(k)-2k<0$ και $k>0$.

- $t(2k)=\left(f(2k)-k\right)\left(2k-k\right)=k\left(f(2k)-k\right)>0$, γιατί:

  $k<2k\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f(k)<f(2k)\Leftrightarrow f(2k)>f(k)=4k-f(2k)\Leftrightarrow 2f(2k)>4k\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow f(2k)>2k>k\Leftrightarrow f(2k)-k>0$ και $k>0$.
- Είναι $t(k)t(2k)<0$ και η συνάρτηση t συνεχής στο $[k,2k]$, ισχύει το Θ. Bolzano οπότε υπάρχει $\xi\in(k,2k)$, τέτοιο ώστε $t(\xi)=0$.

4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$, η οποία είναι συνεχής στο $[1,3]$. Τότε θα υπάρχει μια ελάχιστη τιμή m και μία μέγιστη τιμή M δηλαδή υπάρχουν
$x_1,x_2: m=g(x_1)\le g(x)\le g(x_2)=M$ **(1),** για κάθε $x\in[1,3]$.
Θέτουμε στην **(1)**, όπου $x=1,2,3$, έτσι έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} g(x_1)\le g(1)\le g(x_2)\\ g(x_1)\le g(2)\le g(x_2)\\ g(x_1)\le g(3)\le g(x_2)\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} g(x_1)\le g(1)\le g(x_2)\\ 2g(x_1)\le 2g(2)\le 2g(x_2)\\ 3g(x_1)\le 3g(3)\le 3g(x_2)\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}6g(x_1)\le g(1)+2g(2)+3g(3)\le 6g(x_2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x_1)\le\frac{g(1)+2g(2)+3g(3)}{6}\le g(x_2)$$

1η Περίπτωση: Αν $g(x_1)=\dfrac{g(1)+2g(2)+3g(3)}{6}\Rightarrow\xi=x_1$

2η Περίπτωση: Αν $g(x_2)=\dfrac{g(1)+2g(2)+3g(3)}{6}\Rightarrow\xi=x_2$

3η Περίπτωση: Αν $g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow g=$σταθερή, οπότε ξ είναι κάθε σημείο του διαστήματος $[1,3]$.

4η Περίπτωση: Αν $g\left(x_1\right) < \frac{g(1)+2g(2)+3g(3)}{6} < g\left(x_2\right)$.

Δηλαδή το $\frac{g(1)+2g(2)+3g(3)}{6} \in \left(g\left(x_1\right), g\left(x_2\right)\right)$, οπότε από Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,3)$ έτσι ώστε

$$g(\xi) = \frac{g(1)+2g(2)+3g(3)}{6} = \frac{f(1)-1+2(f(2)-2)+3(f(3)-3)}{6} =$$

$$= \frac{f(1)-1+2f(2)-4+3f(3)-9}{6} = \frac{f(1)+2f(2)+3f(3)}{6} - \frac{7}{3}.$$

Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [1,3]$ έτσι ώστε

$$g(\xi) = \frac{f(1)+2f(2)+3f(3)}{6} - \frac{7}{3}.$$

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

- $f\left(e^{f(x)}\right)=\ln x+2$, για κάθε $x>0$ και
- $(f\circ f)\left(e^{f(x)}\right)=\ln(\ln x+1)^2$ για κάθε $x>\frac{1}{e}$.

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
2. Να αποδείξετε ότι $f(x)=2\ln(x-1)$, $x>1$.
3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(f\circ f)(x)=f\left(e^{-x}+2\right)$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $\left(1+e, 1+e^{3/2}\right)$.

Λύση

1. Έστω
$x_1,x_2>0$ με $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow e^{f(x_1)}=e^{f(x_2)}\Rightarrow f(e^{f(x_1)})=f(e^{f(x_2)})\Rightarrow$

$\Rightarrow \ln x_1+2=\ln x_2+2\Rightarrow \ln x_1=\ln x_2\Rightarrow x_1=x_2$
Άρα η συνάρτηση f είναι 1-1.

2. $(f\circ f)\left(e^{f(x)}\right)=\ln(\ln x+1)^2\Leftrightarrow f(f(e^{f(x)}))=2\ln(\ln x+1)\Leftrightarrow f(\ln x+2)=2\ln(\ln x+1)$ **(1)**
Θέτουμε: $\ln x+2=y\Leftrightarrow \ln x+1=y-1>0\Rightarrow y>1$ και η **(1)** γίνεται:
$f(\ln x+2)=2\ln(\ln x+1)\Rightarrow f(y)=2\ln(y-1)$, $y>1$. Άρα $f(x)=2\ln(x-1)$, $x>1$.

3. Το πεδίο ορισμού της $f\circ f$ είναι:
$\{x\in A_f \text{ και } f(x)\in A_f\}=\{x>1 \text{ και } 2\ln(x-1)>1\}=\{x>1 \text{ και } x>1+\sqrt{e}\}=(1+\sqrt{e},+\infty)$

$(f\circ f)(x)=f\left(e^{-x}+2\right)\Leftrightarrow f(f(x))=f\left(e^{-x}+2\right)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} f(x)=e^{-x}+2\Leftrightarrow 2\ln(x-1)=e^{-x}+2$
$\Leftrightarrow 2\ln(x-1)-e^{-x}-2=0.$
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=2\ln(x-1)-e^{-x}-2$ και εφαρμόζουμε το Θ.Bolzano στο διάστημα $\left[1+e, 1+e^{3/2}\right]$

- Η g είναι συνεχής στο $\left[1+e, 1+e^{3/2}\right]\subseteq(1+\sqrt{e},+\infty)$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- $g(e+1)=2\ln(e+1-1)-e^{-(e+1)}-2=2\cdot 1-\frac{1}{e^{e+1}}-2=-\frac{1}{e^{e+1}}<0$

- $g(1+e^{3/2}) = 2\ln(1+e^{3/2}-1) - e^{-1-e^{3/2}} - 2 = 3 - e^{-1-e^{3/2}} - 2 = 1 - \frac{1}{e^{1+e^{3/2}}} > 0$, δηλαδή

  $g(1+e^{3/2})g(e+1) < 0$, οπότε ισχύει το Θ.Bolzano. Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(1+e, 1+e^{3/2}\right)$ έτσι ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow \left(f \circ f\right)\left(x_0\right) = f\left(e^{-x_0} + 2\right)$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:R \to R$ τέτοια ώστε: $\kappa\eta\mu^2 x = x^2 f(x) + \sqrt{1+\eta\mu^2 x} - \lambda$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1) και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$

i. Να βρείτε τα κ και λ

ii. Αν $\kappa = 1$ και $\lambda = 1$ να βρείτε την f.

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}$.

<u>Λύση</u>

i. $A \in C_f$, άρα $f(0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda = 1$

Η σχέση (1) για $\lambda = 1$ γίνεται: $\kappa\eta\mu^2 x = x^2 f(x) + \sqrt{1+\eta\mu^2 x} - 1$ και για $x \neq 0$ έχουμε:

$f(x) = \frac{\kappa\eta\mu^2 x + 1 - \sqrt{1+\eta\mu^2 x}}{x^2}$ οπότε:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}\left[\kappa \cdot \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right] + \lim_{x \to 0} \frac{-\eta\mu^2 x}{x^2\left(1+\sqrt{1+\eta\mu^2 x}\right)} = \kappa - \frac{1}{2}$$

Αλλά η f είναι συνεχής στο 0, οπότε:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \kappa - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \kappa = 1$$

ii. Η σχέση (1) για $\kappa = \lambda = 1$ γίνεται: $\eta\mu^2 x = x^2 f(x) + \sqrt{1+\eta\mu^2 x} - 1$.

Για $x \neq 0$ η τελευταία γίνεται: $f(x) = \frac{\eta\mu^2 x + 1 - \sqrt{1+\eta\mu^2 x}}{x^2}$.

Επίσης έχουμε: $f(0) = \frac{1}{2}$

Άρα $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu^2 x + 1 - \sqrt{1+\eta\mu^2 x}}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x+1-\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}{x^2\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right]+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}{x^2\sigma\upsilon\nu x}=$$

$$1+\lim_{x\to 0}\frac{-\eta\mu^2 x}{x^2\sigma\upsilon\nu x(1+\sqrt{1+\eta\mu^2 x})}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Άσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{x^3\cdot 2^x+3\cdot 2^x-4}{2^x}$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

iii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$ για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

i. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$, αφού $2^x\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Είναι:

$$f(x)=\frac{x^3\cdot 2^x+3\cdot 2^x-4}{2^x}=x^3+3-4\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε: $x_1<x_2\Rightarrow {x_1}^3<{x_2}^3\Rightarrow {x_1}^3+3<{x_2}^3+3$

και $x_1<x_2\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}>\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}\Rightarrow -4\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}<-4\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$,

αφού η συνάρτηση $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα

$${x_1}^3+3-4\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}<{x_2}^3+3-4\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x^3+3-4\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]=(-\infty)+3-4(+\infty)=-\infty\,,$$

αφού $0<\frac{1}{2}<1$ οπότε: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=+\infty$.

iii. Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^3+3-4\left(\frac{1}{2}\right)^x\right] = (+\infty)+3-4\cdot 0 = +\infty$,

αφού $0<\frac{1}{2}<1$ οπότε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0.$

iv. Η f είναι συνεχής (πράξεις συνεχών), είναι και γνησίως αύξουσα άρα $f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty)$.

Το $\kappa \in \mathbb{R}$ περιλαμβάνεται στο σύνολο τιμών της f, οπότε η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα είναι μοναδική.

Ημερομηνία τροποποίησης: 25/01/2019

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Άσκηση 1

Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Λύση

Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) - f(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$, οπότε

$$\lim_{x \to x_0}\left[f(x) - f(x_0)\right] = \lim_{x \to x_0}\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)\right]$$

$$= \lim_{x \to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\lim_{x \to x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Άσκηση 2

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- f συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι σταθερή στο Δ.

<u>Λύση</u>

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$.

Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

  $$f'(\xi)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \qquad \textbf{(1)}$$

  Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi)=0$, οπότε, λόγω της **(1)**, είναι

  $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_1 > x_2$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$.

Σε όλες τις περιπτώσεις λοιπόν είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

Άσκηση 3

i. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ

ii. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

<u>Λύση</u>

i. Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο,

ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε

$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$.

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$,

οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

ii. Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αν

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (\lambda x + \beta) \right] = 0.$$

Άσκηση 4

i. Έστω δυο συναρτήσεις f,g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- οι f,g είναι συνεχείς στο Δ
- $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε να δείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει

$$f(x)=g(x)+c$$

ii. Ποια η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής;

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x\in\Delta$ ισχύει

$$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0$$

Επομένως σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει $f(x)-g(x)=c$, οπότε $f(x)=g(x)+c$.

ii. Γεωμετρικά το Θ.Μ.Τ. για μια συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha, f(\beta))$ και $B(\beta, f(\beta))$.

Άσκηση 5

i. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ.

   Αν η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να δείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

ii. Πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

<u>Λύση</u>

i. Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο.

   Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει ένα $\delta>0$ τέτοιο, ώστε $(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq\Delta$ και $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ **(1)**

   Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

   Επομένως,

   - αν $x\in(x_0-\delta, x_0)$, τότε λόγω της **(1)**, θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$,

     οπότε θα έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$ **(2)**

   - αν $x\in(x_0, x_0+\delta)$, τότε λόγω της **(1)**, θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$,

     οπότε θα έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$ **(3)**

   Έτσι από τις **(2)** και **(3)** έχουμε $f'(x_0)=0$.

   Η απόδειξη για το τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

ii. Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Άσκηση 6

i. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ με $f'(x)=-\eta\mu x$

ii. Ποια η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle;

Λύση

i. Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbf{R}$ και $h\neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu(x+h)-\sigma\upsilon\nu(x)}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu h-\eta\mu x\cdot\eta\mu h-\sigma\upsilon\nu x}{h}=$$

$$\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}-\eta\mu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h},$$

οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}\right)-\lim_{h\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}\right)=$$

$$\sigma\upsilon\nu x\cdot 0-\eta\mu x\cdot 1=-\eta\mu x.$$

Δηλαδή $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$.

ii. Γεωμετρικά το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.

Άσκηση 7

i. Έστω η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^{\nu}, \nu\in\mathbf{N}-\{0,1\}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και ότι ισχύει $f'\left(x\right)=\nu x^{\nu-1}$.

ii. Πότε μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του Δ, λέγεται κυρτή στο Δ ;

<u>Λύση</u>

i. Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbf{R}$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f\left(x\right)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-{x_0}^{\nu}}{x-x_0}=$$

$$\frac{\left(x-x_0\right)\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+{x_0}^{\nu-1}\right)}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+{x_0}^{\nu-1},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)-f(x_0)}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+{x_0}^{\nu-1}\right)={x_0}^{\nu-1}+{x_0}^{\nu-1}+\ldots+{x_0}^{\nu-1}=\nu {x_0}^{\nu-1},$$

δηλαδή $\left(x^{\nu}\right)'=\nu x^{\nu-1}$.

ii. Η συνάρτηση f λέγεται κυρτή στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .

Άσκηση 8

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbf{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}^*$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{x}$.

<u>Λύση</u>

Αν $x>0$, τότε $\left(\ln|x|\right)'=\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$, ενώ αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$. Επομένως,

$$y'=\left(\ln u\right)'=\frac{1}{u}u'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$$

και άρα $\left(\ln|x|\right)'=\dfrac{1}{x}$.

Άσκηση 9

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε να δείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

<u>Λύση</u>

Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0,

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε

$$f(x)\leq f(x_0) \text{ για κάθε } x\in(\alpha,x_0] \qquad \textbf{(1)}$$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0,

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε

$$f(x)\leq f(x_0) \text{ για κάθε } x\in[x_0,\beta) \qquad \textbf{(2)}$$

Επομένως λόγω των **(1)** και **(2)**, ισχύει

$$f(x)\leq f(x_0) \text{ για κάθε } x\in(\alpha,\beta),$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Άσκηση 10

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$ με $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει: $f'(x)=\alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

ii. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Να δώσετε τον ορισμό του τοπικού μεγίστου για την f.

Λύση

i. Πράγματι, αν $y=x^{\alpha}=e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u=\alpha \ln x$, τότε $y=e^{u}$. Επομένως,

$$y'=\left(e^{u}\right)'=e^{u}\cdot u'=e^{\alpha \ln x}\cdot \alpha \cdot \frac{1}{x}=x^{\alpha}\cdot \alpha \cdot \frac{1}{x}=\alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

ii. Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε

$$f(x)\le f(x_0) \text{ για κάθε } x\in A\cap(x_0-\delta, x_0+\delta).$$

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μέγιστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο.

Άσκηση 11

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x, \alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και ισχύει:

$f'(x)=\alpha^x \cdot \ln\alpha$.

<u>Λύση</u>

Πράγματι, αν $y=\alpha^x=e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u=x\ln\alpha$, τότε $y=e^u$. Επομένως,

$$y'=\left(e^u\right)'=e^u \cdot u'=e^{x\ln\alpha}\cdot\ln\alpha=\alpha^x\cdot\ln\alpha .$$

Άσκηση 12

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως είναι συνεχής. Αν η $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε να δείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Λύση

Έχουμε ότι

$$f'(x)>0 \text{, για κάθε } x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως, για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.

- αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

- αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο$[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

- Τέλος αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Επομένως σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Άσκηση 13

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη $\mathbf{R}$ και ισχύει $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$.

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbf{R}$ και $h \neq 0$ ισχύει

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\eta\mu(x+h)-\eta\mu x}{h} = \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu h + \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu h - \eta\mu x}{h} =$$

$$\eta\mu x \cdot \frac{(\sigma\upsilon\nu h - 1)}{h} + \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h}.$$

Επειδή

$$\lim_{h\to 0} \frac{\eta\mu h}{h} = 1 \text{ και } \lim_{h\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} = 0,$$

έχουμε

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \eta\mu x \cdot 0 + \sigma\upsilon\nu x \cdot 1 = \sigma\upsilon\nu x.$$

Δηλαδή $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

Άσκηση 14

Να αποδείξετε ότι η αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

<u>Λύση</u>

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

δηλαδή

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Άσκηση 15

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f\left(x\right)=\varepsilon\varphi x,\ x\in\mathbf{R}_1=\left\{x\in\mathbf{R}\,/\,\sigma\upsilon\nu x\neq 0\right\}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}_1$ και ισχύει $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

<u>Λύση</u>

i. Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=$$

$$\frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

ii. Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbf{R_1}$ έχουμε:

$$\left(\varepsilon\varphi x\right)'=\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{\left(\eta\mu x\right)'\cdot\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\cdot\left(\sigma\upsilon\nu x\right)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\cdot\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=e^{x-2}+x-3$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

2. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ και το σύνολο τιμών της f.

Λύση

i. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$. Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση και έχουμε:

   $f'\left(x\right)=e^{x-2}+1>0$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$,

   οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbf{R}$.

ii. Μία προφανής ρίζα της συνάρτησης είναι το $x=2$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα αυτή η ρίζα είναι μοναδική. Για το σύνολο τιμών υπολογίζουμε τα παρακάτω όρια:

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-2}+x-3\right)=-\infty$,

   αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-2}=0, \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-3\right)=-\infty$ και

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x-2}+x-3\right)=+\infty$,

   αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-2}=+\infty, \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-3\right)=+\infty$.

   Και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbf{R}$, το σύνολο τιμών της f είναι όλο το $\mathbf{R}$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4x^3+2(\lambda-1)x-\lambda$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα $(0,1)$.

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x)=x^4+(\lambda-1)x^2-\lambda x,$$

η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμική. Επιπλέον ισχύει $F(0)=F(1)=0$,

επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f , αφού η f :

- είναι συνεχής στο $[0,1]$
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$

και $F(0)=F(1)$,

άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $F'(\xi)=0$. Όμως $f(\xi)=F'(\xi)=0$, οπότε αποδείχτηκε το ζητούμενο.

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(x^2\right)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της f.

ii. Να βρείτε τα σημεία της C_f στα οποία η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iii. Να τη μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

<u>Λύση</u>

i. Πρέπει $x^2>0 \Leftrightarrow x\neq 0$, άρα το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbf{R}^*$. Είναι

$$f(x)=\ln\left(x^2\right)=\ln\left(|x|^2\right)=2\ln|x|$$

οπότε

$$f'(x)=\left(2\ln|x|\right)'=2\frac{1}{x}.$$

ii. Έστω $A\left(x_0,2\ln|x_0|\right)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης της C_f. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y-2\ln|x_0|=\frac{2}{x_0}\left(x-x_0\right) \qquad \textbf{(1)}$$

και για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων πρέπει οι συντεταγμένες του $O(0,0)$ να επαληθεύουν την **(1)**, οπότε η **(1)** γίνεται:

$$-2\ln|x_0|=\frac{2}{x_0}\left(-x_0\right)\Leftrightarrow \ln|x_0|=1=\ln e\Leftrightarrow x_0=\pm e \text{ , και } f(x_0)=2\ln e=2$$

άρα τα σημεία της C_f είναι τα $A(e,2)$ και $B(-e,2)$

iii. Η συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbf{R}^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και είναι συνεχής.

Επειδή $f'(x)=2\frac{1}{x}$, έχουμε ότι:

$f'(x)<0$ για $x\in(-\infty,0)$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$ και

$f'(x)>0$ για $x\in(0,+\infty)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επίσης έχουμε ότι:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$.

Από τα προηγούμενα έπεται ότι για $x\in(-\infty,0)$, το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty,+\infty)$ και για $x\in(0,+\infty)$, το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty,+\infty)$. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

Επίσης η f δεν έχει ακρότατα, αφού είναι γνησίως αύξουσα σε δυο ανοιχτά διαστήματα.

iv. Από τα όρια $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$, έπεται ότι η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=0$, δηλαδή τον άξονα y’y.

Πλάγια ασύμπτωτη δεν έχει, αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0\,,$$

όμως

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-0\cdot x\right]=\lim_{x\to+\infty}2\ln x=+\infty\,.$$

Ομοίως και στο $-\infty$.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{4}{x}, x\neq 0$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ με $x_0 \neq 0$.

ii. Να δείξετε ότι το τρίγωνο το οποίο σχηματίζει η προηγούμενη εφαπτομένη με τους άξονες έχει σταθερό εμβαδό.

iii. Αν Α και Β τα σημεία που η εφαπτομένη στο Μ τέμνει τους άξονες, να δείξετε ότι το Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ.

<u>Λύση</u>

i. Ισχύει: $f'\left(x\right)=-\dfrac{4}{x^2}$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ είναι: $y-\dfrac{4}{x_0}=-\dfrac{4}{{x_0}^2}\left(x-x_0\right)$ **(1)**

ii. Θα βρούμε σε ποια σημεία τέμνει η εφαπτομένη τους άξονες:

για $x=0$ η **(1)** γίνεται $y-\dfrac{4}{x_0}=-\dfrac{4}{{x_0}^2}\left(-x_0\right)\Leftrightarrow y=\dfrac{8}{x_0}$

και για $y=0$ η **(1)** γίνεται $-\dfrac{4}{x_0}=-\dfrac{4}{{x_0}^2}\left(x-x_0\right)\Leftrightarrow x=2x_0$.

Άρα η **(1)** τέμνει τους άξονες στα σημεία $A\left(0,\dfrac{8}{x_0}\right)$ και $B\left(2x_0,0\right)$.

Το εμβαδό του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ ισούται με

$\left(OAB\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(OA\right)\cdot\left(OB\right)=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{8}{x_0}\right|\left|2x_0\right|=8$ τ.μ,

άρα είναι σταθερό.

iii. Το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες: $\left(\dfrac{2x_0+0}{2},\dfrac{\frac{8}{x_0}+0}{2}\right)$ δηλαδή $\left(x_0,\dfrac{4}{x_0}\right)$, άρα είναι το σημείο Μ.

Άσκηση 5

Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases} x^4+5x, & x\geq 0 \\ 5\cdot\eta\mu x, & x<0 \end{cases}.$$

<u>Λύση</u>

Η πρώτη παράγωγος στα ανοιχτά διαστήματα είναι:

$$f'(x)=\begin{cases} 4x^3+5, & x>0 \\ 5\cdot\sigma\upsilon\nu x, & x<0 \end{cases}$$

Θα εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ με τον ορισμό της παραγώγου:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+5x-0}{x}=\lim_{x\to 0}\left(x^3+5\right)=5$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\eta\mu x-0}{x}=5.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ και $f'(0)=5$.

Η δεύτερη παράγωγος στα ανοιχτά διαστήματα είναι:

$$f''(x)=\begin{cases} 12x^2, & x>0 \\ -5\cdot\eta\mu x, & x<0 \end{cases}$$

Στο $x=0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3+5-5}{x}=\lim_{x\to 0}\left(4x^2\right)=0,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\sigma\upsilon\nu x-5}{x}=5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0.$$

Άρα $f''(0)=0$, οπότε έχουμε:

$$f''(x)=\begin{cases} 12x^2, & x\geq 0 \\ -5\cdot\eta\mu x, & x<0 \end{cases}$$

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-3x+1$. Να βρείτε αν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία η εφαπτομένη:

i. να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x$.

ii. να σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα x'x.

iii. να είναι παράλληλη στον άξονα x'x.

iv. να είναι κάθετη στην ευθεία $y=\frac{1}{2}x$.

<u>Λύση</u>

Ισχύει $f'(x)=\left(x^2-3x+1\right)'=2x-3$.

i. Η ευθεία $y=x$ έχει συντελεστή διεύθυνσης 1, άρα πρέπει $f'(x)=1 \Leftrightarrow 2x-3=1 \Leftrightarrow x=2$ και $f(2)=-1$, άρα υπάρχει ένα σημείο, το $A(2,-1)$ στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x$.

ii. Επειδή $\varepsilon\varphi 135^\circ=-1$, πρέπει $f'(x)=-1 \Leftrightarrow 2x-3=-1 \Leftrightarrow x=1$. Επίσης $f(1)=-1$, άρα υπάρχει ένα σημείο, το $B(1,-1)$ στο οποίο η εφαπτομένη να σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα x'x.

iii. Πρέπει $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ και $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{5}{4}$, άρα υπάρχει ένα σημείο, το $\Gamma\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{4}\right)$ στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

iv. Επειδή ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $\frac{1}{2}$, πρέπει ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης να είναι -2, οπότε $f'(x)=-2 \Leftrightarrow 2x-3=-2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$, άρα υπάρχει ένα σημείο, το $\Delta\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία $y=\frac{1}{2}x$.

Άσκηση 7

Να παραγωγίσετε τις παρακάτω συναρτήσεις

i. $x^{\eta\mu x},\ x>0$

ii. $2^{x\cdot\ln x},\ x>0$

iii. $\sqrt{5x^8+1}$

<u>Λύση</u>

i. $x^{\eta\mu x}=\left(e^{\ln x}\right)^{\eta\mu x}=e^{\ln x\cdot\eta\mu x}$, οπότε θέτοντας

$u=\ln x\cdot\eta\mu x$ έχουμε

$\left(x^{\eta\mu x}\right)'=\left(e^{\ln x\cdot\eta\mu x}\right)'=\left(e^{u}\right)'=$

$e^{u}\cdot u'=e^{\ln x\cdot\eta\mu x}\cdot\left(\ln x\cdot\eta\mu x\right)'=x^{\eta\mu x}\cdot\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}+\ln x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right).$

ii. Έστω $u=x\cdot\ln x$, οπότε

$\left(2^{x\cdot\ln x}\right)'=\left(2^{u}\right)'=2^{u}\cdot\ln 2\cdot u'=2^{x\cdot\ln x}\cdot\ln 2\cdot\left(x\cdot\ln x\right)'=2^{x\cdot\ln x}\cdot\ln 2\cdot\left(\ln x+1\right).$

iii. Έστω $u=5x^8+1$, οπότε $\left(\sqrt{5x^8+1}\right)'=\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}u'=\dfrac{\left(5x^8+1\right)'}{2\sqrt{5x^8+1}}=\dfrac{20x^7}{\sqrt{5x^8+1}}$

Άσκηση 8

Αν για τη συνάρτηση f ισχύει:

$$-2x+1 \le f(x) \le x^4-2x+1 \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}, \qquad \textbf{(1)}$$

τότε

i. να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x=0$

ii. να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ και ισχύει $f'(0)=-2$.

Λύση

i. Για $x=0$ η **(1)** γίνεται $1 \le f(0) \le 1$, άρα $f(0)=1$. Επίσης

$\lim\limits_{x\to 0}(-2x+1)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^4-2x+1\right)=1$, οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

Επομένως η f είναι συνεχής στο $x=0$, αφού $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$.

ii. Η σχέση **(1)** γίνεται:

$-2x+1-1 \le f(x)-f(0) \le x^4-2x+1-1 \Leftrightarrow -2x \le f(x)-f(0) \le x^4-2x$, οπότε διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

- αν $x>0$, τότε
$\dfrac{-2x}{x} \le \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \le \dfrac{x^4-2x}{x} \Leftrightarrow -2 \le \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \le x^3-2$ και επειδή
$\lim\limits_{x\to 0^+}(-2)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^3-2\right)=-2$, έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι
$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-2$.
- αν $x<0$, τότε
$\dfrac{-2x}{x} \ge \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \ge \dfrac{x^4-2x}{x} \Leftrightarrow -2 \ge \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \ge x^3-2$ και επειδή
$\lim\limits_{x\to 0^-}(-2)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^3-2\right)=-2$, έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι
$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-2$.

Από τα δυο προηγούμενα προκύπτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ και $f'(0)=-2$.

Άσκηση 9

Έστω $f:\mathbf{R}\to(0,+\infty)$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0>0$. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(x_0)}}{x^2-x_0^{\,2}}$

ii. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^3(x)-f^3(x_0)}{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}$

<u>Λύση</u>

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Οπότε

i. $$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(x_0)}}{x^2-x_0^{\,2}}=\lim_{x\to x_0}\frac{\left(\sqrt{f(x)}\right)^2-\left(\sqrt{f(x_0)}\right)^2}{(x-x_0)(x+x_0)\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x_0)}\right)}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1}{(x+x_0)\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x_0)}\right)}=\frac{f'(x_0)}{4\cdot x_0\cdot\sqrt{f(x_0)}}.$$

(Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο x_0, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{f(x_0)}$.)

ii. $$\lim_{x\to x_0}\frac{f^3(x)-f^3(x_0)}{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[f^2(x)+f(x)\cdot f(x_0)+f^2(x_0)\right]\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{x_0}\right)^2}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}\Big[\left[f^2(x)+f(x)\cdot f(x_0)+f^2(x_0)\right]\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)\Big]=$$

$$6\cdot f'(x_0)\cdot f^2(x_0)\cdot\sqrt{x_0}.$$

(Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}f^2(x)=f^2(x_0)$)

Άσκηση 10

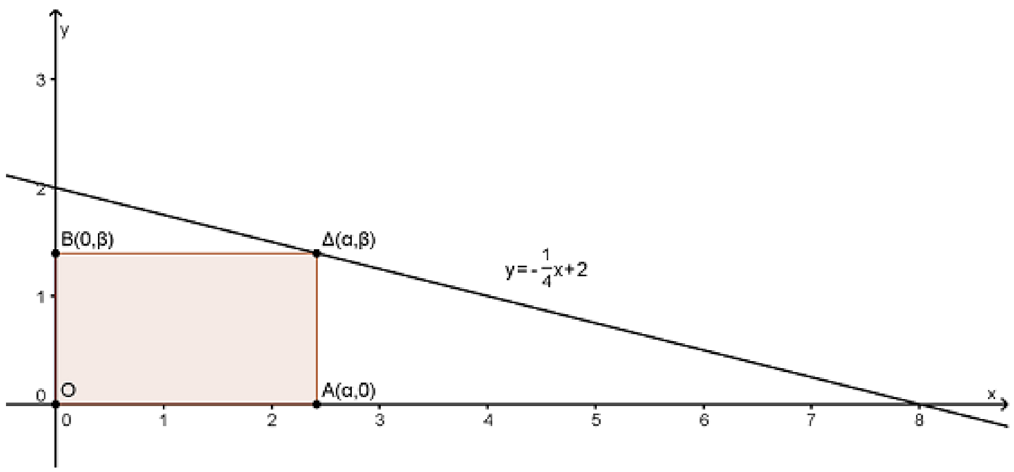
Θεωρούμε ορθογώνιο, του οποίου η μια κορυφή είναι το σημείο $O(0,0)$, δυο πλευρές βρίσκονται πάνω στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy και η τέταρτη κορυφή κινείται πάνω στην ευθεία $y=-\frac{1}{4}x+2$.

Να βρείτε τις διαστάσεις του α,β ώστε να έχει μέγιστο εμβαδό.

<u>Λύση</u>

Το εμβαδό του ορθογωνίου ισούται με $E=\alpha\cdot\beta$, όπου α,β θετικοί πραγματικοί. Η τέταρτη κορυφή (βλέπε σχήμα) είναι η $\Delta(\alpha,\beta)$,

η οποία ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $y=-\frac{1}{4}x+2$, οπότε ισχύει $\beta=-\frac{1}{4}\alpha+2$.



Έτσι το εμβαδό του ορθογωνίου γίνεται

$E(\alpha)=a\cdot\left(-\frac{1}{4}\alpha+2\right)=-\frac{1}{4}\alpha^2+2\cdot\alpha$ με $\alpha\in(0,8)$, αφού από την ανισότητα $\beta>0$ έχουμε

$-\frac{1}{4}\alpha+2>0\Leftrightarrow\alpha<8$.

Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση του εμβαδού παίρνουμε:

$E'(\alpha)=\left(-\frac{1}{4}\alpha^2+2\cdot\alpha\right)'=-\frac{1}{2}\alpha+2$, οπότε $E'(\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=4$ και

$E'(\alpha)>0\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\alpha+2>0\Leftrightarrow\alpha<4$.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

α	0		4		8
$E'(\alpha)$		+	0	-	
$E(\alpha)$		$\nearrow$	$E(4)$	$\searrow$	

Άρα η συνάρτηση του Εμβαδού είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,4]$, γνησίως φθίνουσα στο $[4,8)$ και είναι συνεχής στο 4, άρα παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $\alpha=4$. Οπότε $\beta=-\frac{1}{4}4+2=1$.

Άσκηση 11

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-5}{x}=2.$$

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $f'(0)=2$.

Λύση

Αρχικά θα δείξουμε ότι $f(0)=5$.

Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)-5}{x}$, με $x\neq 0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=2$.

Λύνουμε επίσης ως προς $f(x)$ και έχουμε:

$f(x)=x\cdot g(x)+5$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[x\cdot g(x)+5\right]=0\cdot 2+5=5$.

Όμως η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ που σημαίνει $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=5$.

Έτσι

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-5}{x}=2.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $f'(0)=2$.

Άσκηση 12

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=e^{x}\cdot \eta\mu x$. Να δείξετε ότι:

$f^{(3)}(x)+2\cdot f'(x)=2f''(x)$

<u>Λύση</u>

Έχουμε

$f'(x)=\left(e^{x}\cdot \eta\mu x\right)'=e^{x}\cdot \eta\mu x+e^{x}\cdot \sigma\upsilon\nu x$,

$f''(x)=\left(e^{x}\cdot \eta\mu x+e^{x}\cdot \sigma\upsilon\nu x\right)'=2e^{x}\cdot \sigma\upsilon\nu x$ και

$f^{(3)}(x)=\left(2e^{x}\cdot \sigma\upsilon\nu x\right)'=2e^{x}\cdot \sigma\upsilon\nu x-2e^{x}\cdot \eta\mu x$.

Οπότε

$f^{(3)}(x)+2\cdot f'(x)=2e^{x}\cdot \sigma\upsilon\nu x-2e^{x}\cdot \eta\mu x+2\left(e^{x}\cdot \eta\mu x+e^{x}\cdot \sigma\upsilon\nu x\right)=$

$4e^{x}\cdot \sigma\upsilon\nu x=2f''(x)$.

Άρα

$f^{(3)}(x)+2\cdot f'(x)=2f''(x)$.

Άσκηση 13

Να δείξετε ότι:

$2\ln(x-1) \le x-3+\ln 4$ για κάθε $x>1$.

<u>Λύση</u>

Επειδή

$$2\ln(x-1) \le x-3+\ln 4 \Leftrightarrow 2\ln(x-1)-x+3-\ln 4 \le 0$$

αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x)=2\ln(x-1)-x+3-\ln 4$ με $x>1$, έχει ολικό μέγιστο το 0.

Πράγματι

$$f'(x)=\frac{2}{x-1}-1=\frac{3-x}{x-1},$$

επίσης $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=3$ και $f'(x)>0 \Leftrightarrow x<3$, οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών

x	1		3		$+\infty$
f′(x)		+	0	-	
f(x)		$\nearrow$	f(3) = 0	$\searrow$	

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,3]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[3,+\infty)$ και επειδή είναι συνεχής στο $x=3$ παρουσιάζει στο σημείο αυτό ολικό μέγιστο το $f(3)=0$, άρα $f(x)\le 0$ για κάθε $x>1$.

Άσκηση 14

Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3$ στο σημείο της $A(1,1)$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2x^2+7x$.

<u>Λύση</u>

Οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμικές.

Έχουμε $f'(x)=3x^2$, οπότε $f'(1)=3$.

Έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(1,1)$ είναι:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1) \text{ ή}$$

$$\varepsilon: y=3x-2.$$

Για να εφάπτεται η ε και στη C_g, θα πρέπει να υπάρχει ένα x_0 τέτοιο, ώστε

$$g'(x_0)=3 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\text{και } g(x_0)=3x_0-2. \quad \textbf{(2)}$$

Η **(1)** μας δίνει:

$g'(x_0)=3 \Leftrightarrow 4x_0+7=3 \Leftrightarrow x_0=-1$

και $g(-1)=2\cdot(-1)^2+7(-1)=-5$, οπότε η **(2)** γίνεται

$-5=3(-1)-2$ το οποίο ισχύει.

Άρα η ευθεία $\varepsilon: y=3x-2$ εφάπτεται στη C_f στο $A(1,1)$ και στη C_g στο $B(-1,-5)$.

Άσκηση 15

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4+24x^2+4x-40=0$ έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες.

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f\left(x\right)=x^4+24x^2+4x-40, x\in\mathbf{R}$.

Υποθέτουμε ότι η f έχει τρεις ρίζες $\rho_1,\rho_2,\rho_3\in\mathbf{R}$ με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$. Επειδή η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμική και επιπλέον $f\left(\rho_1\right)=f\left(\rho_2\right)=f\left(\rho_3\right)=0$, εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στα διαστήματα $\left[\rho_1,\rho_2\right]$ και $\left[\rho_2,\rho_3\right]$.

Έτσι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in\left(\rho_1,\rho_2\right)$ τέτοιο, ώστε $f'\left(\xi_1\right)=0$ και επίσης υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in\left(\rho_2,\rho_3\right)$ τέτοιο, ώστε $f'\left(\xi_2\right)=0$.

Όμως $f'\left(x\right)=4x^3+48x+4$, η οποία είναι επίσης συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμική και επιπλέον $f'\left(\xi_1\right)=f'\left(\xi_2\right)=0$, οπότε εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f' στο διάστημα $\left[\xi_1,\xi_2\right]$, που σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in\left(\xi_1,\xi_2\right)$ τέτοιο, ώστε $f''\left(\gamma\right)=0$, το οποίο είναι άτοπο, αφού

$$f''\left(x\right)=12x^2+48>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbf{R}.$$

Άρα η συνάρτηση f, οπότε και η εξίσωση $x^4+24x^2+4x-40=0$ έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες.

Άσκηση 16

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+3$.

i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: y=-\frac{1}{2}x+7$.

ii. Να βρεθούν τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων της C_f που διέρχονται από το $O(0,0)$.

iii. Υπάρχουν εφαπτόμενες που διέρχονται από σημείο $A(2,0)$;

<u>Λύση</u>

Έχουμε $f'(x)=2x-4$.

i. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι $\lambda_\varepsilon=-\frac{1}{2}$, οπότε αν λ ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης θα ισχύει $\lambda\cdot\lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow\lambda=2$.

Αν $B(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της C_f με την εφαπτομένη, τότε

$$f'(x_0)=2\Leftrightarrow 2x_0-4=2\Leftrightarrow x_0=3 \text{ και } f(3)=0,$$

άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: y=-\frac{1}{2}x+7$ είναι η παρακάτω:

$$y-0=2(x-3) \text{ ή}$$

$$y=2x-6.$$

ii. Έστω $\Gamma(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της C_f με την εφαπτομένη, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0).$$

Επειδή η εφαπτομένη αυτή διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$, θα ισχύει:

$$-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(-x_0)\Leftrightarrow -x_0^{\ 2}+4x_0-3=-2x_0^{\ 2}+4x_0\Leftrightarrow$$

$$x_0^{\ 2}=3\Leftrightarrow x_0=\pm\sqrt{3}$$

και $f\left(\sqrt{3}\right)=6-4\sqrt{3},\ f\left(-\sqrt{3}\right)=6+4\sqrt{3}$.

Άρα τα σημεία επαφής είναι τα $\Gamma\left(\sqrt{3},6-4\sqrt{3}\right)$ και $\Delta\left(-\sqrt{3},6+4\sqrt{3}\right)$.

iii. Έστω ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από σημείο $A(2,0)$ και $E\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$ το σημείο επαφής της C_f με αυτήν, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται:

$$y-f\left(x_1\right)=f'\left(x_1\right)\cdot\left(x-x_1\right).$$

Επειδή η εφαπτομένη αυτή διέρχεται από το σημείο $A(2,0)$, θα ισχύει:

$$-f\left(x_1\right)=f'\left(x_1\right)\cdot\left(2-x_1\right)\Leftrightarrow -x_1^2+4x_1-3=-2x_1^2+8x_1-8\Leftrightarrow$$

$$x_1^2-4x_1+5=0,$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού η τελευταία δευτεροβάθμια εξίσωση έχει αρνητική διακρίνουσα ($\Delta=-4<0$), άρα είναι αδύνατη, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_f που να διέρχεται από σημείο $A(2,0)$.

Άσκηση 17

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+k\cdot x-1$, όπου $k\in\mathbf{R}$.

i. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,f(0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=3x+5$, να βρείτε την τιμή του k.

ii. Αν $k=2$ να δείξετε ότι η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y=2x-1$.

<u>Λύση</u>

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

i. Έχουμε $f'(x)=e^x+k$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας με εξίσωση $y=3x+5$, είναι $\lambda=3$.

Για να είναι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,f(0))$ παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=3x+5$, θα πρέπει

$$f'(0)=\lambda=3\Leftrightarrow e^0+k=3\Leftrightarrow k=2.$$

ii. Για $k=2$ έχουμε $f(x)=e^x+2x-1$.

Για να είναι η ευθεία με εξίσωση $y=2x-1$ ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x-1)\right]=0.$$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^x+2x-1-(2x-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

Άρα η ευθεία με εξίσωση $y=2x-1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Άσκηση 18

i. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2\alpha x^3 + 24x^2 + 5x - 7$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό διάστημα των τιμών του α, ώστε η συνάρτηση να είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$

ii. Για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbf{R}$ η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος έχει σημείο καμπής το $A(1, f(1))$

Λύση

1. Έχουμε

$$f'(x) = 4x^3 + 6\alpha x^2 + 48x + 5,$$

$$f''(x) = 12x^2 + 12\alpha x + 48 = 12(x^2 + \alpha x + 4).$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = \alpha^2 - 16$.

Όταν $\Delta < 0$ τότε $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$, άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

Όταν $\Delta = 0$ τότε $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$, όπου η ισότητα ισχύει για ένα μεμονωμένο σημείο, άρα η f είναι πάλι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

Άρα πρέπει

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 \leq 16 \Leftrightarrow |\alpha| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq \alpha \leq 4.$$

2. Πρέπει

$f''(1) = 0 \Leftrightarrow 12 + 12\alpha + 48 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -5$.

Επίσης θα πρέπει να ελέγξουμε αν αλλάζει η κυρτότητα δεξιά και αριστερά του $x = 1$.

Για $\alpha = -5$, $f''(x) = 12(x^2 - 5x + 4)$ και

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12(x^2 - 5x + 4) = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ή } x = 4)$. Οπότε έχουμε τον πίνακα προσήμου:

X	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-	0	+	

Άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 1]$ και κοίλη στο $[1, 4]$. Επίσης επειδή είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση έχει εφαπτομένη στο σημείο $A\left(1, f(1)\right)$, συνεπώς το $A\left(1, f(1)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f.

Άρα για $\alpha = -5$ το $A\left(1, f(1)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f.

Άσκηση 19

1. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

   i. $e^{x-1} \geq x$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

   ii. $e^{x^2} \geq 1-x$, για κάθε $x \geq 0$.

2. Να δείξετε ότι $e^x + x \geq \dfrac{x^2}{2} + 1$, για κάθε $x \geq 0$.

<u>Λύση</u>

1. i. Έχουμε

   $e^{x-1} \geq x \Leftrightarrow e^{x-1} - x \geq 0$.

   Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - x$, $x \in \mathbf{R}$.

   Θα αποδείξουμε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο το 0.

   Ισχύει

   $f'(x) = e^{x-1} - 1$,

   οπότε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} = e^0 \Leftrightarrow x = 1$

   και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x-1} > e^0 \Leftrightarrow x > 1$,

   οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f′(x)		-	0	+	
f(x)		↘	f(1) = 0	↗	

   Έτσι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και συνεχής στο $x = 1$, άρα στο σημείο αυτό παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(1) = 0$.

   Οπότε ισχύει

$$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{x-1} \geq x \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

ii. Έχουμε

$$e^{x^2} \geq 1 - x \Leftrightarrow e^{x^2} - 1 + x \geq 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{x^2} - 1 + x$, $x \in [0, +\infty)$.

Θα αποδείξουμε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο το 0.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.

Ισχύει

$$f'(x) = \left(e^{x^2} - 1 + x\right)' = 2x \cdot e^{x^2} + 1,$$

οπότε $f'(x) > 0$, για κάθε $x > 0$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Έτσι

$$f(x) \geq f(0) = 0, \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty),$$

που σημαίνει:

$$e^{x^2} \geq 1 - x, \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

2. Έχουμε

$$e^x + x \geq \frac{x^2}{2} + 1 \Leftrightarrow e^x + x - \frac{x^2}{2} - 1 \geq 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x + x - \frac{x^2}{2} - 1$, $x \in [0, +\infty)$.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.

Ισχύει:

$$f'(x) = \left(e^x + x - \frac{x^2}{2} - 1\right)' = e^x + 1 - x$$

και

$$f''(x) = \left(e^x + 1 - x\right)' = e^x - 1.$$

Επίσης

$f''(x)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow x=0$ και

$x>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow f''(x)>0$,

άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Οπότε για $x>0 \Leftrightarrow f'(x)>f'(0)=2>0$, άρα και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Επομένως έχει ολικό ελάχιστο στο $x=0$, το $f(0)=0$.

Ισχύει λοιπόν:

$$f(x)\geq f(0)=0, \text{ για κάθε } x\in[0,+\infty), \text{ άρα}$$

$$e^x+x\geq \frac{x^2}{2}+1, \text{ για κάθε } x\in[0,+\infty).$$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=e^{2x}+5x$.

1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

2. Να λύσετε την εξίσωση: $e^{2x^2}-e^{4x-2}=-5x^2+10x-5$.

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$. Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι γνησίως μονότονη. Πράγματι:

$$f'\left(x\right)=2e^{2x}+5>0,$$

άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$, συνεπώς είναι και «1-1», άρα αντιστρέφεται.

ii. Η εξίσωση γίνεται ισοδύναμα:

$$e^{2x^2}-e^{4x-2}=-5x^2+10x-5 \Leftrightarrow e^{2x^2}+5x^2=e^{2(2x-1)}+5\left(2x-1\right) \Leftrightarrow$$

$$f\left(x^2\right)=f\left(2x-1\right)$$

και επειδή η f είναι «1-1» έπεται ότι

$$x^2=2x-1 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Άσκηση 2

Δίνεται μια συνάρτηση $f(x):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ με $f'(0)=1$ και για την οποία ισχύει:

$$f(x+y)=f(x)\cdot e^{y}+f(y)\cdot e^{x} \text{ για κάθε } x,y\in\mathbf{R}.$$

i. Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

ii. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της με $f'(x_0)=f(x_0)+e^{x_0}$.

<u>Λύση</u>

i. Για $x=y=0$ η σχέση

$$f(x+y)=f(x)\cdot e^{y}+f(y)\cdot e^{x} \qquad \textbf{(1)}$$

γίνεται:

$f(0)=f(0)\cdot 1+f(0)\cdot 1\Leftrightarrow f(0)=0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$, όπου χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της παραγώγου.

ii. Από τη σχέση **(1)** παίρνουμε $f(x_0+h)=f(x_0)\cdot e^{h}+f(h)\cdot e^{x_0}$ οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[f(x_0)\cdot\frac{e^{h}-1}{h}+\frac{f(h)}{h}\cdot e^{x_0}\right]=$$

$$f(x_0)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^{h}-1}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}\cdot e^{x_0}=f(x_0)\cdot e^{0}+1\cdot e^{x_0}=f(x_0)+e^{x_0},$$

αφού το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{h}-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{h}-e^{0}}{h-0}=g'(0)=e^{0}$ με $g(x)=e^{x}$.

Άρα $f'(x_0)=f(x_0)+e^{x_0}$.

Άσκηση 3

Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει:

$$\alpha^x+\beta^x\geq 5e^x-3, \text{ για κάθε } x\in\mathbf{R},$$

να δείξετε ότι $\alpha\cdot\beta=e^5$.

<u>Λύση</u>

Έχουμε $\alpha^x+\beta^x\geq 5e^x-3\Leftrightarrow\alpha^x+\beta^x-5e^x+3\geq 0$ και θέτοντας

$f(x)=\alpha^x+\beta^x-5e^x+3$ παίρνουμε: $f(x)\geq 0=f(0)$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Άρα το 0 είναι ολικό ελάχιστο της f στο 0 και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, (εσωτερικό σημείο του $\mathbf{R}$) έπεται από το θεώρημα Fermat ότι $f'(0)=0$.

Όμως $f'(x)=\alpha^x\cdot\ln\alpha+\beta^x\cdot\ln\beta-5e^x$, οπότε

$f'(0)=0\Leftrightarrow\alpha^0\ln\alpha+\beta^0\ln\beta-5e^0=0\Leftrightarrow\ln(\alpha\cdot\beta)=5\Leftrightarrow\alpha\cdot\beta=e^5$.

Άσκηση 4

Έστω f,g συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμες στο $(0,1)$ με

$f(0)=f(1)=0$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,1)$.

i. Να δείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση $h(x)=f^2(x)\cdot e^{g(x)}$ στο διάστημα $[0,1]$.
ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=-\frac{g'(\xi)}{2}.$$

Λύση

i. Οι συναρτήσεις $f^2(x),e^{g(x)}$ είναι συνεχείς στο $[0,1]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Οπότε και η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

   Ομοίως οι συναρτήσεις $f^2(x),e^{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμες στο $(0,1)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Οπότε και η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

   Επίσης $h(0)=h(1)=0$, άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση h στο διάστημα $[0,1]$.

ii. Είναι $h'(x)=2f(x)\cdot f'(x)\cdot e^{g(x)}+f^2(x)\cdot e^{g(x)}\cdot g'(x)$ και από το θεώρημα Rolle έχουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(\xi)=0\Leftrightarrow 2f(\xi)\cdot f'(\xi)\cdot e^{g(\xi)}+f^2(\xi)\cdot e^{g(\xi)}\cdot g'(\xi)=0\Leftrightarrow$$

$$f(\xi)\cdot e^{g(\xi)}\left[2f'(\xi)+f(\xi)\cdot g'(\xi)\right]=0\Leftrightarrow 2f'(\xi)+f(\xi)\cdot g'(\xi)=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=-\frac{g'(\xi)}{2}.$$

Άσκηση 5

Αν η ευθεία $y=3x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, τότε

i. να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)$

ii. να βρείτε το $\lambda\in\mathbf{R}$ ώστε:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot f\left(x\right)-3x^2-\lambda^2x+2}{f\left(x\right)+\lambda x+1}=-1$$

Λύση

Αφού η ευθεία $y=3x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{x}=3$ και $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f\left(x\right)-3x\right]=-1$. Οπότε έχουμε

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot f\left(x\right)-3x^2-\lambda^2x+2}{f\left(x\right)+\lambda x+1}=-1\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left[\left(f\left(x\right)-3x\right)-\lambda^2+\dfrac{2}{x}\right]}{x\cdot\left[\dfrac{f\left(x\right)}{x}+\lambda+\dfrac{1}{x}\right]}=-1\Leftrightarrow$$

$$\frac{-1-\lambda^2}{3+\lambda}=-1\Leftrightarrow\lambda^2-\lambda-2=0\Leftrightarrow\left(\lambda=2\ \text{ή}\ \lambda=-1\right).$$

Άσκηση 6

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ με $f(0)<0, f(1)>2$ και $f'(x)\neq 2$ για κάθε $x\in(0,1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μοναδικό $\xi\in(0,1)$ έτσι ώστε να ισχύει $f(\xi)=2\xi$.

