ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

1^{Ο} ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΘΕΜΑΤΑ
[Κεφάλαιο 1 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου]

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $f:A \to R$. Πότε η f λέγεται ένα προς ένα (1 - 1);

Μονάδες 4

Α2. Έστω συνάρτηση $f:A \to R$. Πότε θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$:
α. (ολικό) μέγιστο; β. (ολικό) ελάχιστο;

Μονάδες 4

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:R \to R$ έχει ολικά ακρότατα.

β. Για οποιασδήποτε συναρτήσεις $f,g:A \to R$ που είναι ίσες, τότε η συνάρτηση $h(x)=\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ισούται με 1 για κάθε $x \in A$.

γ. Αν η εξίσωση $f(x)=\lambda, \lambda \in R$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες, τότε η f είναι γνησίως μονότονη.

δ. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα Δ_1 και Δ_2, τότε σε κάθε περίπτωση θα είναι γνησίως φθίνουσα και στο $\Delta_1 \cup \Delta_2$.

ε. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, τότε ορίζεται πάντα η συνάρτηση $-f$ και είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 10

Α4. Αν η συνάρτηση $f:A \to R$ είναι 1 - 1, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ μια λύση.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,1] \to R$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

Β1. $h_1(x)=f(x^2)$

Μονάδες 5

Β2. $h_2(x)=f(\ln x)$

Μονάδες 6

Β3. $h_3(x)=f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

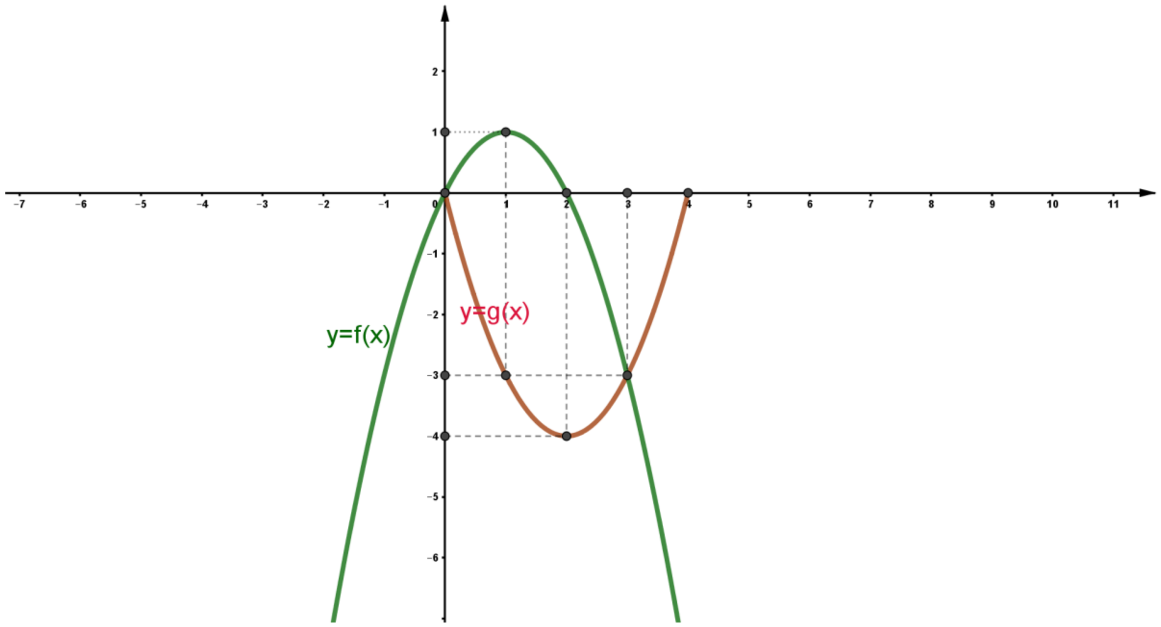
Μονάδες 7

Β4. $h_4(x)=(h_2-h_3)(x)\cdot h_1(x)$ όπου h_1,h_2,h_3 οι συναρτήσεις των προηγούμενων ερωτημάτων και στη συνέχεια να υπολογίσετε τον τύπο της h_4.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f\cdot g$.