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-2x$, η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, επίσης ισχύει $g(0)g(1)=\underset{-}{f(0)}\left[\underbrace{f(1)-2}_{+}\right]<0$,

οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα $\xi\in(0,1)$ ώστε $g(\xi)=0\Rightarrow f(\xi)=2\xi$.
Επιπλέον ισχύει ότι $g'(x)=f'(x)-2\neq 0$ στο $(0,1)$.
Έστω ότι η g έχει δύο ρίζες ρ_1,ρ_2 στο $(0,1)$ με $0<\rho_1<\rho_2<1$. Τότε για τη g θα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, αφού:

- η g είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2).
- $g(\rho_1)=g(\rho_2)$,

άρα θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο, ώστε, $g'(x_0)=0$ το οποίο είναι άτοπο.
Άρα η g έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Άσκηση 7

Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(0)=f'(0)=0$ και $f''(0)=2011$.

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^x\cdot\eta\mu x - x}$$

<u>Λύση</u>

Επειδή η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, συμπεραίνουμε ότι η f' υπάρχει και είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$.

Ομοίως και η f είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$.

Επίσης

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0 \text{ και } \lim_{x\to 0}\left(e^x\cdot\eta\mu x - x\right) = 0,$$

οπότε για να βρούμε το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^x\cdot\eta\mu x - x}$ εφαρμόζουμε μια φορά τον κανόνα De L' Hospital και παίρνουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^x\cdot\eta\mu x - x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\left(e^x\cdot\eta\mu x - x\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{e^x\cdot\eta\mu x + e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x - 1}$$

Ισχύει:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0 \text{ και } \lim_{x\to 0}\left(e^x\cdot\eta\mu x + e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x - 1\right) = 0,$$

άρα το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{e^x\cdot\eta\mu x + e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x - 1}$ είναι πάλι της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$,

όμως δε θα εφαρμόσουμε ακόμα μια φορά τον κανόνα De L' Hospital, αφού θα προκύψει στον αριθμητή η $f''(x)$ για την οποία δε γνωρίζουμε αν είναι συνεχής.

Για να συνεχίσουμε με τον υπολογισμό του ορίου θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της $f''(0)$.

Είναι $f''(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x} = 2011$, οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{e^x\cdot\eta\mu x+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f'(x)}{x}}{e^x\cdot\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1}{x}}=\frac{2011}{1+1}=\frac{2011}{2},$$

αφού $\lim_{x\to 0}\left(e^x\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}e^x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=e^0\cdot 1=1$ και

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-e^x\cdot\eta\mu x}{1}=1$. (κανόνας De L’ Hospital)

Άρα $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^x\cdot\eta\mu x-x}=\frac{2011}{2}$.

Άσκηση 8

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της $f(x)=x^2$ που διέρχονται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2},-2\right)$.

<u>Λύση</u>

Έστω $B\left(x_0, f(x_0)\right)$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης με τη C_f.

Η παράγωγος της f ισούται με $f'(x)=2x$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι:

$$y-x_0^{\ 2}=2x_0(x-x_0) \qquad \textbf{(1)}$$

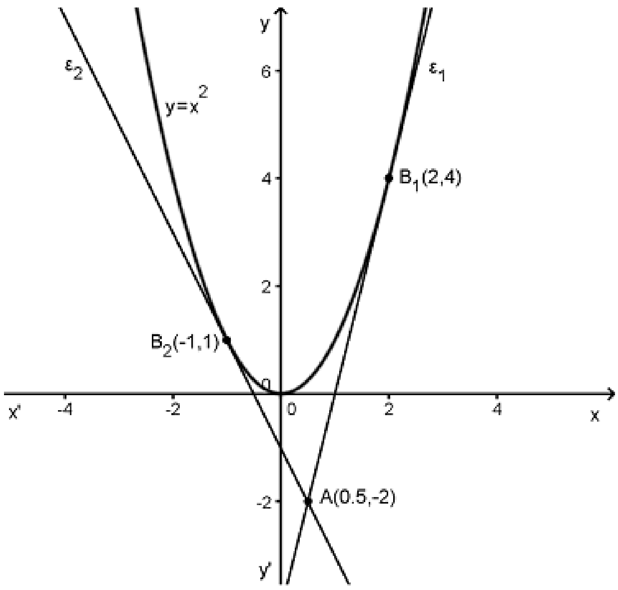
Επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2},-2\right)$ οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την **(1)** οπότε:

$$-2-x_0^{\ 2}=2x_0\left(\frac{1}{2}-x_0\right)\Leftrightarrow x_0^{\ 2}-x_0-2=0\Leftrightarrow\left(x_0=2 \text{ ή } x_0=-1\right),$$

και αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην **(1)** παίρνουμε δυο εφαπτόμενες (Σχήμα 1) με εξισώσεις

$\varepsilon_1 : y=4x-4$ και σημείο επαφής το $B_1(2,4)$ και

$\varepsilon_2 : y=-2x-1$ και σημείο επαφής το $B_2(-1,1)$.



Σχήμα 1

Άσκηση 9

Δίνεται ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο $[0,3]$. Να δείξετε ότι

$$f(1)+f(2)>f(0)+f(3).$$

<u>Λύση</u>

Αφού η f είναι κοίλη στο $[0,3]$, έπεται ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,3)$.

Επίσης

$$f(1)+f(2)>f(0)+f(3)\Leftrightarrow \frac{f(1)-f(0)}{1-0}>\frac{f(3)-f(2)}{3-2}, \qquad \textbf{(1)}$$

και επειδή εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση f στα διαστήματα $[0,1]$ και $[2,3]$ υπάρχουν $\xi_1\in(0,1)$ και $\xi_2\in(2,3)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0} \text{ και } f'(\xi_2)=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}$$

Με βάση τα τελευταία η **(1)** γίνεται $f'(\xi_1)>f'(\xi_2)$, το οποίο ισχύει, αφού f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,3)$ και $\xi_1<\xi_2$.

Άσκηση 10

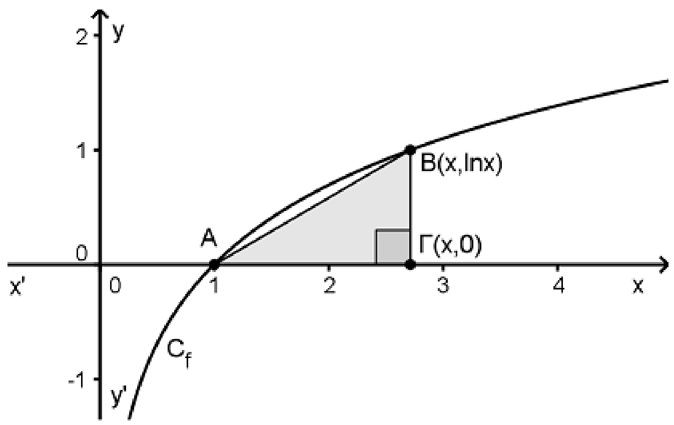
Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1,0)$, $B(x,\ln x)$ και

$\Gamma(x,0)$, $x>1$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το $x=2cm$.

Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής του x είναι σταθερός και ίσος με $0,5cm/\sec$.

<u>Λύση</u>

Έστω $f(x)=\ln x$.



Σχήμα 1

Το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1,0)$, $B(x,\ln x)$ και $\Gamma(x,0), x>1$, ισούται με $E=\frac{1}{2}(A\Gamma)\cdot(B\Gamma)=\frac{1}{2}(x-1)\cdot\ln x$ (βλέπε Σχήμα 1) και επειδή η τετμημένη x είναι συνάρτηση του χρόνου t, έχουμε ότι και το εμβαδό είναι συνάρτηση του χρόνου t με $E(t)=\frac{1}{2}\left[x(t)-1\right]\cdot\ln x(t)$. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού τη χρονική στιγμή t_0 :

$$E'(t_0)=\frac{1}{2}x'(t_0)\cdot\ln x(t_0)+\frac{1}{2}\left[x(t_0)-1\right]\cdot\frac{x'(t_0)}{x(t_0)}$$

(όπου $\left(\ln x(t)\right)'=(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{x'(t)}{x(t)}$, με $u=x(t)$)

και αντικαθιστώντας το $x(t_0)=2cm$ και $x'(t_0)=0,5cm/\sec$ βρίσκουμε

$$E'(t_0)=\frac{1}{4}\cdot\ln 2+\frac{1}{2}[2-1]\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\cdot\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)cm^2/\sec$$

Άσκηση 11

i. Να δείξετε ότι μια πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-\rho)^2$ αν και μόνο αν $P(\rho)=P'(\rho)=0$.

ii. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2-3x-1$ να έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

<u>Λύση</u>

i. Έστω ότι η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-\rho)^2$. Τότε υπάρχει πολυώνυμο $\Pi(x)$ τέτοιο, ώστε $P(x)=(x-\rho)^2\cdot\Pi(x)$, οπότε $P(\rho)=(\rho-\rho)^2\cdot\Pi(\rho)=0$.
Επίσης $P'(x)=2(x-\rho)\cdot\Pi(x)+(x-\rho)^2\cdot\Pi'(x)$, οπότε

$$P'(\rho)=2(\rho-\rho)\cdot\Pi(\rho)+(\rho-\rho)^2\cdot\Pi'(\rho)=0.$$

Αντιστρόφως έστω $P(\rho)=P'(\rho)=0$. Αφού $P(\rho)=0$, υπάρχει πολυώνυμο $Q(x)$ τέτοιο, ώστε

$$P(x)=(x-\rho)\cdot Q(x) \qquad \textbf{(1)}$$

Παραγωγίζοντας έχουμε $P'(x)=Q(x)+(x-\rho)\cdot Q'(x)$, οπότε

$P'(\rho)=Q(\rho)+(\rho-\rho)\cdot Q'(\rho)=0$ άρα $Q(\rho)=0$, άρα υπάρχει πολυώνυμο

$\Pi(x)$ τέτοιο, ώστε $Q(x)=(x-\rho)\cdot\Pi(x)$. Αντικαθιστώντας το $Q(x)$ στην **(1)** παίρνουμε $P(x)=(x-\rho)^2\cdot\Pi(x)$, άρα το $(x-\rho)^2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

ii. Βάσει του προηγούμενου ερωτήματος θα ισχύει $P(1)=P'(1)=0$.

Είναι $P(1)=\alpha+\beta-3-1=0$, άρα $\alpha+\beta=4$. Επίσης $P'(x)=3\alpha x^2+2\beta x-3$, οπότε $P'(1)=3\alpha+2\beta-3=0$. Λύνουμε το σύστημα
$\begin{cases}\alpha+\beta=4\\3\alpha+2\beta=3\end{cases}$ και βρίσκουμε $\begin{cases}\alpha=-5\\\beta=9\end{cases}$

Άσκηση 12

Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(x)\geq e^{x-1}+\ln x+x^2 \text{ για κάθε } x>0 \text{ και } f(1)=2.$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,2)$.

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-e^{x-1}-\ln x-x^2$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων και επιπλέον

$$g(x)\geq 0=g(1) \text{ για κάθε } x>0.$$

Άρα η g έχει ελάχιστο το 0 για $x=1$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει $g'(1)=0$. Όμως $g'(x)=f'(x)-e^{x-1}-\frac{1}{x}-2x$, άρα

$g'(1)=f'(1)-e^0-\frac{1}{1}-2=0\Leftrightarrow f'(1)=4$.

Συνεπώς η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,2)$ θα είναι

$$y-2=4(x-1)\Leftrightarrow y=4x-2$$

Άσκηση 13

Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-3,3)$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^2(x)+4f(x)+x^2-5=0 \text{ για κάθε } x\in(-3,3) \qquad \textbf{(1)}$$

Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

<u>Λύση</u>

Παραγωγίζουμε δυο φορές τη σχέση **(1)**, η οποία γίνεται

$$f^2(x)+4f(x)+x^2-5=0 \Rightarrow 2f(x)\cdot f'(x)+4f'(x)+2x=0 \Rightarrow$$

$$2\left[f'(x)\right]^2+2f(x)\cdot f''(x)+4f''(x)+2=0 \qquad \textbf{(2)}$$

Έστω ότι το $A\big(x_0, f(x_0)\big)$ είναι σημείο καμπής της C_f, τότε επειδή η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-3,3)$, θα ισχύει $f''(x_0)=0$ και αντικαθιστώντας στην **(2)** παίρνουμε

$$2\left[f'(x_0)\right]^2+2f(x_0)\cdot f''(x_0)+4f''(x_0)+2=0 \Leftrightarrow$$

$$2\left[f'(x_0)\right]^2+2=0 \text{ το οποίο είναι άτοπο.}$$

Άρα η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Άσκηση 14

Δίνεται η συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει:

$f\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) = 2 \cdot e^x$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

i. Να δείξετε ότι $f'(0) = 2$.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A\left(0, f(0)\right)$ είναι η $y = 2x + 2$.

iii. Αν ένα σημείο κινείται πάνω στην προηγούμενη ευθεία και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $2cm/\sec$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου.

Λύση

1. Παραγωγίζουμε τη σχέση $f\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) = 2 \cdot e^x$ και παίρνουμε

$$f'\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) \cdot \left(e^x \cdot \eta\mu x\right)' = \left(2 \cdot e^x\right)' \Leftrightarrow$$

$$f'\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) \cdot \left(e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x\right) = 2 \cdot e^x \qquad \textbf{(4)}$$

Για $x = 0$ η σχέση **(4)** μας δίνει $f'(0) = 2$.

2. Για $x = 0$ η σχέση $f\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) = 2 \cdot e^x$ μας δίνει $f(0) = 2$. Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y - 2 = 2(x - 0) \Leftrightarrow y = 2x + 2.$$

3. Η τετμημένη x του σημείου είναι συνάρτηση του χρόνου t και $x'(t) = 2cm/\sec$, οπότε και η τεταγμένη του y του σημείου θα είναι συνάρτηση του χρόνου t και θα ισχύει

$$y(t) = 2x(t) + 2,$$

οπότε παραγωγίζουμε και έχουμε

$$y'(t) = 2x'(t) = 4cm/\sec.$$

Άσκηση 15

1. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$. Να δείξετε ότι:

   i. αν η f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή.

   ii. αν η f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια.

2. Έστω $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ μια άρτια και παραγωγίσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=\left(x^5+\sigma\upsilon\nu x\right)\cdot e^{f(x)}+\eta\mu x+x\,.$$

   i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.

   ii. Να υπολογίσετε την τιμή $g'(0)$.

<u>Λύση</u>

1. i. Έστω ότι η f είναι άρτια, τότε ισχύει:

$f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης έχουμε:

$\left(f(-x)\right)'=f'(x)$ **(1)**

Θέτοντας $y=f(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=f(u)$. Επομένως,

$$y'=\left(f(u)\right)'=f'(u)\cdot u'=f'(-x)\cdot(-1)=-f'(-x),$$

άρα η **(1)** γίνεται $f'(-x)=-f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Συνεπώς η f' είναι περιττή.

ii. Έστω ότι η f είναι περιττή, τότε ισχύει:

$f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης έχουμε:

$\left(f(-x)\right)'=-f'(x)$ **(2)**

Θέτοντας $y = f(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = f(u)$. Επομένως,

$$y' = \left(f(u)\right)' = f'(u) \cdot u' = f'(-x) \cdot (-1) = -f'(-x),$$

άρα η **(2)** γίνεται $f'(-x) = f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Συνεπώς η f' είναι άρτια.

2. i. Η συνάρτηση $e^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Οι $x^5 + \sigma\upsilon\nu x$ και $\eta\mu x + x$ είναι παραγωγίσιμες ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Οπότε η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

   ii. Έχουμε:

$$g'(x) = \left(x^5 + \sigma\upsilon\nu x\right)' \cdot e^{f(x)} + \left(x^5 + \sigma\upsilon\nu x\right) \cdot \left(e^{f(x)}\right)' + \left(\eta\mu x + x\right)' =$$

$$\left(5x^4 - \eta\mu x\right) \cdot e^{f(x)} + \left(x^5 + \sigma\upsilon\nu x\right) \cdot e^{f(x)} \cdot f'(x) + \sigma\upsilon\nu x + 1.$$

Οπότε $g'(0) = e^{f(0)} \cdot f'(0) + \sigma\upsilon\nu 0 + 1 = 2$.

Στον προηγούμενο υπολογισμό χρησιμοποιήσαμε $f'(0) = 0$.

Πράγματι από το προηγούμενο ερώτημα η συνάρτηση f' είναι περιττή, οπότε για $x = 0$ έχουμε $f'(-0) = -f'(0) \Leftrightarrow 2f'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$.

Άσκηση 16

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

i. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

ii. Να δείξετε ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right]$

iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sigma\varphi\dfrac{1}{x}=3x$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $\left(\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right)$.

<u>Λύση</u>

i. Για $x\neq 0$ έχουμε

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^3\eta\mu\frac{1}{x}}{x}=x^2\eta\mu\frac{1}{x}.$$

Επίσης $\left|x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|\leq x^2 \Leftrightarrow -x^2\leq x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\leq x^2$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2\right)=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι

$$\lim_{x\to 0}x^2\eta\mu\frac{1}{x}=0,$$

άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$.

ii. Η συνάρτηση $\eta\mu\dfrac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, οπότε και η f είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right]$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Η συνάρτηση $\eta\mu\frac{1}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2\pi},\frac{1}{\pi}\right)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2\pi},\frac{1}{\pi}\right)$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επίσης $f\left(\frac{1}{2\pi}\right)=\frac{1}{8\pi^3}\cdot\eta\mu(2\pi)=0$ και $f\left(\frac{1}{\pi}\right)=\frac{1}{\pi^3}\cdot\eta\mu(\pi)=0$.

Από τα προηγούμενα έπεται ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $\left[\frac{1}{2\pi},\frac{1}{\pi}\right]$.

iii. Από το **ii)** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\frac{1}{2\pi},\frac{1}{\pi}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.

Έτσι

$$f'(\xi)=0\Leftrightarrow 3\xi^2\cdot\eta\mu\frac{1}{\xi}+\xi^3\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\xi}\cdot\left(-\frac{1}{\xi^2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$3\xi\cdot\eta\mu\frac{1}{\xi}=\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\xi}\Leftrightarrow\sigma\varphi\frac{1}{\xi}=3\xi$$

Άρα η εξίσωση $\sigma\varphi\frac{1}{x}=3x$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $\left(\frac{1}{2\pi},\frac{1}{\pi}\right)$.

Άσκηση 17

Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

ii. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

<u>Λύση</u>

i. Έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln x} \overset{u=x\cdot\ln x}{=} \lim_{u\to 0} e^u = 1, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x\to 0^+} u = \lim_{x\to 0^+} (x\cdot\ln x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

ii. $$\lim_{x\to 0^+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \overset{u=x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{=} \lim_{u\to 0} e^u = 1, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x\to 0^+} u = \lim_{x\to 0^+} \left(x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x}{x+1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x}{x+1}\right) = 0.$$

Άσκηση 18

Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f:\mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(1)=2 \text{ και}$$

$$x\cdot f'(x)=-3\cdot f(x) \text{ για κάθε } x\neq 0.$$

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=x^3\cdot f(x)$ είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

Λύση

i. Έχουμε

$$g'(x)=\left(x^3\cdot f(x)\right)'=3x^2\cdot f(x)+x^3\cdot f'(x)=3x^2\cdot f(x)+x^2\cdot\left(-3f(x)\right)=0$$

άρα $g'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, δηλαδή υπάρχουν σταθερές $c_1,c_2\in\mathbf{R}$ τέτοιες, ώστε

$$g(x)=\begin{cases} c_1, & x>0 \\ c_2, & x<0 \end{cases}$$

Επειδή η f είναι άρτια έχουμε $f(1)=2 \Leftrightarrow f(-1)=2$ οπότε $g(1)=1^3\cdot 2=2=c_1$ και $g(-1)=(-1)^3\cdot 2=-2=c_2$.

Από τα προηγούμενα έπεται ότι

$$g(x)=\begin{cases} 2, & x>0 \\ -2, & x<0 \end{cases}$$

ii. Για $x>0$, $g(x)=2 \Leftrightarrow x^3\cdot f(x)=2 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2}{x^3}$.

Για $x<0$, $g(x)=-2 \Leftrightarrow x^3\cdot f(x)=-2 \Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{2}{x^3}$.

$$\text{Άρα } f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x^3}, & x>0 \\ \\ -\dfrac{2}{x^3}, & x<0 \end{cases}$$

iii. Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$, έπεται ότι η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Επίσης ισχύει $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$, άρα η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Επειδή έχουμε οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$, έτσι δεν έχουμε πλάγιες ασύμπτωτες.

Άσκηση 19

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3-15x^2+24x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbf{R}$.

iv. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της αν υπάρχουν.

<u>Λύση</u>

Το πεδίο ορισμού της $f(x)=2x^3-15x^2+24x$ είναι το $\mathbf{R}$.

i. $f'(x)=6x^2-30x+24$ και

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2-30x+24=0 \Leftrightarrow (x=1 \text{ ή } x=4)$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
f′(x)		+	0	-	0	+	
f(x)		↗	11	↘	-16	↗	

Η f είναι λοιπόν γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,1]$ και $[4,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,4]$. Επειδή είναι επίσης συνεχής στα σημεία 1 και 4, παρουσιάζει στη θέση $x=1$ τοπικό μέγιστο το $f(1)=11$ και στη θέση $x=4$ τοπικό ελάχιστο το $f(4)=-16$.

ii. Ισχύει

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, και επειδή η f είναι συνεχής στο R τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

iii. Τα επιμέρους σύνολα τιμών είναι

$f((-\infty,1])=(-\infty,11]$,

$f([1,4])=[-16,11]$ και

$f([4,+\infty))=[-16,+\infty)$ και από τη μονοτονία της συνάρτησης προκύπτει ότι

- Αν $\lambda<-16$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μια μοναδική λύση στο $(-\infty,1)$.

- Αν $\lambda=-16$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει δυο ακριβώς λύσεις, την $x=4$ και μια δεύτερη στο $(-\infty,1)$.

- Αν $-16<\lambda<11$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει τρεις ακριβώς λύσεις, μια σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$, $(1,4)$ και $(4,+\infty)$.

- Αν $\lambda=11$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει δυο ακριβώς λύσεις, την $x=1$ και μια δεύτερη στο $(4,+\infty)$.

- Αν $\lambda>11$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μια μοναδική λύση στο $(4,+\infty)$.

iv. $f''(x)=12x-30$ και $f''(x)>0\Leftrightarrow x>\dfrac{5}{2}$. Οπότε έχουμε

x	-∞	5/2	+∞
f″(x)	-	0	+

Άρα η f είναι κοίλη στο διάστημα $\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right]$ και κυρτή στο $\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$.

Επειδή η f'' μηδενίζεται στο σημείο $x_0=\dfrac{5}{2}$ και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημα το σημείο $A\left(\dfrac{5}{2},f\left(\dfrac{5}{2}\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f.

Άσκηση 20

Δίνεται πολυωνυμική συνάρτηση P για την οποία ισχύει:

$$\left[P'(x)\right]^2 = P(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R} \text{ και } P'(1) = 2 .$$

Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

<u>Λύση</u>

Πρώτα θα προσδιορίσουμε το βαθμό του πολυωνύμου P.

Έστω ότι ο βαθμός του $P(x)$ είναι ν, τότε ο βαθμός του $P'(x)$ είναι $\nu - 1$ και του $\left[P'(x)\right]^2$ είναι $2(\nu-1)$. Λόγω της ισότητας $\left[P'(x)\right]^2 = P(x)$, πρέπει να ισχύει:

$$2(\nu - 1) = \nu \Leftrightarrow \nu = 2 .$$

Άρα το πολυώνυμο είναι δευτέρου βαθμού και θα είναι της μορφής:

$$P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \text{ με } \alpha \neq 0 ,$$

$$P'(x) = 2\alpha x + \beta ,$$

οπότε

$$\left[P'(x)\right]^2 = P(x) \Leftrightarrow (2\alpha x + \beta)^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \Leftrightarrow$$

$$4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4\alpha^2 = \alpha & \mathbf{(1)} \\ 4\alpha\beta = \beta & \mathbf{(2)} \\ \beta^2 = \gamma & \mathbf{(3)} \end{cases}$$

Η **(1)** μας δίνει

$$4\alpha^2 = \alpha \overset{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} \alpha = \frac{1}{4}$$

και από τη σχέση $P'(1) = 2$ παίρνουμε

$$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = \frac{3}{2} .$$

Τέλος αντικαθιστούμε το $\beta = \frac{3}{2}$ στη σχέση **(3)** και έχουμε:

$$\gamma = \beta^2 = \frac{9}{4}.$$

Επίσης η σχέση **(2)** ισχύει αν αντικαταστήσουμε τους αριθμούς α και β.

Έτσι $P(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$.

Άσκηση 21

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο. Αν για τους αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$ με $\alpha<\beta<\gamma$ ισχύει $f(\alpha)<f(\beta)>f(\gamma)$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

Λύση

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $[\alpha,\beta]$ και $[\beta,\gamma]$.

Έτσι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

Όμως $f(\alpha)<f(\beta)$ άρα

$$f'(\xi_1)>0 \qquad \textbf{(1)}$$

Ομοίως υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(\beta,\gamma)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$$

Όμως $f(\beta)>f(\gamma)$ άρα

$$f'(\xi_2)<0 \qquad \textbf{(2)}$$

Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$ και από τις **(1)** και **(2)** έχουμε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)<0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(\alpha,\gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

Άσκηση 22

Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} \eta\mu x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

ii. $\lim\limits_{x\to 0^-} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

<u>Λύση</u>

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} \eta\mu x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\eta\mu x}{x} \cdot x \cdot e^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

γιατί

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

και

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{u\to +\infty} \frac{e^u}{u} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{u\to +\infty} \frac{\left(e^u\right)'}{\left(u\right)'} = \lim_{u\to +\infty} \frac{e^u}{1} = +\infty .$$

ii. $\lim\limits_{x\to 0^-} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot 0 = 0$,

αφού

$$\lim_{x\to 0^-} x = 0$$

και

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} \overset{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{u\to -\infty} e^u = 0 .$$

Άσκηση 23

Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,6]\to\mathbf{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,6)$ με $f(1)=f(6)$.

i. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,6)$ τέτοιο, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να έχει στο σημείο

   $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ οριζόντια εφαπτομένη.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,6)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)+4f'(\xi_2)=0$.

<u>Λύση</u>

i. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,6)$ και επίσης $f(1)=f(6)$, ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, άρα:

   υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,6)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

   Επομένως στο σημείο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη.

ii. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση f στα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,6]$.

<u>Σχόλιο</u>: Η επιλογή των διαστημάτων $[1,2]$ και $[2,6]$ έγινε, έτσι ώστε τα μήκη τους να είναι ανάλογα των συντελεστών της σχέσης $f'(\xi_1)+4f'(\xi_2)=0$, δηλαδή τους αριθμούς 1 και 4.

- η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f(2)-f(1). \qquad \textbf{(1)}$$

  ομοίως η f είναι συνεχής στο $[2,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(2,6)$,

  άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(2,4)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(6)-f(2)}{6-2}=\frac{f(6)-f(2)}{4}. \qquad \textbf{(2)}$$

Οπότε από τις **(1)** και **(2)** έχουμε:

$$f'(\xi_1)+4f'(\xi_2)=f(2)-f(1)+4\cdot\frac{f(6)-f(2)}{4}=f(6)-f(1)=0.$$

Άρα αποδείχτηκε.

Άσκηση 24

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \eta\mu x$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

<u>Λύση</u>

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

i. Έχουμε

$$f'(x) = 2x - \sigma\upsilon\nu x$$

και

$$f''(x) = 2 + \eta\mu x.$$

Ισχύει

$$-1 \le \eta\mu x \le 1 \Leftrightarrow 2-1 \le 2+\eta\mu x \le 2+1 \Leftrightarrow$$

$$1 \le 2+\eta\mu x \le 3 \Leftrightarrow 1 \le f''(x) \le 3,$$

άρα $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$, το οποίο συνεπάγεται ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

ii. Έχουμε

$f'(0) = -\sigma\upsilon\nu 0 = -1 < 0$,

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cdot\frac{\pi}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = \pi > 0$

και επειδή η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, έπεται από το θεώρημα Bolzano ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

Όμως όπως δείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα, $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$, που σημαίνει ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

iii. Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$ και υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$, οπότε:

για $x < x_0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0$ και

για $x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$.

Άσκηση 25

Δίνεται δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, για την οποία ισχύουν: $f(2)=5$, $f(1)=3$ και $f(x)\le 2x+1$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

Λύση

Αφού η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, σημαίνει ότι είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.

Έχουμε $f(x)\le 2x+1 \Leftrightarrow f(x)-2x-1\le 0$, οπότε αν θέσουμε

$g(x)=f(x)-2x-1$, τότε η συνάρτηση g είναι επίσης συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbf{R}$, ως άθροισα συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επίσης $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$ και επειδή $g(2)=f(2)-4-1=0$ και $g(1)=f(1)-2-1=0$, έπεται ότι η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το 0 στα σημεία $x=1$ και $x=2$.

Έτσι σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει:

$g'(1)=f'(1)-2=0 \Leftrightarrow f'(1)=2$ και

$g'(2)=f'(2)-2=0 \Leftrightarrow f'(2)=2$.

Τέλος επειδή η f' είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ και $f'(1)=f'(2)$, εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f' στο $[1,2]$ και μας δίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1

Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbf{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x) < x^2$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Να δείξετε ότι:

1. η $g(x) = 3f(x) - x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$
2. $f(2) - f(1) < 3$
3. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) < 3$.

<u>Λύση</u>

1. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $\mathbf{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε για να τη μελετήσουμε ως προς τη μονοτονία αρκεί να βρούμε το πρόσημο της g'. Ισχύει

$$g'(x) = 3f'(x) - 3x^2 = 3\left[f'(x) - x^2\right] < 0$$

άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$.

2. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$, οπότε

$$g(2) < g(1) \Leftrightarrow 3f(2) - 8 < 3f(1) - 1 \Leftrightarrow f(2) - f(1) < \frac{7}{3} < 3.$$

3. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ επομένως και συνεχής, άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[1,2]$, αφού

   i. η f είναι συνεχής στο $[1,2]$

   ii. η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$,

   οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = f(2) - f(1) < 3.$$

Άσκηση 2

i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x) = x - \ln x$.

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x$.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

<u>Λύση</u>

i. Το πεδίο ορισμού της g είναι το $(0, +\infty)$ και είναι συνεχής σε αυτό.

Είναι $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. Οπότε έχουμε τον επόμενο πίνακα πρόσημου για την g'

x	0		1		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	

το οποίο σημαίνει ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$,

άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=1$, το οποίο είναι το $g(1)=1$, άρα $g(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$.

Για το σύνολο τιμών βρίσκουμε τα εξής όρια:

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x - \ln x) = +\infty$ και

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$,

αφού $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ και

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = 1 - \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} 1 - \lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = 1 - \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 1.$$

Από τα προηγούμενα έπεται ότι το σύνολο τιμών είναι το $[1,+\infty)$.

<u>Σχόλιο</u>: μπορούμε να απαντήσουμε βρίσκοντας και το ένα από τα δύο όρια

ii. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0,+\infty)$.

Θεωρούμε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{\frac{1}{x}}\cdot \ln x\right) = -\infty$, αφού

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{y\to +\infty} e^y = +\infty$.

Άρα η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=0$.

Πλάγιες ασύμπτωτες:

Θεωρούμε το όριο

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot \ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\ln x}{x} = 0$$

αφού $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x} = 0$ και

$\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}} \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{y\to 0} e^y = 1$,

όμως $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x) - 0\cdot x\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}}\cdot \ln x = +\infty$,

αφού $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$.

Άρα η γραφική παράσταση της f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

iii. Η παράγωγος της f ισούται με:

$$f'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}}\cdot \ln x\right)' = e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot \ln x + e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x} =$$

$$e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot(x - \ln x) = e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot g(x)$$

και από το ερώτημα **i)** έπεται ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Στο **ii)** βρήκαμε επίσης ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}}\cdot \ln x = +\infty$, άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

Άσκηση 3

1. Να δείξετε ότι:

$$\ln x+\frac{1}{x}\geq 1 \text{ για κάθε } x>0.$$

2. Να δείξετε ότι η $g(x)=\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e},1\right)$.

3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)=e^x\cdot\ln x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

4. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης f του προηγούμενου ερωτήματος.

<u>Λύση</u>

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1,\ x>0$. Έχουμε

   $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$, οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	0		1		$+\infty$
h'(x)		-	0	+	

   Συνεπώς η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, άρα έχει ολικό ελάχιστο το 0 για $x=1$, δηλαδή ισχύει:

   $h(x)\geq h(1)\Leftrightarrow \ln x+\frac{1}{x}-1\geq 0$ άρα αποδείχτηκε ότι

   $\ln x+\frac{1}{x}\geq 1$ για κάθε $x>0$.

2. Η $g(x)=\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$ είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e},1\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και

- $g\left(\dfrac{1}{e}\right)=\ln\dfrac{1}{e}+2e-e^2=-1+2e-e^2=-(1-e)^2<0$,

- $g(1)=1>0$.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα x_0 της g στο $\left(\dfrac{1}{e},1\right)$. Επίσης $g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{x^2-2x+2}{x^3}>0$, αφού $x>0$ και $x^2-2x+2>0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$ επειδή έχει διακρίνουσα $\Delta=-4<0$.

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, το οποίο συνεπάγεται ότι η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

3. Έχουμε

$$f'(x)=\left(e^x\cdot\ln x\right)'=e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}=e^x\cdot\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$$

και από το ερώτημα 1 έπεται ότι $f'(x)>0$, συνεπώς η συνεχής συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα σε ανοιχτό διάστημα, έπεται ότι δεν έχει ακρότατα.

Για το σύνολο τιμών βρίσκουμε τα όρια:

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x\cdot\ln x\right)=-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}e^x=1>0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^x\cdot\ln x\right)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to +\infty}e^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$.

Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

4. Βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο της f:

$$f''(x)=\left(e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}\right)'=e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}+e^x\cdot\frac{1}{x}-e^x\cdot\frac{1}{x^2}=$$

$$e^x\cdot\left(\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=e^x\cdot g(x)$$

5. Από το ερώτημα 2 η g έχει μια ρίζα $x_0\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$ και είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε:

για $x<x_0\Rightarrow g(x)<g(x_0)=0$ και για $x>x_0\Rightarrow g(x)>g(x_0)=0$ και έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών

x	0		x_0		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	

Από τα προηγούμενα η f είναι κοίλη στο $(0, x_0]$ και κυρτή στο $[x_0, +\infty)$ και το σημείο $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f , αφού αφ' ενός αλλάζει η κυρτότητα και αφ' ετέρου στο σημείο αυτό η f είναι παραγωγίσιμη άρα υπάρχει εφαπτομένη της C_f .

Άσκηση 4

Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν:

f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ με $f(0)=2$ και

$f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x = f(x)(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,

τότε να βρείτε τον τύπο της.

<u>Λύση</u>

Ισχύει

$$f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x = f(x)(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x) \Leftrightarrow$$

$$f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x - f(x)\cdot\eta\mu x = f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x + f(x)\cdot(\sigma\upsilon\nu x)' = f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \left(f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)' = f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x,$$

οπότε σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή του βιβλίου σελίδα 252, υπάρχει μια σταθερά c τέτοια, ώστε

$$f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x = c\cdot e^x.$$

Επίσης $f(0)=2$, οπότε έχουμε: $f(0)\cdot\sigma\upsilon\nu 0 = c\cdot e^0 \Leftrightarrow c=2$.

Άρα $f(x)=\dfrac{2\cdot e^x}{\sigma\upsilon\nu x}$.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^{\lambda x}}{x+1}, x>-1$ και $\lambda>0$.

i. Να δείξετε ότι η f έχει ένα ελάχιστο.

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του λ το προηγούμενο ελάχιστο παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

<u>Λύση</u>

i. Θα μελετήσουμε την f ως προς τη μονοτονία.

$f'(x)=\left(\dfrac{e^{\lambda x}}{x+1}\right)'=\dfrac{e^{\lambda x}(\lambda x+\lambda-1)}{(x+1)^2}$ και $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1-\lambda}{\lambda}>-1$, οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου

x	-1		$\frac{1-\lambda}{\lambda}$		$+\infty$
f′(x)		-	0	+	

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-1,\dfrac{1-\lambda}{\lambda}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\dfrac{1-\lambda}{\lambda},+\infty\right)$, επομένως παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=\dfrac{1-\lambda}{\lambda}$, το οποίο είναι το $f\left(\dfrac{1-\lambda}{\lambda}\right)=\lambda\cdot e^{1-\lambda}$.

ii. Έστω $g(\lambda)=\lambda\cdot e^{1-\lambda}$ με $\lambda>0$. Θα μελετήσουμε τη g ως προς τη μονοτονία.

$g'(\lambda)=\left(\lambda\cdot e^{1-\lambda}\right)'=e^{1-\lambda}-\lambda\cdot e^{1-\lambda}=e^{1-\lambda}\cdot(1-\lambda)$ η οποία έχει ρίζα το $\lambda=1$ και για το πρόσημό της ισχύει

λ	0		1		$+\infty$
g′(λ)		+	0	-	

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$, επομένως παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $\lambda=1$.

Άσκηση 6

Α. Να αποδείξετε ότι: $e^x \le 1 + xe^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β. Να λυθεί η εξίσωση $e^x = 1 + xe^x$

Γ. Να βρείτε το σύνολο των τιμών της συνάρτησης $h(x) = 2\left|1 + xe^x\right|$

<u>Λύση</u>

i. Θέτουμε $f(x) = 1 + xe^x - e^x$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \left(1 + xe^x - e^x\right)' = xe^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε έχει ολικό ελάχιστο στο $x = 0$, δηλαδή $f(x) \ge f(0) = 0 \Leftrightarrow 1 + xe^x - e^x \ge 0$.

ii. Η εξίσωση $f(x) = 0$ ισχύει για τη θέση του ελάχιστου, δηλαδή για $x = 0$.

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση, $g(x) = 1 + xe^x$ η οποία είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Θα βρούμε το σύνολο τιμών της: $g'(x) = xe^x + e^x = e^x(x+1)$ και έχουμε

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$, οπότε έχει ολικό ελάχιστο στο $x = -1$, δηλαδή $g(x) \ge g(-1) = \dfrac{e-1}{e} > 0$.

Επίσης $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + xe^x\right) = 1 + \lim\limits_{x \to -\infty} \left(xe^x\right) = 1$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x)'}{\left(e^{-x}\right)'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+xe^{x}\right)=+\infty$, άρα το σύνολο τιμών της g είναι

το $[\frac{e-1}{e},+\infty)$.

Επομένως το σύνολο τιμών της h είναι το $[2\frac{e-1}{e},+\infty)$.

Άσκηση 7

1. Να λύσετε την εξίσωση $3^x + 2^x = 5^x$.

2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με $f'(x) = -2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

   i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{2x} \cdot f(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$.

   ii. Να βρείτε τον τύπο της f αν $f(0) = 1$.

   iii. Αν h, φ παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbf{R}$, με

$$h'(x) + 2h(x) = \varphi'(x) + 2\varphi(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}$$

   και $h(0) = \varphi(0)$, τότε να δείξετε ότι $h = \varphi$.

<u>Λύση</u>

1. Έχουμε $3^x + 2^x = 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x - 1 = 0$ **(1)**.

   Μια προφανής λύση της προηγούμενης εξίσωσης είναι η $x = 1$. Θα δείξουμε ότι είναι μοναδική.

   Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x - 1$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.

   Ισχύει:

$$f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot \ln\frac{3}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^x \cdot \ln\frac{2}{5} < 0,$$

   αφού $\frac{3}{5} < 1 \Leftrightarrow \ln\frac{3}{5} < \ln 1 = 0$ και $\frac{2}{5} < 1 \Leftrightarrow \ln\frac{2}{5} < \ln 1 = 0$.

   Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$, οπότε η $x = 1$ είναι μοναδική ρίζα της f, άρα και μοναδική ρίζα της εξίσωσης **(1)**.

   i. Η g είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ ως σύνθεση και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

   Έχουμε

$g'(x)=\left(e^{2x}\cdot f(x)\right)'=2e^{2x}\cdot f(x)+e^{2x}\cdot f'(x)=2e^{2x}\cdot f(x)-2e^{2x}\cdot f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$

Άρα η g είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$.

ii. Από το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε ότι:

υπάρχει $c\in\mathbf{R}$ τέτοιο, ώστε $g(x)=c$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$, άρα

$e^{2x}\cdot f(x)=c\Leftrightarrow f(x)=c\cdot e^{-2x}$.

Για $x=0$ παίρνουμε:

$f(0)=c\cdot e^{0}\Leftrightarrow c=1$.

Άρα $f(x)=e^{-2x}$.

iii. Ισχύει:

$h'(x)+2h(x)=\varphi'(x)+2\varphi(x)\Leftrightarrow\left(h(x)-\varphi(x)\right)'=-2\left(h(x)-\varphi(x)\right)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$,

οπότε από το **i)** ερώτημα έπεται ότι:

$h(x)-\varphi(x)=c\cdot e^{-2x}$, και για $x=0$ παίρνουμε

$$h(0)-\varphi(0)=c\cdot e^{0}\overset{h(0)=\varphi(0)}{\Leftrightarrow}c=0.$$

Άρα $h=\varphi$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι έχει ένα ολικό ακρότατο.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f, αν υπάρχουν.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

iv. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\left(0, f(0)\right)$.

v. Να αποδείξετε την ανισότητα:

$$\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x \geq 7x+3 \text{ για κάθε } x\geq -4+\sqrt{3}.$$

<u>Λύση</u>

Η συνάρτηση $f(x)=\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$.

i. Παραγωγίζουμε την f,

$$f'(x)=(2x+4)\cdot e^x+\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x=\left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x.$$

Έχουμε $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x=0 \Leftrightarrow x=-3\pm\sqrt{2}$, επίσης

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x+3}{e^{-x}}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+4}{-e^{-x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x+4)'}{\left(-e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}2e^x=0 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty,$$

οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		$-3-\sqrt{2}$		$-3+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	Τ.Μ.	$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	$+\infty$

Έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,-3-\sqrt{2}\right]$ και $\left[-3+\sqrt{2},+\infty\right)$, γνησίως φθίνουσα στο $\left[-3-\sqrt{2},-3+\sqrt{2}\right]$ και συνεχής στο $\mathbf{R}$, οπότε στο $-3-\sqrt{2}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και στο $-3+\sqrt{2}$ τοπικό ελάχιστο.

Επίσης

$f\left(\left(-\infty,-3-\sqrt{2}\right]\right)=\left(0, f\left(-3-\sqrt{2}\right)\right]$,

$f\left(\left[-3-\sqrt{2},-3+\sqrt{2}\right]\right)=\left[f\left(-3+\sqrt{2}\right), f\left(-3-\sqrt{2}\right)\right]$ και

$f\left(\left[-3+\sqrt{2},+\infty\right)\right)=\left[f\left(-3+\sqrt{2}\right),+\infty\right)$.

Το $f\left(-3+\sqrt{2}\right)$ είναι ολικό ελάχιστο γιατί $f\left(-3+\sqrt{2}\right)<0$.

Πράγματι το τριώνυμο $g(x)=x^2+4x+3$ έχει ρίζες τους αριθμούς

-3 και -1 και $-3<-3+\sqrt{2}<-1$, άρα $g\left(-3+\sqrt{2}\right)<0$ γιατί ανάμεσα στις ρίζες το τριώνυμο είναι αρνητικό, και κατά συνέπεια και $f\left(-3+\sqrt{2}\right)<0$.

Επειδή το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $\left[f\left(-3+\sqrt{2}\right),+\infty\right)$ είναι φανερό ότι η f δεν έχει ολικό μέγιστο.

ii. $f''(x)=(2x+6)\cdot e^x+\left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x=\left(x^2+8x+13\right)\cdot e^x$ και

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \left(x^2+8x+13\right)\cdot e^x=0 \Leftrightarrow x=-4\pm\sqrt{3}$.

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου

x	$-\infty$		$-4-\sqrt{3}$		$-4+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-	0	+	

Άρα η f είναι κυρτή στα διαστήματα $\left(-\infty,-4-\sqrt{3}\right]$ και $\left[-4+\sqrt{3},+\infty\right)$ και κοίλη στο διάστημα $\left[-4-\sqrt{3},-4+\sqrt{3}\right]$.

Επειδή επίσης η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbf{R}$, που σημαίνει ότι έχει εφαπτομένη σε κάθε σημείο της γραφικής της παράστασης, έπεται ότι η C_f έχει δυο σημεία καμπής τα $A\left(-4-\sqrt{3}, f\left(-4-\sqrt{3}\right)\right)$ και $B\left(-4+\sqrt{3}, f\left(-4+\sqrt{3}\right)\right)$.

iii. Στο ερώτημα ii) βρήκαμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, άρα η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y=0$.

Επίσης

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x\right)'}{(x)'}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x=+\infty$, άρα η f δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ δεν έχει επίσης κατακόρυφες ασύμπτωτες.

iv. $f'(x)=\left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x \Rightarrow f'(0)=7$ και $f(0)=3$.

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\left(0, f(0)\right)$ είναι:

$$y-3=7\cdot(x-0) \text{ ή}$$

$$\varepsilon: y=7x+3.$$

v. Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\left[-4+\sqrt{3},+\infty\right)$ και $0\in\left[-4+\sqrt{3},+\infty\right)$, οπότε στο διάστημα αυτό η C_f είναι «πάνω» από την εφαπτομένη στο $A\left(0, f(0)\right)$, άρα

$$\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x \geq 7x+3 \text{ για κάθε } x\geq -4+\sqrt{3}.$$

Άσκηση 9

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln(x+1)-1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

iv. Αν για τους αριθμούς $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ με $2\alpha+\beta>0$ και $\alpha+2\beta-1>0$, ισχύει:

$$e^{2\alpha+\beta-1}-\ln(2\alpha+\beta)+e^{\alpha+2\beta-2}-\ln(\alpha+2\beta-1)\leq 2$$

να υπολογίσετε τους α,β.

<u>Λύση</u>

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(-1,+\infty)$.

i. Έχουμε

$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1}$ και

$f''(x)=e^x+\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Επειδή $f''(x)>0$ για κάθε $x>-1$, έπεται ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1,+\infty)$.

Επίσης $f'(0)=0$, άρα

για $-1<x<0 \overset{f'\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(0)=0$ και

για $x>0 \overset{f'\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(0)=0$.

Επιπλέον $f(0)=0$ και έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-1,0\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[0,+\infty\right)$, οπότε παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=0$ το $f\left(0\right)=0$.

ii. Έχουμε

$$\lim_{x\to -1^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to -1^+}\left[e^x-\ln\left(x+1\right)-1\right]=+\infty \text{, αφού}$$

$$\lim_{x\to -1^+}\ln\left(x+1\right)\overset{u=x+1}{=}\lim_{u\to 0^+}\ln\left(u\right)=-\infty \text{ και } \lim_{x\to -1^+}\left[e^x-1\right]=\frac{1}{e}-1.$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\left[0,+\infty\right)$.

iii. Η εξίσωση $f\left(x\right)=0$ έχει στο πεδίο ορισμού της $\left(-1,+\infty\right)$, μοναδική λύση την $x=0$, αφού

για $x<0 \overset{f\ \gamma\nu.\varphi\theta\acute{\iota}.}{\Leftrightarrow} f\left(x\right)>f\left(0\right)=0$ και

για $x>0 \overset{f\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow} f\left(x\right)>f\left(0\right)=0$.

iv. Η δοσμένη σχέση γίνεται ισοδύναμα

$$e^{2\alpha+\beta-1}-\ln\left(2\alpha+\beta\right)+e^{\alpha+2\beta-2}-\ln\left(\alpha+2\beta-1\right)\le 2\Leftrightarrow$$

$$e^{2\alpha+\beta-1}-\ln((2\alpha+\beta-1)+1)-1+e^{\alpha+2\beta-2}-\ln((\alpha+2\beta-2)+1)-1\le 0\Leftrightarrow$$

$$f\left(2\alpha+\beta-1\right)+f\left(\alpha+2\beta-2\right)\le 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Από την τελευταία σχέση έπεται ότι

$$f\left(2\alpha+\beta-1\right)=f\left(\alpha+2\beta-2\right)=0, \qquad \textbf{(2)}$$

γιατί αν υποθέσουμε ότι π.χ. $f\left(2\alpha+\beta-1\right)\neq 0$ τότε, επειδή $f\left(x\right)\ge 0$ για κάθε $x>-1$, θα πρέπει $f\left(2\alpha+\beta-1\right)>0$ και η **(1)** μας δίνει $f\left(\alpha+2\beta-2\right)\le -f\left(2\alpha+\beta-1\right)<0$ δηλαδή $f\left(\alpha+2\beta-2\right)<0$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως $f\left(2\alpha+\beta-1\right)=0$ οπότε από την **(1)** και $f\left(\alpha+2\beta-2\right)=0$.

Από την **(2)** και από το ερώτημα **iii)** έχουμε ότι

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta-1=0 \\ \alpha+2\beta-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=1 \end{cases}.$$

Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^{\frac{1}{2x}}$, $x>0$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να δείξετε ότι:

$$\sqrt[12]{6}<\sqrt[10]{5}<\sqrt[6]{3}$$

<u>Λύση</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^{\frac{1}{2x}}$, $x>0$.

i. Βρίσκουμε πρώτα την παράγωγο της f.

Αν $y=x^{\frac{1}{2x}}=\left(e^{\ln x}\right)^{\frac{1}{2x}}=e^{\frac{\ln x}{2x}}$ και θέσουμε $u=\dfrac{\ln x}{2x}$, τότε $y=e^{u}$. Επομένως,

$$y'=\left(e^{u}\right)'=e^{u}\cdot u'=e^{\frac{\ln x}{2x}}\cdot\left(\frac{\ln x}{2x}\right)'=x^{\frac{1}{2x}}\cdot\frac{1-\ln x}{2x^{2}}.$$

Έχουμε $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow x=e$,

και $f'\left(x\right)>0\Leftrightarrow \ln x<1\Leftrightarrow x<e$.

Οπότε σχηματίζουμε τον πίνακα

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(e)$	$\searrow$	

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0,e\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[e,+\infty\right)$ και επειδή είναι συνεχής στο e,

έχει στη θέση αυτή ολικό μέγιστο το $f\left(e\right)$

ii. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[e,+\infty\right)$, οπότε ισχύει:

$$e<3<5<6\Leftrightarrow f\left(3\right)>f\left(5\right)>f\left(6\right)\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{6}}>5^{\frac{1}{10}}>6^{\frac{1}{12}}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt[12]{6}<\sqrt[10]{5}<\sqrt[6]{3}$$

Άσκηση 11

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(x^2+1\right)\cdot\ln x$, $x>0$.

i. Να δείξετε ότι $2x\cdot\ln x+\dfrac{1}{x}>0$ για κάθε $x>0$.

ii. Να μελετήσετε την f ως τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση $f\left(x\right)=0$.

iii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$ τέτοιο, ώστε το σημείο $A\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ να είναι σημείο καμπής της C_f.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

<u>Λύση</u>

i. Έχουμε $2x\cdot\ln x+\dfrac{1}{x}>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}2x^2\cdot\ln x+1>0$,

οπότε θεωρούμε τη συνάρτηση $g\left(x\right)=2x^2\cdot\ln x+1$, $x>0$.

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ και

$g'\left(x\right)=4x\cdot\ln x+2x=2x\cdot\left(2\ln x+1\right)$

και έχουμε

$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 2x\cdot\left(2\ln x+1\right)=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$ και

$$g'\left(x\right)>0\Leftrightarrow 2x\cdot\left(2\ln x+1\right)>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x>-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x>\frac{1}{\sqrt{e}},$$

$$g'\left(x\right)<0\Leftrightarrow 2x\cdot\left(2\ln x+1\right)<0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x<-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$, και επειδή είναι συνεχής στο $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ παρουσιάζει στο σημείο αυτό ολικό ελάχιστο το

$$g(\frac{1}{\sqrt{e}}) = \frac{e-1}{e} > 0.$$

Επομένως $g(x) \geq g(\frac{1}{\sqrt{e}}) > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα αποδείξαμε ότι

$$2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

ii. Έχουμε $f'(x) = \left[\left(x^2+1\right)\cdot \ln x\right]' = 2x\ln x + x + \frac{1}{x} = x + \left(2x\ln x + \frac{1}{x}\right) > 0$, αφού

$x > 0$ και $2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0$ από το προηγούμενο ερώτημα.

Άρα η συνεχής συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Επίσης το $x = 1$ είναι προφανής λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$, η οποία λόγω της μονοτονίας είναι και μοναδική.

iii. Έχουμε $f''(x) = \left(2x\ln x + x + \frac{1}{x}\right)' = 2\ln x + 2 + 1 - \frac{1}{x^2} = 2\ln x + 3 - \frac{1}{x^2}$ και

$f^{(3)}(x) = \left(2\ln x + 3 - \frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3} > 0$ για κάθε $x > 0$.

Αφού $f^{(3)}(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$, έπεται ότι η συνεχής συνάρτηση f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Επίσης $f''\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - e^2 < 0$ και $f''(1) = 2 > 0$ και επειδή η f'' είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$, υπάρχει σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0) = 0$, το οποίο λόγω της μονοτονίας της f'' είναι μοναδικό.

Επίσης έχουμε

$0 < x < x_0 \overset{f''\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow} f''(x) < f''(x_0) = 0$ και

$x > x_0 \overset{f''\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow} f''(x) > f''(x_0) = 0.$

Επειδή η f'' μηδενίζεται στο σημείο x_0 και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημα το σημείο $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f .

iv. Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\ln x=\left(+\infty\right)\cdot\left(+\infty\right)=+\infty$$

άρα η C_f δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to0^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to0^+}\left(x^2+1\right)\cdot\ln x=-\infty ,$$

αφού $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^2+1\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$. Άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=0$.

Άσκηση 12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\ln\left(x^2+1\right)$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $x-4=\ln 17-\ln\left(x^2+1\right)$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση: $x^3-x^2>\ln\dfrac{x^4+1}{x^6+1}$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

i. Έχουμε

$$f'(x)=1+\frac{2x}{x^2+1}=\frac{x^2+1+2x}{x^2+1}=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}.$$

Επειδή $f'(x)>0$ στο $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ και η f είναι συνεχής στο -1, έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$.

ii. Ισχύει

$$x-4=\ln 17-\ln\left(x^2+1\right)\Leftrightarrow x+\ln\left(x^2+1\right)=4+\ln\left(4^2+1\right)\Leftrightarrow$$

$$f(x)=f(4)$$

και η f είναι «1-1» αφού είναι γνησίως αύξουσα, άρα η τελευταία σχέση μας δίνει:

$$x=4.$$

iii. Έχουμε:

$$x^3-x^2>\ln\frac{x^4+1}{x^6+1}\Leftrightarrow x^3-x^2>\ln\left(x^4+1\right)-\ln\left(x^6+1\right)\Leftrightarrow$$

$$x^3+\ln\left(\left(x^3\right)^2+1\right)>x^2+\ln\left(\left(x^2\right)^2+1\right)\Leftrightarrow$$

$$f\left(x^3\right)>f\left(x^2\right)\overset{f\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow}x^3>x^2\Leftrightarrow x^2\cdot(x-1)>0\Leftrightarrow x>1.$$

Άσκηση 13

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2\cdot e^x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

ii. Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x+1)>f(x+1)-f(x) \text{ για κάθε } x>0.$$

<u>Λύση</u>

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

i. Έχουμε

$f'(x)=2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x$,

$f''(x)=2e^x+2x\cdot e^x+2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x=(x^2+4x+2)e^x$.

$f''(x)=0\Leftrightarrow x=-2\pm\sqrt{2}$.

Σχηματίζουμε τον πίνακα προσήμου της f'' :

X	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$		$+\infty$
f''(x)		+	0	-	0	+	

Έτσι συμπεραίνουμε ότι η f είναι κυρτή στα $(-\infty,-2-\sqrt{2}]$ και $[-2+\sqrt{2},+\infty)$ και κοίλη στο $[-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2}]$.

ii. Επειδή $-2+\sqrt{2}<0$, έπεται ότι για $x>0$ ισχύει $[x,x+1]\subseteq[-2+\sqrt{2},+\infty)$ και αφού $f''(x)>0$ στο $(-2+\sqrt{2},+\infty)$ έπεται ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα $[-2+\sqrt{2},+\infty)$, άρα και στο $[x,x+1]$.

Η f είναι συνεχής στο $[x,x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x,x+1)$, οπότε εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής για την f στο $[x,x+1]$ οπότε:

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}\Leftrightarrow f'(\xi)=f(x+1)-f(x).$$

Έτσι έχουμε

$$f'(x+1)>f(x+1)-f(x)\Leftrightarrow f'(x+1)>f'(\xi)\overset{f'\,\gamma\nu.\,\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow}x+1>\xi,$$

το οποίο ισχύει, άρα αποδείχτηκε η ζητούμενη σχέση.

Άσκηση 14

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},3\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},3\right)$ με $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$ και $f(3)=12$.

i. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=4x+2$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $B(\gamma, f(\gamma))$ να διέρχεται από το $O(0,0)$.

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},3\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},3\right)$, οπότε εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής και έχουμε:

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi)=\dfrac{f(3)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{3-\frac{1}{2}}=\dfrac{12-2}{\frac{5}{2}}=4$.

Επομένως η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=f'(\xi)=4$, άρα είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=4x+2$.

ii. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $B(\gamma, f(\gamma))$ έχει εξίσωση:

$$y-f(\gamma)=f'(\gamma)\cdot(x-\gamma)$$

και αφού διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$, πρέπει

$$-f(\gamma)=f'(\gamma)\cdot(-\gamma)\Leftrightarrow f(\gamma)=\gamma\cdot f'(\gamma). \qquad \textbf{(1)}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x},\ x\in\left[\frac{1}{2},3\right]$.

Η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},3\right]$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και

παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},3\right)$, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επίσης:

$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$ και

$g(3)=\frac{12}{3}=4$,

άρα $g\left(\frac{1}{2}\right)=g(3)$, που σημαίνει ότι εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για τη g

στο $\left[\frac{1}{2},3\right]$. Έτσι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(\gamma)=0\Leftrightarrow\frac{f'(\gamma)\cdot\gamma-f(\gamma)\cdot 1}{\gamma^2}=0\Leftrightarrow f(\gamma)=\gamma\cdot f'(\gamma).$$

Άρα αποδείχτηκε η **(1)**, συνεπώς υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(\gamma, f(\gamma))$ να διέρχεται από το $O(0,0)$.

Άσκηση 15

1. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ. Να δείξετε ότι:

$$f(\alpha)+f(\beta)\geq 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \text{ για κάθε } \alpha,\beta\in\Delta.$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2-x^2}{x+1},\ x>-1$.

   i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

   ii. Αν $\alpha>\dfrac{1}{e},\beta>\dfrac{1}{e}$ να δείξετε ότι:

$$\frac{2-\ln^2\alpha}{\ln\alpha+1}+\frac{2-\ln^2\beta}{\ln\beta+1}\geq 2\cdot\frac{2-\ln^2\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)}{\ln\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)+1}$$

<u>Λύση</u>

1. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο διάστημα Δ, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

   - Αν $\alpha=\beta$, τότε η σχέση

$$f(\alpha)+f(\beta)\geq 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

   γίνεται

$$2\cdot f(\alpha)\geq 2\cdot f(\alpha)$$

   το οποίο ισχύει.

   - Έστω τώρα ότι $\alpha<\beta$. Τότε έχουμε

$$f(\alpha)+f(\beta)\geq 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\geq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha) \qquad \textbf{(1)}$$

   Επίσης $\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\alpha=\beta-\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\beta-\alpha}{2}>0$, οπότε η **(1)** γίνεται

$$\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}} \geq \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha} \qquad \textbf{(2)}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$, οπότε:

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha} \quad \text{και}$$

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Έτσι η **(2)** γίνεται $f'(\xi_2) \geq f'(\xi_1)$, το οποίο ισχύει αφού f' γνησίως αύξουσα και $\xi_2 \geq \xi_1$.

Επομένως αποδείχτηκε.

- Ομοίως αποδεικνύεται και για $\alpha > \beta$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2-x^2}{x+1}$, $x > -1$.

Ισχύει

$$f'(x) = \frac{\left(2-x^2\right)'(x+1)-\left(2-x^2\right)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{-x^2-2x-2}{(x+1)^2} \quad \text{και}$$

$$f''(x) = \frac{\left(-x^2-2x-2\right)'(x+1)^2-\left(-x^2-2x-2\right)\left((x+1)^2\right)'}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3}.$$

Άρα $f''(x) > 0$ για κάθε $x > -1$, συνεπώς f κυρτή στο $(-1, +\infty)$.

i. Έχουμε $\alpha > \frac{1}{e}, \beta > \frac{1}{e}$, άρα $\ln\alpha > -1$ και $\ln\beta > -1$. Επίσης

$$\frac{2-\ln^2\alpha}{\ln\alpha+1} + \frac{2-\ln^2\beta}{\ln\beta+1} \geq 2\cdot\frac{2-\ln^2\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)}{\ln\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2-(\ln\alpha)^2}{\ln\alpha+1} + \frac{2-(\ln\beta)^2}{\ln\beta+1} \geq 2\cdot\frac{2-\left(\frac{\ln\alpha+\ln\beta}{2}\right)^2}{\frac{\ln\alpha+\ln\beta}{2}+1} \Leftrightarrow$$

$$f(\ln\alpha) + f(\ln\beta) \geq 2\cdot f\left(\frac{\ln\alpha+\ln\beta}{2}\right)$$

η οποία ανισότητα ισχύει, όπως αποδείχτηκε στο ερώτημα 1) για τη συνάρτηση f η οποία είναι κυρτή στο $(-1,+\infty)$ και για τους $\ln\alpha > -1$ και $\ln\beta > -1$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο: ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Άσκηση 1

i. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c, c\in\mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c, c\in\mathbb{R}$

ii. Αν $c>0$, τότε ποιο εμβαδόν εκφράζει το $\int_{\alpha}^{\beta} c dx$;

Λύση

i. Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c\in\mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού $G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε $G'(x)=F'(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $G(x)=F(x)+c$, για κάθε $x\in\Delta$.

ii. Αν $c>0$, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} c dx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με βάση β-α και ύψος c.

Άσκηση 2

i. Έστω μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

ii. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις C_f, C_g, και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$.

Να ορίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω, αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

<u>Λύση</u>

i. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $G(x) = F(x) + c$. **(1)**

Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε
$G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$, οπότε $c = G(\alpha)$.

Επομένως, $G(x) = F(x) + G(\alpha)$, οπότε, για $x=\beta$, έχουμε

$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha)$ και άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

ii. $E = \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)]dx$

Άσκηση 3

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$. Ποια σχέση δίνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha, x=\beta$;

<u>Λύση</u>

Η σχέση είναι: $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx$.

Άσκηση 4

i. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

ii. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$. Να ορίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω, αν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν έχει σταθερό πρόσημο στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Λύση

i. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

ii. $E=\int_a^\beta |f(x)-g(x)|dx$.

Άσκηση 5

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$. Να ορίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω.

- αν $f(x)\geq 0$
- αν $f(x)\leq 0$
- αν η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$.

<u>Λύση</u>

- Αν $f(x)\geq 0$ το εμβαδόν Ω του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από τη C_f και τις ευθείες $x=\alpha, x=\beta$ και τον άξονα xx' είναι $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.
- Αν $f(x)\leq 0$ το εμβαδόν Ω του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από τη C_f και τις ευθείες $x=\alpha, x=\beta$ και τον άξονα xx' είναι $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} (-f(x))dx$.
- Αν η f δε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\left[\alpha,\beta\right]$ το εμβαδόν Ω του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από τη C_f και τις ευθείες $x=\alpha, x=\beta$ και τον άξονα xx' είναι $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} \left|f(x)\right| dx$.

Άσκηση 6

Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

Λύση

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha).$

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$ θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $G(x) = F(x) + c$. **(1)**

Από την **(1)**, για $x = \alpha$, έχουμε $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$, οπότε $c = G(\alpha)$. Επομένως, $G(x) = F(x) + G(\alpha)$, οπότε, για $x = \beta$, έχουμε $G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha)$ και άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1

Θεωρούμε μία συνάρτηση f ορισμένη στο $\left(2\sqrt{2},+\infty\right)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\ln\left(x^2-8\right)$ και F μία παράγουσα της f στο $\left(2\sqrt{2},+\infty\right)$, με $f(3)=F(3)=0$.

i. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση F είναι κυρτή ή κοίλη και να βρεθούν τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

ii. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x>2\sqrt{2}$

iii. Να αποδείξετε ότι η F είναι γνησίως αύξουσα.

<u>Λύση</u>

i. Οι συναρτήσεις f, F είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $(2\sqrt{2},+\infty)$ με $F'(x)=f(x)$ και $F''(x)=f'(x)=\ell n(x^2-8)$ για κάθε $x>2\sqrt{2}$.

Είναι:

- $F''(x)=0\Leftrightarrow \ell n(x^2-8)=0\Leftrightarrow \ell n(x^2-8)=\ell n1\Leftrightarrow x^2-8=1\Leftrightarrow x=3$, αφού $x>2\sqrt{2}$.
  (Η συνάρτηση ln ειναι1-1)

  $F''(x)<0\Leftrightarrow \ell n(x^2-8)<0\Leftrightarrow x^2-8<1\Leftrightarrow x^2<9\Leftrightarrow |x|<3\Leftrightarrow 2\sqrt{2}<x<3$.

  Αφού $x>2\sqrt{2}$ (η συνάρτηση ln είναι γνησίως αύξουσα).

  Άρα η F είναι κοίλη για κάθε $x\in(2\sqrt{2},3)$.

- Όμοια:

  $F''(x)>0\Leftrightarrow x>3$

Άρα η F είναι κυρτή για κάθε $x>3$. Επομένως, το σημείο $M(3,F(3))=(3,0)$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής της C_F.

ii. Είναι:
$F''(x)=f'(x)$ για κάθε $x\in(2\sqrt{2},+\infty)$. Άρα, οι ρίζες και το πρόσημο της f' ταυτίζονται με τις ρίζες και το πρόσημο της F'' δηλαδή: $f'(x)<0\Leftrightarrow 2\sqrt{2}<x<3$ από i) και $f'(x)>0\Leftrightarrow x>3$ από i). Επομένως η f παρουσιάζει στο $x=3$ ολικό ελάχιστο, οπότε: $f(x)\geq f(3)\Leftrightarrow f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in(2\sqrt{2},+\infty)$.

iii. Είναι:

$F'(x)=f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in(2\sqrt{2},+\infty)$ (από ii.) και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=3$.
Επομένως, η F είναι γνησίως αύξουσα.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με: $f(x)=\dfrac{2x^3+3x}{x^2+1}$

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f αν $x\to-\infty$.

iv. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt\right)$.

<u>Λύση</u>

i. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\left(\frac{2x^3+3x}{x^2+1}\right)'=\frac{(6x^2+3)(x^2+1)-(2x^3+3x)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{6x^4+3x^2+\cancel{6x^2}+3-4x^4-\cancel{6x^2}}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{2x^4+3x^2+3}{(x^2+1)^2}>0$$

Αφού $2x^4+3x^2+3>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και 1-1, επομένως αντιστρέφεται.

ii. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ το σύνολο τιμών της θα είναι

$$\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)$$

Είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+3x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3}{x^2}=2\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+3x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$.

Άρα $f(\mathbb{R})=(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=(-\infty,+\infty)$.

iii. Η συνάρτηση f είναι συνεχής, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη. Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση αν έχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη.

Είναι:

- $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x^3+3x}{x^2+1}}{x}=$$

  $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+3x}{x^3+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^3}=2$$

- $$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-2x]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3+3x}{x^2+1}-2x\right)=$$

  $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+3x-2x^3-2x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}=$$

  $$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Άρα η ευθεία $y=2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

iv. Έχουμε: $\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\left(\frac{2t^3+3t}{t^2+1}\right)dt=\int_0^x\frac{2t^3+2t+t}{t^2+1}dt=$

$$=\int_0^x\left(\frac{2t(t^2+1)+t}{t^2+1}\right)dt=\int_0^x\left(2t+\frac{t}{t^2+1}\right)dt=\int_0^x 2tdt+\int_0^x\frac{t}{t^2+1}dt=$$

$$=\left[t^2\right]_0^x+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{(t^2+1)'}{t^2+1}dt=x^2+\frac{1}{2}\left[\ln(t^2+1)\right]_0^x=x^2+\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)-\ln1\right]=x^2+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

Άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)}{x^2}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{1}{2}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}\right]=1+\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}=1+\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(x^2+1))'}{(x^2)'}$$

$$=1+\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2+1}(x^2+1)'}{2x}=1+\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}=1+\frac{1}{2}\cdot0=1.$$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f(0)=1$ και ισχύει $f'(x)=\ln 2\cdot f(x)$ (1), για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η $g(x)=\dfrac{f(x)}{2^x}$ είναι σταθερή και να βρείτε την f.

ii. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{5^x}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{5^x}$

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,1)$ έτσι ώστε να ισχύει $\xi^3\int_0^1 f(t)dt=1-\xi$.

<u>Λύση</u>

i. Θα δείξουμε ότι $g'(x)=0$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$g'(x)=\left(\frac{f(x)}{2^x}\right)'=\frac{f'(x)\cdot 2^x-f(x)(2^x)'}{(2^x)^2}=\frac{f'(x)\cdot 2^x-f(x)\cdot 2^x\cdot\ln 2}{(2^x)^2}=\frac{f'(x)-f(x)\ln 2}{2^x}\overset{(1)}{=}0$$ οπότε

$g(x)=c$ άρα $\dfrac{f(x)}{2^x}=c$.

$$\frac{f(x)}{2^x}=c\Leftrightarrow f(x)=c\,2^x$$

αλλά $f(0)=1$, άρα $c=1$ οπότε $f(x)=2^x$.

ii. Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{5^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x}{5^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^x=0$, αφού $0<\dfrac{2}{5}<1$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{5^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x}{5^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^x=+\infty$.

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x^3\int_0^1 f(t)dt-1+x$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική.

Είναι $g(0)=-1<0$ και $g(1)=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 2^t dt=\dfrac{1}{\ln 2}\left[2^t\right]_0^1=\dfrac{1}{\ln 2}(2-1)=\dfrac{1}{\ln 2}>0$, οπότε

$g(0)g(1)<0$. Άρα ισχύει το Θ. Bolzano που σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ έτσι ώστε να ισχύει $g(\xi)=0 \Leftrightarrow \xi^3\int_0^1 f(t)dt = 1-\xi$.

Είναι $g'(x)=3x^2\int_0^1 f(t)dt+1>0,$ γιατί $f(t)=2^t>0 \Rightarrow \int_0^1 f(t)dt>0$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, οπότε η ρίζα της ξ είναι μοναδική.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και $f'(x)=f(x)+2e^{x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Αποδείξτε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=2xe^{x}$.

ii. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f.

iv. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ με $F(1)=0$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1 F(x)\,dx$.

<u>Λύση</u>

i. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε:

$$f'(x)=f(x)+2e^{x}\Leftrightarrow f'(x)-f(x)=2e^{x}\Leftrightarrow\frac{f'(x)-f(x)}{e^{x}}=2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=2\Leftrightarrow\left(e^{-x}f(x)\right)'=(2x)'.$$

Άρα $e^{-x}f(x)=2x+c$, $c\in\mathbb{R}$. Για $x=0$ βρίσκουμε $c=0$, οπότε $e^{-x}f(x)=2x\Leftrightarrow f(x)=2xe^{x}$, $x\in\mathbb{R}$.

ii. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2x\cdot e^{x})=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{e^{-x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x)'}{(e^{-x})'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-e^{-x}}=0,$$

αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{x}=+\infty$.

iii. Από ii) έχουμε: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, επομένως η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Επίσης: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x\cdot e^{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(2e^{x})=+\infty$.

Επομένως η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Και τέλος επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων, η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

iv. Αφού F είναι μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ θα ισχύει $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$$I=\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1 (x)'F(x)dx=\left[xF(x)\right]_0^1-\int_0^1 xF'(x)dx=1F(1)-0-\int_0^1 xf(x)dx=-2\int_0^1 x^2e^xdx=$$

$$=-2\int_0^1 x^2(e^x)'dx=-\left[2x^2e^x\right]_0^1+4\int_0^1 xe^xdx=-\left(2e-0\right)+4\int_0^1 x(e^x)'dx=-2e+4\left[xe^x\right]_0^1-4\int_0^1 e^xdx=$$

$$=-2e+4\left(e-0\right)-4\left[e^x\right]_0^1=-2e+4e-4\left(e-1\right)=-2e+4e-4e+4=4-2e.$$

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=\ln\left(16-x^2\right),\ x\in(-4,4)$ και Φ μια παράγουσα της φ στο $(-4,4)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\Phi(x-2)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την παράγωγό της.

iii. Αν $f(2)=0$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\left(2,f(2)\right)$.

iv. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρεθούν τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης

<u>Λύση</u>

i. Έχουμε ότι η συνάρτηση Φ είναι μια παράγουσα της φ στο $(-4,4)$, δηλαδή ισχύει $\Phi'(x)=\varphi(x)$, $x\in(-4,4)$.

Επίσης για να ορίζεται η συνάρτηση $f(x)=\Phi(x-2)$ πρέπει: $A'\neq\varnothing$ όπου
$A'=D_f=\{x\in R: x-2\in D_\Phi\}=\{x\in R: -4<x-2<4\}=(-2,6)\neq\varnothing$
Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι το $D_f=(-2,6)$.

ii. Οι συναρτήσεις Φ και $x-2$ είναι παραγωγίσιμες άρα και η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-2,6)$ ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\Phi'(x-2)(x-2)'=\ln\left(16-(x-2)^2\right)=\ln\left(-x^2+4x+12\right)$$

iii. Έχουμε: $f(2)=0$ και $f'(2)=\ln\left(-2^2+4\cdot 2+12\right)=\ln(-4+8+12)=\ln 16$ οπότε η εξίσωση της C_f στο $A\left(2,f(2)\right)$ είναι:

$\varepsilon: y-f(2)=f'(2)(x-2)$ ή

$\varepsilon: y=\ln 16(x-2)$ ή

$\varepsilon: y=\ln 16x-2\ln 16$

iv. Για κάθε $x\in(-2,6)$ έχουμε:

$$f''(x)=(\ln(-x^2+4x+12))'=\frac{(-x^2+4x+12)'}{-x^2+4x+12}=$$

$$= \frac{-2x+4}{-x^2+4x+12} = \frac{2(x-2)}{x^2-4x-12}.$$

Είναι:

$f''(x) \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(x-2)}{x^2-4x-12} \le 0 \Leftrightarrow 2(x-2) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 2$ αφού $x^2-4x-12<0$ στο $(-2,6)$.

Άρα η f είναι κοίλη στο διάστημα $[2,6)$.

Όμοια $f''(x) \ge 0 \Leftrightarrow x \le 2$. Άρα η f είναι κυρτή στο διάστημα $(-2,2]$.

Η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 2 και επίσης ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(2,f(2))$, οπότε το $A(2,f(2))$ είναι σημείο καμπής.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνεχής και άρτια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$xf(x)=F(x)-8x^5$, **(1)** με την F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ και $F(2)=0$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$.

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f'.

iii. Να βρείτε τον τύπο της f.

iv. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I=\int_{-2}^{2} f(x)dx$.

<u>Λύση</u>

i. Για $x\neq 0$ έχουμε: $f(x)=\frac{1}{x}F(x)-8x^4,(2)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη διότι: οι συναρτήσεις $F(x),\frac{1}{x}$ είναι παραγωγίσιμες οπότε και το γινόμενο τους είναι παραγωγίσιμη.

Επίσης η $-8x^4$ είναι παραγωγίσιμη οπότε $f(x)=\frac{1}{x}F(x)-8x^4$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$.

ii. Επειδή η συνάρτηση $F(x)$ είναι μια παράγουσα της $f(x)$ στο $\mathbb{R}$, θα έχουμε $F'(x)=f(x),\ x\in\mathbb{R}$. Από τη σχέση **(1)** για $x\neq 0$ παραγωγίζοντας έχουμε:

$$f(x)+xf'(x)=F'(x)-40x^4 \Leftrightarrow f(x)+xf'(x)=f(x)-40x^4 \Leftrightarrow xf'(x)=-40x^4 \Leftrightarrow f'(x)=-40x^3$$

iii. Από ii) έχουμε: $f'(x)=-40x^3$ για κάθε $x\neq 0$.

- Αν $x>0$, τότε: $f(x)=-10x^4+C_1$ **(3)**

  Για $x=2$ η **(1)** δίνει: $2f(2)=F(2)-8\cdot 32\Rightarrow f(2)=-128$

  Για $x=2$ η **(3)** δίνει: $f(2)=-160+C_1$ οπότε: $-160+C_1=-128\Leftrightarrow C_1=32$.

  Άρα $f(x)=-10x^4+32$ για κάθε $x>0$.

- Αν $x<0$, τότε: $f(x)=-10x^4+C_2$ **(4)**

  Για $x=-2$ έχουμε: $f(-2)=-160+C_2$ και επειδή f άρτια
  $f(-2)=f(2)\Leftrightarrow -160+C_2=-128\Leftrightarrow C_2=32$

Άρα $f(x) = -10x^4 + 32$ για κάθε $x < 0$

- Αν $x = 0$, τότε επειδή f συνεχής έχουμε: $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(-10x^4 + 32) = 32$

  Άρα $f(x) = -10x^4 + 32$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iv. Είναι: $I = \int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{2} (-10x^4 + 32)dx =$

$= [-2x^5 + 32x]_{-2}^{2} =$

$= -2\cdot 2^5 + 32\cdot 2 - [-2\cdot(-2)^5 + 32\cdot(-2)] =$

$= -64 + 64 - (64 - 64) = 0$.

Άσκηση 7

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύουν $-4f(x)f'(x)+x^3+2=f^6(x)-3xf^4(x)+3x^2f^2(x),(1)$ και $f^2(x)\neq x$ με $f(0)=1$.

i. Να αποδείξετε ότι $f^2(x)=x+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_{f^2} στο σημείο $M\left(0,f^2(0)\right)$.

iii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\displaystyle\int_0^{e-1}\left(f^4(x)-2xf^2(x)\right)dx+\int_0^{e-1}x^2dx$.

<u>Λύση</u>

i. Η σχέση **(1)** γίνεται $-4f(x)f'(x)+2=f^6(x)-3xf^4(x)+3x^2f^2(x)-x^3\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -2\left(f^2(x)-x\right)'=\left(f^2(x)-x\right)^3\overset{f^2(x)-x\neq0}{\Leftrightarrow}-2\frac{\left(f^2(x)-x\right)'}{\left(f^2(x)-x\right)^3}=1\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\left(f^2(x)-x\right)^2}\right)'=1$$

Οπότε $\dfrac{1}{\left(f^2(x)-x\right)^2}=x+c,\ c\in\mathbb{R}.$

Για $x=0\Rightarrow\dfrac{1}{\left(f^2(0)-0\right)^2}=0+c\Rightarrow\dfrac{1}{(1-0)^2}=c\Rightarrow c=1$. Άρα $\dfrac{1}{\left(f^2(x)-x\right)^2}=x+1,(2)$.

Η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-x$ είναι συνεχής και διάφορη του μηδενός , άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο και επειδή $g(0)=f^2(0)=1>0\Rightarrow g(x)>0$

Από **(2)** έχουμε $\dfrac{1}{f^2(x)-x}=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow f^2(x)-x=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\Leftrightarrow f^2(x)=x+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_{f^2} στο $M\left(0,f^2(0)\right)$ είναι
$y-f^2(0)=2f(0)f'(0)(x-0),(3)$

Στη σχέση **(1)** θέτουμε $x=0\Rightarrow-4f(0)f'(0)+0^3+2=f^6(0)-3\cdot0\cdot f^4(0)+3\cdot0^2\cdot f^2(0)\Rightarrow$

$-4f'(0)+2=1\Rightarrow f'(0)=\dfrac{1}{4}$, οπότε η **(3)** γίνεται $y-1=2\cdot1\cdot\dfrac{1}{4}x\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}x+1$

iii. $I=\int_0^{e-1}\left(f^4(x)-2xf^2(x)\right)dx+\int_0^{e-1}x^2dx=\int_0^{e-1}\left(f^4(x)-2xf^2(x)+x^2\right)dx=$

$$\int_0^{e-1}\left(f^2(x)-x\right)^2dx=\int_0^{e-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)^2dx=\int_0^{e-1}\frac{1}{x+1}dx=\left[\ln(x+1)\right]_0^{e-1}=\ln(e-1+1)-\ln 1=1$$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'(1)=f(1)=1$, $f(x)>0$ και $x^3f''(x)-xf'(x)+2f(x)=0$ για κάθε $x>0$.

i. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=e^{\frac{x-1}{x}}$, $x>0$.

ii. Μελετήστε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Αποδείξτε ότι $2\int_1^2 xf(x)\,dx+\int_{f(1)}^{f(2)}\left(f^{-1}\right)^2(x)\,dx=4\sqrt{e}-1$.

<u>Λύση</u>

i. $x^3f''(x)-xf'(x)+2f(x)=0\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}x^4f''(x)-x^2f'(x)+2xf(x)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^4f''(x)=x^2f'(x)-2xf(x)\Leftrightarrow f''(x)=\frac{x^2f'(x)-(x^2)'f(x)}{x^4}\Leftrightarrow f''(x)=\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)'$$

Τότε υπάρχει $c_1\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $f'(x)=\frac{f(x)}{x^2}+c_1$ και για $x=1$ έχουμε

$f'(1)=f(1)+c_1\Rightarrow c_1=0$, οπότε ισχύει

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x^2}\Leftrightarrow\frac{1}{f(x)}f'(x)=\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow\left(\ln(f(x))\right)'=\left(-\frac{1}{x}\right)' .$$

Τότε υπάρχει $c_2\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $\ln\left(f(x)\right)=-\frac{1}{x}+c_2$ και για $x=1$ έχουμε

$\ln\left(f(1)\right)=-1+c_2\Rightarrow c_2=1$, οπότε ισχύει

$$\ln\left(f(x)\right)=-\frac{1}{x}+1\Leftrightarrow\ln\left(f(x)\right)=\frac{x-1}{x}\Leftrightarrow f(x)=e^{\frac{x-1}{x}} ,\ x>0.$$

ii. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=\left(e^{\frac{x-1}{x}}\right)'=e^{\frac{x-1}{x}}\left(\frac{x-1}{x}\right)'=e^{\frac{x-1}{x}}\frac{x-(x-1)}{x^2}=\frac{1}{x^2}e^{\frac{x-1}{x}}>0 \text{ για κάθε } x>0.$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_f=(0,+\infty)$.

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f θα είναι $f(A_f)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,e)$ γιατί:

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{u\to-\infty}e^u=0$, αφού

$\lim\limits_{x\to 0^+} u = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(1-\dfrac{1}{x}\right) = 1-(+\infty) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x-1}{x}} = \lim\limits_{y\to 1} e^{y} = e$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x}\right) = 1$.

iii. Θέτουμε $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) \Rightarrow dx = f'(y)\,dy$. Για $x = f(1)$ έχουμε $y = 1$ και για $x = f(2)$ έχουμε $y = 2$.

Έχουμε λοιπόν

$$2\int_1^2 xf(x)\,dx + \int_{f(1)}^{f(2)} \left(f^{-1}\right)^2(x)\,dx = 2\int_1^2 xf(x)\,dx + \int_1^2 y^2 f'(y)\,dy =$$

$$2\int_1^2 xf(x)\,dx + \left[y^2 f(y)\right]_1^2 - 2\int_1^2 yf(y)\,dy = 4f(2) - f(1) = 4e^{\frac{1}{2}} - 1 = 4\sqrt{e} - 1.$$

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f(1)=2$ και ισχύει $xf'(x)=2x+1$, για κάθε $x>0$.

i. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=2x+\ln x$, $x>0$.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,f(1))$ και να αποδείξετε ότι:

$$2x+\ln x\le 3x-1$$

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{2-\int_1^2 f(x)\,dx}{x-2}-\dfrac{\int_1^2 f(x)\,dx-3}{x-1}=0$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(1,2)$.

<u>Λύση</u>

i. Είναι $xf'(x)=2x+1\Leftrightarrow f'(x)=2+\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow f'(x)=\left(2x+\ln x\right)'$

Άρα $f(x)=2x+\ln x+c$, $c\in\mathbb{R}$ και για $x=1$ δίνει: $f(1)=2+c$.

Επομένως: $2+c=2\Leftrightarrow c=0$. Άρα $f(x)=2x+\ln x, x>0$.

ii. Για κάθε $x>0$ έχουμε: $f'(x)=\left(2x+\ln x\right)'=2+\dfrac{1}{x}>0$ και $f''(x)=\left(2+\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}<0$, για κάθε $x>0$. Άρα η f είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$.

iii. Είναι:

- $f(1)=2$
- $f'(1)=2+1=3$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο A είναι: $y-2=3(x-1)$ ή $y=3x-1$ και επειδή η $f(x)=2x+\ln x$ κοίλη (από iii.) έχουμε: $2x+\ln x\le 3x-1$. Η ισότητα ισχύει για $x=1$.

iv. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=(x-1)\left(2-\int_1^2 f(x)\,dx\right)-(x-2)\left(\int_1^2 f(x)\,dx-3\right)$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πολυωνυμική.

Είναι $g(1)=\int_1^2 f(x)\,dx-3>0$ και $g(2)=2-\int_1^2 f(x)\,dx<0$ γιατί: Αφού $x>1 \Leftrightarrow \ln x>0$, οπότε

$$f(x)=2x+\ln x>2x \Rightarrow \int_1^2 f(x)\,dx>2\int_1^2 x\,dx=2\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2=3 \Rightarrow \int_1^2 f(x)\,dx-3>0 \text{ και}$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx-3>0 \Rightarrow -\int_1^2 f(x)\,dx<-3 \Rightarrow 2-\int_1^2 f(x)\,dx<2-3=-1<0 \ .$$

Δηλαδή έχουμε $g(1)g(2)<0$. Άρα ισχύει το Θ. Bolzano που σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,2)$ έτσι ώστε $g(x_0)=0$.

Επειδή $g'(x)=\left(2-\int_1^2 f(x)\,dx\right)-\left(\int_1^2 f(x)\,dx-3\right)=\underset{(-)}{g(2)}-\underset{(+)}{g(1)}<0$, η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,2)$, οπότε η ρίζα της x_0 είναι μοναδική.

Άσκηση 3

Εκφώνηση

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{2e}{x}+2\ln x,\ x>0$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να αποδείξετε ότι $\left(\dfrac{x}{e}\right)^x \geq e^{x-e}$ για κάθε $x>0$.

iii. Αν ισχύει $\left(\dfrac{x}{e}\right)^x \geq \lambda^{x-e}$ για κάθε $x>0$ και $\lambda>0$ τότε να αποδείξετε ότι $\lambda=e$.

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=e^2$.

<u>Λύση</u>

i. Για κάθε $x>0$ έχουμε: $f'(x)=\left(\dfrac{2e}{x}+2\ln x\right)'=\dfrac{-2e}{x^2}+\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(x-e)}{x^2}$

Είναι:

- $f'(x)<0 \Leftrightarrow x<e$, άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(0,e]$.
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>e$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $[e,+\infty)$.

Η f για $x=e$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Δηλαδή $f(x)\geq f(e)$ με τιμή $f(e)=2+2=4$.

ii. Θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε $x>0$. Ισχύει:

$$\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq e^{x-e} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \ln e^{x-e} \Leftrightarrow$$

$$x\ln\frac{x}{e}\geq x-e \Leftrightarrow x(\ln x-\ln e)\geq x-e \Leftrightarrow x\ln x - x\geq x-e \Leftrightarrow$$

$$x\ln x-2x+e\geq 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x-2+\frac{e}{x}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$2\ln x+\dfrac{2e}{x}\geq 4 \Leftrightarrow f(x)\geq 4$ που ισχύει από i). (Η συνάρτηση ln είναι γνησίως αύξουσα)

iii. Για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \lambda^{x-e} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \ln\lambda^{x-e} \Leftrightarrow x(\ln x-\ln e) \geq (x-e)\ln\lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\ln x - x - x\ln\lambda + e\ln\lambda \geq 0 \quad \textbf{(1)}$$

Έστω η συνάρτηση $g(x)=x\ln x - x - x\ln\lambda + e\ln\lambda, x>0$ και $\lambda>0$, τότε:

$$g'(x)=\ln x+1-1-\ln\lambda=\ln x-\ln\lambda$$

Από **(1)** έχουμε: $g(x)\geq 0$, για κάθε $x>0$. Αλλά $g(e)=0$. Άρα $g(x)\geq g(e)$ για κάθε $x>0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη και στο $x=e$ εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της παρουσιάζει ακρότατο οπότε από το θεώρημα Fermat έχουμε:

$$g'(e)=0 \Leftrightarrow \ln e-\ln\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=e.$$

iv. Είναι: $f(x)=\dfrac{2e}{x}+2\ln x, x>0$

Παρατηρούμε ότι:

$1\leq x\leq e^2 \Leftrightarrow \ln x\geq 0$ και $\dfrac{2e}{x}>0$, οπότε: $f(x)>0$ στο $[0,e^2]$, άρα

$$E=\int_1^{e^2}\left(\frac{2e}{x}+2\ln x\right)dx=2e\left[\ln x\right]_1^{e^2}+2\int_1^{e^2}\ln x dx=$$

$$=2\cdot e\ln e^2+2\int_1^{e^2}(x)'\ln x dx=4e+2\left[x\ln x\right]_1^{e^2}-2\int_1^{e^2}x\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=4e+2e^2\ln e^2-2(e^2-1)=4e+4e^2-2e^2+2=2e^2+4e+2.$$

Άσκηση 4

Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύουν $f''(x)f(x)+\left(f'(x)\right)^2=f'(x)f(x),(1)$, $f(0)=1$ και $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=e^{x/2}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^{2018}\ln f(x)dx=0$.

γ) Αν η συνεχής συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα $[0,1]$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x-2017\displaystyle\int_0^x \frac{g(t)}{2017+f^2(t)}dt=1$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(0,1]$.

Λύση

α) Έχουμε $f''(x)f(x)+\left(f'(x)\right)^2=f'(x)f(x)\Leftrightarrow\left(f'(x)f(x)\right)'=f'(x)f(x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(f'(x)f(x)\right)'e^{-x}-f'(x)f(x)e^{-x}=0\Leftrightarrow\left(f'(x)f(x)e^{-x}\right)'=0.$ Οπότε $f'(x)f(x)e^{-x}=c,\ c\in\mathbb{R}$. **(2)**

Για $x=0\Rightarrow f'(0)f(0)=c\Rightarrow 1\cdot\dfrac{1}{2}=c\Rightarrow c=\dfrac{1}{2}$

Η **(2)** γίνεται $f'(x)f(x)e^{-x}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2f'(x)f(x)=e^x\Leftrightarrow\left(f^2(x)\right)'=\left(e^x\right)'\Leftrightarrow f^2(x)=e^x+c_1$

Για $x=0\Rightarrow f^2(0)=1+c_1\Rightarrow 1=1+c_1\Rightarrow c_1=0$, οπότε $f^2(x)=e^x$

Έστω ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}:f(x_0)=0\Rightarrow f^2(x_0)=e^{x_0}\Rightarrow 0=e^{x_0}$ άτοπο, οπότε $f(x)\neq 0$ και επειδή είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο .

Έχουμε $f(0)=1>0\Rightarrow f(x)>0$, άρα $f^2(x)=e^x\Leftrightarrow f(x)=e^{\frac{x}{2}},\ x\in\mathbb{R}$.

β) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^{2018}\ln f(x)dx=\int_{-2}^{2} x^{2018}\ln e^{\frac{x}{2}}dx=\int_{-2}^{2} x^{2018}\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x^{2019}dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^{2020}}{2020}\right]_{-2}^{2}=$

$=\dfrac{1}{4040}\left[2^{2020}-(-2)^{2020}\right]=\dfrac{1}{4040}\left(2^{2020}-2^{2020}\right)=0$.

γ) Εφαρμόζουμε το Θ.Bolzano στη συνάρτηση $h(x)=2x-1-\int_0^x \frac{2017g(t)}{2017+f^2(t)}dt$

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής σαν έκφραση συνεχών συναρτήσεων
- $h(0)=2\cdot 0-1-\int_0^0 \frac{2017g(t)}{2017+f^2(t)}dt=-1<0$ και

$h(1)=2\cdot 1-1-\int_0^1 \frac{2017g(t)}{2017+f^2(t)}dt=1-\int_0^1 \frac{2017g(t)}{2017+f^2(t)}dt \overset{(*)}{\geq} 0$

$(*)$ Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x)$ είναι το $[0,1]$, οπότε

$0\leq g(t)\leq 1 \Rightarrow \int_0^1 0dt \leq \int_0^1 g(t)dt \leq \int_0^1 1dt \Rightarrow 0\leq \int_0^1 g(t)dt \leq 1$, επίσης έχουμε

$\frac{2017g(t)}{2017+f^2(t)} \leq \frac{2017g(t)}{2017}=g(t) \Rightarrow \int_0^1 \frac{2017g(t)}{2017+f^2(t)}dt \leq \int_0^1 g(t)dt \leq 1 \Rightarrow 0\leq 1-\int_0^1 \frac{2017g(t)}{2017+f^2(t)}dt$ Άρα $h(0)h(1)\leq 0$

- Αν $h(0)h(1)<0 \Rightarrow x_0\in(0,1): h(x_0)=0$
- Αν $h(1)=0 \Rightarrow x_0=1$, τελικά υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1]: h(x_0)=0$

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\ln x-1$.

i. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f του άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=e$ και $x=\lambda>0$.

ii. Να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} E(\lambda)$.

iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(e^2, f(e^2))$.

iv. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την παραπάνω εφαπτομένη, την C_f και τον άξονα xx'.

Λύση

i. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $\lambda>e$ τότε: $E(\lambda)=\int_e^\lambda f(x)dx=\int_e^\lambda(\ln x-1)dx=\int_e^\lambda (x)'\ln x dx-(\lambda-e)=$

  $=\left[x\ln x\right]_e^\lambda-\int_e^\lambda x\cdot\frac{1}{x}dx-\lambda+e=\lambda\ln\lambda-e-(\lambda-e)-\lambda+e=$

  $=\lambda\ln\lambda-e-\lambda+e-\lambda+e=\lambda\ln\lambda-2\lambda+e$ (Αφού $e<x<\lambda$ το $\ln x>1$)

- Αν $0<\lambda<e$, τότε

  $E(\lambda)=\int_\lambda^e(-f(x))dx=\int_\lambda^e(1-\ln x)dx=(e-\lambda)-\int_\lambda^e (x)'\ln x dx=$

  $=e-\lambda-\left[x\ln x\right]_\lambda^e+\int_\lambda^e x(\ln x)'dx=$

  $=e-\lambda-e+\lambda\ln\lambda+(e-\lambda)=\lambda\ln\lambda-2\lambda+e$.

ii. Έχουμε: $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to 0^+}(\lambda\ln\lambda-2\lambda+e)=\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\lambda\ln\lambda-0+e=\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\dfrac{\ln\lambda}{\frac{1}{\lambda}}+e=$

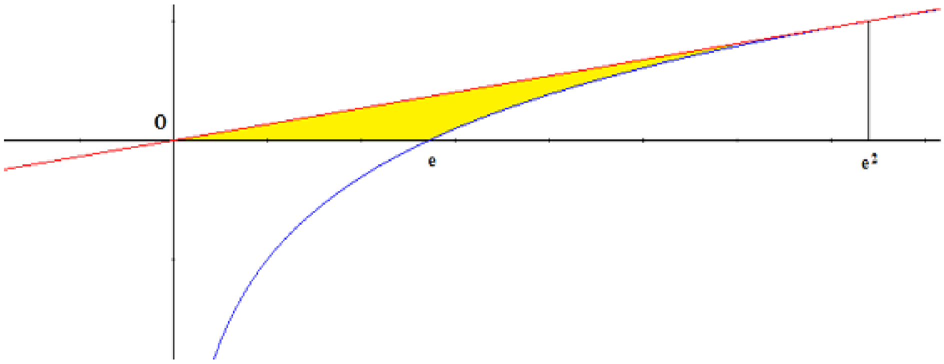
$$=\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{(\ln\lambda)'}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)'}+e=\lim_{\lambda\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{1}{\lambda^2}}\right)+e=\lim_{\lambda\to 0^+}(-\lambda)+e=e.$$

iii. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(e^2, f(e^2))$ είναι:
$y - f(e^2) = f'(e^2)(x - e^2)$

Αλλά $f(e^2) = \ln e^2 - 1 = 1$ και $f'(e^2) = \frac{1}{e^2}$. Αφού $f'(x) = \frac{1}{x}$

Άρα η εξίσωση είναι: $y - 1 = \frac{1}{e^2}(x - e^2)$ ή $y = \frac{1}{e^2}x$.

iv. Για κάθε $x > 0$ έχουμε: $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, άρα f κοίλη, οπότε η γραφική παράσταση της εφαπτομένης στο Μ βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f.



Επομένως:

$$E = \int_0^{e^2} \frac{1}{e^2} x dx - \int_e^{e^2} (\ln x - 1) dx =$$

$$= \frac{1}{e^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{e^2} - \int_e^{e^2} \ln x dx + (e^2 - e) = \frac{1}{e^2} \cdot \frac{e^4}{2} - \int_e^{e^2} (x)' \ln x dx + e^2 - e =$$

$$= \frac{e^2}{2} - [x\ln x]_e^{e^2} + \int_e^{e^2} x \frac{1}{x} dx + e^2 - e = \frac{e^2}{2} - e^2 \ln e^2 + e\ln e + e^2 - e + e^2 - e =$$

$$= \frac{e^2}{2} - 2\cancel{e^2} + \cancel{e} + \cancel{e^2} - \cancel{e} + \cancel{e^2} - e = (\frac{e^2}{2} - e) \text{ τ.μ.}$$

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^{2x}-1\right)-\ln(2x)$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της .

ii. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x+2}^{x+3} f(t)\,dt=+\infty$.

iii. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} xf(t)\,dt=0$.

<u>Λύση</u>

i. Πρέπει $e^{2x}-1>0 \text{ και } 2x>0 \Leftrightarrow e^{2x}>e^{0} \text{ και } x>0 \Leftrightarrow x>0 \Rightarrow D_f=(0,+\infty)$

$$f'(x)=\left(\ln\left(e^{2x}-1\right)\right)'-\left(\ln(2x)\right)'=\frac{1}{e^{2x}-1}\left(e^{2x}-1\right)'-\frac{1}{2x}(2x)'=\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}-\frac{1}{x}=$$

$$\frac{2xe^{2x}-e^{2x}+1}{x\left(e^{2x}-1\right)}=\frac{g(x)}{x\left(e^{2x}-1\right)}$$, όπου $g(x)=2xe^{2x}-e^{2x}+1$.