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε τις τιμές $(f\circ g)(0)$, $(f-g)(1)$, $(f\cdot g)(2)$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(3)$.

Μονάδες 4

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$ (μονάδες 5) και στη συνέχεια την ανίσωση $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)\leq 1$ (μονάδες 6).

Μονάδες 11

Γ4. Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων f, g και τις θέσεις που παρουσιάζουν ολικά ακρότατα.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & ,-1\le x<0 \\ x^3+2 & ,0\le x\le 1 \end{cases}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στα διαστήματα $[-1,0)$ και στο διάστημα $[0,1]$.

Μονάδες 5

Δ2. Να εξετάσετε αν η f είναι 1 - 1.

Μονάδες 3

Δ3. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει ολικό ακρότατο.

Μονάδες 4

Δ4. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $-f$ (μονάδες 4) και στη συνέχεια να βρείτε αλγεβρικά το σύνολο τιμών της f και να το επαληθεύσετε μέσω της C_f (μονάδες 4).

Μονάδες 8

Δ5. Να εξετάσετε αν ορίζεται η συνάρτηση $f\circ f$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Το διαγώνισμα επιμελήθηκε ο **Χατζόπουλος Μάκης**, Μαθηματικός του ΓΕΛ Φιλοθέης.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο.**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
1ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ –ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία
Α2. Θεωρία
Α3. α. Λ β. Λ γ. Λ δ. Λ ε. Σ

Α4. Έστω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο άνισες ρίζες $x_1, x_2 \in A$, τότε $x_1 \neq x_2$ και επειδή η f είναι 1 – 1 έχουμε:

$$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow 0 \neq 0$$, άτοπο.

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ μια λύση.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $h_1(x)=f(x^2)=f(g(x))$ όπου $g(x)=x^2$ άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h_1 είναι:

$$D_{h_1}=\{x\in D_g / g(x)\in D_f\}=\{x\in R / x^2\in[0,1]\}=\begin{cases} x\in R \\ 0\le x^2\le 1\end{cases}=[-1,1] .$$

Β2. $h_2(x)=f(\ln x)=f(g(x))$, όπου $g(x)=\ln x$ άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h_2 είναι:

$$D_{h_2}=\{x\in D_g / g(x)\in D_f\}=\{x\in(0,+\infty) / \ln x\in[0,1]\}=\begin{cases} x>0 \\ 0\le \ln x\le 1\end{cases}$$
$$=\begin{cases} x>0 \\ e^0\le e^{\ln x}\le e^1\end{cases} .$$
$$=\begin{cases} x>0 \\ 1\le x\le e\end{cases}$$
$$=[1,e]$$

Β3. $h_3(x)=f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=f(g(x))$, όπου $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$ άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h_3 είναι:

$$D_{h_3}=\{x\in D_g\,/\,g(x)\in D_f\}=\left\{x\in R-\{-1\}\,/\,\frac{x-1}{x+1}\in[0,1]\right\}=\begin{cases}x\neq-1\\ 0\leq\dfrac{x-1}{x+1}\leq1\end{cases}$$
$$=\begin{cases}x\neq-1\\ 0\leq\dfrac{x-1}{x+1}\ \text{και}\ \dfrac{x-1}{x+1}\leq1\end{cases}$$
$$=\begin{cases}x\neq-1\\ 0\leq(x-1)(x+1)\ \text{και}\ \dfrac{-2}{x+1}\leq0\end{cases}.$$
$$=\begin{cases}x\neq-1\\ x\leq-1\ \text{ή}\ x\geq1\ \text{και}\ x>-1\end{cases}$$
$$=[1,+\infty)$$

Β4. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h_4(x)=(h_2-h_3)(x)\cdot h_1(x)$ είναι η τομή των συνόλων των πεδίο ορισμού των συναρτήσεων h_1,h_2 και h_3 δηλαδή:

$D_{h_2}\cap D_{h_3}\cap D_{h_1}=\{1\}$.

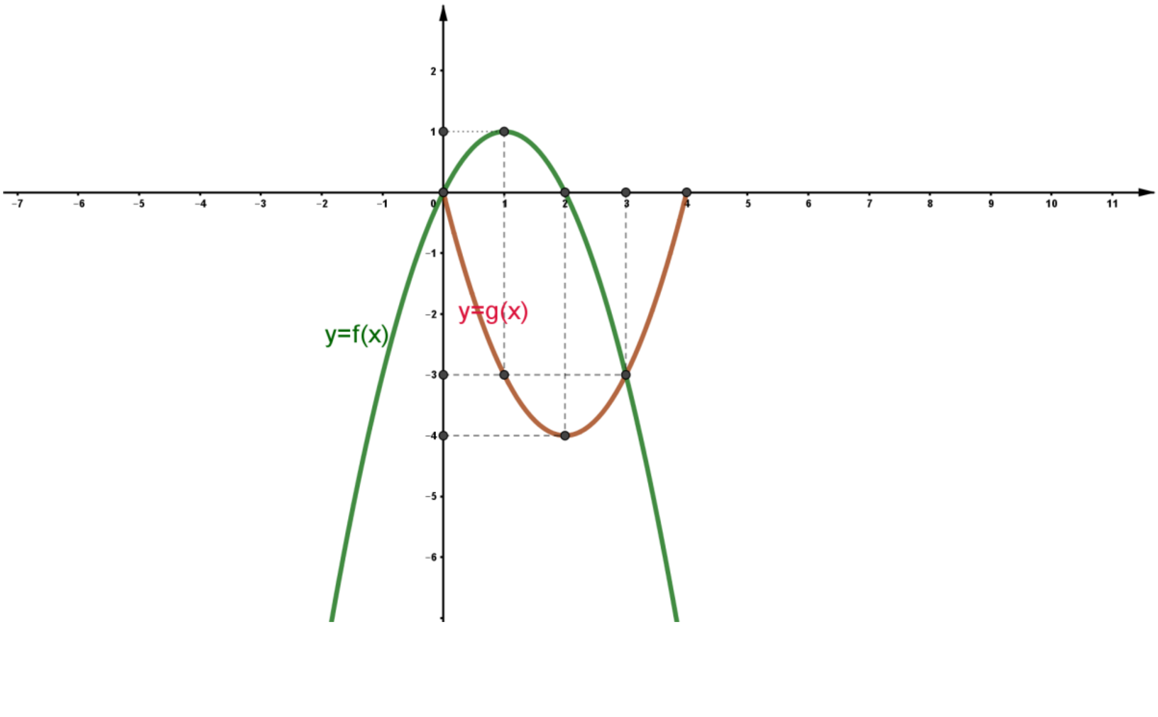
Επομένως, η συνάρτηση h_4 ισούται:

$$h_4(x)=(h_2-h_3)(x)\cdot h_1(x)\Rightarrow h_4(1)=(h_2-h_3)(1)\cdot h_1(1)=(h_2(1)-h_3(1))h(1)=(f(0)-f(0))f(1)=0$$

δηλαδή είναι η γραφική της παράσταση είναι το σημείο $(1,0)$.

Σημείωση: *Εντός ύλης θεωρούνται οι συναρτήσεις που ορίζονται σε διάστημα ή σε ένωση διαστημάτων, άρα οι συναρτήσεις με πεδίο ορισμού μονοσύνολο είναι εκτός οδηγιών και πνεύματος των εξετάσεων. Η ερώτηση αυτή έχει ξεκάθαρα διδακτικό χαρακτήρα.*

ΘΕΜΑ Γ



Γ1. Το πεδίο ορισμού της f είναι R , ενώ της g είναι το $[0,4]$, άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \cdot g$ είναι το $[0,4]$.

Γ2. $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(0) = 0$,
$(f-g)(1) = f(1) - g(1) = 1-(-3) = 4$, $(f \cdot g)(2) = f(2) \cdot g(2) = 0 \cdot (-3) = 0$,
$\left(\frac{f}{g}\right)(3) = \frac{f(3)}{g(3)} = \frac{-3}{-3} = 1$.

Γ3. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 3$
Για $x \in (0,4)$ έχουμε: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \leq 1 \overset{g(x)<0}{\Leftrightarrow} f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x \in (0,3]$.