Το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο της συνάρτησης $g(x)=2xe^{2x}-e^{2x}+1$, έτσι έχουμε $g'(x)=2e^{2x}+4xe^{2x}-2e^{2x}=4xe^{2x}>0$ με $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(2xe^{2x}-e^{2x}+1\right)=0$

x	0	$+\infty$
g'		$+$
g	0	$\nearrow$

Άρα $x>0 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x)>g(0)=0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow$

Επίσης $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(\ln\left(e^{2x}-1\right)-\ln(2x)\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)\right)\overset{(*)}{=}\lim\limits_{u\to1}\ln u=0,$

$$(*)\lim_{x\to0}u=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{(e^{2x}-1)'}{(2x)'}=\lim_{x\to0}\frac{2e^{2x}}{2}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{2x}-1\right)-\ln(2x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)\right]\overset{(**)}{=}\lim_{y\to+\infty}\ln y=+\infty,$$

$$(**)\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-1}{2x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{2x}-1)'}{(2x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}}{2}=+\infty$$

Ακρότατα η συνάρτηση f δεν έχει,

επειδή $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο

$f(D_f)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(0,+\infty)$.

ii. Αν $x+2<t<x+3 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x+2)<f(t)<f(x+3) \Rightarrow \int_{x+2}^{x+3} f(x+2)dt<\int_{x+2}^{x+3} f(t)dt<\int_{x+2}^{x+3} f(x+3)dt \Rightarrow$

$$f(x+2)\int_{x+2}^{x+3} 1dt<\int_{x+2}^{x+3} f(t)dt<f(x+3)\int_{x+2}^{x+3} 1dt \Rightarrow f(x+2)<\int_{x+2}^{x+3} f(t)dt<f(x+3)$$

$\Leftrightarrow \ln\dfrac{e^{2(x+2)}-1}{2(x+2)}<\int_{x+2}^{x+3} f(t)dt<\ln\dfrac{e^{2(x+3)}-1}{2(x+3)}$ **(1)** και επειδή

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2(x+2)}-1}{2(x+2)} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{2(x+2)}-1\right)'}{\left(2(x+2)\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2(x+2)}}{2}=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{e^{2(x+2)}-1}{2(x+2)}=+\infty$$

Όμοια $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{e^{2(x+3)}-1}{2(x+3)}=+\infty$

άρα από το κριτήριο της παρεμβολής η **(1)** μας δίνει: $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x+2}^{x+3} f(t)dt=+\infty$

iii. Αν $\dfrac{2}{x}<t<\dfrac{3}{x} \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f\left(\dfrac{2}{x}\right)<f(t)<f\left(\dfrac{3}{x}\right) \Rightarrow \int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} f\left(\dfrac{2}{x}\right)dt<\int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} f(t)dt<\int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} f\left(\dfrac{3}{x}\right)dt$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}f\left(\frac{2}{x}\right)<\int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} f(t)dt<\frac{1}{x}f\left(\frac{3}{x}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{2}{x}\right)<x\int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} f(t)dt<f\left(\frac{3}{x}\right) \Leftrightarrow$$

$\ln\left(\dfrac{e^{2\frac{2}{x}}-1}{2\frac{2}{x}}\right)<\int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} xf(t)dt<\ln\left(\dfrac{e^{2\frac{3}{x}}-1}{2\frac{3}{x}}\right)$, **(1)**

έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{2\frac{2}{x}}-1}{2\frac{2}{x}}\right) \overset{\frac{2}{x}=h}{=} \lim_{h\to 0}\left(\frac{e^{2h}-1}{2h}\right) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{(e^{2h}-1)'}{(2h)'}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{2e^{2h}}{2}\right)=1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^{2\frac{2}{x}}-1}{2\frac{2}{x}}\right)=\ln 1=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{2\frac{3}{x}}-1}{2\frac{3}{x}}\right) \overset{\frac{3}{x}=h}{=} \lim_{h\to 0}\left(\frac{e^{2h}-1}{2h}\right) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{(e^{2h}-1)'}{(2h)'}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{2e^{2h}}{2}\right)=1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^{2\frac{3}{x}}-1}{2\frac{3}{x}}\right)=\ln 1=0$$

Εφαρμόζουμε το κριτήριο παρεμβολής στη σχέση **(1)**, και έτσι έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} xf(t)dt=0$

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x^3+x-2$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

iv. Αν η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I=\int_{-1}^{e} f^{-1}(x)dx$

<u>Λύση</u>

i. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $f'(x)=e^x+3x^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Από i) έχουμε ότι f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

iii. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$f(R)=(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x))$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+x^3+x-2)=0-\infty-\infty-2=-\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+x^3+x-2)=+\infty$.

Άρα $f(\mathbb{R})=(-\infty,+\infty)$. Επομένως το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι: $D_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=(-\infty,+\infty)$.

iv. Είναι: $I=\int_{-1}^{e} f^{-1}(x)dx$. Θέτουμε $x=f(y)$, οπότε είναι: $dx=f'(y)dy$. Επίσης: $f(0)=-1$ και $f(1)=e$. Άρα τα νέα άκρα ολοκλήρωσης είναι 0 και 1.

Επομένως:

$$I=\int_{-1}^{e} f^{-1}(x)dx=\int_0^1 f^{-1}(f(y))f'(y)dy=\int_0^1 yf'(y)dy=[yf(y)]_0^1-\int_0^1 (y)'f(y)dy=$$

$$=1\cdot f(1)-0-\int_0^1 f(y)dy=f(1)-\int_0^1(e^y+y^3+y-2)dy=e-[e^y+\frac{y^4}{4}+\frac{y^2}{2}-2y]_0^1=$$

$$e-[e+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-2-(e^0+0+0-0)]=\cancel{e}-\cancel{e}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+2+1=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+3=\frac{9}{4}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$ και F μία παράγουσά της στο διάστημα $\Delta=(-1,+\infty)$ με $F(0)=1$.

i. Να μελετήσετε την F ως προς τη μονοτονία, ακρότατα, κυρτότητα και σημεία καμπής.
ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $F\left(F'(x)-2017\right)=1$, έχει μοναδική λύση στο $(0,+\infty)$.
iii. Να αποδείξετε ότι $F(x+2)-F(x+1)>f(x)$ για κάθε $x>0$.
iv. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου της C_F, με τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$, να αποδείξετε ότι $2E>3$.

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$ είναι συνεχής στο $(-1,+\infty)$ και αφού η F μία παράγουσά της θα έχουμε $F'(x)=f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}>0$ για κάθε $x>-1$. Άρα η συνάρτηση F είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$ και δεν έχει ακρότατα.

Επίσης $F''(x)=f'(x)=\left(\dfrac{e^x}{x+1}\right)'=\dfrac{e^x(x+1)-e^x}{(x+1)^2}=\dfrac{x\,e^x}{(x+1)^2}\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$.

x	-1	0	$+\infty$
F''	$-$	$+$	
F			

Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι η συνάρτηση F είναι κοίλη στο $(-1,0]$ και κυρτή στο $[0,+\infty)$. Έχει στο $A\left(0,F(0)\right)=(0,1)$ σημείο καμπής.

ii. $F\left(F'(x)-2017\right)=1 \Leftrightarrow F\left(F'(x)-2017\right)=F(0) \overset{F:1-1}{\Leftrightarrow} F'(x)-2017=0 \Leftrightarrow F'(x)=2017 \Leftrightarrow$ $f(x)=2017$ **(1).**

Αφού η συνάρτηση F είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ τότε η συνάρτηση F' θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $A=[0,+\infty)$ και επειδή είναι και συνεχής το σύνολο τιμών της θα είναι

$f(A)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[1,+\infty)$, γιατί:

$f(0)=\dfrac{e^0}{0+1}=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x+1}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(e^x\right)'}{(x+1)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$.

Επειδή το $2017 \in f(A)$ και η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=[0,+\infty)$ θα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,+\infty)$ έτσι ώστε

$$f(x_0)=2017 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} F\left(F'(x_0)-2017\right)=1.$$

iii. Για $x>0$, εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ στο $[x+1,x+2]\subseteq(0,+\infty)$ για τη συνάρτηση F. Τότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x+1,x+2)$ έτσι ώστε

$$F'(\xi)=\frac{F(x+2)-F(x+1)}{x+2-x-1}=F(x+2)-F(x+1) \ .$$

Όμως

$$\xi \in (x+1,x+2) \Leftrightarrow 0<x<x+1<\xi<x+2 \overset{F':\,\text{γν. αυξουσα}}{\Leftrightarrow} F'(x)<F'(\xi) \Leftrightarrow f(x)<F(x+2)-F(x+1)$$

iv. Αφού η συνάρτηση F είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$, θα έχουμε:

$x>0 \overset{F:\,\text{γν. αυξουσα}}{\Leftrightarrow} F(x)>F(0)=1>0$, οπότε $E=\int_0^1 F(x)\,dx$.

Η εφαπτομένη της C_F στο σημείο καμπής της $A(0,1)$ είναι:

$y-F(0)=F'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=x+1$ και επειδή η συνάρτηση F είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ θα ισχύει: $F(x)\ge y$ και το ¨=¨ ισχύει για $x=0$.

Άρα θα έχουμε:

$$F(x)>y \Rightarrow \int_0^1 F(x)\,dx>\int_0^1 (x+1)\,dx \Rightarrow E>\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1 \Rightarrow E>\frac{3}{2} \Rightarrow 2E>3.$$

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{e}{x}+\ln x+1,\ x>0$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,4)$, τέτοιο ώστε $f(\xi)=3^{\xi-1}$.

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e^2$.

<u>Λύση</u>

i. Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ με $f'(x)=\left(\frac{e}{x}+\ln x+1\right)'=\frac{-e}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-e}{x^2}$

και επειδή $f'(x)>0\Leftrightarrow x>e$ και $f'(x)<0\Leftrightarrow x<e$

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[e,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0,e]$ και για $x=e$ παρουσιάζει ακρότατο το $f(e)=\frac{e}{e}+\ln e+1=3$.

ii. Είναι:

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e}{x}+\ln x+1\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e+x\ln x+x}{x}\right)=+\infty$$

αφού $\lim_{x\to0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$.

Άρα $x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Επίσης ισχύει: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e}{x^2}+\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right)=0+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}+0=0$

αφού $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ και $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e}{x}+\ln x+1\right)=+\infty$

αφού $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

Άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$.

iii. Έστω $g(x)=f(x)-3^{x-1}$ η οποία είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο [1,4] και για την οποία ισχύει: $g(1)\cdot g(4)<0$ αφού

- $g(1)=f(1)-3^0=e+\ln 1+1-1=e>0$
- $g(4)=f(4)-3^3=\frac{e}{4}+\ln 4+1-3^3<0$.

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,4)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)=3^{\xi-1}$.

iv. Είναι:

$1\le x\le e^2\Leftrightarrow \ln x\ge 0$ και $\frac{e}{x}>0$. Άρα $f(x)=\frac{e}{x}+\ln x+1>0$ για κάθε $x\in[1,e^2]$. Επομένως έχουμε:

$$E=\int_1^{e^2}\left(\frac{e}{x}+\ln x+1\right)dx=\int_1^{e^2}\frac{e}{x}dx+\int_1^{e^2}\ln x dx+1\cdot(e^2-1)=$$

$$=e\left[\ln x\right]_1^{e^2}+\int_1^{e^2}(x)'\cdot\ln x dx+e^2-1=$$

$$=e\cdot(\ln e^2-\ln 1)+\left[x\ln x\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}x\cdot\frac{1}{x}dx+e^2-1=$$

$$=2e+e^2\ln e^2-1\cdot(e^2-1)+e^2-1=2e+2e^2 \text{ τ.μ}$$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x}+\lambda x+3, x>0$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. Αν η εφαπτομένη της C_f στο $A(1,f(1))$ είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε) με εξίσωση $\varepsilon: y=3x$ να υπολογίσετε το λ.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και τις ευθείες με εξισώσεις: $x=1$ και $x=e$.

Λύση

i. Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$f'(x)=\left(\frac{2\ln x}{x}+\lambda x+3\right)'=2\left(\frac{\ln x}{x}\right)'+\lambda=2\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot (x)'}{x^2}+\lambda=$$

$$=2\frac{1-\ln x}{x^2}+\lambda \Leftrightarrow f'(x)=\frac{2-2\ln x}{x^2}+\lambda .$$

Ο συντελεστής της εφαπτομένης της C_f στο $A(1,f(1))$ είναι:

$f'(1)=\dfrac{2-0}{1}+\lambda=2+\lambda$ και επειδή είναι παράλληλη προς την ευθεία ε ισχύει:

$2+\lambda=3 \Leftrightarrow \lambda=1$. Άρα $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x}+x+3, x>0$ και $f'(x)=\dfrac{2-2\ln x}{x^2}+1$.

ii. Για κάθε $x>0$ είναι: $f'(x)=\dfrac{2-2\ln x}{x^2}+1=\dfrac{2-2\ln x+x^2}{x^2}$.

Έστω $g(x)=x^2-2\ln x+2, x>0$.

Είναι: $g'(x)=2x-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2x^2-2}{x}$

$$g'(x)=0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=1 .$$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-2}{x} > 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow |x| > 1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x > 1$.

Άρα g γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

Όμοια g γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$. Δηλαδή η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Επομένως: $g(x) \geq g(1) \Leftrightarrow g(x) \geq 3 > 0$, άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε η f δεν έχει ακρότατα και είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Είναι:

- $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2\ln x}{x} + x + 3}{x} =$

  $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \left(2\frac{\ln x}{x^2} + 1 + \frac{3}{x}\right) = 2\cdot 0 + 1 + 0 = 1$,

  αφού $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{\left(x^2\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$

- $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \left(2\frac{\ln x}{x} + x + 3 - x\right) =$

  $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \left(2\frac{\ln x}{x} + 3\right) = 2 \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} + 3 =$

  $\displaystyle = 2 \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + 3 = 3$. Άρα η ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ είναι η ευθεία $y = x + 3$.

iv. $\displaystyle E = \int_1^e |f(x) - x - 3| dx = \int_1^e \left|2\frac{\ln x}{x} + \cancel{x} + \cancel{3} - \cancel{x} - \cancel{3}\right| dx =$

$\displaystyle \int_1^e 2\left|\frac{\ln x}{x}\right| dx \overset{*}{=} 2\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx =$

$= \left[\ell n^2 x\right]_1^e = \ell n^2 e - \ell n^2 1 = 1.$

*($1 < x < e \Leftrightarrow \ln x > 0$ άρα $\dfrac{\ln x}{x}$ θετικός)

Άσκηση 4

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με $f(x)=-2+\frac{2}{x}$ και $g(x)=3\ln x$, όπου $x\in(0,+\infty)$.

i. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης h με $h(x)=f(x)-g(x)$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και τις ευθείες με εξισώσεις: $x=1$ και $x=\lambda$, όπου $\lambda>0$.

iii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)$.

iv. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}E(\lambda)$.

<u>Λύση</u>

i. Είναι:

$h(x)=f(x)-g(x)=-2+\frac{2}{x}-3\ln x=\frac{2}{x}-3\ln x-2$ για κάθε $x>0$.

Άρα $h'(x)=\frac{-2}{x^2}-\frac{3}{x}<0$, οπότε h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$. Ακόμα $h(1)=0$.

Επομένως:
Για κάθε $x>1$ είναι $h(x)<h(1)\Leftrightarrow h(x)<0$ και για κάθε $0<x<1$ είναι $h(x)>h(1)\Leftrightarrow h(x)>0$.

ii. Για να προσδιορίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν πρέπει να γνωρίζουμε αν $\lambda>1$ ή $\lambda<1$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\lambda>1$ τότε:

$$E(\lambda)=\int_1^\lambda |f(x)-g(x)|\,dx=\int_1^\lambda |h(x)|\,dx \Leftrightarrow$$

$$E(\lambda)=-\int_1^\lambda h(x)dx=-\int_1^\lambda\left(\frac{2}{x}-3\ln x-2\right)dx=$$

$$=-2\left[\ln x\right]_1^\lambda+3\int_1^\lambda (x)'\ln x dx+2(\lambda-1)=$$

$$=-2(\ln\lambda-\ln 1)+3[x\ln x]_1^\lambda-3\int_1^\lambda x\frac{1}{x}dx+2\lambda-2=$$

$$=-2\ln\lambda+3\lambda\ln\lambda-3(\lambda-1)+2\lambda-2=-2\ln\lambda+3\lambda\ln\lambda-3\lambda+3+2\lambda-2=$$

$= (3\lambda - 2)\ln\lambda - \lambda + 1$.

- Αν $0 < \lambda < 1$ τότε:

  $E(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} |h(x)|\, dx = \int_{\lambda}^{1} h(x)dx = -\int_{1}^{\lambda} h(x)dx$,

  $E(\lambda) = (3\lambda - 2)\ln\lambda + 1 - \lambda$.

- Αν $\lambda = 1$ τότε προφανώς $E(1) = 0$. Επομένως $E(\lambda) = (3\lambda - 2)\ln\lambda + 1 - \lambda$.

iii. Είναι:

$$\lim_{\lambda\to+\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty} [(3\lambda - 2)\ln\lambda + 1 - \lambda] = \lim_{\lambda\to+\infty} (3\lambda\ln\lambda - 2\ln\lambda - \lambda + 1) =$$

$$= \lim_{\lambda\to+\infty} [\lambda(3\ln\lambda - 2\frac{\ln\lambda}{\lambda} - 1 + \frac{1}{\lambda})] = (+\infty)(+\infty - 2\cdot 0 - 1 + 0) = +\infty .$$

Αφού $\lim_{\lambda\to+\infty} \ln\lambda = +\infty$ και $\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\ln\lambda}{\lambda} = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{(\ln\lambda)'}{(\lambda)'} = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\lambda} = 0$.

iv. Είναι: $\lim_{\lambda\to 0^+} E(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0^+} \left[\left(3\lambda - 2\right)\ln\lambda + 1 - \lambda\right] = \left[(0-2)\cdot(-\infty) + 1 - 0\right] = +\infty$.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, έτσι ώστε

$$2\int_0^x t\left(e^t-1\right)f(t)dt=\int_0^x t^2f^2(t)dt+\int_0^x\left(e^t-1\right)^2 dt$$

i. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f'.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία .

iv. Να λυθεί η εξίσωση $f\left(x^{2014}\right)+f\left(x^{2016}\right)=f\left(x^{2015}\right)+f\left(x^{2017}\right)$.

v. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\dfrac{f(t)}{x}dt$.

<u>Λύση</u>

i. Έχουμε $2\int_0^x t\left(e^t-1\right)f(t)dt=\int_0^x t^2f^2(t)dt+\int_0^x\left(e^t-1\right)^2 dt \Leftrightarrow$

$$\int_0^x t^2f^2(t)dt+\int_0^x\left(e^t-1\right)^2 dt-2\int_0^x t\left(e^t-1\right)f(t)dt=0\Leftrightarrow\int_0^x\left(tf(t)-\left(e^t-1\right)\right)^2dt=0$$

Η συνάρτηση $g(t)=tf(t)-\left(e^t-1\right)$ είναι συνεχής ως έκφραση συνεχών συναρτήσεων, αν η $g(t)$ δεν είναι παντού μηδέν τότε $\left(tf(t)-\left(e^t-1\right)\right)^2>0$, οπότε θα είχαμε $\int_0^x\left(tf(t)-\left(e^t-1\right)\right)^2dt>0$, άτοπο άρα

$$g(t)=0\Leftrightarrow\left(tf(t)-\left(e^t-1\right)\right)^2=0\Leftrightarrow tf(t)-\left(e^t-1\right)=0\Leftrightarrow tf(t)=e^t-1 \text{ ή } xf(x)=e^x-1$$

Αν $x\neq 0\Rightarrow f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$

Αν $x=0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x=0\Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)\Leftrightarrow\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}f(0)\Leftrightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{(x)'}=f(0)\Leftrightarrow\lim_{x\to 0}e^x=f(0)\Leftrightarrow 1=f(0)$$

Άρα $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

ii. Αν $x\neq 0\Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{e^x-1}{x}\Rightarrow f'\left(x\right)=\dfrac{\left(e^x-1\right)'x-\left(e^x-1\right)}{x^2}=\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}$

Αν $x=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{e^x-1}{x}-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1-x)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{2}=\dfrac{1}{2}$

Άρα $f'\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$

iii. Το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο της συνάρτησης $g\left(x\right)=xe^x-e^x+1$

Έχουμε $g'\left(x\right)=\left(xe^x-e^x+1\right)'=xe^x=0\Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	-		+
g	↘	$\mathbf{0}$	↗

min $g\left(0\right)=0$

δηλαδή $g\left(x\right)\geq g(0)=0\Rightarrow f'\left(x\right)>0\Rightarrow f\uparrow$

iv. Προφανείς ρίζες της εξίσωσης είναι οι αριθμοί $x=0$ και $x=1$

Αν $x>1\Rightarrow x^{2014}<x^{2015}\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f\left(x^{2014}\right)<f\left(x^{2015}\right)$, **(1)** και

$x^{2016}<x^{2017}\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f\left(x^{2016}\right)<f\left(x^{2017}\right),\left(2\right)\overset{(1)+(2)}{\Rightarrow}f\left(x^{2014}\right)+f\left(x^{2016}\right)<f\left(x^{2015}\right)+f\left(x^{2017}\right)$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη

Αν $0<x<1 \Rightarrow x^{2014}>x^{2015} \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f\left(x^{2014}\right)>f\left(x^{2015}\right)$, **(3)** και

$x^{2016}>x^{2017} \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f\left(x^{2016}\right)>f\left(x^{2017}\right),(4) \overset{(3)+(4)}{\Rightarrow} f\left(x^{2014}\right)+f\left(x^{2016}\right)>f\left(x^{2015}\right)+f\left(x^{2017}\right)$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη

Αν $x<0 \Rightarrow x^{2014}>x^{2015} \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f\left(x^{2014}\right)>f\left(x^{2015}\right)$, **(5)** και

$x^{2016}>x^{2017} \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f\left(x^{2016}\right)>f\left(x^{2017}\right),(6) \overset{(5)+(6)}{\Rightarrow} f\left(x^{2014}\right)+f\left(x^{2016}\right)>f\left(x^{2015}\right)+f\left(x^{2017}\right)$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη

Άρα μοναδικές ρίζες είναι οι αριθμοί $x=0$ και $x=1$

ν. Έστω ότι $x \in (0,1) \Rightarrow x<2x$, οπότε για κάθε t με

$$x \le t \le 2x \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) \le f(t) \le f(2x) \Rightarrow \int_x^{2x} f(x)dt \le \int_x^{2x} f(t)dt \le \int_x^{2x} f(2x)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)(2x-x) \le \int_x^{2x} f(t)dt \le f(2x)(2x-x) \Rightarrow xf(x) \le \int_x^{2x} f(t)dt \le xf(2x) \overset{x>0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f(x) \le \frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)dt \le f(2x) \Rightarrow f(x) \le \int_x^{2x} \frac{f(t)}{x}dt \le f(2x).$$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{x}=1$ και $\lim\limits_{x\to0^+} f(2x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{2x}-1}{2x}=1$, άρα από το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε $\lim\limits_{x\to0^+}\int_x^{2x}\frac{f(t)}{x}dt=1$.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3\ln(x \cdot e^{1-x}) + 2, x > 0$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $3f(x) + 2011 = 0$.

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

<u>Λύση</u>

i. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f'(x) = (3 \cdot \ln xe^{1-x} + 2)' = 3\frac{1}{xe^{1-x}}(xe^{1-x})' =$$

$$= \frac{3}{x \cdot e^{1-x}} \cdot (e^{1-x} + x(e^{1-x})') = \frac{3}{x \cdot e^{1-x}}(e^{1-x} + x \cdot e^{1-x}(1-x)') =$$

$$= \frac{3}{x \cdot e^{1-x}} \cdot e^{1-x} \cdot (1-x) = \frac{3(1-x)}{x}$$

Έχουμε:

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{3(1-x)}{x} > 0 \Leftrightarrow x < 1$ αφού $x > 0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$

- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{3(1-x)}{x} < 0 \Leftrightarrow x > 1$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \ge 1$.
Άρα η f για $x = 1$ παρουσιάζει ακρότατο με τιμή $f(1) = 3\ln 1 + 2 = 2$ που είναι η μέγιστη

ii. Το σύνολο τιμών θα είναι: $f((0, +\infty)) = (\lim\limits_{x \to 0^+} f(x), f(1)] \cup (\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), f(1)]$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}[3\ln(x \cdot e^{1-x}) + 2] = 3\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x \cdot e^{1-x}) + 2 = -\infty$ αφού

  $\lim\limits_{x \to 0^+}(x \cdot e^{1-x}) = 0$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}[3\ln(x \cdot e^{1-x}) + 2] = -\infty$ αφού

$$\lim_{x\to+\infty}(x\cdot e^{1-x}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-1}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^{x-1})'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}} = 0 .$$

- $f(1)=2$

Άρα $f((0,+\infty)) = (-\infty, 2]$.

iii. Είναι: $3f(x)+2011=0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{-2011}{3}$

Έστω $g(x) = f(x)+\dfrac{2011}{3}$ τότε $g'(x)=f'(x)$, οπότε η g έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f

$g((0,1]) = (-\infty, 2+\dfrac{2011}{3}]$ και επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1] έχει μοναδική ρίζα σε αυτό.

Άρα και η $f(x)+\dfrac{2011}{3}=0$ έχει μοναδική ρίζα στο (0,1].

$g([1,+\infty)) = (-\infty, 2+\dfrac{2011}{3}]$ και επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ έχει μοναδική ρίζα.

Άρα και η $f(x)+\dfrac{2011}{3}=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $[1,+\infty)$.

Άρα η εξίσωση $3f(x)+2011=0$ έχει δύο λύσεις, μία στο (0,1] και μία στο $[1,+\infty)$.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>: Το iii) μπορεί να λυθεί και με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.

iv. Είναι:

- $f(1)=2$

- $f(2) = 3\ln\left(\dfrac{2}{e}\right)+2 = 3\ln2-3\ln e+2 = 3\ln2-1>0$ και επειδή f γνησίως φθίνουσα

  $f([1,2]) = [3\ln2+1, 2]$ δηλαδή $f(x)>0$ στο [1,2].

  Επίσης $f(x) = 3\ln x+3\ln e^{1-x}+2 = 3\ln x+3(1-x)+2 = 3\ln x+5-3x$.

  Άρα $E = \int_1^2 f(x)dx = 3\int_1^2 \ln x dx + \int_1^2 (5-3x)dx = 3\int_1^2 (x)'\ln x dx + [5x-\frac{3}{2}x^2]_1^2 =$

  $= 3[x\ln x]_1^2 - 3\int_1^2 x\cdot(\ln x)'dx + 10 - \frac{3}{2}\cdot 4 - 5 + \frac{3}{2} =$

  $= 3\cdot(2\ln2-0) - 3\int_1^2 1dx + 10-6-5+\frac{3}{2} = 6\ln2 - 3(2-1)+\frac{3}{2}-1 =$

$$= 6\ln 2 - \frac{5}{2}$$ τ.μ.

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με $f(x)=2x^4+3\ln x+2$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\lambda^4=\frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda}-1$ έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda>0$.

iv. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται. Αν η f^{-1}, η αντίστροφη της f, είναι συνεχής, και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I=\int_0^4 f^{-1}(t)dt$.

<u>Λύση</u>

i. Για κάθε $x>0$ έχουμε: $f'(x)=8x^3+\frac{3}{x}>0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε δεν έχει ακρότατα.

ii. Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x^4+3\ln x+2)=0-\infty+2=-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(2x^4+3\ln x+2)=+\infty+\infty+2=+\infty$.

Επίσης η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, από i), άρα το σύνολο τιμών της είναι:
$f((0,+\infty))=(-\infty,+\infty)$.

iii. Για κάθε $\lambda>0$ έχουμε:

$$\lambda^4=\frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda}-1\Leftrightarrow 2\lambda^4=3(\ln 1-\ln\lambda)-2\Leftrightarrow 2\lambda^4=-3\ln\lambda-2\Leftrightarrow$$

$$2\lambda^4+3\ln\lambda+2=0\Leftrightarrow f(\lambda)=0.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\lambda>0$, τέτοιο ώστε $f(\lambda)=0$.

Αυτό ισχύει αφού το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$

(ΑΠΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ) και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

iv.Η συνάρτηση f επειδή είναι γνησίως αύξουσα είναι και 1-1 άρα αντιστρέφεται.
Θέτουμε $t=f(x)\Leftrightarrow dt=f'(x)dx$. Για $t=0$ είναι $0=f(x)\Leftrightarrow x=\lambda$.

Για $t=4$ είναι $4=f(x)\Leftrightarrow f(1)=f(x)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} x=1$.

Επομένως:

$$\int_0^4 f^{-1}(t)dt=\int_\lambda^1 f^{-1}(f(x))f'(x)dx=\int_\lambda^1 xf'(x)dx=\int_\lambda^1 x\cdot\left(8x^3+\frac{3}{x}\right)dx=$$

$$\int_\lambda^1 (8x^4+3)dx=\left[8\frac{x^5}{5}+3x\right]_\lambda^1=\frac{8}{5}+3-\left(\frac{8}{5}\lambda^5+3\lambda\right)=-\frac{8}{5}\lambda^5-3\lambda+\frac{23}{5}.$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 04/05/2022

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΓΕΝΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Άσκηση 1

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *«Αν η συνάρτηση f ορίζεται στο x_0 τότε δεν μπορεί να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = x_0$».*

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

2) Γράψτε παράδειγμα σχετικό με την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

Λύση

1) Ψ

2) Παράδειγμα:

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$, έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$.

Δηλαδή η κατακόρυφη ασύμπτωτη μπορεί να τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

Άσκηση 2

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *« Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης* f *στο* $\mathrm{A}\left(x_0, f(x_0)\right)$ *μπορεί να έχει και άλλο κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της* f *».*

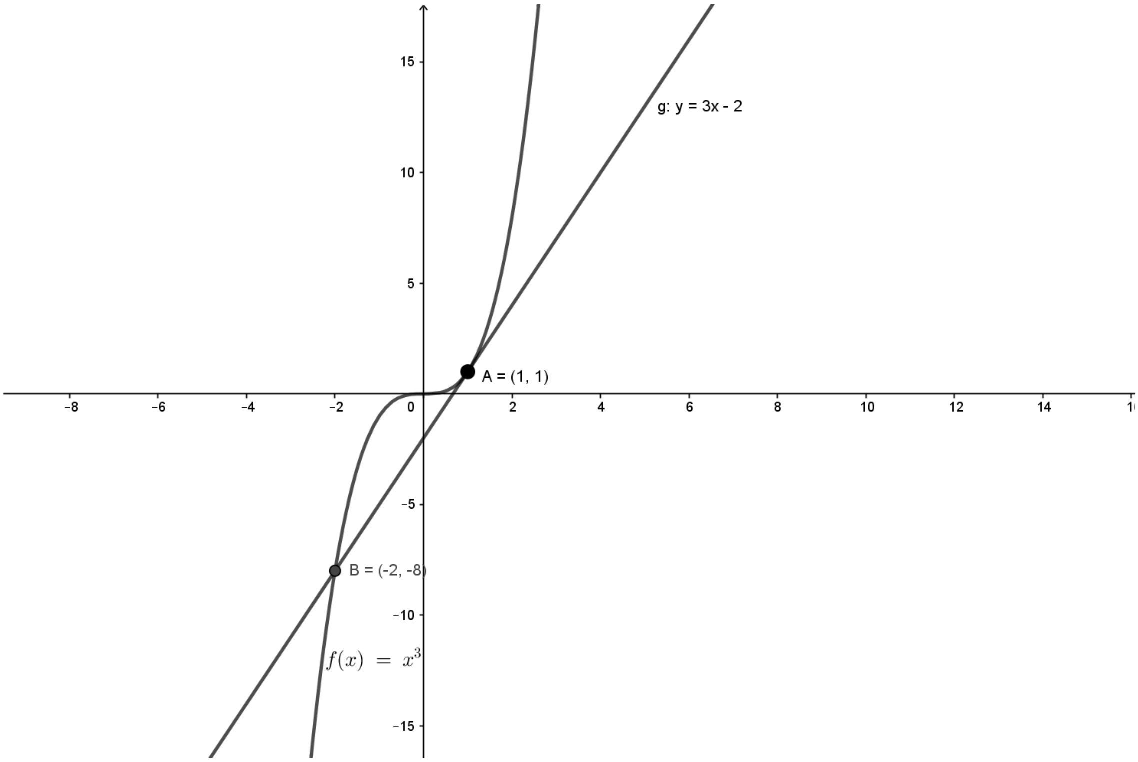
1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

2) Γράψτε παράδειγμα σχετικό με την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

Λύση

1) Α

2) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathrm{f(x)=x^3}$ και την εφαπτομένη της στο $\mathrm{A(1,1)}$ την $\mathrm{y=3x-2}$ η οποία τέμνει την $\mathrm{C_f}$ και στο σημείο $\mathrm{B(-2,-8)}$ όπως βλέπουμε και στο σχήμα.



Άσκηση 3

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- « *Αν η συνάρτηση* $f:\Delta\to\mathbb{R}$ *αντιστρέφεται και η* f^{-1} *είναι παραγωγίσιμη στο* $f(\Delta)$ *με* $f'(x)\neq 0$ *για κάθε* $x\in\Delta$ *, τότε* $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)},\ x\in f(\Delta)$ ».

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

2) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) Α

2) Πράγματι: Για κάθε $x\in f(\Delta)$ ισχύει

$$f\left((f^{-1})(x)\right)=x\Rightarrow\left[f\left((f^{-1})(x)\right)\right]'=\left(x\right)'\Rightarrow f'\left((f^{-1})(x)\right)(f^{-1})'(x)=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'\left((f^{-1})(x)\right)},\ \ x\in f(\Delta).$$

Άσκηση 4

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *« Μπορεί δύο συναρτήσεις f, g να μην είναι παραγωγίσιμες σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους και η συνάρτηση $f+g$ να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ».*

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

2) Γράψτε παράδειγμα σχετικό με την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) Α

2) Οι παρακάτω συναρτήσεις δεν είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 0$

$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}x-\sqrt{x}, & x\geq 0\\ x, & x<0\end{cases}$.

Όμως η συνάρτηση $f+g$ έχει τύπο $(f+g)(x)=x$, είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Άσκηση 5

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *«Αν η συνάρτηση* f *είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα* $[\alpha,\beta]$ *και γνησίως αύξουσα τότε η* f *δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος του* $Rolle$ *»*

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

2) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) Α
2) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και $\alpha<\beta \Rightarrow \mathrm{f}(\alpha)<\mathrm{f}(\beta)$, άρα $\mathrm{f}(\alpha)\neq \mathrm{f}(\beta)$ οπότε η f δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle.

Άσκηση 6

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *«Δεν μπορεί ταυτόχρονα στο ίδιο διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$ να ισχύουν το θεώρημα του Rolle και το θεώρημα του Bolzano»*

  1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

  2) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) Α

2) Αν ισχύει το θεώρημα του Bolzano έχουμε $f(\alpha)f(\beta)<0,(1)$ και αν ισχύει το θεώρημα του Rolle έχουμε $f(\alpha)=f(\beta)$ οπότε η (1) γίνεται $f^2(\alpha)<0$ άτοπο.

Άσκηση 7

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *«Αν η συνάρτηση* $f:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $[\alpha,\beta]$ *με* $f(\alpha)=f(\beta)$ *τότε και η συνάρτηση* $g(x)=(fof)(x)$ *ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του* $Rolle$ *στο διάστημα* $[\alpha,\beta]$ *».*

  1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.
  2) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

Λύση

1) Α
2) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη , οπότε και η σύνθεση $(\mathrm{fof})(\mathrm{x})$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη. Επίσης ισχύει $\mathrm{f}(\alpha)=\mathrm{f}(\beta)$ και επειδή $\mathrm{f}(\alpha),\mathrm{f}(\beta)\in[\alpha,\beta]\Rightarrow \mathrm{f}(\mathrm{f}(\alpha))=\mathrm{f}(\mathrm{f}(\beta))\Rightarrow(\mathrm{fof})(\alpha)=(\mathrm{fof})(\beta)$. Άρα η συνάρτηση $\mathrm{g}(\mathrm{x})=(\mathrm{fof})(\mathrm{x})$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Άσκηση 8

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *«Αν ισχύει $f'(x)<0$ και $g'(x)>0$ για κάθε $\mathrm{x}\in\mathbb{R}$ τότε πάντα οι γραφικές παραστάσεις των f,g θα έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο »*.

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.
2) Γράψτε παράδειγμα σχετικό με την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

Λύση

1) Ψ
2) Οι συναρτήσεις $\mathrm{f}(\mathrm{x})=-\mathrm{e}^{\mathrm{x}},\mathrm{g}(\mathrm{x})=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}$, προφανώς δεν έχουν κοινό σημείο αλλά $\mathrm{f}'(\mathrm{x})=-\mathrm{e}^{\mathrm{x}}<0,\ \ \mathrm{g}'(\mathrm{x})=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}>0$.

Άσκηση 9

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *«Αν η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τότε*

$f'(x_1) < f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < f'(x_2)$ ».

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

2) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

Λύση

1) Α

2) Έχουμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα άνω οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα και επειδή $x_1 < \frac{x_1+x_2}{2} < x_2 \Rightarrow f'(x_1) < f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < f'(x_2)$.

Άσκηση 10

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *«Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη έχει τρία σημεία συνευθειακά τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα πιθανό σημείο καμπής».*

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

2) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) Α

2) Έστω $A\left(\alpha, f\left(\alpha\right)\right)$, $B\left(\beta, f\left(\beta\right)\right)$ και $\Gamma\left(\gamma, f\left(\gamma\right)\right)$ τα τρία συνευθειακά σημεία.

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ στα διαστήματα $\left[\alpha,\beta\right],\left[\beta,\gamma\right]$, οπότε υπάρχουν τουλάχιστον, δύο σημεία $\xi_1 \in \left(\alpha,\beta\right)$, $\xi_2 \in \left(\beta,\gamma\right)$ έτσι ώστε οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $M(\xi_1, f\left(\xi_1\right)), N(\xi_2, f\left(\xi_2\right))$ είναι παράλληλες στην ευθεία (ε).

Άρα έχουμε $f'\left(\xi_1\right) = f'\left(\xi_2\right) = \lambda_\varepsilon$. Εφαρμόζουμε το Θ. Rolle στο διάστημα $\left[\xi_1,\xi_2\right]$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left[\xi_1,\xi_2\right] \subseteq \Delta$,έτσι ώστε $f''\left(x_0\right) = 0$.

Άσκηση 11

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- «Αν f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ για την οποία ισχύουν ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = 0$ και δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές».

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

2) Δικαιολογήστε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) Α

2) Αν ήταν $f(x) \geq 0$ ή $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ τότε θα είχαμε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx > 0$ ή $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx < 0$ αντίστοιχα που είναι άτοπο αφού $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = 0$.

Άσκηση 12

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *«Αν f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ για την οποία ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=0$ τότε κατά ανάγκη θα είναι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$».*

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

2) Γράψτε παράδειγμα σχετικό με την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

Λύση

1) ψ

2) Παράδειγμα: $\mathrm{f(x)=\eta\mu x}$, $x\in[0,2\pi]$

$\int_{0}^{2\pi} \eta\mu x\,dx=[-\sigma\upsilon\nu x]_{0}^{2\pi}=-\sigma\upsilon\nu 2\pi+\sigma\upsilon\nu 0=0$ αλλά δεν είναι $\eta\mu x=0$ για κάθε $x\in[0,2\pi]$.

Άσκηση 13 (νέο 2022)

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f και g που υπάρχουν τα όρια στο x_0, τότε»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**

<u>Λύση</u>

α) Ψ πρέπει $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.σχ.βιβλίο σελ 48

β) Εφαρμογή 1ii) σχ. βιβλίο σελ. 50

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f'(x)>3,$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β₁. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα το πολύ $x_0\in(-1,1)$, τέτοιο ώστε $f(x_0)-x_0^3=0.$

Β₂. Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$, αν $f(\lambda^2-4)-3(\lambda^2-4)\le f(\lambda-2)-3(\lambda-2)$.

Β₃. Αν $A(2,f(2))$ και $B(3,f(3))$, αποδείξτε ότι $(AB)>\sqrt{10}$.

<u>Λύση</u>

Β₁. Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(-1,1)$ τέτοια ώστε $f(x_1)-x_1^3=0$ και $f(x_2)-x_2^3=0.$

Αν $h(x)=f(x)-x^3$, τότε ισχύει το Θ. Rolle στο $[x_1,x_2]\subseteq(-1,1)$, οπότε θα υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε:

$h'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)-3\xi^2=0\Leftrightarrow f'(\xi)=3\xi^2>3\Leftrightarrow\xi^2>1\Leftrightarrow\xi<-1 ή \xi>1$.

Άτοπο, αφού $\xi\in(x_1,x_2)\subseteq(-1,1)$.

Άρα υπάρχει ένα το πολύ $x_0\in(-1,1)$, τέτοιο ώστε $f(x_0)-x_0^3=0.$

Β₂. Έχουμε $f'(x)>3\Leftrightarrow f'(x)-3>0\Leftrightarrow(f(x)-3x)'>0$.

Αν $g(x)=f(x)-3x$, τότε $g'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Οπότε: $f(\lambda^2-4)-3(\lambda^2-4)\le f(\lambda-2)-3(\lambda-2)\Leftrightarrow g(\lambda^2-4)\le g(\lambda-2)\overset{g:\text{γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow\lambda^2-4\le\lambda-2\Leftrightarrow\lambda^2-\lambda-2\le0\Leftrightarrow-1\le\lambda\le2$.

Β₃. Έχουμε: $(AB)=\sqrt{(3-2)^2+(f(3)-f(2))^2}=\sqrt{1+(f(3)-f(2))^2}$ (1)

Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ για την f στο $[2,3]$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi_1\in(2,3)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi_1)=\dfrac{f(3)-f(2)}{3-2}\Leftrightarrow f'(\xi_1)=f(3)-f(2)>3$, οπότε η (1) γίνεται:

$(AB)=\sqrt{1+(f(3)-f(2))^2}>\sqrt{1+3^2}=\sqrt{10}\Rightarrow(AB)>\sqrt{10}$.

Άσκηση 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^3+1$ και $M(1,2)$ ένα σημείο της.

B₁. Αποδείξτε ότι από το Μ διέρχονται δύο εφαπτόμενες της C_f.

B₂. Βρείτε τις εξισώσεις των δύο εφαπτομένων του (**B₁**) ερωτήματος.

B₃. Αν Ν το σημείο επαφής της μιας από τις δύο εφαπτόμενες, να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από αυτή και την C_f.

<u>Λύση</u>

B₁. Αν $\left(x_0, f(x_0)\right)$ είναι το σημείο επαφής της εφαπτομένης που διέρχεται από το σημείο Μ, τότε έχει εξίσωση $(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ με $f'(x_0)=3x_0^2$ και $f(x_0)=x_0^3+1$, οπότε $(\varepsilon): y-(x_0^3+1)=3x_0^2(x-x_0)$.

Αφού διέρχεται από το σημείο Μ οι συντεταγμένες θα επαληθεύουν την (ε) και θα έχουμε:

$$2-(x_0^3+1)=3x_0^2(1-x_0) \Leftrightarrow (x_0-1)\left(2x_0^2-x_0-1\right)=0 \Leftrightarrow x_0=1 \text{ ή } x_0=-\frac{1}{2}.$$

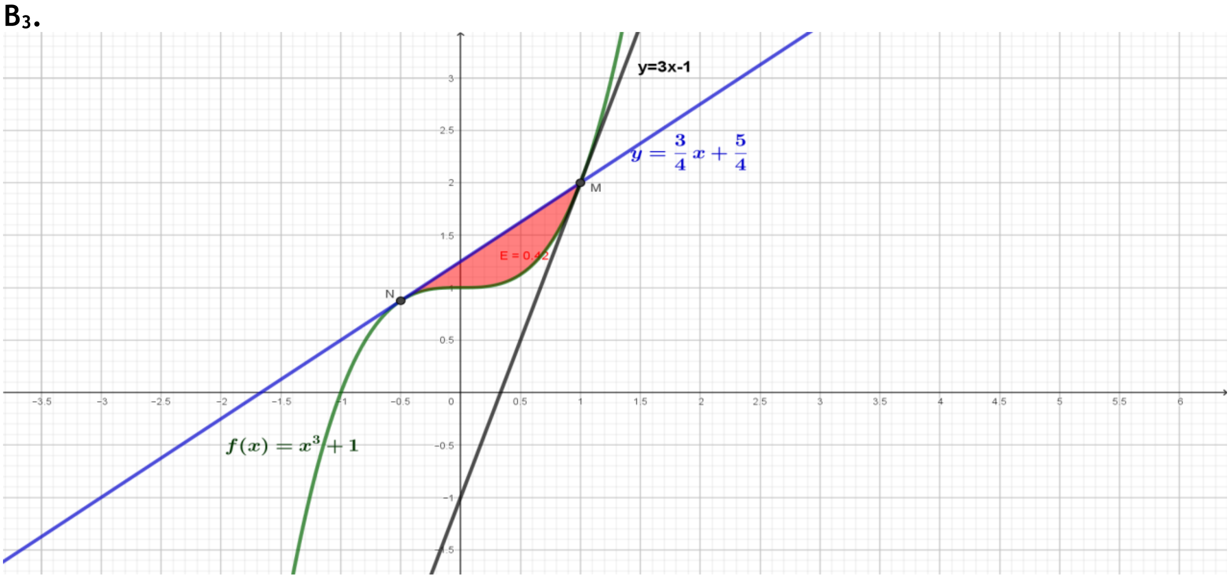
Για $x_0=1$, έχουμε το $M(1,2)$ και για $x_0=-\frac{1}{2}$ έχουμε το $N(-\frac{1}{2},\frac{7}{8})$.

B₂. Οι εξισώσεις των εφαπτομένων του B_1 ερωτήματος είναι:

$(\varepsilon_1): y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-2=3(x-1) \Leftrightarrow y=3x-1$ και

$$(\varepsilon_2): y-f(-\frac{1}{2})=f'(-\frac{1}{2})\left(x+\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y-\frac{7}{8}=3\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}.$$

B₃.



Από το παραπάνω σχήμα έχουμε: $\frac{3}{4}x+\frac{5}{4} \geq x^3+1$ για κάθε $x \in \left[-\frac{1}{2},1\right]$.

Άρα $E=\int_{-1/2}^{1}\left|f(x)-y\right|dx=\int_{-1/2}^{1}\left(y-f(x)\right)dx=\int_{-1/2}^{1}\left(\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}-x^3-1\right)dx=\int_{-1/2}^{1}\left(-x^3+\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}\right)dx=$

$=\left[-\frac{x^4}{4}\right]_{-1/2}^{1}+\frac{3}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1/2}^{1}+\frac{1}{4}\left[x\right]_{-1/2}^{1}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{64}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\cancel{-\frac{1}{4}}+\frac{1}{64}+\frac{3}{8}-\frac{3}{32}\cancel{+\frac{1}{4}}+\frac{1}{8}=$

$=\frac{1+24-6+8}{64}=\frac{27}{64}=0,42$ τ.μ.

Άσκηση 3

Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $[1,3]$ με συνεχή την πρώτη παράγωγο και ισχύουν: $f(1)=1,\ f(2)=2$ και $f(3)=1$.

B₁. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_1 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=1$.

B₂. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_2 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2)=-1$.

B₃. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_3 \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $f'(x_3)=\dfrac{1}{2}$.

B₄. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)<0$.

Λύση

B₁. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ για τη συνάρτηση f στο $[1,2]$ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (1,2)$, ώστε $f'(x_1)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=2-1=1$.

(Μπορούμε να εφαρμόσουμε και το Θ.Rolle στην $g(x)=f(x)-x$ στο $[1,2]$).

B₂. Όμοια, εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ για τη συνάρτηση f στο $[2,3]$ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (2,3)$, ώστε $f'(x_2)=\dfrac{f(3)-f(2)}{3-2}=1-2=-1$.

B₃. Αφού η συνάρτηση f έχει συνεχή την πρώτη παράγωγο στο $[1,3]$, τότε η f' θα είναι συνεχής και στο $[x_1,x_2]\subseteq[1,3]$ με $f'(x_2)=-1<\dfrac{1}{2}<1=f'(x_1)$ και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_3 \in (x_1,x_2)\subseteq(1,3)$ τέτοιο ώστε $f'(x_3)=\dfrac{1}{2}$.

B₄. Αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,3]$, τότε εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ για την f' στο $[x_1,x_2]\subseteq[1,3]$ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1,x_2)\subseteq(1,3)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=\dfrac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{-1-1}{x_2-x_1}=\dfrac{-2}{x_2-x_1}<0$, γιατί $1<x_1<2<x_2<3 \Rightarrow x_2-x_1>0$.

Άσκηση 4

Έστω η συνάρτηση $f(x)=-x^2+3x-3$.

B₁. Να βρείτε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης C_f, η εφαπτομένη είναι παράλληλη στη διχοτόμο του 2ου και 4ου τεταρτημορίου.

B₂. Να βρεθεί σημείο M της C_f, που να απέχει ελάχιστη απόσταση από το $O(0,0)$ και η ελάχιστη απόσταση.

B₃. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την $x=1$, τη γραφική παράσταση της f και την εφαπτομένη του (B₁) ερωτήματος.

<u>Λύση</u>

B₁. Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$ το ζητούμενο σημείο. Τότε $f'(\alpha)=-1$ γιατί η εφαπτομένη του 2ου και 4ου τεταρτημορίου έχει εξίσωση $(\varepsilon): y=-x$.

Είναι $f'(x)=-2x+3$, οπότε $f'(\alpha)=-1 \Leftrightarrow -2\alpha+3=-1 \Leftrightarrow \alpha=2$.

Άρα $A(2, f(2))=(2,-1)$.

B₂. Έστω $M(x,y)=(x,f(x))$ το σημείο που απέχει ελάχιστη απόσταση από το $O(0,0)$.

Είναι $|\overrightarrow{MO}|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+\left(-x^2+3x-3\right)^2}$.

Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=x^2+\left(-x^2+3x-3\right)^2$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Έχουμε $g'(x)=2x+2\left(-x^2+3x-3\right)\left(-2x+3\right)=\ldots=2\left(x-1\right)\left(2x^2-7x+9\right)$,

$g'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$ γιατί $2x^2-7x+9>0$, αφού $\Delta=49-72=-23<0$ (ομόσημο του 2).

Η μονοτονία και τα ακρότατα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g'	-	0	+
g	↘	min	↗

Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Άρα η συνάρτηση g έχει ελάχιστο στο $x_0=1$, δηλαδή έχουμε $g(x)\geq g(1)=2$

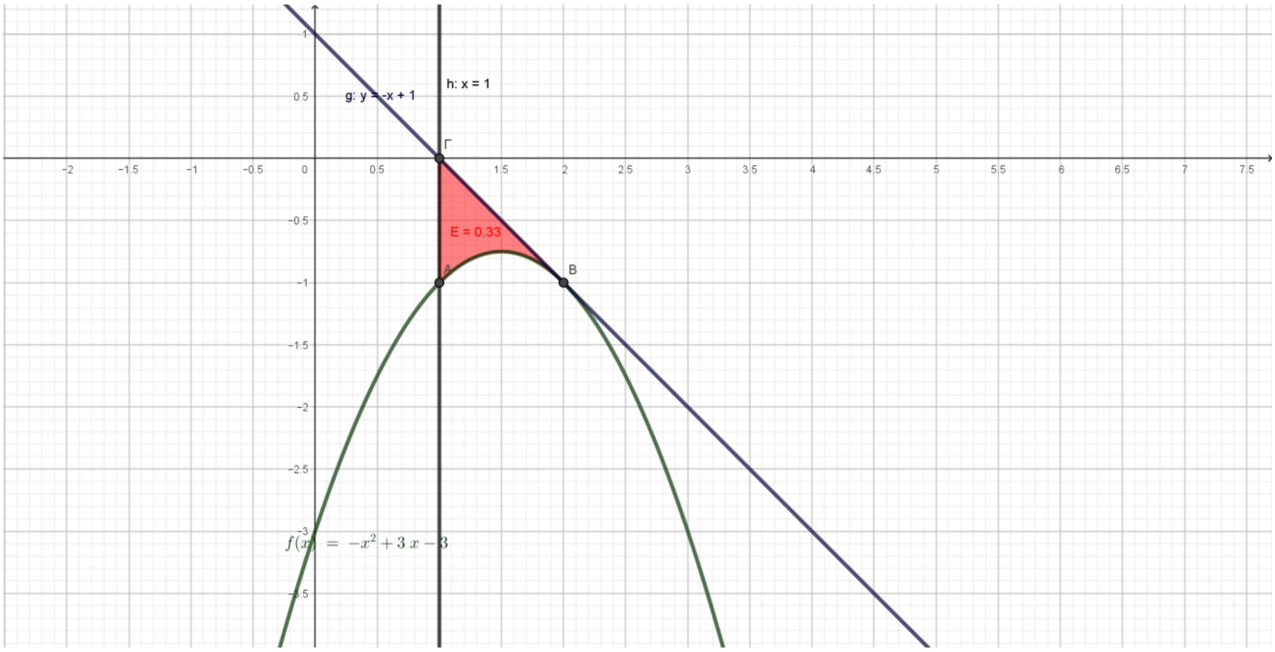
Η συνάρτηση $h(x)=\sqrt{x}$ είναι γνησίως αύξουσα, επίσης έχουμε

$$g(x)\geq g(1)=2 \Rightarrow h(g(x))\geq\sqrt{g(1)}=h(g(1)) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+\left(-x^2+3x-3\right)^2}\geq\sqrt{2} \Leftrightarrow |\overline{OM}|\geq\sqrt{2}$$

Άρα έχουμε ελάχιστο για $x=1 \Rightarrow y=f(1)=-1$, οπότε το ζητούμενο σημείο είναι το $M(1,-1)$ και η ελάχιστη απόσταση $d_{min}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

B₃. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(2,-1)$ του Β₁ ερωτήματος είναι:

$y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y+1=-1(x-2) \Leftrightarrow y=-x+1$.



Από το παραπάνω σχήμα έχουμε:

$y \geq f(x) \Leftrightarrow -x+1 \geq -x^2+3x-3 \Leftrightarrow x^2-4x+4 \geq 0$ για κάθε $x \in [1,2]$.

Άρα $E=\int_1^2 |f(x)-y|dx=\int_1^2 (y-f(x))dx=\int_1^2 \left(x^2-4x+4\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}+4x\right]_1^2=$

$=\frac{8}{3}-4\frac{4}{2}+4\cdot 2-\left(\frac{1}{3}-4\frac{1}{2}+4\right)=\frac{8}{3}-8+8-\frac{1}{3}+2-4=\frac{7}{3}-2=\frac{1}{3}=0,33$ τ.μ.

Άσκηση 5

Θεωρούμε τη συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, η f' είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει $f'(1)=f(0)+f(1)$.
Β₁. Αποδείξτε ότι $f(0)>0$.
Β₂. Αν επιπλέον η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$, αποδείξτε ότι υπάρχει σημείο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ που η εφαπτομένη στο Α διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

<u>Λύση</u>

Β₁. Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ θα είναι και συνεχής, οπότε εφαρμόζοντας το Θ. Μ.Τ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0} \Leftrightarrow f'(\xi)=f(1)-f(0).$$

Είναι $\xi \in (0,1) \Leftrightarrow 0<\xi<1 \overset{f':\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(0)<f'(\xi)<f'(1) \Leftrightarrow f'(0)<\underline{f(1)-f(0)<f'(1)} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(1)-f(0)<f(1)+f(0) \Leftrightarrow 2f(0)>0 \Leftrightarrow f(0)>0$.

Β₂. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ είναι $(\varepsilon): y-f(x_0)=f'(x_0)\left(x-x_0\right)$ και αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ για $x=y=0$ η (ε) γίνεται:
$-f(x_0)=-x_0 f'(x_0) \Leftrightarrow f(x_0)=x_0 f'(x_0)$ (1).
Αρκεί, λοιπόν να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε να ισχύει η (1).
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-xf'(x)$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $g(0)=f(0)>0$, $g(1)=f(1)-f'(1)=f(1)-f(0)-f(1)=-f(0)<0$. Δηλαδή $g(0)g(1)<0$, οπότε εφαρμόζοντας το Θ. Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=x_0 f'(x_0)$ που είναι η (1).

Άσκηση 6

B₁:Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των καμπυλών: $C_1: x=2y^2$ και $C_2: x^2+2y^2=2$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

B₂:Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $C_1: x=2y^2$, $C_2: x^2+2y^2=2$.

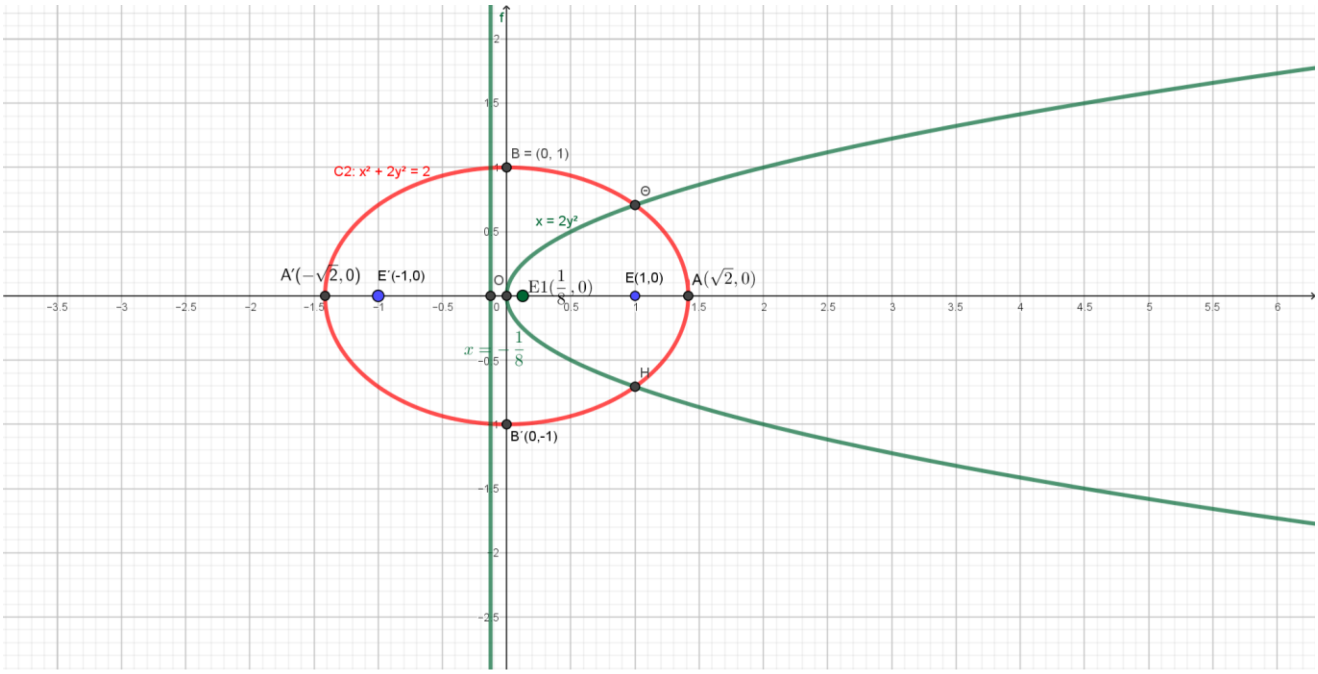
(Γνωρίζουμε ότι: $\sigma\upsilon\nu^2 x=\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$).

<u>Λύση</u>

B₁: Η $C_1: x=2y^2 \Leftrightarrow y^2=\dfrac{1}{2}x \Leftrightarrow y^2=2\cdot\dfrac{1}{4}x$ είναι μία παραβολή με άξονα συμμετρίας τον $x'x$, έχει εστία το σημείο $\mathrm{E}_1\left(\dfrac{p}{2},0\right)=\left(\dfrac{1}{8},0\right)$, διευθετούσα την ευθεία $\delta: x=-\dfrac{p}{2}=-\dfrac{1}{8}$ και κορυφή την αρχή των αξόνων $\mathrm{O}(0,0)$.

Η $C_2: x^2+2y^2=2 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{2}+y^2=1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{1^2}=1$ είναι μία έλλειψη με

$\alpha=\sqrt{2}, \beta=1$ $\kappa\alpha\iota$ $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$ οπότε $\gamma=1$, με κέντρο συμμετρίας το $\mathrm{O}(0,0)$, κορυφές τα σημεία $\mathrm{A}'(-\alpha,0)=\left(-\sqrt{2},0\right)$, $\mathrm{A}(\alpha,0)=\left(\sqrt{2},0\right)$, $\mathrm{B}'(0,-\beta)=(0,-1)$, $\mathrm{B}(0,\beta)=(0,1)$ και εστίες τα σημεία $\mathrm{E}'(-\gamma,0)=(-1,0)$, $\mathrm{E}(\gamma,0)=(1,0)$.

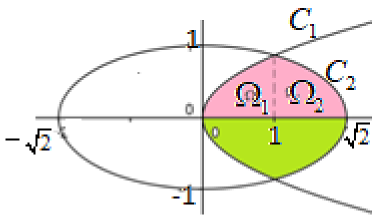


Β₂:Βρίσκουμε τα σημεία τομής των καμπυλών:

$$\left.\begin{array}{l} x=2y^2,\ x>0 \\ x^2+2y^2=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=2y^2,\ x>0 \\ x^2+x-2=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=2y^2,\ x>0 \\ x=1\ \text{ ή }\ x=-2(\alpha\pi o\rho\rho) \end{array}\right\}$$

Άρα τα σημεία τομής των C_1, C_2 είναι τα $\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και $\left(1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Το κομμάτι της C_1 που είναι πάνω από τον άξονα $x'x$ είναι η συνάρτηση $y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$ και το κομμάτι που είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ είναι η $y=-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$



Αντίστοιχα για την C_2 που είναι πάνω από τον άξονα $x'x$ είναι η $y=\sqrt{\frac{2-x^2}{2}}$ και το κομμάτι που είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ είναι η $y=-\sqrt{\frac{2-x^2}{2}}$

Έχουμε $\Omega_1=\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \sqrt{x}dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{\sqrt{2}}{3}\tau.\mu$ $\Omega_2=\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2-x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}dx$

(θέτουμε $x=\sqrt{2}\eta\mu t \Rightarrow dx=\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu t$ οπότε για $x=\sqrt{2}\Rightarrow 1=\eta\mu t\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$ και για $x=1\Rightarrow 1=\sqrt{2}\eta\mu t\Rightarrow \eta\mu t=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$) , οπότε έχουμε

$$\Omega_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{2-2\eta\mu^2 t}\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu t dt=\sqrt{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{1-\eta\mu^2 t}\sigma\upsilon\nu t dt=\sqrt{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 t}\sigma\upsilon\nu t dt=$$

$$\sqrt{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^2 t dt=\sqrt{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2t}{2}dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[t+\frac{1}{2}\eta\mu 2t\right]_{\pi/4}^{\pi/2}=\frac{\sqrt{2}(\pi-2)}{8}$$

Αν Ω το ζητούμενο εμβαδόν , τότε λόγω συμμετρίας των C_1 ,C_2 ως προς τον άξονα x΄x έχουμε

$$\Omega_{o\lambda}=2\Omega_1+2\Omega_2=\frac{2\sqrt{2}}{3}+2\frac{\sqrt{2}(\pi-2)}{8}=\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{2}(\pi-2)}{4}=\frac{\sqrt{2}(2+3\pi)}{12}\ \tau.\mu$$

Άσκηση 7 (Νέο 2022)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2e^x+x-3, x\geq 0\\ ax^2+\beta x, x<0\end{cases}$,με $a,\beta\in$ R ,για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x^2}=1$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\beta=0$ και $\alpha=1$.

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

Β3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα η οποία βρίσκεται στο $(0,1)$.

Β4. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\left(x^2-3x+5\right)f^2(x)+x^2\eta\mu^2(\pi+x)-3x\eta\mu^2(\pi-x)+5\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=0.$$

<u>Λύση</u>

Β1. Αν $\beta>0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0^-}\left(a+\frac{\beta}{x}\right)=-\infty.$$

Άτοπο διότι $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x^2}=1$.

Αν $\beta<0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0^-}\left(a+\frac{\beta}{x}\right)=+\infty.$$

Άτοπο διότι $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x^2}=1$.

Αν $\beta=0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x^2}=1\Leftrightarrow\lim_{x\to 0^-}\frac{ax^2}{x^2}=1\Leftrightarrow a=1.$$

Άρα $\beta=0$ και $\alpha=1$.

Β2. Για $\beta=0$ και $\alpha=1$ έχουμε:

$$f(x)=\begin{cases}2e^x+x-3, x\geq 0\\ x^2, x<0\end{cases}$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$ καθώς $f(x)=x^2, x<0$.

Στο $[0,+\infty)$ θα αποδείξουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα με δυο τρόπους.

<u>**Α’ τρόπος:**</u>

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=2e^x+1>0$.

Επίσης είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$.

Άρα η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

Έτσι έχουμε ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

<u>Β' τρόπος:</u>

Για κάθε $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2}\Rightarrow 2e^{x_1}-3<2e^{x_2}-3$$

$$x_1<x_2$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $f(x_1)<f(x_2)$,άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Β3. Για κάθε $x<0$ έχουμε: $f(x)=0\Leftrightarrow x^2=0$ η οποία είναι αδύνατη.

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Επίσης $f(0)=-1<0$ και $f(1)=2e-2>0$

Συνεπώς από το θεώρημα *bolzano* έχουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_0\in(0,1)$.

Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$,συνεπώς η ρίζα είναι μοναδική.

Β4. Γνωρίζουμε ότι: $\eta\mu(\pi+x)=-\eta\mu x$, $\eta\mu(\pi-x)=\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\eta\mu x.$

Η εξίσωση γίνεται:

$$\left(x^2-3x+5\right)f^2(x)+x^2\eta\mu^2(\pi+x)-3x\eta\mu^2(\pi-x)+5\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\left(x^2-3x+5\right)f^2(x)+\left(x^2-3x+5\right)\eta\mu^2x=0\Leftrightarrow\left(x^2-3x+5\right)\left(f^2(x)+\eta\mu^2x\right)=0\Leftrightarrow$$

$$x^2-3x+5=0 \text{ ή } f^2(x)+\eta\mu^2x=0.$$

Η εξίσωση $x^2-3x+5=0$ είναι αδύνατη καθώς $\Delta=9-20=-11<0$.

Για την εξίσωση $f^2(x)+\eta\mu^2x=0$ έχουμε:

$$f^2(x)+\eta\mu^2x=0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=0\\ \eta\mu x=0\end{cases}$$

Το τελευταίο σύστημα είναι αδύνατο διότι η f έχει μια μόνο ρίζα στο $(0,1)$ ενώ $\eta\mu x>0$ για κάθε $x\in(0,1)$.

Άσκηση 8 (Νέο 2022)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-x-1,\ x\in\mathbb{R}$

Β1. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία, ακρότατα και κυρτότητα.

Β2. Αποδείξτε ότι ισχύει $e^x\geq x+1,\ \gamma\iota\alpha\ \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ x\in\mathbb{R}$.

Β3.Αν $h(x)=e^{x^2},\ x\in\mathbb{R}$ και E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της h και τις ευθείες $x=0,\ x=1$ αποδείξτε ότι $\mathrm{E}\geq\dfrac{4}{3}$.

Β4 Αν H μία παράγουσα της h στο $\mathbb{R}$ με $\mathrm{H}(1)=0$ να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\mathrm{I}=\int_0^1 \mathrm{H}(x)dx\ .$$

<u>Λύση</u>

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.

Β1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x)=e^x-1\geq 0\Leftrightarrow e^x\geq 1\Rightarrow e^x\geq e^0\Leftrightarrow x\geq 0$

Και $f''(x)=e^x>0,\ \gamma\iota\alpha\ \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R}$, που σημαίνει ότι η f είναι κυρτή.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		-		+	
f''		+		+	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0\ \ \tau o\ \ f(0)=0$

Β2. Από το Β1 ερώτημα η συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0\ \ \tau o\ \ f(0)=0$, οπότε θα ισχύει $f(x)\geq f(0)=0\Leftrightarrow e^x-x-1\geq 0\Rightarrow e^x\geq x+1,\ \gamma\iota\alpha\ \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ x\in\mathbb{R}$.

Β3. Αφού $e^x\geq x+1,\ \gamma\iota\alpha\ \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ x\in\mathbb{R}$ τότε θα ισχύει και ότι

$e^{x^2}\geq x^2+1,\ \gamma\iota\alpha\ \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ x\in\mathbb{R}$. (1)

Έχουμε $\mathrm{E}=\int_0^1 h(x)dx=\int_0^1 e^{x^2}dx \overset{(1)}{\geq} \int_0^1 (x^2+1)dx=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$.

Άρα $\mathrm{E}\geq\frac{4}{3}$.

B4. Αφού H μία παράγουσα της h στο $\mathbb{R}$ θα έχουμε $\mathrm{H}'(x)=h(x)=e^{x^2}$

Έχουμε

$$\mathrm{I}=\int_0^1 \mathrm{H}(x)dx=\int_0^1 (x)'\mathrm{H}(x)dx=\left[xH(x)\right]_0^1-\int_0^1 x\mathrm{H}'(x)dx=1\mathrm{H}(1)-0-\int_0^1 xh(x)dx=$$

$$=-\int_0^1 xe^{x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 (e^{x^2})'dx=-\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1=-\frac{1}{2}\left(e^1-e^0\right)=-\frac{1}{2}\left(e-1\right)=\frac{1-e}{2}.$$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,2\right]$ και ισχύει $f(1)+\frac{3}{2}=f(2)$.

Γ₁. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(1,2\right)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=x_0$.

Γ₂. Αν η f' είναι συνεχής στο $\left[0,2\right]$και $f'(1)>2$ να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in\left(1,2\right)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=2x_1$.

Γ₃. Αν η f έχει σύνολο τιμών το $\left[1,2\right]$ και δεν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης C_f που η εφαπτομένη να γίνεται παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y=x+2018$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_2\in\left(0,2\right]$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=x_2$.

<u>Λύση</u>

Γ₁.

Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,2\right]$ θα είναι και συνεχής στο $\left[0,2\right]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}$ η οποία είναι συνεχής στο $\left[1,2\right]\subseteq\left[0,2\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(1,2\right)$ με $g'(x)=f'(x)-x$. Επίσης $g(1)=f(1)-\frac{1}{2}$ και $g(2)=f(2)-2=f(1)+\frac{3}{2}-2=f(1)-\frac{1}{2}$. Οπότε $g(1)=g(2)$. Από το Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(1,2\right)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)-x_0=0\Leftrightarrow f'(x_0)=x_0$.

Γ₂.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x)=f'(x)-2x$ η οποία είναι συνεχής στο $\left[0,2\right]$.

Η συνάρτηση $k(x)$ είναι συνεχής και στο $\left[1,x_0\right]\subseteq\left[1,2\right]$, όπου x_0 η ρίζα του Γ1 ερωτήματος.

Είναι $k(1)=f'(1)-2>0$ από την υπόθεση και $k(x_0)=f'(x_0)-2x_0=x_0-2x_0=-x_0<0$, αφού $x_0\in\left(1,2\right)$.

Οπότε $k(1)k(x_0)<0$. Ισχύει, λοιπόν το Θ. Bolzano που σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in\left(1,x_0\right)\subseteq\left(1,2\right)$τέτοιο ώστε $k(x_1)=0\Leftrightarrow f'(x_1)-2x_1=0\Leftrightarrow f'(x_1)=2x_1$.

Γ₃.

Αφού η f έχει σύνολο τιμών το $\left[1,2\right]$, θα ισχύει$1\leq f(x)\leq 2$, (1) για κάθε $x\in\left[0,2\right]$.

Επίσης, αφού δεν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης C_f που η εφαπτομένη να γίνεται παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y=x+2018$, θα ισχύει $f'(x)\neq 1$ για κάθε $x\in\left[0,2\right]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x$ η οποία είναι συνεχής στο $\left[0,2\right]$.

Είναι $h(0)=f(0)>0$, από την (1) και $h(2)=f(2)-2\leq 0$, επίσης από την (1).
Τότε $h(0)h(2)\leq 0$. Ισχύει το Θ. Bolzano για την h στο $\left[0,2\right]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2\in\left(0,2\right]$ τέτοιο ώστε $h(x_2)=0\Leftrightarrow f(x_2)-x_2=0\Leftrightarrow f(x_2)=x_2$.
Επειδή $h'(x)=f'(x)-1\neq 0$, τότε $h'(x)>0$ *ή* $h'(x)<0$ οπότε η συνάρτηση h θα είναι γνησίως μονότονη. Άρα το $x_2\in\left(0,2\right]$ θα είναι μοναδικό.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση f , όχι πολυωνυμική, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left[1,2\right]$ με $f(2)=2f(1)\ \ και\ \ f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\left(1,2\right)$.

Γ₁. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xf'(x)=f(x)$, (1) έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0\in\left(1,2\right)$.

Γ₂. Να αποδείξετε ότι η ρίζα x_0 της εξίσωσης (1) είναι μοναδική.

Γ₃. Αν $g(x)=f(x)-x$ τότε να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο με τετμημένη το x_0, διέρχεται από την αρχή των αξόνων $\mathrm{O}(0,0)$.

<u>Λύση</u>

Γ₁. Είναι:

$$xf'(x)=f(x)\Leftrightarrow xf'(x)-\left(x\right)'f(x)=0\overset{x\neq 0,\, αφού\, x\in(1,2)}{\Leftrightarrow}\frac{xf'(x)-\left(x\right)'f(x)}{x^2}=0\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)}{x},\ x\in\left[1,2\right]$.

Αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left[1,2\right]$, τότε η συνάρτηση h θα είναι συνεχής στο $\left[1,2\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(1,2\right)$ με $h'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.

Επίσης $h(1)=\dfrac{f(1)}{1}=f(1)$ και $\mathrm{h}(2)=\dfrac{\mathrm{f}(2)}{2}=\dfrac{2\mathrm{f}(1)}{2}=\mathrm{f}(1)$. Επομένως $h(1)=h(2)$. Ισχύει, λοιπόν το Θ.Rolle που σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(1,2\right)$ τέτοιο ώστε:

$$h'(x_0)=0\Leftrightarrow\frac{x_0f'(x_0)-f(x_0)}{x_0^2}=0\Leftrightarrow x_0f'(x_0)-f(x_0)=0\Leftrightarrow x_0f'(x_0)=f(x_0).$$

Άρα η εξίσωση $xf'(x)=f(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\mathrm{x}_0\in\left(1,2\right)$.

Γ₂. Έστω ότι η εξίσωση $xf'(x)=f(x)$ έχει 2 ρίζες $\rho_1,\rho_2\in\left(1,2\right)$ με $\rho_1<\rho_2$.

Αν $t(x)=xf'(x)-f(x)$, τότε η συνάρτηση t είναι συνεχής στο $\left[\rho_1,\rho_2\right]\subseteq\left[1,2\right]$και παραγωγίσιμη στο $\left(\rho_1,\rho_2\right)$, αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left[1,2\right]$, με $t'(x)=\cancel{f'(x)}+xf''(x)-\cancel{f'(x)}=xf''(x)$. Ακόμα $t(\rho_1)=t(\rho_2)=0$.

Επομένως, από το Θ.Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(\rho_1,\rho_2\right)\subseteq\left(1,2\right)$ τέτοιο ώστε $t'(\xi)=0\Leftrightarrow\xi f''(\xi)=0\Leftrightarrow f''(\xi)=0$, που είναι **άτοπο**, αφού $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\left(1,2\right)$.

Άρα η εξίσωση $\mathrm{t}(\mathrm{x})=0\Leftrightarrow\mathrm{xf}'(\mathrm{x})-\mathrm{f}(\mathrm{x})=0\Leftrightarrow\mathrm{xf}'(\mathrm{x})=\mathrm{f}(\mathrm{x})$ δεν έχει 2 ρίζες στο $\left(1,2\right)$, οπότε η ρίζα $x_0\in\left(1,2\right)$ του Γ1 ερωτήματος είναι μοναδική.

Γ₃. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $g(x)=f(x)-x$ στο σημείο με τετμημένη το x_0 έχει εξίσωση: $y-g(x_0)=g'(x_0)\left(x-x_0\right)\Leftrightarrow y-\left(f(x_0)-x_0\right)=\left(f'(x_0)-1\right)\left(x-x_0\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\left(f'(x_0)-1\right)x-x_0f'(x_0)+\cancel{x_0}+f(x_0)-\cancel{x_0}\Leftrightarrow y=\left(f'(x_0)-1\right)x-x_0f'(x_0)+f(x_0)$ (1).

Πρέπει το $O(0,0)$ να την επαληθεύει, οπότε για $x=y=0$ η (1) μας δίνει:
$0=\left(f'(x_0)-1\right)\cdot 0-x_0 f'(x_0)+f(x_0)\Leftrightarrow -x_0 f'(x_0)+f(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=x_0 f'(x_0)$ που **ισχύει** σύμφωνα με το Γ1 ερώτημα.

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ με $f(x+y)=f(x)f(y)$ για κάθε $x,y\in R$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=1$.

Γ1: Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$.

Γ2: Να βρείτε ότι ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x)=e^x$, $x\in R$.

Γ3: Αν $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g τέμνονται ακριβώς σε ένα σημείο $A(0,1)$.

Γ4: Να υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται, μεταξύ των γραφικών παραστάσεων C_f, C_g και της ευθείας $x=1$.

<u>Λύση</u>

Γ1: Για $x=y=0$ η σχέση $f(x+y)=f(x)f(y)$ μας δίνει:
$f(0)=f^2(0)\Leftrightarrow f(0)\left(f(0)-1\right)=0\Leftrightarrow f(0)=1\,ή\, f(0)=0$ και επειδή $f(x)>0$ τότε έχουμε $f(0)=1$.

$$f'(0)=1\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=1,\ (1)$$

Έστω $x_0\in R$, τότε:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{x=h+x_0}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f(h+x_0)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)f(x_0)-f(x_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)\left(f(h)-1\right)}{h}=f(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=f(x_0)\,f'(0)\overset{(1)}{=}f(x_0).$$

Οπότε $f'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$.

Γ2: Αφού $f'(x)=f(x)\overset{εφ.2.6}{\Rightarrow} f(x)=ce^x,\ c\in R$. (2)

Επειδή $f(0)=1$, η (2) για $x=0$ γίνεται $f(0)=ce^0\Rightarrow 1=c$.

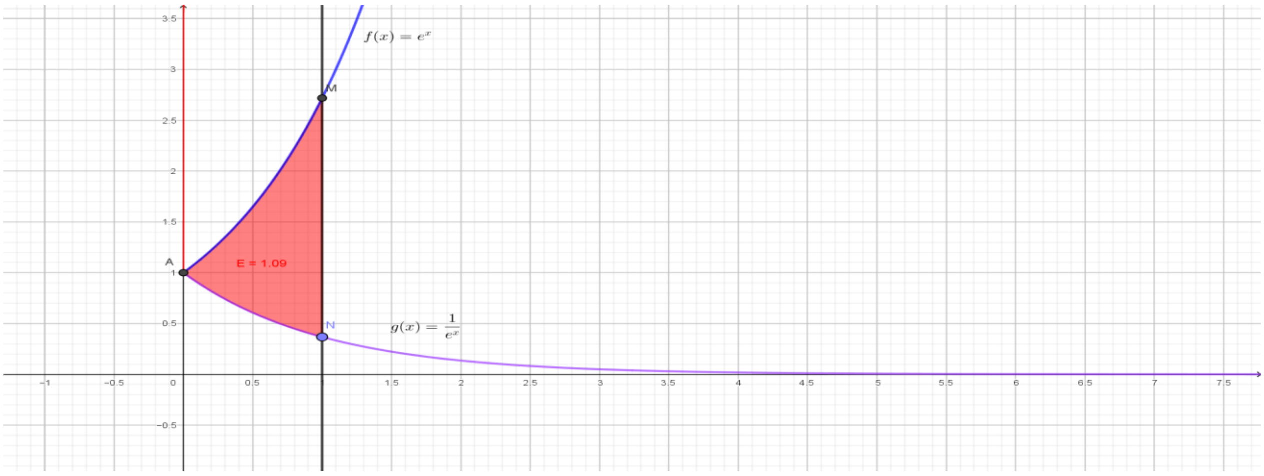
Άρα $f(x)=e^x,\ x\in R.$

Γ3: Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)=e^x-\dfrac{1}{e^x}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^x}$.

Προφανής ρίζα είναι η $x=0$ αφού $h(0)=\dfrac{e^0-1}{e^0}=0$.

Επίσης $h'(x)=\left[e^x-\dfrac{1}{e^x}\right]'=e^x+\dfrac{1}{e^x}>0$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η ρίζα $x=0$ είναι μοναδική.

Αφού $f(0)=g(0)=1$ το ζητούμενο σημείο είναι το $A(0,1)$.



Γ4:

Από το παραπάνω σχήμα έχουμε:

$$\mathrm{E}=\int_0^1 \left(f(x)-g(x)\right) dx=\int_0^1 \left(e^x-e^{-x}\right)dx=\int_0^1 e^x dx-\int_0^1 e^{-x} dx=\left[e^x\right]_0^1+\left[e^{-x}\right]_0^1=e-1+\frac{1}{e}-1=e+\frac{1}{e}-2$$

τ.μ.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-x+1,\ \ x>0$.

Γ₁. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την f .

Γ₂. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της $f\left(x\right)=\lambda$, για τις διάφορες τιμές του λ∈IR.

Γ₃. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , της εφαπτομένης της στο ακρότατο της και της ευθείας $x=\dfrac{1}{e}$

Γ₄. Να βρεθεί το εμβαδόν Ε(Ω), του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , της ευθείας $y=-x+1$ και των ευθειών $x=\dfrac{1}{e},\ x=\lambda$ για $0<\lambda<\dfrac{1}{e}$. Στη συνέχεια να υπολογιστεί το $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}E(\Omega)$. Ποιου χωρίου το εμβαδόν παριστάνει το όριο αυτό;

<u>Λύση</u>

Γ₁.

- Η είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων
- $f\,'(x)=\dfrac{(\ln x)'x-\ln x\cdot x'}{x^2}-1=\dfrac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}-1=\dfrac{1-\ln x-x^2}{x^2}$ και η οποία έχει προφανή λύση την $x_0=1$
- $f\,''(\mathrm{x})=\dfrac{(1-\ln x-x^2)'\cdot x^2-(1-\ln x-x^2)\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{\left(-\frac{1}{x}-2x\right)x^2-2x(1-\ln x-x^2)}{x^4}$

$$=\frac{-x-2x^3-2x(1-\ln x-x^2)}{x^4}=\frac{-x-2x^3-2x+2x\ln x+2x^3}{x^4}=\frac{2x\ln x-3x}{x^4}=\frac{2\ln x-3}{x^3}$$

$$f''\left(x\right)=0\Leftrightarrow\frac{2\ln x-3}{x^3}=0\Leftrightarrow\ln x=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=e^{\frac{3}{2}}\Leftrightarrow x=e\sqrt{e}$$

- $\lim\limits_{x\to 0}f'\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\ln x-x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\ln x-x^2\right)\dfrac{1}{x^2}=\left(+\infty\right)\left(+\infty\right)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f'\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x-x^2}{x^2}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-\ln x-x^2)'}{(x^2)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x}-2x}{2x}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(-\frac{1}{x}-2x\right)'}{(2x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}-2\right)=-1$$

- Ασύμπτωτες : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\ln x}{x}-x+1\right)=(-\infty)-0+1=-\infty$, οπότε η ευθεία $x=0$, είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη .

  Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\dfrac{\ln x}{x}-x+1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x^2}-1+\dfrac{1}{x}\right)=0-1+0$,

  αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x^2}=0$

  Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}-x+1+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}+1\right)=0+1=1$

  αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

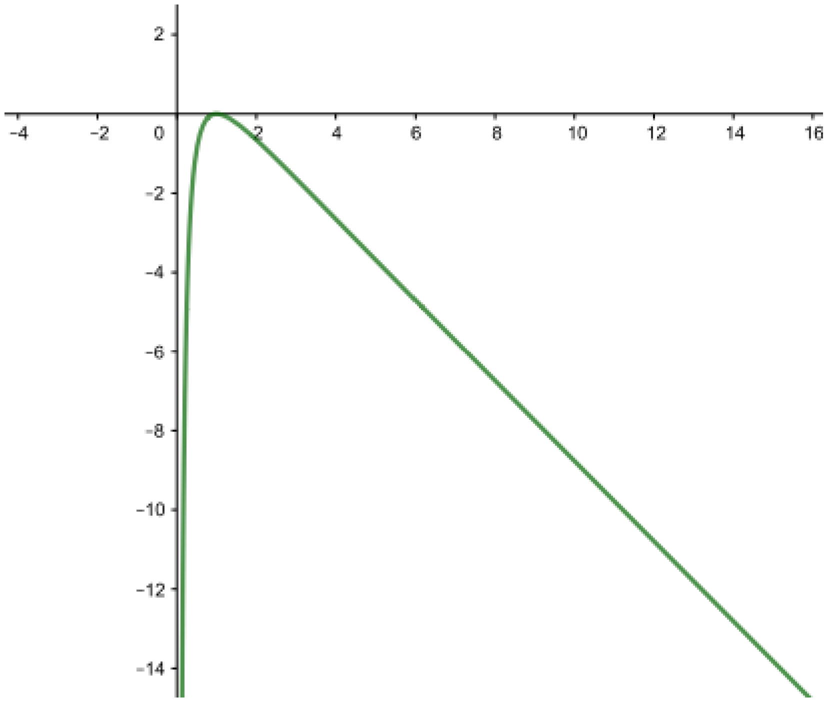
  Άρα η ευθεία $y=-x+1$είναι πλάγια ασύμπτωτη

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}-x+1\right)=-\infty$

- Τα πρόσημα των f'', f' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

x		0		1		$e\sqrt{e}$		$+\infty$
f''			$-$		$-$	0	$+$	
f'		$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	-1
f'			$+$		$-$		$-$	
f		$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\searrow$	$-\infty$
				τ.μέγιστο		Σ. Καμπής		

Το σύνολο τιμών της f είναι το: $f\left(D_f\right)=f\left((0,1]\right)\cup f\left([1,+\infty)\right)=(-\infty,0]\cup(-\infty,0]=(-\infty,0]$



Γ₂.

- Για $\lambda > 0$, έχουμε $\lambda \notin f\left(D_f\right) = (-\infty, 0]$, οπότε η εξίσωση $f\left(x\right) = \lambda$ είναι αδύνατη (καμία λύση).
- Για $\lambda = 0$, έχουμε $\lambda \in f\left(D_f\right) = (-\infty, 0]$, οπότε η εξίσωση $f\left(x\right) = \lambda$ είναι έχει μοναδική λύση την $x = 1$.
- Για $\lambda < 0$, έχουμε $\lambda \in f\left((0,1]\right) = (-\infty, 0]$ $\kappa\alpha\iota$ $\lambda \in f\left([1,+\infty)\right) = (-\infty, 0]$, οπότε η εξίσωση $f\left(x\right) = \lambda$ έχει δύο ακριβώς λύσεις.

Γ₃. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο ακρότατο της $x_0 = 1$, είναι :

$y - f\left(1\right) = f'\left(1\right)\left(x-1\right) \Leftrightarrow y = 0$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι : $\mathrm{E}(\Omega) = \int_{\frac{1}{e}}^{1} |\, f(x)\,|\,\mathrm{dx} \overset{f(x)<0}{=} -\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{dx} = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} (\frac{\mathrm{lnx}}{x} - \mathrm{x} + 1)\,\mathrm{dx} =$

$= -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{\mathrm{lnx}}{x}\,dx + \int_{\frac{1}{e}}^{1} (x-1)dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} (\ln x)' \ln x dx + \left[x^2 - x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} =$

$$= -\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_{\frac{1}{e}}^{1} + \left[x^2 - x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} = -\left[\frac{\ln^2 1}{2} - \frac{\ln^2 \frac{1}{e}}{2}\right] + \left[(1-1) - \left(\frac{1}{e^2} - \frac{1}{e}\right)\right] =$$

$$= \frac{(-1)^2}{2} - \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} = \frac{e^2 - 2 + 2e}{2e^2}\ \ \tau.\mu.$$

Γ4. $\mathrm{E}(\Omega) = \int_{\lambda}^{\frac{1}{e}} | f(x) - (-x+1) |\, \mathrm{dx} = \int_{\lambda}^{\frac{1}{e}} \left| \frac{\ln x}{x} - x + 1 + x - 1 \right| \mathrm{dx} =$

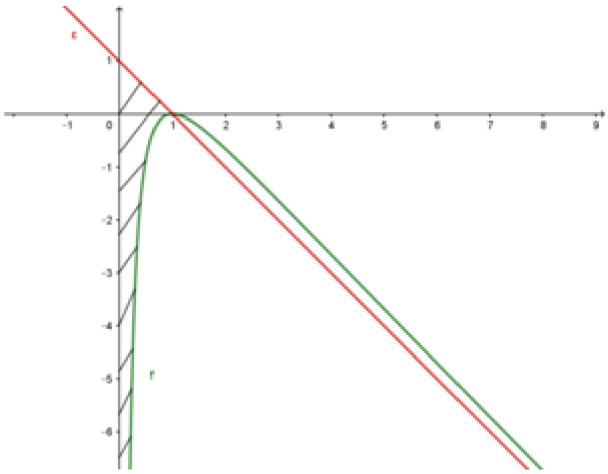
$$\int_{\lambda}^{\frac{1}{e}} \left| \frac{\ln x}{x} \right| dx = -\int_{\lambda}^{\frac{1}{e}} \frac{\ln x}{x} dx = \left\{ \alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in (\lambda, \tfrac{1}{e}) \subset (0,1)\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota : \ln x < 0 \overset{x>0}{\Rightarrow} \frac{\ln x}{x} < 0 \right\} =$$

$$= -\int_{\lambda}^{\frac{1}{e}} \ln x \cdot (\ln x)' dx = -\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_{\lambda}^{\frac{1}{e}} = -\left[\frac{\ln^2 \frac{1}{e}}{2} - \frac{\ln^2 \lambda}{2}\right] = -\frac{(-1)^2}{2} + \frac{\ln^2 \lambda}{2} = \frac{\ln^2 \lambda - 1}{2}\ \tau.\mu.$$

$$\lim_{\lambda \to 0^+} E(\Omega) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\ln^2 \lambda - 1}{2} = \frac{(+\infty) - 1}{2} = +\infty$$

Το παραπάνω όριο παριστάνει το εμβαδόν του ανοιχτού χωρίου που περικλείεται από την C_f και την ασύμπτωτή της στο +∞, και των κατακόρυφων ευθειών $x = 0$ και $x = \frac{1}{e}$.

(βλέπε διπλανό σχήμα)



Άσκηση 5

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με $g(x)=f^2(x)-4xf(x)$ έτσι ώστε να ισχύουν:

- $\int_{\alpha}^{x} g(t)dt = 8-x^3,\ x,\alpha \in \mathbb{R}$
- $f(-1)=-3$ και $f(1)=1$

Γ$_1$. Να αποδείξετε ότι η g έχει παράγουσα στο $\mathbb{R}$.
Γ$_2$. Αν η συνάρτηση G είναι παράγουσα της g στο $\mathbb{R}$, να βρείτε το αριθμό α.
Γ$_3$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .
Γ$_4$. Αν $h(x)=e^x$, να κάνετε τη γραφική παράσταση της f και της h και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f , τη C_h , τις ευθείες $x=-1$ και $x=1$.

<u>Λύση</u>

Γ$_1$. Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε και η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις της συνεχούς συνάρτησης f , επομένως η g θα έχει οπωσδήποτε παράγουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ$_2$. Αφού η G είναι παράγουσα της g στο $\mathbb{R}$, θα ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{x} g(t)dt = 8-x^3 \Leftrightarrow [G(\mathrm{t})]_{\alpha}^{x} = 8-x^3 \Leftrightarrow G(x)-G(\alpha)=8-x^3$$

Για $x=\alpha$ έχουμε:

$$G(\alpha)-G(\alpha)=8-\alpha^3 \Leftrightarrow 0=8-\alpha^3 \Leftrightarrow \alpha^3=8 \Leftrightarrow \alpha=2$$

Γ$_3$. Έχουμε $\int_{2}^{x} g(t)dt = [G(t)]_{2}^{x} \Leftrightarrow 8-x^3 = G(x)-G(2)$. Παραγωγίζουμε , οπότε

$G'(x) = (8-x^3)' \Leftrightarrow g(x) = -3x^2 \Leftrightarrow \mathrm{f}^2(\mathrm{x}) - 4\mathrm{xf}(\mathrm{x}) = -3x^2 \Leftrightarrow \mathrm{f}^2(\mathrm{x}) - 4\mathrm{xf}(\mathrm{x}) + 4x^2 = x^2$
$(\mathrm{f}(\mathrm{x}) - 2\mathrm{x})^2 = x^2 \Leftrightarrow |\mathrm{f}(\mathrm{x}) - 2\mathrm{x}| = |x|\ (1)$,
Θεωρώ τη συνάρτηση φ (x) = f(x) − 2x στο R και τότε η (1) γράφεται $|\varphi(\mathrm{x})| = |x|$, για κάθε x ϵ R.

- Αν $\mathrm{x} > 0$ τότε η $|\varphi(\mathrm{x})| = \mathrm{x}$

Η φ είναι συνεχής και φ(x) $\neq 0$ για κάθε x>0, άρα η φ διατηρεί πρόσημο στο (0,+∞), και επειδή

$\varphi(1)=f(1)-2=1-2=-1 \Rightarrow \varphi(x)<0$

Έτσι έχουμε $-\varphi(x)=x \Rightarrow -f(x)+2x=x \Rightarrow f(x)=x,\ x>0$

- Αν $\mathrm{x} < 0$ τότε η $|\varphi(\mathrm{x})| = -\mathrm{x}$

Η φ είναι συνεχής και φ(x) $\neq 0$ για κάθε x<0, άρα η φ διατηρεί πρόσημο στο (-∞,0), και επειδή $\varphi(-1)=f(-1)-2=-3-2=-5\Rightarrow\varphi(x)<0$

Έτσι έχουμε $-\varphi(x)=-x\Rightarrow -f(x)+2x=-x\Rightarrow f(x)=3x,\ x<0$

Έτσι έχουμε $f(x)=\begin{cases}x, & x>0\\ 3x, & x<0\end{cases}$ και επειδή η f είναι συνεχής στο

$x_0=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)\Leftrightarrow 0=0=f(0)$

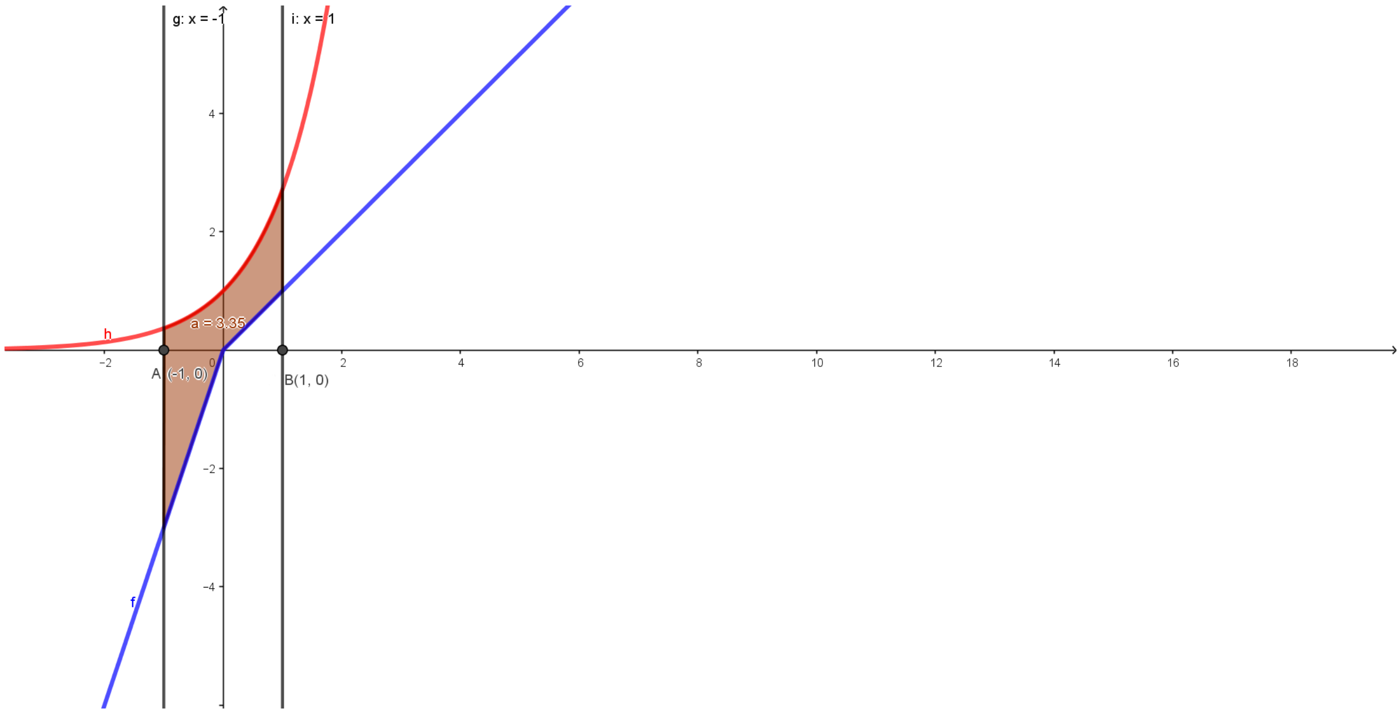
Άρα $f(x)=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ 3x, & x<0\end{cases}$

Γ4.

- Έστω $x<0\Rightarrow 3x<0$ και επειδή ισχύει $e^x>0$ θα έχουμε $e^x>3x\Leftrightarrow e^x-3x>0$
- Έστω $x\geq 0$, τότε από εφαρμογή του βιβλίου θα έχουμε

  $\ln x\leq x-1\overset{x\to e^x}{\Rightarrow}\ln e^x\leq e^x-1\Rightarrow x\leq e^x-1\Rightarrow x+1\leq e^x\Rightarrow x<x+1\leq e^x$
- Επομένως έχουμε $h(x)-f(x)>0$ για κάθε $x\in[-1,1]$.

- Το εμβαδόν του χωρίου Ω είναι: Ε(Ω)=$\int_{-1}^{1}[h(x)-f(x)]dx=\int_{-1}^{0}[h(x)-f(x)]dx+\int_{0}^{1}[h(x)-f(x)]dx=\int_{-1}^{0}(e^x-3x)dx+\int_{0}^{1}((e^x-x)dx=[e^x-\frac{3x^2}{2}]_{-1}^{0}+[e^x-\frac{x^2}{2}]_{0}^{1}=e^0-e^{-1}+\frac{3}{2}+e^1-\frac{1}{2}-e^0$= e- e^{-1} +1 τετρ. Μονάδες



Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-2x^3+x^2+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Γ$_1$: Να εξετάσετε αν ισχύουν τα Θεωρήματα Bolzano, Rolle και Μέσης Τιμής για την f στο $[-1,2]$.

Γ$_2$: Να βρείτε την απόσταση των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f, στα σημεία που έχουν τετμημένες τα διάφορα του μηδενός σημεία, στα οποία ισχύει το Θ. Rolle.

Γ$_3$: Να αποδείξετε, ότι το μέγιστο της f, το σημείο καμπής της f' και το ελάχιστο της f'' είναι σημεία συνευθειακά.

Γ$_4$: Να αποδείξετε ότι η παραπάνω ευθεία του ερωτήματος Γ$_3$, είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{2\eta\mu(2x-1)}{(2x-1)^2}$.

<u>Λύση</u>

Γ$_1$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη με $f'(x)=4x^3-6x^2+2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

- Είναι $f(-1)=1+2+1+1=5$ *και* $f(2)=16-16+4+1=5$, οπότε $f(-1)f(2)>0$ που σημαίνει ότι <u>**δεν**</u> ισχύει το Θ.Bolzano.
- Είναι όμως $f(-1)=f(2)$, οπότε το Θ. Rolle ισχύει, άρα και το Θ.Μ.Τ.

Γ$_2$. Εφαρμόζοντας το Θ. Rolle υπάρχει $x_0\in(-1,2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(x_0)=0\Leftrightarrow 4x_0^3-6x_0^2+2x_0=0\Leftrightarrow 2x_0\left(2x_0^2-3x_0+1\right)=0.\ \Leftrightarrow x_0=0\ \acute{\eta}\ x_0=1\ \acute{\eta}\ x_0=\frac{1}{2}$$

Τα ζητούμενα σημεία που έχουν τετμημένες διάφορα του μηδενός είναι:

$\mathrm{A}(1,f(1))=(1,1)$ και $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{17}{16}\right)$.

Επειδή είναι παράλληλες προς τον xx' ($f'(x_0)=0$), η απόσταση τους είναι

$$f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)=\frac{17}{16}-1=\frac{1}{16}$$

Γ$_3$. Είναι $f'(x)=4x^3-6x^2+2x=0\Leftrightarrow x=0\ \acute{\eta}\ x=\frac{1}{2}\ \acute{\eta}\ x=1$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0		$1/2$		1		$+\infty$
f'	-	0	+	0	-	0	+	
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο το σημείο $\mathrm{K}\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{17}{16}\right)$.

Είναι $f''(x)=12x^2-12x+2$ και $f'''(x)=24x-12=0 \Leftrightarrow 12(2x-1)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Η κυρτότητα, τα σημεία καμπής της f' και το ελάχιστο της f'' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
f'''		-	0	+	
f''		$\searrow$	min	$\nearrow$	
f'		κοίλη	σ.κ	κυρτή	

Η συνάρτηση f' έχει σημείο καμπής το σημείο $\Lambda\left(\frac{1}{2}, f'\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\left(\frac{1}{2},0\right)$.

Η συνάρτηση f'' έχει ελάχιστο το σημείο $\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}, f''\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\left(\frac{1}{2},-1\right)$.

Παρατηρούμε ότι τα σημεία Κ, Λ, Μ έχουν την ίδια τετμημένη $\frac{1}{2}$.

Άρα βρίσκονται στην ευθεία $x=\frac{1}{2}$.

Γ₄. Έχουμε: $\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} g(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{2\eta\mu(2x-1)}{(2x-1)^2}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\left(\frac{2}{2x-1}\,\frac{\eta\mu(2x-1)}{2x-1}\right)=2\cdot(-\infty)\cdot 1=-\infty$.

Ανάλογα: $\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} g(x)=+\infty$.

Άρα η ευθεία $x=\frac{1}{2}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g.

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(x)>0$ και $f''(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη σχέση: $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{f(x)}f'(x)dx=0$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$.

Γ₁. Να αποδείξετε ότι $f(\alpha)=f(\beta)$.

Γ₂. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0.$

Γ₃. Να αποδείξετε ότι $f'(\alpha)>0$ και $f'(\beta)<0$.

Γ₄. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο.

Γ₅. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x)\le f(\xi)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}.$

<u>Λύση</u>

Γ₁. $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{f(x)}f'(x)dx=0\Leftrightarrow\int_{\alpha}^{\beta}\left[\ln f(x)\right]'dx=0\Leftrightarrow\left[\ln f(x)\right]_{\alpha}^{\beta}=0\Leftrightarrow\ln f(\beta)-\ln f(\alpha)=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\ln f(\beta)=\ln f(\alpha)\Leftrightarrow f(\beta)=f(\alpha).$

Γ₂. Αφού η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και από το ερώτημα Γ_1 έχουμε $f(\alpha)=f(\beta)$. Ισχύει, λοιπόν το Θ. Rolle, που σημαίνει, ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0.$
Επειδή $f''(x)<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε το $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$ είναι μοναδικό.