Γ4. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.
Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x = 1$.
Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2,4]$. Η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 2 και ολικό μέγιστο στις θέσεις 0 και 4.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in [-1,0)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \Rightarrow x_1^2 + 2 > x_2^2 + 2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,0)$.
Επίσης, για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in [0,1]$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow x_1^3 + 2 < x_2^3 + 2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,1]$.

Δ2. Η f δεν είναι 1 - 1 διότι $f(-1) = f(1) = 3$.

Δ3. Για κάθε $x \in [-1,0)$ έχουμε:

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow 1 \geq x^2 > 0 \Rightarrow 3 \geq x^2 + 2 > 2 \Rightarrow 2 < x^2 + 2 \leq 3 \Rightarrow f(0) < f(x) \leq f(1).$$

Επίσης, για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε:

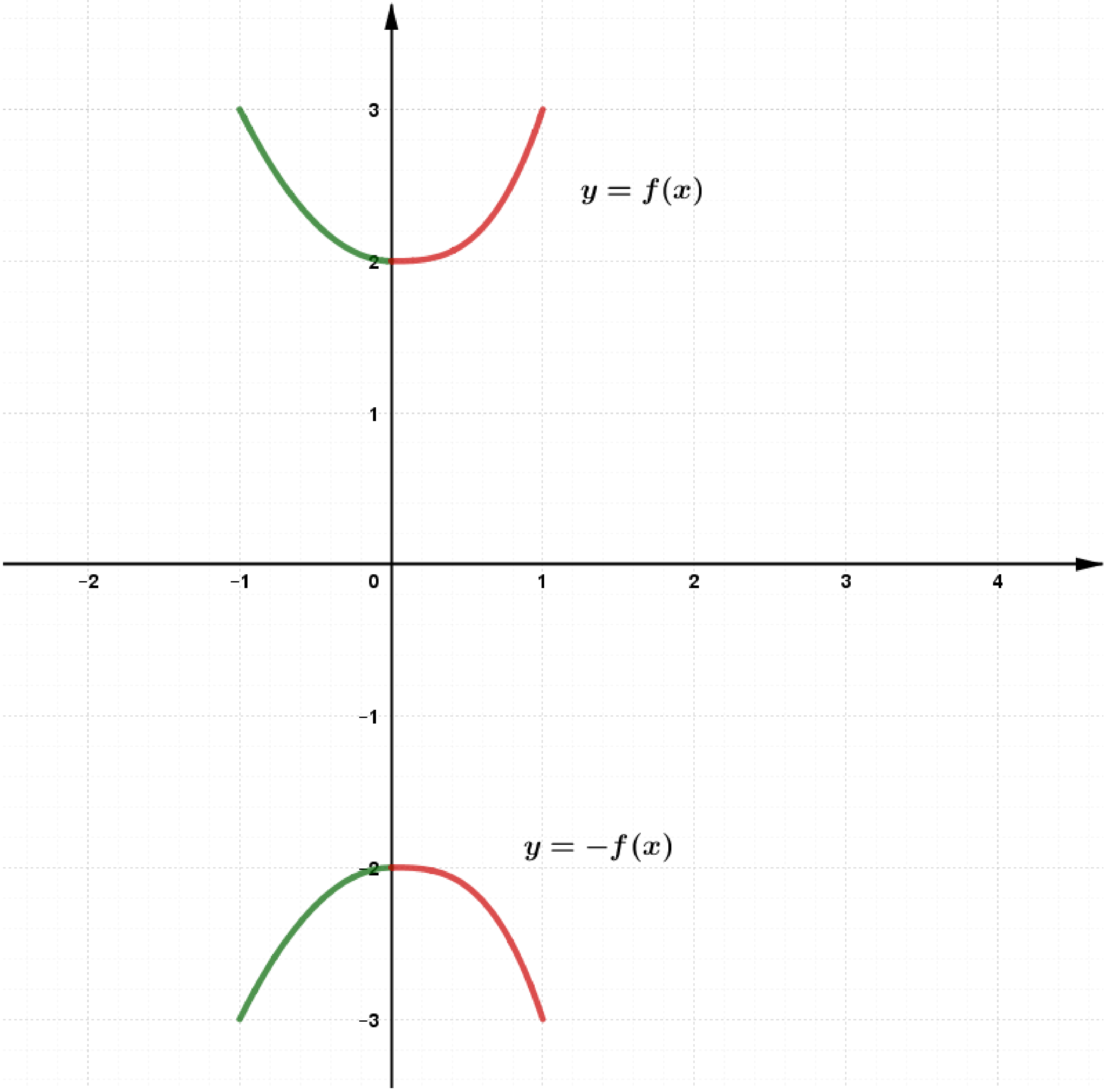
$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^3 \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq x^3 + 2 \leq 3 \Leftrightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(1).$$

Επομένως, για κάθε $x \in [-1,1]$ ισχύει:

$$f(0) \leq f(x) \leq f(1)$$

άρα η f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή το $f(0) = 2$ στη θέση $x = 0$ και μέγιστη τιμή το $f(1) = 3$ στις θέσεις -1 και 1.

Δ4. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $-f$ φαίνονται στο παρακάτω σχήμα,



Για κάθε $x \in [-1,0)$ έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 2 = y \Leftrightarrow x^2 = y - 2 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{y-2},\ y \geq 2 \overset{x\in[-1,0)}{\Leftrightarrow} x = -\sqrt{y-2},\ y > 2 .$$

Όμως, $x \in [-1,0)$ δηλαδή:

$$-1 \leq x < 0 \Leftrightarrow -1 \leq -\sqrt{y-2} < 0 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{y-2} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < y-2 \leq 1 \Leftrightarrow 2 < y \leq 3 .$$

Για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^3 + 2 = y \Leftrightarrow x^3 = y - 2 \overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt[3]{y-2},\ y \geq 2 .$$

Όμως, $x \in [0,1]$ δηλαδή:

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt[3]{y-2} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq y-2 \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq y \leq 3 .$$

Επομένως, το σύνολο τιμών της f είναι το $[2,3]$ που επαληθεύεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Δ5. Για ευκολία οι πληροφορίες δίνονται από τον παρακάτω πίνακα:

Συναρτήσεις	**Πεδίο Ορισμού (π.ο)**	**Σύνολο τιμών (σ.τ.)**
$f_1(x)=x^2+2$	$[-1,0)$	$[2,3]$
$f_2(x)=x^3+2$	$[0,1]$	$[2,3]$

Για να ορίζεται η παράσταση $f_1 \circ f_2$ πρέπει το σύνολο τιμών της f_2 δηλαδή το $[2,3]$ να έχει κοινά σημεία με το πεδίο ορισμού της f_1 δηλαδή $[-1,0)$, κάτι που δεν ισχύει, άρα δεν ορίζεται η συνάρτηση $f_1 \circ f_2$.

Για να ορίζεται η παράσταση $f_2 \circ f_1$ πρέπει το σύνολο τιμών της f_1 δηλαδή το $[2,3]$ να έχει κοινά σημεία με το πεδίο ορισμού της f_2 δηλαδή $[0,1]$, κάτι που δεν ισχύει, άρα δεν ορίζεται η συνάρτηση $f_2 \circ f_1$.

Επίσης, η παράσταση $f_1 \circ f_1$ πρέπει το σύνολο τιμών της f_1 δηλαδή το $[2,3]$ να έχει κοινά σημεία με το πεδίο ορισμού της f_1 δηλαδή $[-1,0)$, κάτι που δεν ισχύει, άρα δεν ορίζεται η συνάρτηση $f_1 \circ f_1$.

Όμοια και για την παράσταση $f_2 \circ f_2$.

Τελικά, δεν ορίζεται η παράσταση $f \circ f$

Σημείωση: *Αυτό φαίνεται από τον πίνακα που δεν έχουν κοινά στοιχεία τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων με τα σύνολα τιμών τους είτε να τα συγκρίνουμε ευθέως τα κελιά είτε διαγώνια.*

Σημείωση: *Ανάλογη απόδειξη προκύπτει αν πάρουμε σε κάθε περίπτωση το πεδίο ορισμού της σύνθεσης των συναρτήσεων. Απλά θα ισούται με το κενό σύνολο.*

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Το διαγώνισμα επιμελήθηκε ο **Χατζόπουλος Μάκης,** Μαθηματικός του ΓΕΛ Φιλοθέης.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο.**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

2$^{\text{Ο}}$ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΘΕΜΑΤΑ
[Κεφάλαιο 1 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου]

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι: α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=1$

Μονάδες 4 + 4 = 8

Α2. Να διατυπώσετε το Κριτήριο Παρεμβολής.