Γ₃. Από το Γ_2 έχουμε ότι $\xi\in(\alpha,\beta)$, οπότε :
$\alpha<\xi<\beta\overset{f':\text{γν.φθίνουσα}}{\Leftrightarrow}f'(\alpha)>f'(\xi)>f'(\beta)\overset{\Gamma_2}{\Leftrightarrow}f'(\alpha)>0>f'(\beta)$.
Άρα $f'(\alpha)>0$ και $f'(\beta)<0$.

Γ₄. Από το ερώτημα Γ_2 έχουμε ότι η συνεχής συνάρτηση f' έχει μοναδική ρίζα το $\xi\in(\alpha,\beta)$.
Αυτό σημαίνει ότι η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο αριστερά και δεξιά της ρίζας.
Επειδή $f'(\alpha)>0$ με $\alpha<\xi$, τότε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,\xi)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\xi]$.

Επειδή $f'(\beta)<0$ με $\beta>\xi$, τότε $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\xi,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\xi,+\infty)$.
Από όλα τα παραπάνω έχουμε ότι $f'(\xi)=0$, αριστερά της ρίζας η f είναι γνησίως αύξουσα και δεξιά η f είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα η f έχει ολικό μέγιστο, το $A(\xi,f(\xi))$.

Γ₅. Από το Γ_4 έχουμε ότι η συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο, το $A(\xi,f(\xi))$.
Άρα, από τον ορισμό του μεγίστου, ισχύει : $f(x)\le f(\xi)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}.$

Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+\alpha x^2+x$ με $f''(0)=2$ και $\alpha\in\mathbb{R}$.
Γ$_1$: Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.
Γ$_2$: Να γίνει η μελέτη της f και στη συνέχεια η γραφική της παράσταση.
Γ$_3$: Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1}.

Λύση

Γ$_1$. Είναι $f'(x)=\left(x^3+\alpha x^2+x\right)'=3x^2+2\alpha x+1$ και

$f''(x)=\left(3x^2+2\alpha x+1\right)'=6x+2\alpha \overset{x=0}{\Rightarrow} f''(0)=2\alpha \Rightarrow 2=2\alpha \Rightarrow \alpha=1$.

Άρα $f(x)=x^3+x^2+x$ και $f'(x)=3x^2+2x+1>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αφού $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=4-12=-8<0$ και $\alpha=3>0$ (ομόσημο του 3).

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής, ως πολυωνυμική, και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε θα είναι και 1-1 που σημαίνει ότι η f αντιστρέφεται.

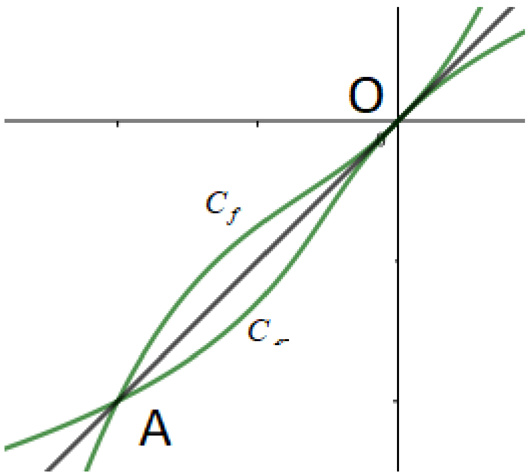
Γ$_2$. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$ και είναι συνεχής ως πολυωνυμική.
Από το Γ$_1$ είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $A=\mathbb{R}$, οπότε δεν έχει ακρότατα.
Το σύνολο τιμών της θα είναι $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ αφού

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$.

$f''(x)=6x+2\geq 0 \Leftrightarrow 6x\geq -2 \Leftrightarrow x\geq -\dfrac{1}{3}$.

Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]$ και κυρτή στο $\left[-\frac{1}{3},+\infty\right)$. Παρουσιάζει σημείο καμπής στο $\left(-\frac{1}{3},f(-\frac{1}{3})\right)=\left(-\frac{1}{3},-\frac{7}{27}\right)$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
f'		+		+	
f''		-	0	+	
f		$\nearrow$		$\nearrow$	
			Σ.Κ		



Γ₃. Για να βρούμε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση:

$f(x)=f^{-1}(x)$. (1)

Έστω x_0 μία λύση της (1).

Τότε $f(x_0)=f^{-1}(x_0)\Leftrightarrow f\left(f(x_0)\right)=f\left(f^{-1}(x_0)\right)\Leftrightarrow f\left(f(x_0)\right)=x_0$. (2)

Θα αποδείξουμε ότι $f(x_0)=x_0$.

- Έστω $f(x_0)>x_0\overset{f:\uparrow}{\Rightarrow}f\left(f(x_0)\right)>f\left(x_0\right)\overset{(2)}{\Rightarrow}x_0>f\left(x_0\right)$,**άτοπο.**
- Έστω $f(x_0)<x_0\overset{f:\uparrow}{\Rightarrow}f\left(f(x_0)\right)<f\left(x_0\right)\overset{(2)}{\Rightarrow}x_0<f\left(x_0\right)$, **άτοπο.**

Άρα: $f(x_0)=x_0\Leftrightarrow x_0^3+x_0^2+x_0=x_0\Leftrightarrow x_0^3+x_0^2=0\Leftrightarrow x_0^2\left(x_0+1\right)=0\Leftrightarrow x_0=0$ ή $x_0=-1$.

Τα κοινά σημεία που έχουν οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι τα $O\left(0,0\right)$ και $A\left(-1,-1\right)$.

Επειδή οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ το ζητούμενο χωρίο θα είναι το 2πλάσιο εμβαδό που περικλείεται από την C_f και την $y=x$, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

$$E=2E_1=2\int_{-1}^{0}\left|f(x)-y\right|dx=2\int_{-1}^{0}\left(x^3+x^2+x-x\right)dx=2\int_{-1}^{0}\left(x^3+x^2\right)dx=2\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}=$$

$$=2\cdot(0-\frac{1}{4}+\frac{1}{3})=2\cdot\frac{-3+4}{12}=\frac{1}{6}\text{τ.μ.}$$

Άσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[-4,4]$ και ισχύουν:

$f(-4)=-4,\ f(4)=4 \ \text{και} \ f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-4,4)$.

Γ1: Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=2$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα ακριβώς σημείο.

Γ2: Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(-4,4)$ που η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ είναι κάθετη στην ευθεία $y=-x+2$.

Γ3: Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\rho_1,\rho_2\in(-4,4)$ με $\rho_1\neq\rho_2$ τέτοια ώστε $\dfrac{1}{f'(\rho_1)}+\dfrac{1}{3\cdot f'(\rho_2)}=\dfrac{4}{3}$.

<u>Λύση</u>

Γ1. Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(-4,4)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=2$.

Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[-4,4]$ θα είναι και συνεχής.

Είναι $f(-4)\neq f(4)$ και $-4=f(-4)<2<f(4)=4$, οπότε από το Θεώρημα Ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-4,4)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=2$.

Επίσης, έχουμε ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-4,4)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[-4,4]$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-4,4]$.

Επομένως το $\xi\in(-4,4)$ ώστε $f(\xi)=2$ είναι μοναδικό.

Γ2. Για να είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): y=-x+2$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $f'(x_0)=1$ αφού $\lambda_\varepsilon=-1$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-4,4]$ και παραγωγίσιμη στο $(-4,4)\subseteq[-4,4]$, οπότε ισχύει το Θ.Μ.Τ που σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(-4,4)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_0)=\frac{f(4)-f(-4)}{4-(-4)}=\frac{4+4}{8}=1.$$

Γ3. Θεωρώντας το $\xi\in(-4,4)$ του Γ1 ερωτήματος, εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ στα $[-4,\xi]$ και $[\xi,4]$.

- Υπάρχει $\rho_1\in(-4,\xi)$ τέτοιο ώστε: $f'(\rho_1)=\dfrac{f(\xi)-f(-4)}{\xi-(-4)}=\dfrac{2-(-4)}{\xi+4}=\dfrac{6}{\xi+4}$.
- Υπάρχει $\rho_2\in(\xi,4)$ τέτοιο ώστε: $f'(\rho_2)=\dfrac{f(4)-f(\xi)}{4-\xi}=\dfrac{4-2}{4-\xi}=\dfrac{2}{4-\xi}$

Οπότε: $\dfrac{1}{f'(\rho_1)}+\dfrac{1}{3\cdot f'(\rho_2)}=\dfrac{\xi+4}{6}+\dfrac{4-\xi}{6}=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$.

Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x^2+1}-2x$.

Γ₁ . Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

Γ₂ . Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , όταν το x τείνει στο $-\infty$.

Γ₃ . Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

Γ₄ . Να αποδείξετε ότι $f'(x)\sqrt{4x^2+1}+2f(x)=0$.

Γ₅ . Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}dx$.

<u>Λύση</u>

Γ₁. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+1}+2x}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{4x^2+1}^2-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+1}+2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+1}+2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2x\left(\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}+1\right)}\right)=0.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}(-x)\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+2\right)=$$

$$=(+\infty)\cdot(\sqrt{4+0}+2)=(+\infty)\cdot 4=+\infty.$$

Γ₂. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}-2x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|2x|\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}-2x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}-2x}{x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x\left(\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}+1\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}-2\left(\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}+1\right)=-4=\lambda$$

$$\beta=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-2x+4x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)}{\sqrt{4x^2+1}-2x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{4x^2+1}^2-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+1}-2x}\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x^2+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+1}-2x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}-2x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\left(|2x|\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}-2x\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\left(-2x\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}-2x\right)}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-2x\left(\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}+1\right)}=0=\beta$$

Άρα η πλάγια ασύμπτωτη είναι η ευθεία $y=-4x$.

Γ3. Είναι $f'(x)=\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)'=\frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}-2=\frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}-2=\frac{4x-2\sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}}<0$, γιατί:

$2\sqrt{4x^2+1}>2\sqrt{4x^2}=2\cdot 2|x|=4|x|\geq 4x$ άρα $4x-2\sqrt{4x^2+1}<0$

Αφού η f είναι συνεχής και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε είναι γνησίως φθίνουσα οπότε θα είναι και 1-1. Επομένως αντιστρέφεται και η f^{-1} ορίζεται στο

$f(A)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$.

- $f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{4x^2+1}-2x=y\Leftrightarrow\sqrt{4x^2+1}=y+2x\Leftrightarrow 4x^2+1=(y+2x)^2\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow\cancel{4x^2}+1=y^2+4yx+\cancel{4x^2}\Leftrightarrow 4yx=1-y^2\Leftrightarrow x=\frac{1-y^2}{4y}$.

  Άρα $f^{-1}(x)=\frac{1-x^2}{4x},\ x\in f(A)$.

Γ4. $f'(x)=\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)'=\frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}-2=\frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}-2\Rightarrow$

$f'(x)\sqrt{4x^2+1}+2f(x)=\left(\frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}-2\right)\sqrt{4x^2+1}+2\sqrt{4x^2+1}-4x=$

$4x-2\sqrt{4x^2+1}+2\sqrt{4x^2+1}-4x=0$.

Γ5. Προφανώς $f(x)>0$ και $\sqrt{4x^2+1}\neq 0\Rightarrow f(x)\sqrt{4x^2+1}\neq 0$. Διαιρούμε τη σχέση $f'(x)\sqrt{4x^2+1}+2f(x)=0$ με $-2f(x)\sqrt{4x^2+1}$ έτσι έχουμε

$$\frac{f'(x)\sqrt{4x^2+1}}{-2f(x)\sqrt{4x^2+1}}+\frac{2f(x)}{-2f(x)\sqrt{4x^2+1}}=0\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}=0\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$$

Οπότε έχουμε $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}dx = \int_0^1 -\frac{1}{2}\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = -\frac{1}{2}\left[\ln f(x)\right]_0^1 =$

$-\frac{1}{2}\left(\ln f(1) - \ln f(0)\right) = -\frac{1}{2}\left(\ln\left(\sqrt{5}-2\right) - \ln 1\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{5}-2\right)$.

Άσκηση 11 **(νέο 2020)**

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ με $f(1)=1$ και για κάθε $x\in(0,1]$ ισχύει:

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x}-\frac{4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

Γ2. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Γ3. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

Γ4. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα ακριβώς $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $2f(x_0)=1$.

Γ5. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον $x_1,x_2\in(0,1)$ τέτοια ώστε

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=2.$$

Λύση

Γ1.

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x}-\frac{4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\Rightarrow\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=-\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}\Rightarrow$$

Έχουμε:

$$\Rightarrow\left[\frac{f(x)}{x}\right]'=\left[\frac{2}{x^2+1}\right]'\Rightarrow\frac{f(x)}{x}=\frac{2}{x^2+1}+c$$

Και για $x=1$ βρίσκουμε: $c=0$, οπότε $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

Γ2. Είναι: $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{4x^2}{(x^2+1)^2}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{x^2+1}-\dfrac{4x^2}{(x^2+1)^2}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$.

$$f'(x)\ge 0\Leftrightarrow\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}\ge 0\Leftrightarrow 0<x\le 1.$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$.

Γ3. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=[0,1]$, τότε το σύνολο τιμών της θα είναι: $f(A)=[f(0),f(1)]=[0,1]$.

Γ4. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $A=[0,1]$ και το $\frac{1}{2}\in f(A)=[0,1]$ από το Θ. Ενδιαμέσων Τιμών θα υπάρχει μοναδικό (f γνησίως αύξουσα) $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2f(x_0)=1$.

Γ5. Από το **Γ4** ερώτημα έχουμε ότι $f(x_0)=\frac{1}{2}$ με $0<x_0<1$.

Εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ στα $[0,x_0]$ και $[x_0,1]$ έχουμε ότι θα υπάρχει $x_1\in(0,x_0)$ και $x_2\in(x_0,1)$ τέτοια ώστε:

$$f'(x_1)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\frac{1}{2x_0}\Rightarrow\frac{1}{f'(x_1)}=2x_0 \qquad \textbf{(1)}$$

και $f'(x_2)=\dfrac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1-x_0}=\dfrac{1}{2(1-x_0)}\Rightarrow\dfrac{1}{f'(x_2)}=2-2x_0$ **(2)**

Προσθέτοντας τις (1) και (2) έχουμε: $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=2x_0+2-2x_0=2$.

Άσκηση 12 (νέο 2020)

Θεωρούμε τη συνάρτηση f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, η οποία έχει σύνολο τιμών το $[2017,2021]$ με $f(\alpha)=2018$ και $f(\beta)=2020$.

Γ1. Να αποδειχθεί ότι η C_f έχει δύο τουλάχιστον οριζόντιες εφαπτομένες.

Γ2. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)=0$.

Γ3. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f'(x)\cdot\left(e^{3x}-3e^{x}+2\right)=f(x)-2019$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).

Λύση

Γ1.

1ος τρόπος

Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής και έχει σύνολο τιμών το $[2017,2021]$ θα ισχύει:

$2017 \le f(x) \le 2021$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το 2017 και ολικό μέγιστο το 2021. Δηλαδή υπάρχει $x_1 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=2017$ και $x_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=2021$.

Επειδή η συνάρτηση f είναι και παραγωγίσιμη για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ θα ισχύει το Θεώρημα του Fermat που σημαίνει $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$.

Άρα η C_f έχει στα $(x_1,2017)$ και $(x_2,2021)$ οριζόντιες εφαπτομένες.

2ος τρόπος

Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής και έχει σύνολο τιμών το $[2017,2021]$ θα ισχύει:

$2017 \le f(x) \le 2021$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha,\beta)$, (έστω $x_1 < x_2$) με $f(x_1)=2017$ και $f(x_2)=2021$.

Επειδή η συνάρτηση f είναι και παραγωγίσιμη για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ μπορούμε να εφαρμόσουμε Θ.Μ.Τ στα διαστήματα $[\alpha,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $[x_2,\beta]$.

- Υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha,x_1)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_1)-f(\alpha)}{x_1-\alpha}=\frac{2017-2018}{x_1-\alpha}=-\frac{1}{x_1-\alpha}<0, \text{ αφού } x_1>\alpha$$

- Υπάρχει $\xi_2 \in (x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{2021-2017}{x_2-x_1}=\frac{4}{x_2-x_1}>0, \text{ αφού } x_2>x_1$$

- Υπάρχει $\xi_3 \in (x_2,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi_3)=\frac{f(\beta)-f(x_2)}{\beta-x_2}=\frac{2020-2021}{\beta-x_2}=-\frac{1}{\beta-x_2}<0,\ \text{αφού}\ \beta>x_2$$

Έχουμε λοιπόν: $\alpha<\xi_1<x_1<\xi_2<x_2<\xi_3<\beta$.

Αφού η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε η f' θα είναι συνεχής για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Εφαρμόζοντας Θ. Bolzano στην f' στα διαστήματα $[\xi_1,\xi_2]$ και $[\xi_2,\xi_3]$ με δεδομένο από τα παραπάνω ότι $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)<0$ και $f'(\xi_2)\cdot f'(\xi_3)<0$ θα έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\varphi_1\in(\xi_1,\xi_2)$ και ένα τουλάχιστον $\varphi_2\in(\xi_2,\xi_3)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(\varphi_1)=0$ και $f'(\varphi_2)=0$.
Άρα η C_f έχει 2 οριζόντιες εφαπτομένες.

Γ2. Από το **Γ1** και **1ος τρόπος** (έστω $x_1<x_2$) έχουμε: $\alpha<x_1<x_2<\beta$ και $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$.
Έχουμε f' συνεχής στο $[x_1,x_2]\subset[\alpha,\beta]$, f' παραγωγίσιμη στο $(x_1,x_2)\subset(\alpha,\beta)$ και $f'(x_1)=f'(x_2)$. Δηλαδή ισχύει το Θ.Rolle στο $[x_1,x_2]\subset[\alpha,\beta]$.
Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(x_1,x_2)\subset(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)=0$.

Γ3. Έχουμε: $f'(x)\cdot\left(e^{3x}-3e^{x}+2\right)=f(x)-2019 \Leftrightarrow f'(x)\cdot\left(e^{3x}-3e^{x}+2\right)-f(x)+2019=0.$
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f'(x)\cdot\left(e^{3x}-3e^{x}+2\right)-f(x)+2019=0.$
Από το **Γ1** και **1ος τρόπος** (έστω $x_1<x_2$) έχουμε : $\alpha<x_1<x_2<\beta$, $f'(x_1)=0$, $f'(x_2)=0$, $f(x_1)=2017$ και $f(x_2)=2021.$
Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]\subset[\alpha,\beta]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
Επίσης $g(x_1)=f'(x_1)\cdot\left(e^{3x_1}-3e^{x_1}+2\right)-f(x_1)+2019=0-2017+2019=2>0$
Και
$g(x_2)=f'(x_2)\cdot\left(e^{3x_2}-3e^{x_2}+2\right)-f(x_2)+2019=0-2021+2019=-2<0$
Άρα $g(x_1)\cdot g(x_2)<0.$
Ισχύει λοιπόν το Θ.Bolzano για την g στο $[x_1,x_2]\subset[\alpha,\beta]$ που σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(x_1,x_2)\subset(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:
$g(\rho)=0 \Leftrightarrow f'(\rho)\cdot\left(e^{3\rho}-3e^{\rho}+2\right)=f(\rho)-2019.$

Άσκηση 13 **(νέο 2022)**

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής στο 0 για την οποία ισχύει:

$$xf(x)=3x^2+x+\eta\mu x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}3x+1+\dfrac{\eta\mu x}{x}, x\neq 0\\ 2, x=0.\end{cases}$

Γ2. Να εξηγήσετε γιατί η f αντιστρέφεται και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της αν υπάρχουν.

Γ3.

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\eta\mu(x-x_0)}{(x-x_0)^2 f(x)}$ όπου x_0 ,το x_0 του προηγούμενου ερωτήματος.

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\sqrt{x-x^2}+f(x)$.Να αποδείξετε ότι η g έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

<u>Λύση</u>

Γ1. Για κάθε $x\neq 0$ έχουμε:

$$xf(x)=3x^2+x+\eta\mu x \Leftrightarrow f(x)=3x+1+\frac{\eta\mu x}{x}.$$

Όμως η f είναι συνεχής στο 0 συνεπώς:

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(3x+1+\frac{\eta\mu x}{x}\right)=1+1=2.$$

Άρα $f(x)=\begin{cases}3x+1+\dfrac{\eta\mu x}{x}, x\neq 0\\ 2, x=0\end{cases}$.

Γ2. Η $\dfrac{\eta\mu x}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ ως άθροισμα των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $3x+1, \dfrac{\eta\mu x}{x}$ με:

$$f'(x)=\frac{3x^2+x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=3x^2+x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x, x\in\mathbb{R}$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$h'(x)=6x-x\eta\mu x=x(6-\eta\mu x).$$

Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\eta\mu x\le 1\Rightarrow 6-\eta\mu x\ge 5>0$, το πρόσημο της $h'(x)$ καθορίζεται από το πρόσημο του x.

Έτσι έχουμε ότι $h'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, $h'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$ και η h είναι συνεχής στο 0 ,συνεπώς παρουσιάζει μόνο στο 0 ολικό ελάχιστο το $h(0)=0$.

Άρα για κάθε $x\neq 0$ ισχύει $h(x)>0\Rightarrow \dfrac{3x^2+x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}>0\Rightarrow f'(x)>0$.

Η f είναι συνεχής στο 0 ,άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,άρα $1-1$ συνεπώς αντιστρέφεται.

Ελέγχουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{3x+1+\dfrac{\eta\mu x}{x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\left(3+\frac{\eta\mu x-x}{x^2}\right)=3$$

διότι $\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x-x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\eta\mu x-x)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{2x}=0$,επομένως από το θεώρημα DLH έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x-x}{x^2}=0.$

Άρα $f'(0)=3.$

Συνεπώς η f δεν έχει κρίσιμα σημεία αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ3. i) Η f είναι συνεχής στο $[-1,0]$, $f(-1)=-2+\eta\mu 1<0$ και $f(0)=2>0.$

Από το θεώρημα $bolzano$ έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(-1,0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0.$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ συνεπώς $1-1$,επομένως η ρίζα είναι μοναδική.

ii) Για κάθε $x>x_0$ έχουμε $f(x)>f(x_0)=0$ διότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Άρα $(x-x_0)f(x)>0$ για κάθε $x>x_0$.

Για κάθε $x<x_0$ έχουμε $f(x)<f(x_0)=0$ διότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Άρα $(x-x_0)f(x)>0$ για κάθε $x<x_0$.

Συνεπώς $(x-x_0)f(x)>0$ για κάθε $x\neq x_0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}\left[(x-x_0)f(x)\right]=0$ διότι η f είναι συνεχής στο x_0 έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{(x-x_0)f(x)}=+\infty\ .$$

Επίσης αν θέσουμε $u=x-x_0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}u=\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)=0$.

Επειδή $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\eta\mu(x-x_0)}{x-x_0}=1.$

Συνεπώς το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\eta\mu\left(x-x_0\right)}{\left(x-x_0\right)^2 f\left(x\right)}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{\eta\mu\left(x-x_0\right)}{x-x_0}\cdot\frac{1}{\left(x-x_0\right)f\left(x\right)}\right]=+\infty.$$

Γ4. Η g ορίζεται, αν και μόνο αν, $\begin{cases} x-x^2\geq 0 \\ x\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[0,1\right]$.

Άρα $D_g=\left[0,1\right]$.

Η g είναι συνεχής στο $\left[0,1\right]$ επομένως από το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής η g παίρνει στο $\left[0,1\right]$ μια ελάχιστη τιμή μ και μια μέγιστη τιμή M.

Άσκηση 14 (νέο 2022)

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και κυρτή για την οποία ισχύουν:

- $f(x)\geq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- Η συνάρτηση $\dfrac{1}{f(x)-1}$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=0$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$ και $f'(0)=0$.
Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.
Γ3. Αν a,β τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι:

$$f\left(a^2\right)-f\left(a^2+1\right)<f\left(-2\beta^2-3\right)-f\left(-\beta^2\right).$$

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)+x^2$ δεν έχει ασύμπτωτες.

<u>Λύση</u>

Γ1. Αφού η $\dfrac{1}{f(x)-1}$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=0$ θα ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{f(x)-1}=+\infty \text{ ή } -\infty \text{ είτε } \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{f(x)-1}=+\infty \text{ ή } -\infty.$$

Αν $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{f(x)-1}=+\infty$ ή $-\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f(x)-1\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\dfrac{1}{f(x)-1}}=0$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0 έχουμε $f(0)-1=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f(x)-1\right)=0$ άρα $f(0)=1$.

Αν $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{f(x)-1}=+\infty$ ή $-\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(f(x)-1\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{\dfrac{1}{f(x)-1}}=0$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0 έχουμε $f(0)-1=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(f(x)-1\right)=0$ άρα $f(0)=1$.

Συνεπώς $f(0)=1$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $f(x)\geq 1\Leftrightarrow f(x)\geq f(0)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, το 0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f και η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 0.

Επομένως από το θεώρημα *fermat* έχουμε $f'(0)=0$.

Γ2. Επειδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Συνεπώς για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$x>0\overset{f',\uparrow\mathbb{R}}{\Rightarrow}f'(x)>f'(0)\Rightarrow f'(x)>0$$

Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Για κάθε $x<0$ έχουμε:

$$x<0 \overset{f',\uparrow \mathbf{R}}{\Rightarrow} f'(x)<f'(0) \Rightarrow f'(x)<0$$

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0]$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$,άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

Γ3. Έχουμε :

$$a^2<a^2+1 \underset{a^2,a^2+1\in[0,+\infty)}{\overset{f,\uparrow[0,+\infty)}{\Leftrightarrow}} f\left(a^2\right)<f\left(a^2+1\right)$$

$$-2\beta^2-3<-\beta^2 \underset{-2\beta^2-3,-\beta^2\in(-\infty,0]}{\overset{f,\downarrow(-\infty,0]}{\Rightarrow}} f\left(-\beta^2\right)<f\left(-2\beta^2-3\right)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε:

$$f\left(a^2\right)+f\left(-\beta^2\right)<f\left(-2\beta^2-3\right)+f\left(a^2+1\right)\Rightarrow$$

$$f\left(a^2\right)-f\left(a^2+1\right)<f\left(-2\beta^2-3\right)-f\left(-\beta^2\right).$$

Γ4. Η g είναι συνεχής στο R συνεπώς δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.
Για να αποδείξουμε ότι δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ εργαζόμαστε ως εξής:
<u>Ά τρόπος</u>:
Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$f(x)\ge 1\Rightarrow f(x)+x^2\ge 1+x^2\Rightarrow \frac{g(x)}{x}\ge x+\frac{1}{x}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)=+\infty$ ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=+\infty$.
Άρα η g δεν έχει πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.
<u>Β’ τρόπος</u>:
Είδαμε στο Γ2. ερώτημα ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0,+\infty)$.
Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ έχουμε:

$$f\left([0,+\infty)\right)=\left[f(0),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)$$

Συνεπώς το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός ή $+\infty$.
Υποθέτουμε ότι η C_g έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y=\alpha x+\beta, a,\beta\in$ R.
Τότε θα έπρεπε : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-ax-\beta\right)=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+x^2-ax-\beta\right)=0$.
Άτοπο διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-ax-\beta\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ και το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός ή $+\infty$.
Άρα η C_g δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.
Για κάθε $x<0$ έχουμε:

$$f(x)\ge 1\Rightarrow f(x)+x^2\ge 1+x^2\Rightarrow \frac{g(x)}{x}\le x+\frac{1}{x}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)=-\infty$ ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=-\infty$.
Άρα η g δεν έχει πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}$, $x\in R$.

Δ_1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,+\infty\right)$.

Δ_2. Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα και βρείτε την εφαπτομένη της στο $\mathrm{A}\left(1, f(1)\right)$.

Δ_3. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x)\ge 2ex-e,\ \textit{για κάθε}\ x\in R.$

Δ_4. Γνωρίζοντας ότι για κάθε $x\in R$ ισχύει $e^x\ge x+1$ να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx>\frac{4}{3}$.

Δ_5. Αν F μία παράγουσα της f στο R, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι ισχύει $F(x)>F(0)+x,\ \textit{για κάθε}\ x>0$.

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xF(x)}{f(x)}$.

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(1,2\right)$ τέτοιο ώστε $F(2)-F(0)=2f(\xi).$

iv. Αφού αποδείξετε ότι η F είναι κυρτή στο $\left[0,+\infty\right)$, στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

1) $xF'(x)\le F(2x)-F(x),\ \textit{για κάθε}\ x\ge 0.$

2) $2\int_0^1 F(2x)dx=\int_0^2 F(x)dx.$

3) $\int_0^2 F(x)dx>2F(1).$

<u>Λύση</u>

Δ_1. Η συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}$, $x\in R$ είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=2xe^{x^2}\ge 0\Leftrightarrow x\ge 0$.
Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	-∞	0	+∞
f'	-	0	+
f	↘	min	↗

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=\left(-\infty,0\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=\left[0,+\infty\right)$. Παρουσιάζει ελάχιστο στο $\mathrm{A}(0, f(0)=1)$.

Δ_2. Έχουμε $f''(x)=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}=2e^{x^2}(1+2x^2)>0$, για κάθε $x\in R$. Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή σε όλο το R. Η εξίσωση της εφαπτομένης της στο $\mathrm{A}\left(1, f(1)\right)$ είναι:
$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow \mathrm{y}-e=2e(x-1)\Leftrightarrow \mathrm{y}=2ex-e$.

Δ₃. Αφού η συνάρτηση f είναι κυρτή σε όλο το R θα είναι «πάνω» από την εφαπτομένη της στο σημείο $\mathrm{A}(1, f(1))$. Άρα θα ισχύει $f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) \geq 2ex - e,\ \text{για κάθε}\ x \in R.$

Δ₄. Γνωρίζοντας ότι $e^x \geq x+1$, για κάθε $x \in R$ (το '=' ισχύει για x=0) και θέτοντας όπου x το x^2 έχουμε: $e^{x^2} \geq x^2+1$ με το '=¨ να ισχύει για x=0.

$e^{x^2} \geq x^2+1 \Rightarrow h(x) = e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0$ και επειδή η συνάρτηση $h(x)$ δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα $[0,1]$, τότε θα έχουμε

$$\int_0^1 \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 e^{x^2} - \left(x^2+1\right)dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 e^{x^2}dx - \int_0^1 \left(x^2+1\right)dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 e^{x^2}dx > \int_0^1 \left(x^2+1\right)dx \Leftrightarrow \int_0^1 e^{x^2}dx > \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1 \Leftrightarrow \int_0^1 e^{x^2}dx > \frac{4}{3}.$$

Δ₅. Αφού η F είναι μία παράγουσα της f στο R θα ισχύει

$F'(\mathrm{x}) = f(x) = e^{x^2},\ \text{για κάθε}\ x \in R.$

i. Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο R, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ στο $[0, x]$ με $x > 0$.

   Τότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, x)$ έτσι ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(x)-F(0)}{x-0} \Leftrightarrow F'(\xi) = \frac{F(x)-F(0)}{x} \Leftrightarrow e^{\xi^2} = \frac{F(x)-F(0)}{x} \Leftrightarrow xe^{\xi^2} = F(x)-F(0),\ (1).$$

   Όμως $\xi \in (0, x) \Leftrightarrow 0 < \xi \Leftrightarrow 0 < \xi^2 \Leftrightarrow e^0 < e^{\xi^2} \Leftrightarrow 1 < e^{\xi^2} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x < xe^{\xi^2} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x < F(x) - F(0) \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow x + F(0) < F(x)$

ii. Από το i) ερώτημα έχουμε $F(x) > F(0) + x,\ \text{για κάθε}\ x > 0$. Όμως $\lim_{x\to+\infty}(F(0)+x) = +\infty$, άρα $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xF(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{xF(x)}{e^{x^2}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(xF(x))'}{(e^{x^2})'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)+xF'(x)}{2xe^{x^2}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)+xe^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{F(x)}{2xe^{x^2}}\right) = \frac{1}{2}$$ γιατί:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{2xe^{x^2}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{F'(x)}{(xe^{x^2})'} = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+2x^2} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0.$$

iii. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ για την F στο $[0, 2]$, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 2)$, ώστε $F'(\xi) = \dfrac{F(2)-F(0)}{2-0} \Leftrightarrow F(2)-F(0) = 2F'(\xi) \Leftrightarrow F(2)-F(0) = 2f(\xi)$ (1).

   Αλλά $F(2)-F(0) = \left[F(x)\right]_0^2 = \int_0^2 F'(x)dx = \int_0^2 f(x)dx \overset{(iii)}{>} \int_0^2 (2ex-e)\,dx = \left[ex^2-ex\right]_0^2 =$

$=4e-2e=2e.$ Οπότε από την (1) $2f(\xi)>2e \Leftrightarrow f(\xi)>e \Leftrightarrow f(\xi)>f(1) \overset{f:\gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow} \xi>1$.
Άρα $\xi \in (1,2)$.

iv. Επίσης $F''(x)=f'(x)=2xe^{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$, οπότε η F είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$.

1) Στη σχέση $xF'(x) \leq F(2x)-F(x)$ το "=" ισχύει για x=0.
Αν $x>0$, θα αποδείξουμε ότι :
$$xF'(x)<F(2x)-F(x) \Leftrightarrow \frac{F(2x)-F(x)}{x}>F'(x) \Leftrightarrow \frac{F(2x)-F(x)}{2x-x}>F'(x) \quad (1)$$
Για τη συνάρτηση F ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[x,2x]$, $x>0$, αφού είναι συνεχής στο $[x,2x]$ και παραγωγίσιμη στο $(x,2x)$. Οπότε υπάρχει $\xi \in (x,2x)$, ώστε $F'(\xi)=\dfrac{F(2x)-F(x)}{2x-x}$.
Επειδή η F είναι κυρτή, τότε η F' είναι γνησίως αύξουσα.
Άρα η (1) γίνεται: $F'(\xi)>F'(x) \Leftrightarrow \xi>x$, το οποίο ισχύει.

2) Θέτοντας $2x=y \Rightarrow dx=\dfrac{dy}{2}$. Για $x=0$ $\tau\acute{o}\tau\varepsilon$ $y=0$ και για $x=1$ $\tau\acute{o}\tau\varepsilon$ $y=2$. Οπότε
$$2\int_0^1 F(2x)dx=2\int_0^2 \frac{1}{2}F(y)dy=\int_0^2 F(x)dx.$$

3) Από το (1) ερώτημα έχουμε $xF'(x) \leq F(2x)-F(x),$ $\gamma\iota\alpha$ $\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon$ $x \geq 0$ και το «=» ισχύει μόνο για $x=0$. Οπότε
$$\int_0^1 xF'(x)dx<\int_0^1 (F(2x)-F(x))dx \Leftrightarrow \int_0^1 F(2x)dx-\int_0^1 F(x)dx>\int_0^1 xF'(x)dx \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{(\beta)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}\int_0^2 F(x)dx-\int_0^1 F(x)dx>\left[xF(x)\right]_0^1-\int_0^1 F(x)dx \Leftrightarrow \int_0^2 F(x)dx>2F(1).$$

Άσκηση 2

Έστω f μία παραγωγίσιμη συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

- $f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(x)dx = 1$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$.

Δ2. Έστω η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = f^2(x) + f^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Να αποδείξετε ότι η g είναι σταθερή.

Δ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Δ5. Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$$

και

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(e^x)}{x}$$

<u>Λύση</u>

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)'f(x)dx \\
&= [x \cdot f(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f'(x)dx \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - u\right)f(u)du \quad (αντικατάσταση\ u = \frac{\pi}{2} - x) \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} uf(u)du
\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} uf(u)du = 1$, οδηγούμαστε στη σχέση

$$1 = \frac{\pi}{2} \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} + 1$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \qquad (1)$$

Από την άλλη, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du \quad (αντικατάσταση\ u = \frac{\pi}{2} - x)
\end{aligned}$$

Καθώς $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du = 1$, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = 1$$

και λόγω της (1)

$$f(0) = 0 \qquad (2)$$

Ακόμα, για x = 0 η $f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ γίνεται

$$f'(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \qquad (3)$$

Δ2. Η συνάρτηση g είναι σταθερή γιατί είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με παράγωγο $g'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Πραγματικά, καθώς $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f'(x)$ και $f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = f(x)$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2f(x)f'(x) - 2f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= 2f(x)f'(x) - 2f(x)f'(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Μάλιστα η τιμή της συνάρτησης g είναι ,

$$\begin{aligned} &g(x) = g(0) \Leftrightarrow \\ &g(x) = f^2(0) + f^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \\ &g(x) = 1 \qquad (4) \end{aligned}$$

Δ3. Εφόσον $g(x) = f^2(x) + f^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ολοκληρώνοντας προκύπτει:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx$$

Αλλά από την (4) έχουμε $g(x) = 1$, και με την αντικατάσταση $u = \frac{\pi}{2} - x$ στο 2ο ολοκλήρωμα, παίρνουμε:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(u)du \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi}{2} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx$$

Συνεπώς,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx = \frac{\pi}{4}$$

Δ4. Από τον ορισμό της συνάρτησης g και λόγω της (4) έχουμε ότι

$$f^2(x) + f^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$$

Από όπου προκύπτει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|f(x)| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq 1 \qquad (5)$$

Όμως στο $Δ_1$ είδαμε ότι $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ (σχέση 1), που σε συνδυασμό με την προηγούμενη σχέση μας δίνει $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Δ5. Στο $Δ_1$ αποδείξαμε ότι $f'(0) = 1$ και $f(0) = 0$. Σε συνδυασμό με τον ορισμό της παραγώγου λαμβάνουμε,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} \Rightarrow 1 = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

Λόγω της (5) παίρνουμε ότι $|f(e^x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε για $x \neq 0$

$$\left|\frac{f(e^x)}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{|x|} \leq \frac{f(e^x)}{x} \leq \frac{1}{|x|}$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο παρεμβολής, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(e^x)}{x}$$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι άρτια, συνεχής στο $\mathbb{R}$ και γνησίως μονότονη στο $\left[0,+\infty\right)$ με $f(0)=4$, $f(4)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Δ₁. Να βρείτε τη μονοτονία της σε όλο το R και το σύνολο τιμών της.
Δ₂. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\mu\in\left[0,3\right]$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(\mu+1)=f(\mu)-1$.

Δ₃. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{1}{f(x)}$

Δ₄. Να μελετήσετε την $\dfrac{1}{f}$ ως προς τη μονοτονία στο $\left(-4,4\right)$.

Δ₅. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η $f\circ f$ στο $\mathbb{R}$ και να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία στο $\left[-4,4\right]$.

Δ₆. Αν η f είναι τριώνυμο δευτέρου βαθμού να βρείτε τον τύπο της f καθώς και τον τύπο της $f\circ f$

Δ₇. Να μελετήσετε την $h(x)=(f\circ f)(x)$ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Δ₈. Να

υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα $x'x$

<u>Λύση</u>

Δ₁.

- Έχουμε $0<4$ και $f(0)>f(4)$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο $\left[0,+\infty\right)$ τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,+\infty\right)$.
- Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\left(-\infty,0\right]$ με $x_1<x_2\le 0$, έχουμε :

  $x_1<x_2\le0\Leftrightarrow -x_1>-x_2\ge0 \overset{f\downarrow[0,+\infty)}{\Leftrightarrow} f(-x_1)<f(-x_2) \overset{f:\acute{\alpha}\rho\tau\iota\alpha}{\Leftrightarrow} f(x_1)<f(x_2)$

  Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty,0\right]$.
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_1=\left(-\infty,0\right]$. Τότε το

  $f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\, f(0)\right]=\left(-\infty,4\right]$, αφού

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \overset{u=-x}{=} \lim\limits_{u\to+\infty}\lim\limits_{u\to+\infty} f(-\mathrm{u}) \overset{f:\acute{\alpha}\rho\tau\iota\alpha}{=} \lim\limits_{u\to+\infty} f(\mathrm{u}) \overset{\upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta}{=} -\infty$ και $f(0)=4$.
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_2=\left[0,+\infty\right)$. Τότε το

  $f(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\, f(0)\right]=\left(-\infty,4\right]$,
- Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:

  $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=\left(-\infty,4\right]$.

Δ₂. <u>1ος τρόπος</u>

Με άτοπο.

Έστω ότι **δεν** υπάρχει $\mu \in [0,3]$ τέτοιο ώστε $f(\mu+1)=f(\mu)-1 \Leftrightarrow f(\mu+1)-f(\mu)+1=0$.Άρα θα ισχύει

$f(x+1)-f(x)+1\neq 0$, (α) για κάθε $x\in[0,3]$.

Θεωρώ την $g(x)=f(x+1)-f(x)+1$.Για την g ισχύουν:

- Η g συνεχής στο $[0,3]$ ως πράξεις συνεχών. Της $f(x+1)$ (σύνθεση συνεχών), της $-f(x)$ (γινόμενο σταθεράς επί συνεχή συνάρτηση) και της 1 (σταθερή)

$g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[0,3]$λόγω (α).

Άρα η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[0,3]$.

Έστω $g(x)>0$ για κάθε $x\in[0,3]$. Έχουμε:

$g(0)>0 \Leftrightarrow f(1)-f(0)+1>0 \Leftrightarrow f(1)-f(0)>-1$
$g(1)>0 \Leftrightarrow f(2)-f(1)+1>0 \Leftrightarrow f(2)-f(1)>-1$
$g(2)>0 \Leftrightarrow f(3)-f(2)+1>0 \Leftrightarrow f(3)-f(2)>-1$
$g(3)>0 \Leftrightarrow f(4)-f(3)+1>0 \Leftrightarrow f(4)-f(3)>-1$

Με πρόσθεση κατά μέλη των τελευταίων ανισώσεων της κάθε σειράς προκύπτει

$f(4)-f(0)>-4 \Leftrightarrow 0-4>-4 \Leftrightarrow -4>-4$ **άτοπο.**

Ομοίως σε άτοπο καταλήγουμε αν υποθέσουμε ότι $g(x)<0$.

Επομένως **υπάρχει** $\mu\in[0,3]$τέτοιο ώστε $f(\mu+1)=f(\mu)-1$.

<u>2ος τρόπος</u>

Θεωρώ την $g(x)=f(x+1)-f(x)+1$.Για την g ισχύουν:

- Η g συνεχής στο $[0,3]$ ως πράξεις συνεχών.
- Για $x=0 \Rightarrow g(0)=f(1)-f(0)+1, (1)$

  $x=1 \Rightarrow g(1)=f(2)-f(1)+1, (2)$

  $x=2 \Rightarrow g(2)=f(3)-f(2)+1, (3)$

  $x=3 \Rightarrow g(3)=f(4)-f(3)+1, (4)$
- Προσθέτουμε τις ισότητες $(1)+(2)+(3)+(4)$

  Οπότε $g(0)+g(1)+g(2)+g(3)=f(4)-f(0)+4=0-4+4=0$
- Αν $g(0)=g(1)=g(2)=g(3)=0$

  Τότε $\mu=0$ ή $\mu=1$ ή $\mu=2$ ή $\mu=3$
- Αν οι αριθμοί $g(0), g(1), g(2), g(3)$είναι ομόσημοι , τότε

  $g(0)+g(1)+g(2)+g(3)>0$ή $g(0)+g(1)+g(2)+g(3)<0$άτοπο , άρα δύο είναι ετερόσημοι , επομένως στο διάστημα τους εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Bolzano, οπότε υπάρχει $\mu\in[0,3]$τέτοιο ώστε $f(\mu+1)=f(\mu)-1$.

Δ₃. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R θα είναι συνεχής και στο 4, οπότε θα ισχύει:

$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = f(4) = 0$. Όμως αν $0 < x < 4 \overset{f\, γν.φθίνουσα}{\Leftrightarrow} f(x) > f(4) = 0$. Δηλαδή έχουμε:

$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για $0 < x < 4$. Τότε $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

Δ₄.

- Έχουμε: $-4 < x_1 < x_2 \le 0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(-4) < f(x_1) < f(x_2) \le f(0) \Rightarrow 0 < f(x_1) < f(x_2) \le 4 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \dfrac{1}{f(x_1)} > \dfrac{1}{f(x_2)}$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι γν. φθίνουσα στο $(-4, 0]$.

  Όμοια αποδεικνύεται ότι αν $0 \le x_1 < x_2 < 4 \Rightarrow \dfrac{1}{f(x_1)} < \dfrac{1}{f(x_2)}$, οπότε η συνάρτηση f είναι γν. αύξουσα στο $[0, 4)$.

Δ₅. Είναι $D_f = A = R$, οπότε $D_{f \circ f} = \{x \in D_f \,/\, f(x) \in D_f\} = \{x \in R \,/\, f(x) \in R\}$.

Προφανώς $f(x) \in R,\ για\ κάθε\ x \in R$. Άρα $D_{f \circ f} = R$.

- Έχουμε: $-4 \le x_1 < x_2 \le 0 \overset{f\, γν.αύξουσα}{\Leftrightarrow} f(-4) \le f(x_1) < f(x_2) \le f(0) \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow 0 \le f(x_1) < f(x_2) \le 4 \overset{f\, γν.φθίνουσα[0,4]}{\Leftrightarrow} f(f(x_1)) > f(f(x_2)) \Leftrightarrow (f \circ f)(x_1) > (f \circ f)(x_2).$

  Άρα η $f \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-4, 0]$.

- Όμοια αποδεικνύεται ότι η $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 4]$.

Δ₆. Αφού η f είναι τριώνυμο 2ου βαθμού θα έχει τη μορφή: $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma\ με\ \alpha \neq 0.$

Ισχύουν: $\begin{cases} f(-4) = 0 \\ f(0) = 4 \\ f(4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16\alpha - 4\beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 4 \\ 16\alpha + 4\beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{4} \\ \beta = 0 \\ \gamma = 4 \end{cases}$.

Άρα ο τύπος της f είναι $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 + 4$.

Οπότε: $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = -\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{4}x^2 + 4\right)^2 + 4 = -\dfrac{1}{64}x^4 + \dfrac{1}{2}x^2$.

Δ7.

$$h(x)=(f\circ f)(x)=-\frac{1}{64}x^4+\frac{1}{2}x^2.$$

- $h'(x)=-\frac{1}{16}x^3+x=x\left(-\frac{1}{16}x^2+1\right)=-\frac{1}{16}x(x-4)(x+4)$

$$h'(x)\geq 0\Leftrightarrow -\frac{1}{16}x(x-4)(x+4)\geq 0\Leftrightarrow x\leq -4 \text{ ή } 0\leq x\leq 4.$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$h(x)$		↗	τ.μ	↘	τ.ε	↗	τ.μ	↘	

Η συνάρτηση h είναι γν. αύξουσα στα $(-\infty,-4]$ και $[0,4]$ και γν. φθίνουσα στα $[-4,0]$ και $[4,+\infty)$. Παρουσιάζει:

- τοπικό ελάχιστο στο $x_1=0$ με τιμή $h(0)=0$.
- τοπικό μέγιστο στο $x_2=-4$ με τιμή $h(-4)=4$ και
- τοπικό μέγιστο στο $x_3=4$ με τιμή $h(4)=4$.

- $h''(x)=\left(-\frac{1}{16}x^3+x\right)'=-\frac{3}{16}x^2+1$

$$h''(x)\geq 0\Leftrightarrow -\frac{3}{16}x^2+1\geq 0\Leftrightarrow \frac{3}{16}x^2\leq 1\Leftrightarrow x^2\leq\frac{16}{3}\Leftrightarrow -\frac{4\sqrt{3}}{3}\leq x\leq\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Η κυρτότητα και τα σημεία καμπής φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$		$-\frac{4\sqrt{3}}{3}$		$\frac{4\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$h''(x)$		-		+		-	
$h(x)$		∩	σ.κ	∪	σ.κ	∩	

Η συνάρτηση h είναι κυρτή στο $\left[-\frac{4\sqrt{3}}{3},\frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$ και κοίλη στα $\left(-\infty,-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$ και $\left[\frac{4\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$.

Παρουσιάζει:

- Σημείο καμπής στο $x_4=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ με τιμή $h(-\frac{4\sqrt{3}}{3})=\frac{20}{9}$.

- Σημείο καμπής στο $x_5 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ με τιμή $h(\frac{4\sqrt{3}}{3}) = \frac{20}{9}$

Δ₈. Είναι $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \ \acute{\eta} \ x = 4$ και

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 16 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$, οπότε

$$\mathrm{E} = \int_{-4}^{4} f(x)dx = \int_{-4}^{4}\left(-\frac{1}{4}x^2 + 4\right)dx = \left[-\frac{1}{12}x^3\right]_{-4}^{4} + \left[4x\right]_{-4}^{4} = -\frac{1}{12}64 + \frac{1}{12}(-64) + 16 + 16 = \frac{64}{3}\tau.\mu$$

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, γνησίως αύξουσα και κυρτή, για την οποία επί πλέον ισχύουν:

- $f(0)=f'(0)=1$,
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$
- Η C_f έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $y=2x$

Δ₁. Να υπολογίσετε τα όρια $L_1=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και $L_2=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3f(x)-2x^4+3x^3+1}{x^2f(x)-x^3+x+1}$

Δ₂. Να αποδείξετε ότι $f(x)-x>1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$

Δ₃. Να αποδείξετε ότι $\int_0^{10} f(x)dx<f(1)+f(2)+...+f(10)$

Δ₄. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f^{-1}

Δ₅. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x^3)<f^{-1}(4x)$

Δ₆. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-3x$ ως προς την κυρτότητα.

Δ₇. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_h στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Δ₈. Αν επιπλέον ισχύει $0<f'(x)<2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να μελετήσετε την h ως προς τη μονοτονία.

<u>Λύση</u>

Δ₁. Αφού η συνάρτηση f έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $y=2x$ θα ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2 \qquad (1)$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right]=0 \qquad (2)$$

$$L_1=\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(f(x)-2x\right)+2x\right]=0+\infty=+\infty \qquad (3)$$

Για $x>0$ έχουμε: $\dfrac{x^3f(x)-2x^4+3x^3+1}{x^2f(x)-x^3+x+1}=\dfrac{\cancel{x^3}\left[f(x)-2x+3+\dfrac{1}{x^3}\right]}{\cancel{x^3}\left[\dfrac{f(x)}{x}-1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right]}=\dfrac{\left(f(x)-2x\right)+3+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{f(x)}{x}-1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}$.

Οπότε:

$$L_2=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3f(x)-2x^4+3x^3+1}{x^2f(x)-x^3+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(f(x)-2x\right)+3+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{f(x)}{x}-1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}\underset{(2)}{\overset{(1)}{=}}\frac{0+3+0}{2-1+0+0}=3$$

Δ₂. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $\left(0, f(0)\right)$ είναι:
$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-1=x\Leftrightarrow y=x+1$.
Επειδή η συνάρτηση f είναι κυρτή, τότε θα ισχύει: $f(x)\ge y$ για κάθε $x\in R$ και $f(x)>y$, για κάθε $x\in R^*$ (δηλαδή εκτός από το σημείο επαφής).
Οπότε: $f(x)>y\Leftrightarrow f(x)>x+1\Leftrightarrow f(x)-x>1$, για κάθε $x\in R^*$.

Δ₃. Επειδή η συνάρτηση f είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα ισχύει:

- $0\le x\le 1\Rightarrow f(0)\le f(x)\le f(1) \overset{\text{Το "=" δεν ισχύει παντού στο }[0,1]}{\Rightarrow} \int_0^1 f(x)dx<\int_0^1 f(1)dx\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx<f(1)$

  Όμοια
- $1\le x\le 2\Rightarrow f(1)\le f(x)\le f(2)\Rightarrow ....\Rightarrow \int_1^2 f(x)dx<f(2)$
- ....
- ....
- $9\le x\le 10\Rightarrow f(9)\le f(x)\le f(10)\Rightarrow ....\Rightarrow \int_9^{10} f(x)dx<f(10)$

  Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες έχουμε:
  $$\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx+...+\int_9^{10} f(x)dx<f(1)+f(2)+...+f(10)\Rightarrow \int_0^{10} f(x)dx<f(1)+f(2)+...+f(10)$$

Δ₄. Είναι $D_f=A=R$ και επειδή η f είναι συνεχής και γν. αύξουσα στο R τότε το σύνολο τιμών της θα είναι το $f(A)=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=\left(0,+\infty\right)$.
Αφού η συνάρτηση f είναι γν. αύξουσα στο R θα είναι και 1-1 οπότε αντιστρέφεται. Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $\left(0,+\infty\right)$ που είναι σύνολο τιμών της f και σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού της f το R.

Δ₅. Για να ορίζεται η $f^{-1}(x^3)<f^{-1}(4x)$ πρέπει
$\left(x^3\in D_{f^{-1}}\ \&\ 4x\in D_{f^{-1}}\right)\Leftrightarrow\left(x^3>0\ \&\ 4x>0\right)\Leftrightarrow x>0$, οπότε:
$$f^{-1}(x^3)<f^{-1}(4x) \overset{f:\text{γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}(x^3)\right)<f\left(f^{-1}(4x)\right)\Leftrightarrow x^3<4x\Leftrightarrow x^3-4x<0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(x-2)(x+2)<0\Leftrightarrow x<-2 \text{ ή } 0<x<2.$$
Τελικά η λύση της ανίσωσης είναι: $x\in\left(0,2\right)$.

Δ₆. Έχουμε $h(x)=f(x)-3x$. Η h είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο R ως διαφορά συναρτήσεων που είναι 2 φορές παραγωγίσιμες, οπότε:
$h'(x)=f'(x)-3$ και $h''(x)=f''(x)$
Επομένως η h έχει την ίδια κυρτότητα με την f, δηλαδή η συνάρτηση h είναι κυρτή στο R.

Δ₇. Έστω $y=\lambda x+\beta$ η ασύμπτωτη της της h στο $+\infty$. Τότε:
$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-3\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}-3\overset{(1)}{=}2-3=-1 \text{ και}$$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}\left[h(x)-\lambda x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-3x+x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right]\overset{(2)}{=}0\ .$$

Άρα η $y=-x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$.

Όμοια αν $y=\lambda x+\beta$ η ασύμπτωτη της της h στο $-\infty$. Τότε:

$\lambda=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x}-3\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}-3=0\cdot 0-3=-3$ και

$\beta=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[h(x)-\lambda x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-3x+3x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

Άρα η $y=-3x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$.

Δ8. Είναι $h'(x)=f'(x)-3$ για κάθε $x\in R$ και επειδή $0<f'(x)<2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε θα έχουμε $-3<f'(x)-3<-1\Rightarrow h'(x)<0$ για κάθε $x\in R$.

Επομένως η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο R .

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

α. $\left(e^x+1\right)f'(x)=e^x\left(1-f(x)\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και

β. $f\left(0\right)=\dfrac{3}{2}$

Δ₁. Να βρείτε τον τύπο της f .

Δ₂. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ₃. Να βρείτε τις ασύμπτωτες και το σύνολο τιμών της f .

Δ₄. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=1$

Δ₅. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xf(x)\eta\mu\dfrac{\pi}{x}\right)$

Δ₆. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της f^{-1}

Δ₇. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $(\alpha+1)\left(e^x+2\right)=\left(e^x+1\right)(\alpha+2)$, έχει μοναδική λύση για κάθε $\alpha>0$

<u>Λύση</u>

Δ₁.

$$\left(e^x+1\right)f'(x)=e^x\left(1-f(x)\right)\Leftrightarrow\left(e^x+1\right)f'(x)=e^x-e^xf(x)\Leftrightarrow$$

$$\left(e^x+1\right)f'(x)+e^xf(x)=e^x\Leftrightarrow\left[\left(e^x+1\right)f(x)\right]'=\left(e^x\right)'\Leftrightarrow\left(e^x+1\right)f(x)=e^x+c,\ (1)$$

Για $x=0$ η (1) γίνεται $2f(0)=1+c\Leftrightarrow 2\cdot\dfrac{3}{2}=1+c\Leftrightarrow c=2$

Άρα ο τύπος της f είναι $f(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ₂. $f'(x)=\dfrac{e^x(e^x+1)-(e^x+2)e^x}{(e^x+1)^2}=-\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}<0,$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Δ₃. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+2}{e^x+1}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$ άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+2}{e^x+1}=\dfrac{0+2}{0+1}=2$ άρα η ευθεία $y=2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$,το σύνολο τιμών της θα είναι $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=\left(1,2\right)$.

Δ₄. Είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ επομένως το ζητούμενο εμβαδό θα είναι

$$E=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{e^x+2}{e^x+1}dx=\int_0^1\frac{e^x+1+1}{e^x+1}dx=\int_0^1\left(1+\frac{1}{e^x+1}\right)dx$$

$$=\int_0^1 1dx+\int_0^1\frac{1}{e^x+1}dx=1+I,\ \acute{o}\pi o\upsilon\ I=\int_0^1\frac{1}{e^x+1}dx=\int_0^1\frac{e^x}{e^x(e^x+1)}dx$$

Για τον υπολογισμό του I θέτω $u=e^x \Rightarrow du=e^x dx$ και
για $x=0\Rightarrow u=1$ και
για $x=1\Rightarrow u=e$ οπότε το ολοκλήρωμα I γίνεται:

$$I=\int_1^e\frac{1}{u(u+1)}du$$

Έχουμε $\dfrac{1}{u(u+1)}=\dfrac{A}{u}+\dfrac{B}{u+1}\Leftrightarrow 1=A(u+1)+Bu\Leftrightarrow 1=(A+B)u+A$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=0\\A=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=-1\\A=1\end{cases}$$

Άρα $I=\int_1^e\frac{1}{u}du+\int_1^e\frac{-1}{u+1}du=\left[\ln u\right]_1^e-\left[\ln(u+1)\right]_1^e=(\ln e-0)-\left(\ln(e+1)-\ln 2\right)=1+\ln\frac{2}{e+1}$

Άρα $\mathrm{E}=1+1+\ln\dfrac{2}{e+1}=2+\ln\dfrac{2}{e+1}$ τ.μ

Δ₅. $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xf(x)\eta\mu\dfrac{\pi}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\eta\mu\dfrac{\pi}{x}\right)=2\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\eta\mu\dfrac{\pi}{x}\right)=2l$

$$l=\lim_{x\to-\infty}\left(x\eta\mu\frac{\pi}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\pi\eta\mu\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}\underset{u\to0}{\overset{u=\frac{\pi}{x}}{=}}\pi\lim_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u}=\pi\cdot1=\pi$$

Άρα $L=2\pi$

Δ₆. Αποδείξαμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως και $1-1$ άρα αντιστρέφεται.
Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f. Άρα $D_{f^{-1}}=\mathrm{B}=(1,2)$
Το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού της f. Άρα $f^{-1}(B)=D_f=\mathbb{R}$
Για τον τύπο της f^{-1} θέτουμε $y=f(x)$ και διαδοχικά έχουμε:

$$y=\frac{e^x+2}{e^x+1}\Leftrightarrow ye^x+y=e^x+2\Leftrightarrow e^x(y-1)=2-y\overset{y\neq1}{\Leftrightarrow}e^x=\frac{2-y}{y-1}\Leftrightarrow$$

$$\ln e^x\overset{1<y<2}{=}\ln\frac{2-y}{y-1}\Leftrightarrow x=\ln\frac{2-y}{y-1}\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\ln\frac{2-y}{y-1}\Leftrightarrow f^{-1}(x)=\ln\frac{2-x}{x-1}$$

Άρα ο τύπος της f^{-1} είναι $f^{-1}(x)=\ln\dfrac{2-x}{x-1}$ με $x\in(1,2)=\mathrm{D}_{f^{-1}}$

Δ7. $(\alpha+1)\left(e^x+2\right)=\left(e^x+1\right)(\alpha+2) \Leftrightarrow \dfrac{e^x+2}{e^x+1}=\dfrac{\alpha+2}{\alpha+1} \Leftrightarrow f(x)=f(\ln\alpha)$

αφού $f(\ln\alpha)=\dfrac{e^{\ln\alpha}+2}{e^{\ln\alpha}+1}=\dfrac{\alpha+2}{\alpha+1}$

Επομένως η αρχική εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x)=f(\ln\alpha) \Leftrightarrow x=\ln\alpha$ μοναδική λύση για κάθε $\alpha>0$.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)-e^{-x}+1$

Δ₁. Να αποδείξετε ότι $\left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right|\leq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ₂. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ₃. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την οποία να βρείτε.

Δ₄. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Δ₅. Να λύσετε την ανίσωση $\ln\left(1+x^4\right)+e^{-2}<\ln 5+e^{-x^2}$.

Δ₆. Να αποδείξετε ότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν κοινό σημείο το $\mathrm{O}(0,0)$ στο οποίο δέχονται κοινή εφαπτόμενη της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

Δ₇. Αφού αποδείξετε ότι $\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}dx=\dfrac{\pi}{4}$ (θέτοντας $x=\varepsilon\varphi t$), να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη C_f ,τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

<u>Λύση</u>

Δ₁. $\left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right|\leq 1\Leftrightarrow \dfrac{|2x|}{\left|x^2+1\right|}\leq 1\Leftrightarrow |2x|\leq\left|x^2+1\right|\Leftrightarrow 2|x|\leq x^2+1\Leftrightarrow x^2+1-2|x|\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x|^2-2|x|+1\geq 0\Leftrightarrow\left(|x|-1\right)^2\geq 0$, που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ₂. Η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)-e^{-x}+1$, έχει πεδίο ορισμού το $D_f=A=\mathbb{R}$.

Έχουμε $f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}+e^{-x}$

- Αν $x\geq 0\Rightarrow\dfrac{2x}{1+x^2}\geq 0$ και $e^{-x}>0\Rightarrow\dfrac{2x}{1+x^2}+e^{-x}>0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα.
- Αν $x<0\Rightarrow -1<\dfrac{2x}{1+x^2}$ και $0<-x\Rightarrow e^0<e^{-x}\Rightarrow 1<e^{-x}$

  Αθροίζοντας τις δύο ανισώσεις έχουμε:

  $0<\dfrac{2x}{1+x^2}+e^{-x}\Rightarrow 0<f'(x)\Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα.
- Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το R.

Δ₃. Προφανής ρίζα η $x=0$ αφού $f(0)=\ln 1-e^0+1=0-1+1=0$ η οποία είναι και μοναδική επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως και ¨1-1¨.

Δ₄. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $D_f=A=\mathbb{R}$, τότε το σύνολο τιμών είναι $f(\mathrm{A})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(1+x^2\right)-e^{-x}+1\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^{-x}\left[\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{e^{-x}}-1\right]+1\right] =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}.\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{e^{-x}}-1\right]+1 = (+\infty).(0-1)+1 = -\infty$, γιατί:

  - $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} \overset{-x=u}{\underset{u\to+\infty}{=}} \lim\limits_{u\to+\infty} e^{u} = +\infty$ και
  - $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{e^{-x}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]'}{\left(e^{-x}\right)'} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{2x}{1+x^2}}{-e^{-x}} = -\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{1+x^2}\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} =$

  $= -\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x}\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0\cdot 0 = 0$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+x^2\right)-e^{-x}+1\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]-\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}+1 = (+\infty)-0+1 = +\infty$

Άρα $f(\mathrm{A}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$.

Δ5. $\ln\left(1+x^4\right)+e^{-2} < \ln 5 + e^{-x^2} \Leftrightarrow \ln\left(1+x^4\right)-e^{-x^2}+1 < \ln\left(1+2^2\right)-e^{-2}+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x^2) < f(2) \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} x^2 < 2 \Leftrightarrow |x|^2 < \left(\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.

Δ6. Επειδή $f(0)=0 \Leftrightarrow f^{-1}(0)=0$, τότε το $\mathrm{O}(0,0)\in C_f$ $\kappa\alpha\iota$ $\mathrm{O}(0,0)\in C_{f^{-1}}$.
Η εξίσωση της εφαπτομένης στη C_f στο $\mathrm{O}(0,0)$ είναι:
$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y-0 = 1\cdot x \Leftrightarrow y = x$. (1)
Οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την διχοτόμο του 1ου και 3ου τεταρτημορίου δηλαδή , ως προς την $y=x$.
Λόγω συμμετρίας , επειδή η $y=x$ είναι εφαπτομένη της C_f στο O(0,0), θα είναι και εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο O(0,0).
Άρα οι C_f $\kappa\alpha\iota$ $C_{f^{-1}}$ στο κοινό τους σημείο $\mathrm{O}(0,0)$ έχουν κοινή εφαπτομένη την $y=x$.

Δ7.

- Αν $x = \varepsilon\varphi t \Rightarrow dx = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}dt$.

Για $x=0,\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\mu\varepsilon\ t=0$ και για $x=1,\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\mu\varepsilon\ t=\dfrac{\pi}{4}$. Οπότε:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^{\pi/4}\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 t}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}dt = \int_0^{\pi/4}\frac{1}{1+\dfrac{\eta\mu^2 t}{\sigma\upsilon\nu^2 t}}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}dt = \int_0^{\pi/4}\frac{\cancel{\sigma\upsilon\nu^2 t}}{\sigma\upsilon\nu^2 t+\eta\mu^2 t}\cdot\frac{1}{\cancel{\sigma\upsilon\nu^2 t}}dt =$$

$$= \int_0^{\pi/4} dt = \left[t\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} \ .$$

- Για $x \geq 0 \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) \geq f(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$\mathrm{E} = \int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left[\ln\left(1+x^2\right) - e^{-x} + 1\right]dx = \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx + \int_0^1 -e^{-x}dx + \int_0^1 dx =$$

$$= \int_0^1 (x)' \ln\left(x^2+1\right)dx + \left[e^{-x}\right]_0^1 + \left[x\right]_0^1 = \left[x\ln(x^2+1)\right]_0^1 - \int_0^1 x\frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{1}{e} - 1 + 1 - 0 =$$

$$= \ln 2 - \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2+1}dx + \frac{1}{e} = \ln 2 + \frac{1}{e} - 2\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \ln 2 + \frac{1}{e} - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{e} - 2\left[x\right]_0^1 + 2\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx}_{\pi/4} = \ln 2 + \frac{1}{e} - 2 + 2\frac{\pi}{4} = \left(\ln 2 + \frac{1}{e} + \frac{\pi}{2} - 2\right) \text{τ.μ.}$$

Άσκηση 7

Δίνονται συνάρτηση $f:\left[-\frac{\pi}{2},0\right]\to\mathbb{R}$ παράγουσα της $-3\eta\mu^3 x$ με $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$ και συνάρτηση $g(x)=3\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu^3 x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f,g είναι ίσες στο διάστημα $\Delta=\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι άρτια και η $g'(x)$ είναι περιττή στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Δ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Δ5. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g,f^{-1}

Δ6. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τη $C_{f^{-1}}$ και τις ευθείες $(\varepsilon_1): x+y=2$ και $(\varepsilon_2): x+y=-\frac{\pi}{2}$.

Δ7. Να αποδείξετε ότι το σημείο $\mathrm{A}\left(\frac{5\sqrt{2}}{4},-\frac{\pi}{4}\right)$ βρίσκεται πάνω στη $C_{f^{-1}}$

Δ8. Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της, να βρείτε την κλίση της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο Α .

<u>Λύση</u>

Δ1. Το κοινό πεδίο ορισμού των συναρτήσεων είναι το $\Delta=\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$

Η συνάρτηση f είναι παράγουσα της $-3\eta\mu^3 x$ στο $\Delta=\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$, άρα $f'(x)=-3\eta\mu^3 x$

Επίσης $g'(x)=\left(3\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu^3 x\right)'=-3\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu^2 x\eta\mu x=-3\eta\mu x\left(1-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)=-3\eta\mu^3 x$ άρα $f'(x)=g'(x)\Rightarrow f(x)=g(x)+c,\ (1)$

Για $x=-\frac{\pi}{2}$ έχουμε $g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=3\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu^3\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0\Rightarrow g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$,οπότε η (1) για $x=-\frac{\pi}{2}$ γίνεται $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=g\left(-\frac{\pi}{2}\right)+c$ ή $0=c$ άρα $f(x)=g(x)$ στο διάστημα $\Delta=\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$.

Δ2. Για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow -x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Επίσης $g(-x)=3\sigma\upsilon\nu(-x)-\sigma\upsilon\nu^3(-x)=3\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu^3 x=g(x)$ άρα άρτια.

Έχουμε $g(-x)=g(x) \Rightarrow (g(-x))' = g'(x) \Rightarrow g'(-x)(-x)' = g'(x) \Rightarrow -g'(-x) = g'(x)$ άρα η g' είναι περιττή.

<u>Αν μια συνάρτηση f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια. Επίσης αποδεικνύεται ότι αν μια συνάρτηση f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή. Οι προτάσεις αυτές για να χρησιμοποιηθούν πρέπει να αποδειχθούν .</u>

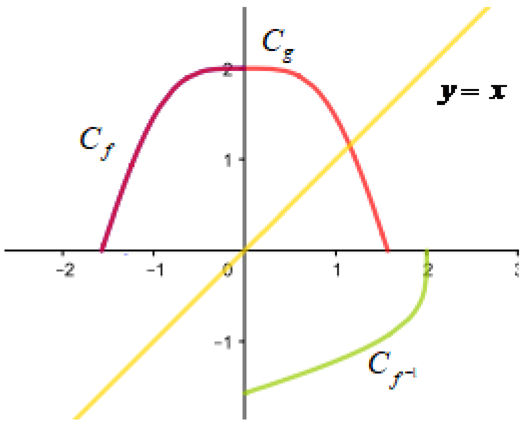
Δ3. Έχουμε $f'(x) = -3\eta\mu^3 x > 0$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.Επίσης $f''(x) = -9\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x < 0$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, άρα η f είναι κοίλη. Η μονοτονία και η κυρτότητα της f φαίνεται συνοπτικά στον διπλανό πίνακα μεταβολών, όπου παρατηρούμε ότι η f έχει ελάχιστο στο $-\frac{\pi}{2}$ το $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, μέγιστο στο 0 το $f(0) = g(0) = 2$ και δεν έχει σημεία καμπής .

x	$-\pi/2$		0
$f'(x)$		+	
$f''(x)$		−	
$f(x)$		↗	

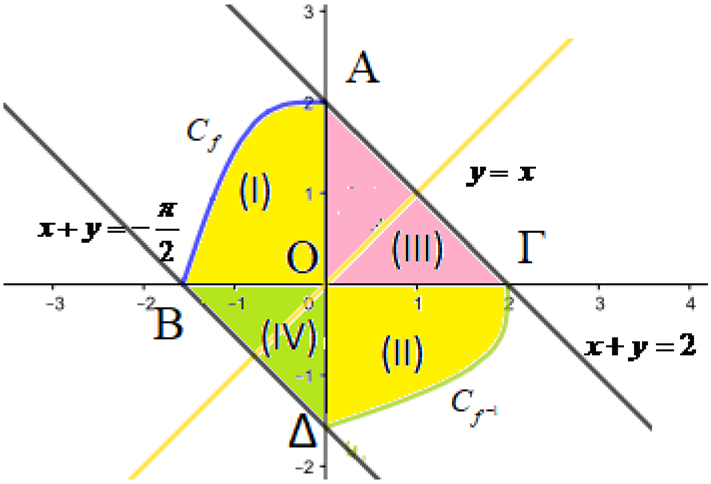
Δ4. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, άρα αντιστρέφεται.

Έχουμε $-\frac{\pi}{2} \le x \le 0 \Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \le f(x) \le f(0) \Rightarrow 0 \le f(x) \le 2$ άρα το σύνολο τιμών είναι το σύνολο $[0,2]$ το οποίο είναι και πεδίο ορισμού της f^{-1}.

Δ5. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο $y = x$ του 1ου και του 3ου τεταρτημορίου



Δ₆.



$$E=(I)+(III)+(II)+(IV)=E_{AOB}+E_{AO\Gamma}+E_{\Gamma O\Delta}+E_{\Delta OB}$$

Λόγω συμμετρίας τα χωρία (I) και (II) είναι ισεμβαδικά, άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E=2E_{AOB}+E_{AO\Gamma}+E_{\Delta OB}$$

$$E_{AOB}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(3\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu^3 x\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}3\sigma\upsilon\nu x dx-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sigma\upsilon\nu^3 x dx=$$

$$\left[3\eta\mu x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sigma\upsilon\nu^2 x(\eta\mu x)'dx=3\left(0-(-1)\right)-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(1-\eta\mu^2 x\right)(\eta\mu x)'dx\overset{*}{=}$$

$$3-\int_{-1}^{0}\left(1-u^2\right)du=3-\left[u-\frac{1}{3}u^3\right]_{-1}^{0}=3+\left(-1+\frac{1}{3}\right)=3-\frac{2}{3}=\frac{7}{3}\tau.\mu$$

* Θέτουμε $u=\eta\mu x\Rightarrow du=(\eta\mu x)'\,dx$ οπότε για $x=0\Rightarrow u=0,\ x=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=-1$

$$E_{AO\Gamma}=\frac{(\mathrm{OA})(\mathrm{O\Gamma})}{2}=\frac{2\cdot 2}{2}=2\tau.\mu \quad \text{και} \quad E_{\Delta OB}=\frac{(\mathrm{OB})(\mathrm{O\Delta})}{2}=\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot}{2}=\frac{\pi^2}{8}\tau.\mu$$

Άρα $E=2E_{AOB}+E_{\Gamma O\Delta}+E_{\Delta OB}=2\cdot\frac{7}{3}+2+\frac{\pi^2}{8}=\frac{20}{3}+\frac{\pi^2}{8}\ \tau.\mu$

Δ₇. Το σημείο $\mathrm{A}\left(\frac{5\sqrt{2}}{4},-\frac{\pi}{4}\right)\in C_{f^{-1}}\Leftrightarrow f^{-1}\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)=-\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\frac{5\sqrt{2}}{4}=f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow$

$\frac{5\sqrt{2}}{4}=3\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\sigma\upsilon\nu^3\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\frac{5\sqrt{2}}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow\frac{5\sqrt{2}}{4}=\frac{5\sqrt{2}}{4}$ το οποίο ισχύει.

Δ₈. Η κλίση της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο $\mathrm{A}\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{4},-\dfrac{\pi}{4}\right)$ είναι ο αριθμός $\left(f^{-1}\right)'\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\right)$.

Έχουμε $\left(fof^{-1}\right)(x)=x$ ή $f\left(f^{-1}(x)\right)=x \Rightarrow \left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right)'=(x)' \Rightarrow f'\left(f^{-1}(x)\right)\cdot\left(f^{-1}(x)\right)'=1$

Για $x=\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$ έχουμε $f'\left(f^{-1}\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\right)\right)\cdot\left(\left(f^{-1}\right)'\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\right)\right)=1 \Leftrightarrow$

$f'\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\left(f^{-1}\right)'\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\right)\right)=1 \Rightarrow \dfrac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\left(f^{-1}\right)'\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\right)\right)=1 \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x\left(x^2+x+3\right)$ και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύουν $g(2)+xg(x)-g(x+2)-\left(f(x)-3\right)^2\le 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2-h)}{h}=0$$

Δ₁. Να αποδείξετε ότι $g'(2)=0$

Δ₂. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f για $x\to-\infty$.

Δ₃. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

Δ₄. Να βρείτε σημείο Β της C_h με $h(x)=\sqrt{f(x)}$ ώστε το σημείο $A(2,0)$ να απέχει την ελάχιστη απόσταση από τη C_h και να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_h είναι κάθετη στην ευθεία AB.

Δ₅. Αν $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ και $\int_{g(0)}^{g(a)} f(x)dx=0$ να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα

$x_0\in(0,\alpha): g'(x_0)=g(x_0)\cdot \varepsilon\varphi x_0$

<u>Λύση</u>

Δ₁. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2-h)}{h}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)-\left(g(2-h)-g(2)\right)}{h}=0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{g(2+h)-g(2)}{h}-\frac{\left(g(2-h)-g(2)\right)}{h}\right)=0,(1)$

- $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{g(2+h)-g(2)}{h}\right)\overset{2+h=x}{=}\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{g(x)-g(2)}{x-2}\right)\overset{g\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma}{=}g'(2),(2)$
- $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{g(2-h)-g(2)}{h}\right)\overset{2-h=x}{=}-\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{g(x)-g(2)}{x-2}\right)\overset{g\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma}{=}-g'(2),(3)$

Η (1) με βάση τις $(2),(3)$ γίνεται $g'(2)-\left(-g'(2)\right)=0\Leftrightarrow 2g'(2)=0\Leftrightarrow g'(2)=0$.

Δ₂. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^x\left(x^2+x+3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+3}{e^{-x}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x^2+x+3)'}{(e^{-x})'}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{-e^{-x}}\overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(2x+1)'}{(-e^{-x})'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=0 \Rightarrow y=0$ (οριζόντια ασύμπτωτη)

Δ₃. Έχουμε $f'(x)=e^x\left(x^2+3x+4\right)>0\Rightarrow f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ και

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
f'	$+$
f	$0 \nearrow +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(x^2+3x+4\right) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών είναι $(0,+\infty)$

Δ₄. Το σημείο $B\left(x,\sqrt{f(x)}\right)$ της C_h απέχει απόσταση από το $A(2,0)$

$$(AB) = d(x) = \sqrt{(x-2)^2+\left(\sqrt{f(x)}-0\right)^2} = \sqrt{(x-2)^2+f(x)}, x\in\mathbb{R}$$

$$d'(x) = \frac{2(x-2)+f'(x)}{2\sqrt{(x-2)^2+f(x)}} = \frac{\overbrace{2(x-2)+e^x\left(x^2+3x+4\right)}^{t(x)}}{2\sqrt{(x-2)^2+f(x)}}$$

Θα μελετήσουμε πρώτα τη συνάρτηση $t(x)=2(x-2)+e^x\left(x^2+3x+4\right)$ ως προς το πρόσημό της. Η εξίσωση $t(x)=0$ έχει προφανής λύσης την $x=0$

Έχουμε $t'(x)=2+e^x\left(\underbrace{x^2+5x+7}_{+}\right)>0$.Το πρόσημο της $t(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
t'	$+$		$+$
$d'=t$	$-\infty$ ↗ $-$	0	↗ $+$ $+\infty$

Το πρόσημό της $d(x)$ φαίνεται στον πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
d'	$-$		$+$
d	↘		↗

$$\min d(0)=\sqrt{7}$$

Οπότε το σημείο B είναι $\mathrm{B}(0,h(0))$ ή $\mathrm{B}\left(0,\sqrt{f(0)}\right)$ ή $\mathrm{B}\left(0,\sqrt{3}\right)$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_h στο σημείο B είναι

$\lambda_{(\varepsilon)} = h'(0) = \dfrac{f'(0)}{2\sqrt{f(0)}} = \dfrac{4}{2\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της AB είναι

$$\lambda_{\mathrm{AB}} = \frac{0-\sqrt{3}}{2-0} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \lambda_{\mathrm{AB}}\lambda_{(\varepsilon)} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -1 \Rightarrow (\varepsilon)\perp \mathrm{AB}$$

Δ5. Από τη σχέση $\underbrace{g(2)+xg(x)-g(x+2)-\left(f(x)-3\right)^2}_{H(x)} \le 0$ έχουμε $H(x) \le H(0)$ δηλαδή η συνάρτηση $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει μέγιστο στο 0. Το 0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της $H(x)$ και παραγωγίσιμη στο 0 άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, άρα $H'(0)=0, (*)$.

Όμως ισχύει: $H(x)=g(2)+xg(x)-g(x+2)-\left(f(x)-3\right)^2 \Rightarrow$

$H'(x)=g(x)+xg'(x)-g'(x+2)-2\left(f(x)-3\right)f'(x)$.

Για $x=0 \Rightarrow H'(0)=0 \Rightarrow g(0)-g'(2)-2\left(f(0)-3\right)f'(0)=0 \Rightarrow g(0)=g'(2)$

$\Rightarrow g(0)=g'(2)=0, (2)$

Η σχέση $\int_{g(0)}^{g(\alpha)} f(x)dx=0$ από τη (2) γίνεται $\int_{0}^{g(\alpha)} f(x)dx=0$

Αν $g(\alpha)>0$ και επειδή $f(x)>0 \Rightarrow \int_{0}^{g(\alpha)} f(x)dx>0$ άτοπο.

Αν $g(\alpha)<0$ και επειδή $f(x)>0 \Rightarrow \int_{0}^{g(\alpha)} f(x)dx<0$ άτοπο. Άρα $g(\alpha)=0$, (3).

- Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση $W(x)=g(x)\cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0,\alpha]$.
    - $W(x)=g(x)\cdot \sigma\upsilon\nu x$ παραγωγίσιμη στο $[0,\alpha]$ (γινόμενο παραγωγίσιμων), οπότε και συνεχής στο $[0,\alpha]$
    - $W(0)=g(0)\cdot \sigma\upsilon\nu 0=0,\ W(\alpha)=g(\alpha)\cdot \sigma\upsilon\nu\alpha=0,$

      Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,\alpha): W'(x_0)=0$

      Έχουμε όμως $W'(x)=g'(x)\cdot \sigma\upsilon\nu x-g(x)\cdot \eta\mu x$. Για

      $x=x_0 \Rightarrow W'(x_0)=g'(x_0)\cdot \sigma\upsilon\nu x_0-g(x_0)\cdot \eta\mu x_0=0 \Leftrightarrow$

      $g'(x_0)=g(x_0)\cdot \dfrac{\eta\mu x_0}{\sigma\upsilon\nu x_0} \Leftrightarrow g'(x_0)=g(x_0)\cdot \varepsilon\varphi x_0$

Άσκηση 9_(νέα 2019)

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x)+f(x)=x^3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Δ4. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να γράψετε τη σχέση που συνδέει την f με την f'

Δ5. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

Δ6. Να υπολογίσετε τα όρια: $L_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}$, $L_2=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

Δ7. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης.

Δ8. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{f'}$,τον άξονα $x'x$ τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=\sqrt[3]{2}$

Λύση

Δ1. $f^3(x)+f(x)=x^3 \quad (1)$, για κάθε x ∈ $\mathbb{R}$

Με άτοπο

Έστω ότι η f δεν είναι ↑ στο $\mathbb{R}$, άρα θα υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ και $f(x_1)\ge f(x_2)$ (και όχι $f(x_1)<f(x_2)$)

$$f(x_1)\ge f(x_2)\Rightarrow \left.\begin{matrix} f^3(x_1)\ge f^3(x_2)\\ f(x_1)\ge f(x_2)\end{matrix}\right\}\Rightarrow f^3(x_1)+f(x_1)\ge f^3(x_2)+f(x_2)$$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} x_1^3\ge x_2^3 \Leftrightarrow x_1\ge x_2$ άτοπο. Άρα η f είναι ↑ στο $\mathbb{R}$

Δ2. Θέτουμε στην (1) όπου x το $-x$ και προκύπτει:

$$f^3(-x)+f(-x)=-x^3 \quad (2)$$

$$\overset{(1)+(2)}{\Rightarrow} f^3(x)+f^3(-x)+f(x)+f(-x)=0$$

$$\Leftrightarrow [f(x)+f(-x)]\left[f^2(x)-f(x)f(-x)+f^2(-x)\right]+[f(x)+f(-x)]=0$$

$$\Leftrightarrow [f(x)+f(-x)]\left[\underbrace{f^2(x)-f(x)f(-x)+f^2(-x)}_{A}+1\right]^{*}=0$$

$\Leftrightarrow f(x)+f(-x)=0 \Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η f περιττή.

* Η παράσταση Α είναι τριώνυμο του 2ου βαθμού ως προς f(x) με

$\Delta = f^2(-x) - 4f^2(-x) = -3f^2(-x) \le 0$ και $\alpha > 1$, άρα $\mathrm{A} \ge 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε

$\mathrm{A} + 1 \ge 1 > 0$

Δ3. Έστω x_0 τυχαίος πραγματικός αριθμός

Για $x = x_0 \overset{(1)}{\Rightarrow} f^3(x_0) + f(x_0) = x_0^3 \quad (3)$

$$\overset{(1)-(3)}{\Rightarrow} f^3(x) - f^3(x_0) + f(x) - f(x_0) = x^3 - x_0^3$$

$$\Leftrightarrow \left[f(x) - f(x_0)\right]\left[f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0)\right] + \left[f(x) - f(x_0)\right] = x^3 - x_0^3$$

$$\Leftrightarrow \left[f(x) - f(x_0)\right]\left[\underbrace{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0)}_{\mathrm{B}} + 1\right] = x^3 - x_0^3 \quad (4)$$

Το B είναι τριώνυμο 2ου βαθμού ως προς $f(x)$ με $\Delta = f^2(x_0) - 4f^2(x_0) = -3f^2(x_0) \le 0$ και $\alpha = 1 > 0$ άρα $\mathrm{B} \ge 0$, για κάθε $x, x_0 \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \mathrm{B} + 1 \ge 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{\mathrm{B}+1} \le 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{\mathrm{B}+1}\right| \le 1 \quad (i)$$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} \left|f(x) - f(x_0)\right|\left|f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1\right| = \left|x^3 - x_0^3\right|$$

$$\Rightarrow \left|f(x) - f(x_0)\right| = \frac{\left|x^3 - x_0^3\right|}{\left|f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1\right|} \quad (5)$$

$$\overset{(i)}{\Rightarrow} \left|\frac{1}{\mathrm{B}+1}\right| \le 1 \Leftrightarrow \frac{\left|x^3 - x_0^3\right|}{\left|f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1\right|} \le \left|x^3 - x_0^3\right| \quad (6)$$

$$\overset{(5),(6)}{\Rightarrow} \left|f(x) - f(x_0)\right| \le = \left|x^3 - x_0^3\right| \Leftrightarrow -\left|x^3 - x_0^3\right| \le f(x) - f(x_0) \le \left|x^3 - x_0^3\right|$$

$\lim\limits_{x \to \chi_0} \left|x^3 - x_0^3\right| = 0$ και $\lim\limits_{x \to \chi_0} \left[-\left|x^3 - x_0^3\right|\right] = 0$ άρα από το κριτήριο της παρεμβολής προκύπτει:

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) - f(x_0)\right] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Δηλαδή η f συνεχής στο x_0 και επειδή x_0 τυχαίος πραγματικός αριθμός, τελικά η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Δ4. Για $x \ne x_0 \overset{(4)}{\Rightarrow} f(x) - f(x_0) = \dfrac{(x - x_0)(x^2 + x \cdot x_0 + x_0^2)}{[f^2(x) + f(x) \cdot f(x_0) + f^2(x_0) + 1]}$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^2+x\cdot x_0+x_0^2}{f^2(x)+f(x)\cdot f(x_0)+f^2(x_0)+1} \quad (7)$$

έχουμε $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ αφού η f συνεχής άρα

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2+x\cdot x_0+x_0^2}{f^2(x)+f(x)\cdot f(x_0)+f^2(x_0)+1} \Leftrightarrow f'(x_0)=\frac{3x_0^2}{3f^2(x_0)+1}$$

και επειδή x_0 τυχαίος πραγματικός αριθμός άρα $f'(x)=\frac{3x^2}{3f^2(x)+1}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Δ5. $\overset{(1)}{\Rightarrow} f(x)[f^2(x)+1]=x^3 \Leftrightarrow f(x)=\frac{x^3}{f^2(x)+1} \quad (8)$

- αν $x>0 \Leftrightarrow x^3>0 \overset{(8)}{\Rightarrow} f(x)>0$
- αν $x<0 \Leftrightarrow x^3<0 \overset{(8)}{\Rightarrow} f(x)<0$
- αν $x=0 \Rightarrow f(0)=0$
- αν $x>0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f^3(x)+f(x)=x^3 \Rightarrow f^3(x)<x^3 \Leftrightarrow f(x)<x \Rightarrow 0<f^2(x)<x^2 \Leftrightarrow$

$$1<f^2(x)+1<x^2+1 \Leftrightarrow \frac{1}{f^2(x)+1}>\frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{x^3}{f^2(x)+1}>\frac{x^3}{x^2+1} \overset{(8)}{\Leftrightarrow} f(x)>\frac{x^3}{x^2+1} \quad (9)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty \overset{(9)}{\Rightarrow} \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x) \underset{u\to+\infty}{\overset{u=-x}{=}} \lim_{u\to+\infty}f(-u) \overset{f\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}}{=} \lim_{u\to+\infty}[-f(u)]=-\lim_{u\to+\infty}f(u)=-(+\infty)=-\infty$$

άρα η f συνεχής και $\uparrow$ στο $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ άρα Σ.Τ.

$$f(\mathbb{R})=(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x))=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

Δ6.

- Δείξαμε ότι $f(x)=\frac{x^3}{f^2(x)+1} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^3}=\frac{1}{f^2(x)+1}$

$$\lim_{x\to+\infty}[f^2(x)+1]=\lim_{x\to+\infty}f^2(x)+1=+\infty+1=+\infty$$

άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f^2(x)+1}=0$ οπότε $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f^2(x)+1}=0$

- $f^3(x)+f(x)=x^3 \overset{x>0}{\Rightarrow} \dfrac{f^3(x)}{x^3}+\dfrac{f(x)}{x^3}=1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^3=1-\dfrac{f(x)}{x^3} \overset{x>0}{\Rightarrow} \dfrac{f(x)}{x}=\sqrt[3]{1-\dfrac{f(x)}{x^3}} \Rightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty}[1-\frac{f(x)}{x^3}]}=\sqrt[3]{1-0}=\sqrt[3]{1}=1$$

Δ₇. Η $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ επομένως και 1-1 άρα αντιστρέφεται. Θέτω $f(x)=y$ και επιλύω ως προς x

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} y^3+y=x^3 \Leftrightarrow x=\begin{cases}\sqrt[3]{y^3+y}, \alpha\nu\ y^3+y\geq 0 \Leftrightarrow y(y^2+1)\geq 0 \Leftrightarrow y\geq 0\\ -\sqrt[3]{-y^3-y}, \alpha\nu\ y^3+y<0 \Leftrightarrow y<0\end{cases}$$

Άρα $f^{-1}(y)=\begin{cases}\sqrt[3]{y^3+y}, \alpha\nu\ y\geq 0\\ -\sqrt[3]{-y^3-y}, \alpha\nu\ y<0\end{cases}$

ή $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^3+x}, \alpha\nu\ x\geq 0\\ -\sqrt[3]{-x^3-x}, \alpha\nu\ x<0\end{cases}$

Δ₈. Δείξαμε ότι $f'(x)=\dfrac{3x^2}{3f^2(x)+1}\geq 0$, για κάθε $x\geq 0$

$$E=\int_0^{\sqrt[3]{2}} f'(x)dx=\left[f(x)\right]_0^{\sqrt[3]{2}}=f(\sqrt[3]{2})-f(0)=f(\sqrt[3]{2})$$

Έχουμε: $f(\sqrt[3]{2})=a \overset{(1)}{\Rightarrow} a^3+a=(\sqrt[3]{2})^3 \Leftrightarrow a^3+a-2=0$,

Horner:

1	0	1	-2	1
	1	1	2	
1	1	2	0	

$\Leftrightarrow (\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+2)=0$ $\alpha=1$ ή $\alpha^2+\alpha+2=0$ αδύνατη αφού $\Delta=-7<0$

άρα $E=f(\sqrt[3]{2})=a=1\ \tau.\mu$

Άσκηση 10_(νέα 2019)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-6a^2x^2+8a^2x+5a^4$ με $\alpha>1$

Δ₁. Να αποδείξετε ότι η C_f έχει δύο σημεία καμπής.

Δ₂. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό ελάχιστο στη θέση x_1 με $x_1<-a$, παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο στη θέση x_2 με $-a<x_2<a$ και επίσης παρουσιάζει ένα τοπικό ελάχιστο στη θέση x_3 με $x_3>a$

Δ₃. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του a για την οποία ισχύει $f'(x)\geq 32-32a$ για κάθε $x\geq a$

Δ₄. Να αποδείξετε ότι $f(a+10)-f(a)<f'(a+1)+f'(a+2)+...+f'(a+10)$

<u>Λύση</u>

Δ₁. $f(x)=x^4-6a^2x^2+8\alpha^2x+5\alpha^4$, $\alpha>1$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική.

$f'(x)=4x^3-12\alpha^2x+8\alpha^2$

$f''(x)=12x^2-12\alpha^2$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 12(x^2-\alpha^2)=0 \Leftrightarrow x^2=\alpha^2 \Leftrightarrow \mathrm{x}=-\alpha \ \acute{\eta}\ \mathrm{x}=\alpha$

x	$-\infty$		$-\alpha$		α		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			Σ.Κ.		Σ.Κ.		

- Η f είναι κυρτή στο $(-\infty,\alpha]$ και στο $[\alpha,+\infty)$
- Η f είναι κοίλη στο $[-\alpha,\alpha]$

Η C_f έχει δύο σημεία καμπής, τα $\mathrm{A}(-\alpha,-8\alpha^3)$ και $\mathrm{B}(\alpha,8\alpha^3)$

$f(\alpha)=\alpha^4-6\alpha^4+8\alpha^3+5\alpha^4=8\alpha^3$

$f(-\alpha)=\alpha^4-6\alpha^4-8\alpha^3+5\alpha^4=-8\alpha^3$

Δ₂.

x	$-\infty$		$-\alpha$		α		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		↗		↘		↗	

- $f''(\mathrm{x}) > 0, \forall x \in (-\infty, -\alpha) \Rightarrow \eta\ f' \uparrow \sigma\tau o\left(-\infty, -\alpha\right]$
- $f''(\mathrm{x}) < 0, \forall x \in (-\alpha, \alpha) \Rightarrow \eta\ f' \downarrow \sigma\tau o\left[-\alpha, \alpha\right]$
- $f''(x) > 0,\ \forall x \in \left(\alpha, +\infty\right) \Rightarrow \eta\ f' \uparrow \sigma\tau o\left[\alpha, +\infty\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(\mathrm{x}) = \lim\limits_{x\to-\infty}(4\mathrm{x}^3) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f'(\mathrm{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty}(4\mathrm{x}^3) = +\infty$

$f'(-\alpha) = 8\alpha^3 + 8\alpha^2 = 8\alpha^2(\alpha+1),\quad f'(\alpha) = -8\alpha^3 + 8\alpha^2 = 8\alpha^2(-\alpha+1),$

$\Delta_1 = (-\infty, -\alpha)$, Η f' συνεχής και $\uparrow$ στο Δ_1 άρα $f'(\Delta_1) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x),\ f'(-a)\right) = (-\infty, 8a^2\underset{(+)}{(a+1)})$

$\Delta_2 = [-\alpha, \alpha]$, η f' συνεχής και $\downarrow$ στο Δ_2

Άρα $f'(\Delta_2) = \left[\,f'(\alpha),\ f'(-a)\right] = [8a^2\underset{(-)}{(-a+1)}), 8a^2\underset{(+)}{(a+1)})]$

$\Delta_3 = (\alpha, +\infty)$ η f' συνεχής και $\uparrow$ στο Δ_3

Άρα $f'(\Delta_3) = \left(f'(a), \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x),\right) = (8a^2\underset{(-)}{(-a+1)}, +\infty)$

- Το $0 \in f'(\Delta_1)$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \Delta_1 = (-\infty, -\alpha)$ τ.ώ. $f'(x_1) = 0,$ αφού η $f' \uparrow$ στο Δ_1
- Το $0 \in f'(\Delta_2)$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_2 \in (-a, -a)$ τ.ώ. $f'(x_2) = 0$
- Το $0 \in f'(\Delta_3)$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_3 \in (\alpha, +\infty)$τ.ώ. $f'(x_3) = 0$

x	$-\infty$		x_1		$-\alpha$		x_2		α		x_3		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	↗	0	↗		↘	0	↘		↗	0	↗	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↘	$T.E.$	↗		↗	$T.M.$	↘		↘	$T.E.$	↗	$+\infty$

- $x < x_1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ η f $\downarrow$ στο $(-\infty, x_1]$

- $$\left.\begin{array}{l} x_1 < x < -a \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x) > 0 \\ -a \le x < x_2 \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x) > 0 \end{array}\right\} \acute{\alpha}\rho\alpha \ f'(x) > 0 \text{ για κάθε x} \in (x_1, x_2) \text{ οπότε η} f$$

  γνησίως αύξουσα στο $[x_1, x_2]$

- $$\left.\begin{array}{l} x_2 < x \le \alpha \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x) < 0 \\ \alpha \le x < x_3 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_3) \Leftrightarrow f'(x) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x) < 0 \text{ για κάθε x} \in (x_2, x_3) \text{ άρα η } f \downarrow \text{ στο } [x_2, x_3]$$

- $x > x_3 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_3) \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ η $f \uparrow$ στο $[x_3, +\infty]$

Από τα παρακάτω και τον πίνακα 3 προκύπτει ότι η f παρουσιάζει τοπ. ελάχιστο στο $x_1 < -\alpha$, τοπ. μέγιστο στο x_2 με $-\alpha < x_2 < \alpha$ και τοπ. ελάχιστο στο x_3 με $x_3 > \alpha$.

Δ₃. Η $f' \uparrow$ στο $[\alpha, +\infty]$ άρα $x \ge \alpha \Leftrightarrow f'(x) \ge f'(\alpha) \quad (i)$

Για να ισχύει $f'(x) \ge 32 - 32\alpha$, για κάθε $x \ge \alpha$ λόγω της (i) αρκεί να ισχύει

$$f'(\alpha) \ge 32 - 32\alpha \Leftrightarrow -8\alpha^3 + 8\alpha^2 \ge 32 - 32\alpha$$

$$\Leftrightarrow 8\alpha^3 + 8\alpha^2 + 32\alpha - 32 \ge 0 \Leftrightarrow 8\alpha^2(-\alpha + 1) - 32(-\alpha + 1) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (-\alpha + 1)(8\alpha^2 - 32) \ge 0 \Leftrightarrow 8(-\alpha + 1)(\alpha^2 - 4) \ge 0 \Leftrightarrow \Gamma(\alpha) \ge 0$$

α	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$8(-\alpha+1)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\alpha^2 - 4$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\Gamma(\alpha)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$\Gamma(\alpha) \ge 0 \Leftrightarrow 1 < \alpha \le 2$ άρα $a_{\max} = 2$

Δ₄. Δείξαμε ότι η $f' \uparrow \sigma\tau o[\alpha, +\infty]$ Άρα:

$$\alpha \le x \le \alpha+1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(\alpha) \le f'(x) \le f'(\alpha+1) \Rightarrow \int_{\alpha}^{\alpha+1} f'(x)dx < \int_{\alpha}^{\alpha+1} f'(\alpha+1)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\alpha+1} f'(x)dx < f'(\alpha+1)(\alpha+1-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\alpha+1} f'(x)dx < f'(\alpha+1)$$

$$\alpha+1 \le x \le \alpha+2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \int_{\alpha+1}^{\alpha+2} f'(x)dx < f'(\alpha+2)$$

$$\vdots$$

$$\alpha+9 \le x \le \alpha+10 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \int_{\alpha+9}^{\alpha+10} f'(x)dx < f'(\alpha+10)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+1} f'(x)dx + \int_{\alpha+1}^{\alpha+2} f'(x)dx + \ldots + \int_{\alpha+9}^{\alpha+10} f'(x)dx < f'(\alpha+1) + f'(\alpha+2) + \ldots + f'(\alpha+10)$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\alpha+10} f'(x)dx < f'(\alpha+1) + f'(\alpha+2) + \ldots + f'(\alpha+10)$$

$$\Leftrightarrow [f(x)]_{\alpha}^{\alpha+10} < f'(\alpha+1) + f'(\alpha+2) + \ldots + f'(\alpha+10)$$

$$\Leftrightarrow f(a+10) - f(\alpha) < f'(\alpha+1) + f'(\alpha+2) + \ldots + f'(\alpha+10)$$

Άσκηση 11_(νέα 2019)

Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$,δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ για την οποία επιπλέον σχύει:

$f(0)=0$, $f(4)=8$ και $f'(0)<0$

Δ₁. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_1\in(0,4)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$

Δ₂. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,4)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)>0$

Δ₃. Αν η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$

1. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
2. Αν η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=1$
3. Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $[0,+\infty)$ σε μοναδικό σημείο $x_0\in(0,4)$
4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x+1)-f(x)=2$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο [0,3]

Λύση

Δ₁. $f'(0)<0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}<0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$ άρα $\dfrac{f(x)}{x}<0$ κοντά στο μηδέν από δεξιά, επομένως $f(x)<0$ κοντά στο 0 αφού $x>0$.Άρα υπάρχει $\kappa>0$ τ.ώ. $f(\kappa)<0$.

Έτσι:

Η f συνεχής στο $[\kappa,4]$ και $f(\kappa)f(4)<0$ άρα σύμφωνα με θεώρημα Bolzano

$\exists x_1\in(\kappa,4)\subseteq(0,4)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$

Δ₂. Η f συνεχής στο $[0,4]$

Η f παρ/μη συνεχής στο $(0,4)$

άρα σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\rho\in(0,4)$ τέτοιο ώστε

$$\left.\begin{array}{l} f'(\rho)=\dfrac{f(4)-f(0)}{4}=\dfrac{8-0}{4}=2>0 \\ f'(0)<0\Leftrightarrow -f'(0)>0 \end{array}\right\}\Rightarrow f'(\rho)-f'(0)>0 \quad (i)$$

Η f' συνεχής στο $[0,\rho]\subseteq[0,4]$

Η f' παρ/μη συνεχής στο $(0,\rho)\subseteq(0,4)$

άρα σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (0,\rho) \subseteq (0,4)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = \dfrac{f'(\rho) - f'(0)}{\rho} > 0$

λόγω (i) αφού και $\rho > 0$

Δ₃1. Η εξίσωση εφαπτομένης στη C_f στο $(\rho, f(\rho))$ του (β) ερωτήματος είναι:

$y - f(\rho) = f'(\rho)(x-\rho) \Leftrightarrow y = f'(\rho)x - \rho f'(\rho) + f(\rho)$

Η f κυρτή στο $[0,+\infty]$ άρα η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της C_f στο $[0,+\infty]$ βρίσκεται κάτω από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Άρα ισχύει $f(x) \geq f'(\rho)x - \rho f'(\rho) + f(\rho) \quad (\alpha)$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$

Ισχύει $\lim\limits_{x\to\infty}[f'(\rho)x - \rho f'(\rho) + f(\rho)] = \lim\limits_{x\to\infty}[f'(\rho)x] = f'(\rho)\lim\limits_{x\to\infty} x = f'(\rho)(+\infty) = +\infty, \quad (\beta)$ αφού

$f'(\rho) > 0 \overset{(\alpha)}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \geq \lim\limits_{x\to\infty}[f'(\rho)x - \rho f'(\rho) + f(\rho)] \underset{(\alpha)}{\overset{(\beta)}{\Rightarrow}} \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

Δ₃2. Αφού η $y = x$ είμαι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, ισχύει $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 1 \quad (\gamma)$

Επίσης $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} \underset{\Delta-1-\mathrm{H}}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{(x)'} = \lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ άρα $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} \overset{(\gamma)}{=} 1$

Δ₃3. Η f συνεχής στο $[0,x_1]$ όπου x_1 το x_1 του ερωτήματος (α)

- Η f παρ/μη στο $(0,x_1)$
- $f(0) = f(x_1) = 0$

άρα σύμφωνα με το Θ. Rolle υπάρχει $x_0 \in (0,x_1) \subseteq (0,4)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$

Η f κυρτή στο $[0,+\infty]$ άρα η $f' \uparrow$ στο $(0,+\infty)$

$0 < x < x_0 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

$x > x_0 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	0 $\qquad$ x_0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
$f(x)$	$\searrow$ $\quad$ ΟΛ.ΕΛ. $\quad$ $\nearrow$

Άρα η f στο x_0 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο που είναι ολικό. Το x_0 είναι μοναδικό αφού η f' είναι $\uparrow$ στο $(0,+\infty)$ επομένως και 1-1.

Δ34. Έστω ότι η εξίσωση $f(x+1)-f(x)=2 \Leftrightarrow f(x+1)-f(x)-2=0,$ είναι αδύνατη στο $[0,3]$ άρα η $g(x)=0,$ όπου $g(x)=f(x+1)-f(x)-2$ είναι αδύνατη στο $[0,3]$. Επομένως

Η g συνεχής στο $[0,3]$ ως πράξεις συνεχών

$g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[0,3]$

άρα η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[0,3]$

Έστω $g(x)>0$ για κάθε $x\in[0,3]$. Άρα:

$$g(0)>0 \Leftrightarrow f(1)-f(0)-2>0 \Leftrightarrow f(1)-f(0)>2$$
$$g(1)>0 \Leftrightarrow f(2)-f(1)-2>0 \Leftrightarrow f(2)-f(1)>2$$
$$g(2)>0 \Leftrightarrow f(3)-f(2)-2>0 \Leftrightarrow f(3)-f(2)>2$$
$$g(3)>0 \Leftrightarrow f(4)-f(3)-2>0 \Leftrightarrow f(4)-f(3)>2$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$f(4)-f(0)>8 \Leftrightarrow 8-0>8 \Leftrightarrow 8>8$ άτοπο

Ομοίως σε άτοπο καταλήγουμε αν υποθέσουμε ότι $g(x)<0$ για κάθε $x\in[0,3]$

Άρα η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x+1)-f(x)=2$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[0,3]$.

Άσκηση 12 (Νέο 2022)

Δίνεται συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0,+\infty)$,παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν:

- $2\sqrt{x}f'(x)=2\sqrt{x}+1$ για κάθε $x>0.$
- Η κλίση της συνάρτησης $xf(x)$ στο 0 είναι $0.$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+\sqrt{x}, x\geq 0.$

Δ2. Ένα σημείο Μ ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x), x\geq 0.$ Να βρείτε την θέση του σημείου Μ την χρονική στιγμή $t_0>0$ κατά την οποία ισχύει ότι $(3x'(t_0)-2y'(t_0))(\eta\mu t_0-2t_0)=0$,με $x'(t)>0$ για κάθε $t>0.$

Δίνεται επίσης η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Δ3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης fog .

Δ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=(fog)(x)+\frac{x}{2021}$ αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της h^{-1}.

Λύση

Δ1. Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$2\sqrt{x}f'(x)=2\sqrt{x}+1 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+1 \Leftrightarrow f'(x)=\left(x+\sqrt{x}\right)'$$

Η συνάρτηση f και η συνάρτηση $x+\sqrt{x}$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$,επομένως από την συνέπεια του ΘΜΤ υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

$$f(x)=x+\sqrt{x}+c \text{ για κάθε } x\in[0,+\infty).$$

Η συνάρτηση $x\cdot f(x)$ έχει στο 0 κλίση $0.$

Επομένως :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot f(x)-0\cdot f(0)}{x}=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\left(x+\sqrt{x}+c\right)=0 \Leftrightarrow c=0.$$

Συνεπώς $f(x)=x+\sqrt{x}, x\geq 0.$

Δ2. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $\eta\mu x<x$.Επειδή $t_0>0$ έχουμε $\eta\mu t_0<t_0<2t_0$.

Άρα $\eta\mu t_0-2t_0<0.$

Συνεπώς $(3x'(t_0)-2y'(t_0))(\eta\mu t_0-2t_0)=0 \Leftrightarrow y'(t_0)=\frac{3}{2}x'(t_0).$

Όμως για κάθε $t>0$ έχουμε $y(t)=x(t)+\sqrt{x(t)} \Rightarrow y'(t)=x'(t)+\frac{x'(t)}{2\sqrt{x(t)}}$.

Για $t=t_0$ έχουμε:

$$y'(t_0)=x'(t_0)+\frac{x'(t_0)}{2\sqrt{x(t_0)}}\Rightarrow x'(t_0)+\frac{x'(t_0)}{2\sqrt{x(t_0)}}=\frac{3}{2}x'(t_0)\overset{x'(t_0)>0}{\Rightarrow}1+\frac{1}{2\sqrt{x(t_0)}}=\frac{3}{2}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x(t_0)}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{x(t_0)}=1\Rightarrow x(t_0)=1.$$

Τότε $y(t_0)=x(t_0)+\sqrt{x(t_0)}=2.$

Άρα την χρονική στιγμή t_0 το M βρίσκεται στο σημείο $(1,2)$.

Δ3. Η fog ορίζεται, αν και μόνο αν:

$$\begin{cases}x\in D_g\\ g(x)\in D_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in \mathbb{R}\\ g(x)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in \mathbb{R}\\ g(x)\geq g(0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in \mathbb{R}\\ x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\geq 0$$

αφού η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της fog είναι το $[0,+\infty)$.

Δ4. Η h έχει πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$.

Θα αποδείξουμε αρχικά ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Α τρόπος:

Για κάθε $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}$$
$$x_1<x_2$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $x_1+\sqrt{x_1}<x_2+\sqrt{x_2}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Β τρόπος:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}>0.$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Για να αποδείξουμε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα επειδή δεν δίνεται ότι η g είναι παραγωγίσιμη θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό.

Για κάθε $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\overset{g,\uparrow\mathbb{R}}{\Rightarrow}g(x_1)<g(x_2)\underset{g(x_1),g(x_2)\in[0,+\infty)}{\overset{f,\uparrow[0,+\infty)}{\Rightarrow}}f(g(x_1))<f(g(x_2))$$

$$x_1<x_2\Rightarrow\frac{x_1}{2021}<\frac{x_2}{2021}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε:

$$f(g(x_1))+\frac{x_1}{2021}<f(g(x_2))+\frac{x_2}{2021}\Rightarrow h(x_1)<h(x_2)$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,συνεπώς $1-1$,επομένως αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της h^{-1} είναι το σύνολο τιμών της h.

Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ επομένως

$$h\left(\left[0,+\infty\right)\right)=\left[h\left(0\right),\lim_{x\to+\infty}h(x)\right)$$

Όμως $h\left(0\right)=f\left(g\left(0\right)\right)+0=f\left(0\right)=0.$

Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$x>0\overset{g,\uparrow\mathbf{R}}{\Rightarrow}g\left(x\right)>g\left(0\right)\Rightarrow g\left(x\right)>0\underset{g(x),0\in[0,+\infty)}{\overset{f,\uparrow[0,+\infty)}{\Rightarrow}}f\left(g\left(x\right)\right)>f\left(0\right)\Rightarrow$$

$$f\left(g\left(x\right)\right)+\frac{x}{2021}>\frac{x}{2021}\Rightarrow h\left(x\right)>\frac{x}{2021}.$$

Επειδή $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2021}=+\infty$ τελικά $\lim_{x\to+\infty}h(x)=+\infty.$

Άρα το πεδίο ορισμού της h^{-1} είναι το $\left[0,+\infty\right).$

Άσκηση 13 (Νέο 2022)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$, $x\geq 0$.

Δ1) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε $x,y\in[0,+\infty)$ αληθεύει η σχέση:

$f(x+y)\leq f(x)+f(y)$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Δ2) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(36,6)$.

Δ3) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$ και ισχύει:

$$\sqrt{f\left(x^{2020}\right)}<\frac{\sqrt{3}}{6}x^{1010}+\sqrt{3}$$

Δ4) Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x)=e^{x}+\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$.

i) Να ορίσετε τη σύνθεση $\varphi=g\circ f$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση: $\varphi(x)=2e^{\sqrt{x}}-1$

ii) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $\varphi(x)=\alpha$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\alpha\in\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$, $x\geq 0$.

Δ1) Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $x,y\in[0,+\infty)$ ισχύει $f(x+y)\leq f(x)+f(y)$.

Με $x,y\in[0,+\infty)$ έχουμε: $f(x+y)\leq f(x)+f(y)\Leftrightarrow\sqrt{x+y}\leq\sqrt{x}+\sqrt{y}$

$\overset{\text{μη αρνητικά}}{\Leftrightarrow}\left(\sqrt{x+y}\right)^{2}\leq\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^{2}\Leftrightarrow x+y\leq x+2\sqrt{x}\sqrt{y}+y\Leftrightarrow 2\sqrt{xy}\geq 0$ που ισχύει

Επειδή εργαστήκαμε με ισοδυναμίες, η ισότητα στην αρχική σχέση θα ισχύει αν και μόνο αν $2\sqrt{xy}=0$ δηλαδή αν και μόνο αν $x=0$ ή $y=0$.

Δ2) Προφανώς ισχύει $f(36)=\sqrt{36}=6$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Άρα $f'(36)=\dfrac{1}{2\sqrt{36}}=\dfrac{1}{12}$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(36,6)$ είναι:

$$y-f(36)=f'(36)(x-36)\Leftrightarrow y-6=\frac{1}{12}(x-36)\Leftrightarrow y=\frac{1}{12}x+3$$

Δ3) Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει

$f''(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ η f θα είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$. Επομένως η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης σε κάθε σημείο της με τετμημένη στο $(0,+\infty)$ θα βρίσκεται πάνω από αυτή σε όλο το $[0,+\infty)$ με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Άρα με βάση το **Δ2)** ερώτημα θα έχουμε: $f(x)\le\dfrac{1}{12}x+3$ για κάθε $x\ge 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=36$. Όμως για κάθε $x\ge 0$ είναι $x^{2020}\ge 0$ και άρα έχουμε: $f\left(x^{2020}\right)\le\dfrac{1}{12}x^{2020}+3$ και η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x^{2020}=36$. Επομένως για κάθε $x\ge 0$ θα είναι: $f\left(x^{2020}\right)\le\dfrac{1}{12}x^{2020}+3\Rightarrow\sqrt{x^{2020}}\le\dfrac{1}{12}x^{2020}+3\Rightarrow\sqrt{\sqrt{x^{2020}}}\le\sqrt{\dfrac{1}{12}x^{2020}+3}$

$\le\sqrt{\dfrac{1}{12}x^{2020}}+\sqrt{3}=\dfrac{x^{1010}}{2\sqrt{3}}+\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}x^{1010}}{6}+\sqrt{3}$. Όμως στην τελευταία ανισοϊσότητα, σύμφωνα με το **Α)** ερώτημα, η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x^{2020}=0$. Επομένως προκύπτει ότι για κάθε $x\ge 0$ ισχύει: $\sqrt{f\left(x^{2020}\right)}<\dfrac{\sqrt{3}x^{1010}}{6}+\sqrt{3}$

Δ4) Έστω η συνάρτηση $g(x)=e^x+\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$.

i) Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g\circ f$ έχουμε

$D_{g\circ f}=\left\{x\in D_f \,\middle|\, f(x)\in D_g\right\}=\left\{x\ge 0 \,\middle|\, \sqrt{x}\in\mathbb{R}\right\}=[0,+\infty)$ ενώ για τον τύπο της $(g\circ f)(x)=g(f(x))=e^{\sqrt{x}}+\eta\mu\sqrt{x}$ επομένως θα είναι: $\varphi(x)=e^{\sqrt{x}}+\eta\mu\sqrt{x}$, $x\ge 0$

Λύση της εξίσωσης: Η εξίσωση $\varphi(x)=2e^{\sqrt{x}}-1$ ορίζεται αν και μόνο αν $x\ge 0$.

Έχουμε: $\varphi(x)=2e^{\sqrt{x}}-1\Leftrightarrow e^{\sqrt{x}}+\eta\mu\sqrt{x}=2e^{\sqrt{x}}-1\Leftrightarrow e^{\sqrt{x}}-\eta\mu\sqrt{x}-1=0$ (1)

Παρατηρούμε ότι για $x=0$ η εξίσωση (1) επαληθεύεται. Έστω $x>0$, θα είναι:

$x>0\overset{\sqrt{x}>0}{\Rightarrow}e^{\sqrt{x}}>\sqrt{x}+1>\eta\mu\sqrt{x}+1\Rightarrow e^{\sqrt{x}}-\eta\mu\sqrt{x}-1>0$ διότι $e^x\ge x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$ και επίσης $x>\eta\mu x$ για κάθε $x>0$ αφού ισχύει $\eta\mu x\le|\eta\mu x|<|x|=x$ όταν $x>0$. Τελικά η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση τον αριθμό $x=0$.

Άλλος τρόπος: Θεωρούμε τη συνάρτηση $\sigma(x)=e^{\sqrt{x}}-\eta\mu\sqrt{x}-1,\ x\geq 0$. Η σ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $\sigma'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}-\frac{\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\frac{e^{\sqrt{x}}-\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}>0$ διότι για κάθε $x>0$ ισχύει $\sqrt{x}>0$ και $e^{\sqrt{x}}>1$ και $\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}\leq 1$. Επίσης η σ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και άρα η συνάρτηση σ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Επομένως θα ισχύει:

$x\geq 0\overset{\sigma\nearrow}{\Rightarrow}\sigma(x)\geq\sigma(0)=0$ με την ισότητα μόνο για $x=0$.

ii) Η συνάρτηση φ με $\varphi(x)=e^{\sqrt{x}}+\eta\mu\sqrt{x}$, $x\geq 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $\varphi'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}+\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}>0$ διότι για κάθε $x>0$ έχουμε $\sqrt{x}>0$ και $e^{\sqrt{x}}>1$ και $\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}\geq -1$. Επίσης η φ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ ως άθροισμα και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και άρα η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της: $\varphi([0,+\infty))\underset{\varphi\text{ γνησίως αύξουσα}}{\overset{\varphi\text{ συνεχής}}{=}}\left[\varphi(0),\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)\right)$

Εύκολα προκύπτει ότι $\varphi(0)=1$ και για το όριο έχουμε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$-1\leq\eta\mu\sqrt{x}\Rightarrow e^{\sqrt{x}}-1\leq e^{\sqrt{x}}+\eta\mu\sqrt{x}=\varphi(x)$ και επειδή

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\sqrt{x}}-1\right)\underset{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty}{\overset{\sqrt{x}=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\left(e^{u}-1\right)\overset{(+\infty)+(-1)}{=}+\infty$ θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$. Άρα έχουμε $\varphi([0,+\infty))=[1,+\infty)$ οπότε η εξίσωση $\varphi(x)=\alpha$ θα έχει:

- καμία λύση αν $\alpha<1$, αφού τότε δεν υπάρχει $x\geq 0$ ώστε $\varphi(x)=\alpha$ και

- ακριβώς μία λύση αν $\alpha\geq 1$, αφού τότε υπάρχει μοναδικό (λόγω μονοτονίας) $x\geq 0$ ώστε $\varphi(x)=\alpha$

Άσκηση 14 (Νέο 2022)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x-\sqrt{-x}$, $x\le 0$.

Δ1) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x΄x και y΄y και στη συνέχεια να εξετάσετε αν η f είναι συνάρτηση 1-1.

Δ2) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη.

Δ3) Να προσδιορίσετε:

i) Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

ii) Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=\alpha$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου α ∈ ℝ.

Δ4) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

Δ5) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα x΄x , τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.

<u>Λύση</u>

Έστω η συνάρτηση $f(x)=-x-\sqrt{-x}$, $x\le 0$.

Δ1) Παρατηρούμε ότι $f(0)=0$ και άρα το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y είναι η αρχή των αξόνων $O(0,0)$. Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=0$ ώστε να βρούμε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x. Με $x\le 0$ έχουμε: $f(x)=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-x}=-x \Leftrightarrow \left(\sqrt{-x}\right)^2=x^2 \Leftrightarrow -x=x^2 \Leftrightarrow x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=-1$$

Άρα τα κοινά σημεία είναι τα $O(0,0)$ και $A(-1,0)$.

Για το 1-1: Από τα προηγούμενα προέκυψε ότι ενώ $-1\ne 0$ ισχύει $f(0)=0=f(-1)$ και άρα η συνάρτηση f δεν είναι 1-1.

Δ2) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ ως σύνθεση και άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$f'(x)=\left(-x-\sqrt{-x}\right)'=-1-\frac{-1}{2\sqrt{-x}}=\frac{1}{2\sqrt{-x}}-1=\frac{1-2\sqrt{-x}}{2\sqrt{-x}}$$

Εξετάζουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με τον ορισμό:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x-\sqrt{-x}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\left(-1-\frac{\sqrt{-x}}{x}\right) \overset{*}{=} -1-(-\infty) = +\infty,$$

$(*)\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{\sqrt{-x}}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{\sqrt{-x}\sqrt{-x}}{x\sqrt{-x}}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{-x}{x\sqrt{-x}}\right) = -\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{\sqrt{-x}}\right) = -\infty$ οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Δ3) Παρακάτω βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των λύσεων της δοθείσας παραμετρικής εξίσωσης:

i) Με $x<0$ έχουμε: $f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-2\sqrt{-x}=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{-x}=1 \Leftrightarrow -4x=1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}$ και επίσης

$f'(x)>0 \overset{2\sqrt{-x}>0}{\Leftrightarrow} 1-2\sqrt{-x}>0 \Leftrightarrow 2\sqrt{-x}<1 \Leftrightarrow -4x<1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}<x<0$. Τέλος, είναι προφανές ότι:

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x<-\frac{1}{4}$. Επειδή επιπλέον η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{1}{4},0\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right]$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right]$ θα ισχύει

$f\left(\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right]\right)=\left[f\left(-\frac{1}{4}\right),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)$. Έχουμε $f\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}-\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}-\frac{2}{4}=-\frac{1}{4}$ και

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x-\sqrt{-x}\right) \underset{\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty}{\overset{-x=u}{=}} \lim_{u\to+\infty}\left(u-\sqrt{u}\right)=\lim_{u\to+\infty}\left[\sqrt{u}\left(\sqrt{u}-1\right)\right] \overset{(+\infty)(+\infty-1)}{=} +\infty$$

Άρα $f\left(\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right]\right)=\left[-\frac{1}{4},+\infty\right)$. Επίσης η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{1}{4},0\right]$

οπότε θα είναι $f\left(\left(-\frac{1}{4},0\right]\right)=\left(\lim\limits_{x\to-\frac{1}{4}^+}f(x),f(0)\right]$. Έχουμε: $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{4}^+}f(x)=f\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$ και

$f(0)=0$. Άρα $f\left(\left(-\frac{1}{4},0\right]\right)=\left(-\frac{1}{4},0\right]$. Επομένως το σύνολο τιμών της θα είναι:

$$f\left((-\infty,0]\right)=\left[-\frac{1}{4},+\infty\right)\cup\left(-\frac{1}{4},0\right]=\left[-\frac{1}{4},+\infty\right)$$

Άλλος τρόπος: Αρκεί να βρούμε όλους τους $y\in\mathbb{R}$ για τους οποίους η εξίσωση $f(x)=y$ έχει μία τουλάχιστον λύση. Με $x\le 0$ έχουμε:

$f(x)=y \Leftrightarrow -x-\sqrt{-x}=y \Leftrightarrow \sqrt{-x}^2-\sqrt{-x}-y=0 \overset{\sqrt{-x}=\omega\ge 0}{\Leftrightarrow} \omega^2-\omega-y=0$ (1)

Η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα $\Delta = 1+4y$ και έχει μία τουλάχιστον λύση αν και μόνο αν ισχύει: $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1+4y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{4}$. Επειδή επιπλέον το άθροισμα των ριζών, από τους τύπους του Vieta, είναι ίσο με $S = 1 > 0$ η (1) έχει μία τουλάχιστον μη αρνητική ρίζα που είναι και το ζητούμενο. Τελικά η εξίσωση $f(x) = y$ έχει λύση αν και μόνο αν $y \geq -\frac{1}{4}$, οπότε

$$f((-\infty, 0]) = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right).$$

ii) Η εξίσωση $f(x) = \alpha$ με $\alpha \in \mathbb{R}$ ορίζεται αν και μόνο αν $x \leq 0$. Σύμφωνα με αυτά που προέκυψαν στο **Δ3i)** ερώτημα έχουμε:

● Αν $\alpha < -\frac{1}{4}$ η εξίσωση δεν έχει λύση.

● Αν $\alpha = -\frac{1}{4}$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = -\frac{1}{4}$

● Αν $-\frac{1}{4} < \alpha \leq 0$ η εξίσωση έχει, λόγω μονοτονίας της f , ακριβώς δύο λύσεις. Μία στο διάστημα $[-1, -\frac{1}{4})$ και μία στο διάστημα $\left(-\frac{1}{4}, 0\right]$

● Αν $\alpha > 0$ η εξίσωση έχει, λόγω μονοτονίας της f , ακριβώς μία λύση, η οποία ανήκει στο διάστημα $(-\infty, -1)$

Δ4) Η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

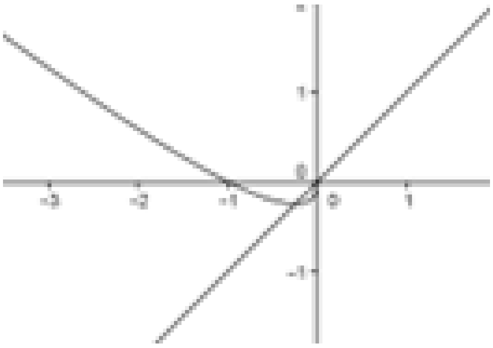
$$(f'(x))' = f''(x) = \left(-1+\frac{1}{2\sqrt{-x}}\right)' = \frac{-\frac{2}{2\sqrt{-x}}\cdot(-1)}{4(-x)} = -\frac{1}{4x\sqrt{-x}} > 0$$ για κάθε $x < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ η f είναι κυρτή στο διάστημα αυτό το οποίο είναι και το πεδίο ορισμού της. Επομένως η γραφική της παράσταση δεν έχει σημεία καμπής. Στη συνέχεια αναζητούμε ασύμπτωτη μόνο στο $-\infty$ διότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $(-\infty, 0]$ και επομένως η γραφική της παράσταση δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη ούτε ασύμπτωτη στο $+\infty$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x-\sqrt{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x-\sqrt{-x}}{-(-x)} = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{\sqrt{-x}^2-\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}^2}\right) \underset{\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-x}=+\infty}{\overset{\sqrt{-x}=u}{=}} \lim_{u\to+\infty}\left(-\frac{u^2-u}{u^2}\right)$$

$$= \lim_{u\to+\infty}\left(-\frac{u^2}{u^2}\right) = -1$$ και $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-1)x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[-x-\sqrt{-x}+x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{-x}\right) = -\infty$ οπότε η γραφική παράσταση της f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$			$+$		
$f(x)$		$\searrow$	O.E $-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα μεταβολών της f σχεδιάζουμε τη γραφική της παράσταση:



Δ5) Ως γνωστόν, η ευθεία που διχοτομεί την πρώτη και την τρίτη γωνία των αξόνων έχει εξίσωση $y=x$. Βρίσκουμε τη σχετική θέση της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία αυτή, προς τούτο θα βρούμε το πρόσημο της συνάρτησης $g(x)=x-f(x)=x+x+\sqrt{-x}=2x+\sqrt{-x}$, $x\le 0$. Έχουμε:

- $g(x)=0 \Leftrightarrow 2x+\sqrt{-x}=0 \Leftrightarrow \sqrt{-x}=-2x \overset{\text{μη αρνητικά}}{\Leftrightarrow} \sqrt{-x}^2=(-2x)^2 \Leftrightarrow -x=4x^2$

$\Leftrightarrow x(4x+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=-\frac{1}{4}$

- $g(x)>0 \Leftrightarrow 2x+\sqrt{-x}>0 \Leftrightarrow \sqrt{-x}>-2x \overset{\text{μη αρνητικά}}{\Leftrightarrow} \sqrt{-x}^2>(-2x)^2 \Leftrightarrow -x>4x^2$

$\Leftrightarrow x(4x+1)<0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}<x<0$ διότι το τριώνυμο είναι ετερόσημο του 4 (μόνο) μεταξύ των ριζών του

- $g(x)<0 \Leftrightarrow x<-\frac{1}{4}$

Με βάση τα συμπεράσματα αυτά και το παραπάνω σχήμα, θα ισχύει $E = E_1 + E_2$ όπου Ε το ζητούμενο εμβαδόν, E_1 το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = -1$ και $x = -\frac{1}{4}$ και E_2 το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από την $y = x$, την $x = -\frac{1}{4}$ και τον άξονα των x. Έχουμε:

● Επειδή η f είναι συνεχής και μη θετική στο $\left[-1, -\frac{1}{4}\right]$ (προφανές λόγω μονοτονίας) θα είναι:

$$E_1 = \int_{-1}^{-\frac{1}{4}} -f(x)dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{4}} \left(x + \sqrt{-x}\right)dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{4}} \left(x + (-x)^{\frac{1}{2}}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^2}{2} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{(-1)^2}{2} - \frac{2}{3}\cdot 1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{32} - \frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{32} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{64}} - \left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{32} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{1}{32} - \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{3 - 8 + 16}{96} = \frac{11}{96} \text{ τ.μ.}$$

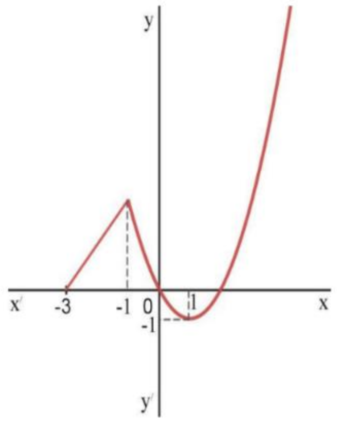
● $E_2 = \dfrac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}{2} = \dfrac{1}{32}$ τ.μ.

Άλλος τρόπος: $E_2 = \int_{-\frac{1}{4}}^{0} -x dx = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-\frac{1}{4}}^{0} = -\left(-\frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^2}{2}\right) = \frac{\frac{1}{16}}{2} = \frac{1}{32}$ τ.μ.

Επομένως, το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E = E_1 + E_2 = \frac{11}{96} + \frac{1}{32} = \frac{11+3}{96} = \frac{14}{96} = \frac{7}{48}$ τ.μ.

Άσκηση 15 (Νέο 2022)

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης $f:[-3,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία αποτελείται από ένα μέρος μίας παραβολής και ένα ευθύγραμμο τμήμα.



Δ1) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Δ2) Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο της συνάρτησης f και στη συνέχεια τα κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα $[-3,+\infty)$.

Δ3) Να εξετάσετε εάν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο κλειστό διάστημα $[-1,3]$.

Δ4) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ε της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $O(0,0)$ έχει και άλλο κοινό σημείο με αυτή το οποίο και να βρείτε.

Δ5) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την ευθεία ε και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Λύση

Δ1) Από το σχήμα και τα δεδομένα της άσκησης προκύπτει ότι η συνάρτηση f θα είναι της μορφής $f(x)=\begin{cases}\alpha x+\beta\ ,\ -3\le x\le -1\\ \gamma x^2+\delta x+\varepsilon\ ,\ x\ge -1\end{cases}$, όπου $\gamma\ne 0$.

Έχουμε:

- $f(-3)=0\Leftrightarrow -3\alpha+\beta=0\Leftrightarrow \beta=3\alpha$ (1)

- $f(0)=0\Leftrightarrow \varepsilon=0$ (2)

- $f(1)=-1 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \gamma+\delta=-1 \Leftrightarrow \gamma=-\delta-1$ (3)

- $\dfrac{-\delta^2}{4\gamma}=-1 \Leftrightarrow \delta^2=4\gamma \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \delta^2+4\delta+4=0 \Leftrightarrow (\delta+2)^2=0 \Leftrightarrow \delta=-2$ (4) αφού η κορυφή της παραβολής είναι το σημείο Κ(1,-1)

- $-\alpha+\beta=\gamma-\delta+\varepsilon \overset{(1),(2)}{\Leftrightarrow} -\alpha+3\alpha=\gamma-\delta \Leftrightarrow 2\alpha=\gamma-\delta$ (5)

Από τις (3) και (4) προκύπτει ότι $\gamma=1$ και η (5) μας δίνει $\alpha=\dfrac{3}{2}$ και στη συνέχεια η (1) μας δίνει $\beta=\dfrac{9}{2}$

Επομένως ο τύπος της συνάρτησης f είναι: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{2}x+\dfrac{9}{2}, & -3\le x\le -1 \\ x^2-2x, & x\ge -1 \end{cases}$ ή αλλιώς

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{2}x+\dfrac{9}{2}, & -3\le x< -1 \\ x^2-2x, & x\ge -1 \end{cases}$$

Δ2) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[-3,-1)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{3}{2}$ για κάθε $x\in[-3,-1)$. Επίσης η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=2x-2$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$. Εξετάζουμε με τον ορισμό αν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=-1$:

- $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}-3}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\left(\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{x+1}{x+1}\right)=\dfrac{3}{2}$

- $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{(x+1)\cdot(x-3)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}(x-3)=-4$

οπότε αφού τα παραπάνω πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=-1$. Τελικά έχουμε: $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{2}, & -3\le x< -1 \\ 2x-2, & x> -1 \end{cases}$

Τα κρίσιμα σημεία της f στο $[-3,+\infty)$ είναι τα εσωτερικά σημεία του $[-3,+\infty)$ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η f' μηδενίζεται. Είδαμε πριν ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=-1$

και ότι $f'(x)=\frac{3}{2}\neq 0$ για κάθε $x\in(-3,-1)$. Με $x\in(-1,+\infty)$ έχουμε:

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-2=0\Leftrightarrow x=1$. Επομένως τα ζητούμενα κρίσιμα σημεία είναι τα $x_0=-1$ και $x_1=1$.

Δ3) Για κάθε $x\in[-1,3]$ ισχύει $f(x)=x^2-2x$ και επομένως συμπεραίνουμε ότι:

- Η f είναι συνεχής στο $[-1,3]$ ως πολυωνυμική
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,3)$ ως πολυωνυμική
- $f(-1)=3=f(3)$

Συνεπώς η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-1,3]$.

Δ4) Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $O(0,0)$ είναι: $y-f(0)=f'(0)(x-0)$

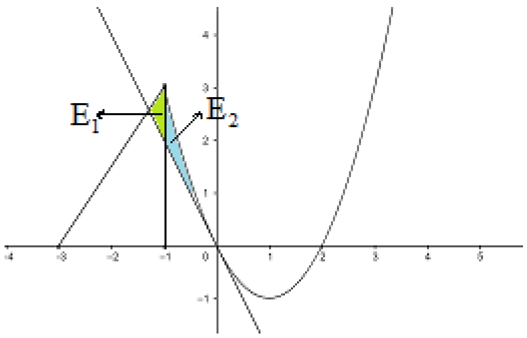
Όμως είναι $f(0)=0$ και $f'(0)=-2$ επομένως έχουμε ότι ε: $y=-2x$

Βρίσκουμε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την εφαπτομένη της ε:

- Με $x\in[-3,-1)$ έχουμε: $f(x)=-2x\Leftrightarrow\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}=-2x\Leftrightarrow 3x+9=-4x\Leftrightarrow x=-\frac{9}{7}$ (δεκτή)
- Με $x\in[-1,+\infty)$ έχουμε: $f(x)=-2x\Leftrightarrow x^2-2x=-2x\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$ (δεκτή)

Επομένως τα κοινά σημεία είναι το $O(0,0)$ (το οποίο είναι το σημείο επαφής) και το $A\left(-\frac{9}{7},\frac{18}{7}\right)$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

Δ5) Θα εργαστούμε με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος:



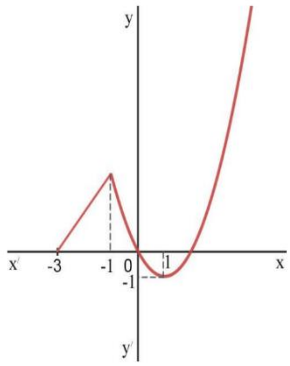
Το ζητούμενο εμβαδόν $E = E_1 + E_2$

$$E_1 = \int_{-\frac{9}{7}}^{-1}\left(\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}+2x\right)dx = \int_{-\frac{9}{7}}^{-1}\left(\frac{7}{2}x+\frac{9}{2}\right)dx = \left[\frac{7x^2}{4}+\frac{9x}{2}\right]_{-\frac{9}{7}}^{-1} =$$

$$\frac{7}{4}-\frac{9}{2}-\left(\frac{7}{4}\cdot\frac{81}{49}-\frac{81}{14}\right) = \frac{7}{4}-\frac{18}{4}-\left(\frac{81}{28}-\frac{162}{28}\right) = -\frac{11}{4}+\frac{81}{28} = -\frac{77}{28}+\frac{81}{28} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}\,\tau.\mu$$

$$E_1 = \int_{-1}^{0}\left(x^2-2x+2x\right)dx = \int_{-1}^{0}x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} = 0-\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\,\tau.\mu$$

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{3}+\frac{1}{7} = \frac{10}{21}\,\tau.\mu$$



Άσκηση 16 (Νέο 2022)

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x}, & x<0\\ 2\sqrt{x}+1, & x\geq 0\end{cases}$ και έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=e$
- $\dfrac{f'(x)}{f(x)}-e^{x}=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Δ1) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g.

Δ2) Να βρείτε κατάλληλους $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$ τέτοιους ώστε για τη συνάρτηση g να εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Δ3) Να αποδείξετε ότι: $f(x)=e^{e^{x}}$, $x\in\mathbb{R}$.

Δ4) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Δ5) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ6) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς μία εφαπτόμενη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f η οποία διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$.

Δ7) Να αποδείξετε ότι: $e^{e}+e>2e^{\sqrt{e}}$

<u>Λύση</u>

Δ1) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $g'(x)=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^{2}}<0$ και άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$. Επειδή επιπλέον είναι και συνεχής σε αυτό το διάστημα, θα ισχύει $g((-\infty,0))=\left(\lim\limits_{x\to 0^{-}}g(x),\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)\right)$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0^{-}}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^{-}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\overset{1+(-\infty)}{=}-\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1+0=1$

Άρα είναι $g((-\infty,0))=(-\infty,1)$

Ομοίως η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο και άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $g'(x)=\left(2\sqrt{x}+1\right)'=\frac{1}{\sqrt{x}}>0$. Επίσης η g είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ αφού $\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(2\sqrt{x}+1\right)=1=g(0)$ και άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Από αυτά τα δεδομένα προκύπτει ότι $g([0,+\infty))=\left[g(0),\lim_{x\to+\infty} g(x)\right)$ οπότε και έχουμε:

- $g(0)=1$

- $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x}+1\right)\overset{2\cdot(+\infty)+1}{=}+\infty$

Άρα είναι $g([0,+\infty))=[1,+\infty)$

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης g θα είναι: g(ℝ) $=(-\infty,1)\cup[1,+\infty)=\mathbb{R}$

Σχόλιο: Επειδή $\lim_{x\to 0^-} g(x)=-\infty$ η g δεν είναι συνεχής συνάρτηση

Άλλος τρόπος: Θα βρούμε όλα τα $y\in\mathbb{R}$ για τα οποία η εξίσωση $g(x)=y$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο ℝ.

- Με $x<0$ έχουμε: $g(x)=y\Leftrightarrow\frac{x+1}{x}=y\Leftrightarrow\frac{1}{x}=y-1\Leftrightarrow x=\frac{1}{y}$ (μοναδική) λύση αν και μόνο αν $y<1$

- Με $x\geq 0$ έχουμε: $g(x)=y\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+1=y\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{y-1}{2}\Leftrightarrow x=\left(\frac{y-1}{2}\right)^2$ (μοναδική) λύση αν και μόνο αν $y\geq 1$

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι το σύνολο τιμών της g είναι το ℝ.

Δ2) Επειδή $g([0,+\infty))=[1,+\infty)$,θα αναζητήσουμε τους ζητούμενους α, β στο διάστημα $(-\infty,0)$. Παρατηρούμε ότι $g(-2)=\frac{1}{2}>0$ και $g\left(-\frac{1}{2}\right)=1+\frac{1}{-\frac{1}{2}}=1-2=-1<0$, οπότε ισχύει $g(-2)\cdot g\left(-\frac{1}{2}\right)<0$. Επίσης η g είναι συνεχής στο $\left[-2,-\frac{1}{2}\right]$ αφού είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$.

Άρα για $\alpha=-2$ και $\beta=-\frac{1}{2}$ η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[\alpha,\beta]=\left[-2,-\frac{1}{2}\right]$.

Σχόλιο: Από τη μονοτονία της g στο $(-\infty,0)$ καθώς και από το ότι $g(-1)=0$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν άπειρα ζεύγη αριθμών α, β με $\alpha<-1<\beta<0$ οι οποίοι ικανοποιούν το ζητούμενο.

Δ3) Έχουμε $f(x)\neq 0$ με $f(x)$ παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα η f διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $f(0)=e>0$ έχουμε $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Από τη δοθείσα συνθήκη για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}-e^x=0\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=e^x\Rightarrow(\ln f(x))'=(e^x)'\overset{\text{υπάρχει σταθερά } c\in\mathbb{R}}{\Rightarrow}\ln f(x)=e^x+c \quad (2)$$

Από την (2) για $x=0$ έχουμε: $\ln f(0)=e^0+c\Rightarrow\ln e=1+c\Rightarrow 1=1+c\Rightarrow c=0$ και άρα προκύπτει ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $\ln f(x)=e^x\Rightarrow f(x)=e^{e^x}$

Δ4) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $f'(x)=\left(e^{e^x}\right)'=e^{e^x}\cdot e^x=e^{e^x+x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επίσης η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $(f'(x))'=f''(x)=\left(e^{e^x+x}\right)'=e^{e^x+x}\cdot\left(e^x+x\right)'=e^{e^x+x}\left(e^x+1\right)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και επομένως η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Σύνολο τιμών: Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα έχουμε f($\mathbb{R}$) $=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$. Βρίσκουμε καθένα από τα δύο όρια:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{e^x}\underset{\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0}{\overset{e^x=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0}e^u=e^0=1$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{e^x}\underset{\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty}{\overset{e^x=t}{=}}\lim\limits_{t\to+\infty}e^t=+\infty$

Άρα f($\mathbb{R}$) $=(1,+\infty)$

Δ5) Για κάθε $x<0$ ισχύει: $g(x)=1+\dfrac{1}{x}<1$ και $f(x)>1$ αφού f(ℝ) $=(1,+\infty)$ και άρα $f(x)>g(x)$.

Για κάθε $x\geq 0$ ισχύει: $e^x\geq x+1\Rightarrow e^{e^x}\geq e^{x+1}=e\cdot e^x\geq e(x+1)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $e(x+1)>2\sqrt{x}+1\Leftrightarrow ex-2\sqrt{x}+e-1>0,(1)$. Θέτουμε $\sqrt{x}=t$ ή (1) γίνεται $et^2-2t+e-1>0$. Έχουμε $\Delta=4-4e^2+4e=4\left(-e^2+e+1\right)<0$, άρα η (1) ισχύει κάθε $x\geq 0\Rightarrow f(x)>g(x)$

Τελικά για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $f(x)>g(x)$ και επομένως η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της g στο ℝ.

Δ6) Έστω $M(x_0,f(x_0))\equiv M\left(x_0,e^{e^{x_0}}\right)$ με $x_0\in\mathbb{R}$ σημείο της γραφικής παράστασης της f . Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ έχει εξίσωση:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)\Leftrightarrow y-e^{e^{x_0}}=e^{e^{x_0}+x_0}(x-x_0)$$
$$\Leftrightarrow y=e^{e^{x_0}+x_0}\cdot x+e^{e^{x_0}}-x_0\cdot e^{e^{x_0}+x_0}$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$e^{e^{x_0}}-x_0\cdot e^{e^{x_0}+x_0}=0\Leftrightarrow e^{e^{x_0}}\left(1-x_0e^{x_0}\right)=0\Leftrightarrow 1-x_0e^{x_0}=0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=1-xe^x\Rightarrow h'(x)=-(1+x)e^x$.

$$h'(x)=0\Leftrightarrow -(1+x)e^x=0\Leftrightarrow x=-1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
h'	$+$	0	$-$
h	$1\nearrow$	$1+\frac{1}{e}$	$\searrow -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}xe^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\underset{\text{De L'Hospital}}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\left(1-xe^x\right)=1\text{ και }\lim_{x\to+\infty}\left(1-xe^x\right)=-\infty$$

Άρα η εξίσωση $h(x)=0$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $(-1,+\infty)$

Δ7) Η προς απόδειξη ανισότητα γράφεται ισοδύναμα: $e^e + e > 2e^{\sqrt{e}} \Leftrightarrow e^{\sqrt{e}} - e < e^e - e^{\sqrt{e}}$

$\Leftrightarrow e^{e^{\frac{1}{2}}} - e^{e^0} < e^{e^1} - e^{e^{\frac{1}{2}}}$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ και παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού υπάρχουν $\xi_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ώστε να ισχύουν:

- $f'(\xi_1) = \dfrac{f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)}{\frac{1}{2} - 0} = \dfrac{e^{e^{\frac{1}{2}}} - e^{e^0}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{e^{\sqrt{e}} - e}{\frac{1}{2}}$ και

- $f'(\xi_2) = \dfrac{f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{e^{e^1} - e^{e^{\frac{1}{2}}}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{e^e - e^{\sqrt{e}}}{\frac{1}{2}}$

Όμως η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και άρα η συνάρτηση f' γνησίως αύξουσα και επομένως έχουμε:

$$0 < \xi_1 < \frac{1}{2} < \xi_2 < 1 \overset{f'}{\Rightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{e^{\sqrt{e}} - e}{\frac{1}{2}} < \frac{e^e - e^{\sqrt{e}}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow e^{\sqrt{e}} - e < e^e - e^{\sqrt{e}} \Rightarrow e^e + e > 2e^{\sqrt{e}}$$

και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

Άσκηση 17 (Νέο 2022)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\ln x$, $x>0$.

Δ1) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f\circ h=f$ όπου $h(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\in\mathbb{R}^*$. $\chi *$

Δ2) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$ και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Δ3) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

Δ4) Να αποδείξετε ότι η μοναδική ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι η κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x=0$.

Δ5) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο ανοικτό διάστημα $(0,+\infty)$.

Δ6) Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο g' για τις οποίες ισχύουν:

- $g(0)=g'(0)=1$
- $g(x)g'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $f'\left(g\left(\eta\mu\left(x^2+1\right)\right)\right)<f'\left(g\left(x^2+1\right)\right)$

<u>Λύση</u>

Δ1) Βρίσκουμε τη σύνθεση των συναρτήσεων h και f :

- $D_{f\circ h}=\left\{x\in D_h=\mathbb{R}^* \,|\, h(x)\in D_f=(0,+\infty)\right\}=\left\{x\neq 0 \,|\, \dfrac{1}{x}>0\right\}=(0,+\infty)$

- $(f\circ h)(x)=f(h(x))=\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\frac{1}{x}}\right)\ln\dfrac{1}{x}=\left(\dfrac{1}{x}-x\right)(\ln 1-\ln x)=-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)(-\ln x)=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\ln x$

Παρατηρούμε ότι $D_{f\circ h}=D_f=(0,+\infty)$ και $(f\circ h)(x)=f(x)$ για κάθε $x>0$

Άρα ισχύει: $f\circ h=f$

Δ2) Εύρεση μονοτονίας: Έστω $x_1,x_2\in(0,1]$ με $x_1<x_2$. Έχουμε:

- $x_1<x_2\Rightarrow \ln x_1<\ln x_2\Rightarrow -\ln x_1>-\ln x_2\geq 0,(1)$ (η ισότητα εφόσον $x_2=1$)

- $x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$ και άρα θα είναι

$x_1 - \frac{1}{x_1} < x_2 - \frac{1}{x_2} \Rightarrow -\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right) > -\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) \geq 0, (2)$ (η ισότητα εφόσον $x_2 = 1$) αφού $x_2 - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2^2 - 1}{x_2} \leq 0$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (1) και (2) θα έχουμε:

$-\ln x_1 \cdot \left[-\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)\right] > -\ln x_2 \left[-\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right)\right]$

$\Rightarrow \left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right) \cdot \ln x_1 > \left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) \cdot \ln x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ και άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$

Έστω $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε:

- $x_1 < x_2 \Rightarrow 0 \leq \ln x_1 < \ln x_2, (3)$ (η ισότητα εφόσον $x_1 = 1$)

- $x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$ και άρα θα είναι $0 \leq x_1 - \frac{1}{x_1} < x_2 - \frac{1}{x_2}, (4)$

(η ισότητα εφόσον $x_1 = 1$) αφού $x_1 - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1^2 - 1}{x_1} \geq 0$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (3) και (4)παίρνουμε:

$\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right) \cdot \ln x_1 < \left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) \cdot \ln x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ και άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

Εύρεση συνόλου τιμών: Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ επομένως $f((0,1]) = \left[f(1), \lim_{x \to 0^+} f(x)\right)$. Είναι $f(1) = 0$ και $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left[\left(x - \frac{1}{x}\right) \cdot \ln x\right] \overset{(-\infty)\cdot(-\infty)}{=} +\infty$ οπότε $f((0,1]) = [0, +\infty)$. Επίσης η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ επομένως $f([1, +\infty)) = \left[f(1), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right)$. Είναι $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(x - \frac{1}{x}\right) \cdot \ln x\right] \overset{[(+\infty)-0]\cdot(+\infty)}{=} +\infty$ και άρα $f([1, +\infty)) = [0, +\infty)$. Συνεπώς το σύνολο τιμών της f είναι $f((0, +\infty)) = f((0,1]) \cup f([1, +\infty)) = [0, +\infty)$

Δ3) Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0,1)$.

Πράγματι, επειδή $f((0,1])=[0,+\infty)$ και $1\in[0,+\infty)$ υπάρχει $x_0\in(0,1]$ ώστε $f(x_0)=1$. Όμως είναι $f(1)=0$ και άρα $x_0\neq 1$. Επομένως υπάρχει $x_0\in(0,1)$ ώστε $f(x_0)=1$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

Σχόλιο: Το x_0 είναι μοναδικό λόγω της μονοτονίας της f στο διάστημα $(0,1)$.

Δ4) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $D_f=(0,+\infty)$ και άρα θα αναζητήσουμε ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $x=0$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{(x^2-1)}{x^2}\ln x\right]\overset{1\cdot(+\infty)}{=}+\infty$ διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$ και

άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$

- $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\ln x\right]\overset{(-\infty)\cdot(-\infty)}{=}+\infty$ και άρα η κατακόρυφη ευθεία $x=0$, δηλαδή ο

άξονας y΄y είναι (η μοναδική) ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Δ5) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως διαφορά και γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$f'(x)=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)'\ln x+\left(x-\dfrac{1}{x}\right)(\ln x)'=\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot\ln x+\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+\dfrac{\ln x}{x^2}+1-\dfrac{1}{x^2}$ Ομοίως η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο

$$(f'(x))'=f''(x)=\left(\ln x+\frac{\ln x}{x^2}+1-\frac{1}{x^2}\right)'=\frac{1}{x}+\frac{x-2x\cdot\ln x}{x^4}+\frac{2}{x^3}=\frac{x^2+2}{x^3}+\frac{1-2\ln x}{x^3}=\frac{x^2-2\ln x+3}{x^3}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=x^2-2\ln x+3$, $x>0$. Η φ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\varphi'(x)=2x-\dfrac{2}{x}$ για κάθε $x>0$. Επίσης η συνάρτηση φ' είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $(\varphi'(x))'=\varphi''(x)=2+\dfrac{2}{x^2}>0$ για κάθε $x>0$. Άρα η φ' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και επειδή $\varphi'(1)=2-2=0$ θα είναι $\varphi'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)$ και $\varphi'(x)>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$. Συνεπώς η συνάρτηση φ θα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=1$, το $\varphi(1)=1-2\cdot0+3=4>0$. Τελικά είναι $\varphi(x)>0$ για κάθε $x>0$ και άρα το ζητούμενο έπεται άμεσα.

Δ6) Ισχύει η συνεπαγωγή: $g(x)g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επιπλέον από υπόθεση γνωρίζουμε ότι οι συναρτήσεις g' και g είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ (η g επειδή είναι παραγωγίσιμη) και άρα θα διατηρούν πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Έχουμε:

- $g'(0) = 1 > 0 \Rightarrow g'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- $g(0) = 1 > 0 \Rightarrow g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Αλλά αφού η g' είναι θετική στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση g θα είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως θα έχουμε:

$$x^2 + 1 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \Rightarrow \eta\mu\left(x^2+1\right) < x^2 + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g\left(\eta\mu\left(x^2+1\right)\right) < g\left(x^2+1\right)$$

$$\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'\left(g\left(\eta\mu\left(x^2+1\right)\right)\right) < f'\left(g\left(x^2+1\right)\right) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

διότι $\eta\mu\left(x^2+1\right) \leq \left|\eta\mu\left(x^2+1\right)\right| < \left|x^2+1\right| = x^2+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $x^2+1>0$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

Ημερομηνία τροποποίησης: 19/02/2022