Μονάδες 4

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}f(x_0+x)=\ell$.

β. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\left(-f(x)\right)=-\infty$.

γ. Αν $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>0$.

δ. $\lim\limits_{x\to x_0}x^{\nu}=x_0^{\nu}$, για οποιοδήποτε $\nu\in Z$

ε. $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^{x}=+\infty$ για οποιαδήποτε θετικό αριθμό α.

Μονάδες 10

Α4. Έστω ο ισχυρισμός:

«Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$, $\alpha>0$».

Είναι Αληθής ή Ψευδής ο ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε:

$$\lim_{x\to1}\left(f(x)-2x\right)=-3 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to0}\frac{g(x+1)-2}{x}=\ell\in\mathbb{R}.$$

Β1. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to1}f(x)=-1$.

Μονάδες 5

Β2. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to1}g(x)=2$.

Μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=e^{f(x)+1}-\left|g(x)\right|$ είναι αρνητική κοντά στο $x_0=1$.

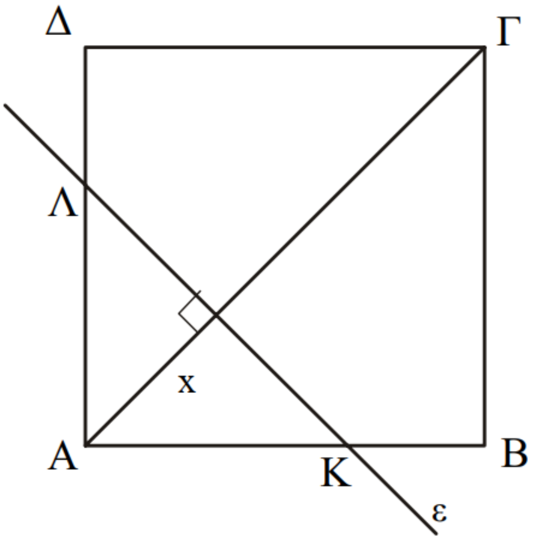
Μονάδες 6

Β4. Να υπολογίσετε, αν υπάρχει, το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x\sqrt{x}+\ln x-1}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 1 cm. Μια ευθεία ε που είναι κάθετη στη διαγώνιο ΑΓ, τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΔ στα σημεία Κ, Λ αντιστοίχως και έστω x (cm) η απόσταση της ε από την κορυφή Α όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό Ε του τριγώνου ΚΑΛ δίνεται από τη συνάρτηση $E(x)=x^2\ \text{cm}^2$ της οποία να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 7

Γ2. Να αποδείξετε την περίμετρο Π του τριγώνου ΑΚΛ δίνεται από τη συνάρτηση $\Pi(x)=2\left(\sqrt{2}+1\right)x\ \text{cm}$ της οποίας να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 7

Γ3. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων Ε και Π.

Μονάδες 6

Γ4. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $E\circ\Pi, \Pi\circ E$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$f^2(x)\le\left|x^2-5x+6\right| \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f δεν αντιστρέφεται και δεν είναι γνησίως μονότονη.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}f(x)=0$.

Μονάδες 8

Δ3. Να υπολογίσετε, αν υπάρχει, το όριο $\lim\limits_{x\to 3}\left(f^3(x)\,\etaμ\dfrac{1}{f(x)}\,συν\dfrac{2}{f(x)}\right)$.

Μονάδες 6

Δ4. Να υπολογίσετε, αν υπάρχει, το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3}{f^{2022}(x)}-2\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-2}\right)\right)$.

Μονάδες 7

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Το διαγώνισμα επιμελήθηκε ο **Χατζόπουλος Μάκης**, Μαθηματικός του ΓΕΛ Φιλοθέης.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο.**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ 2ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ -ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

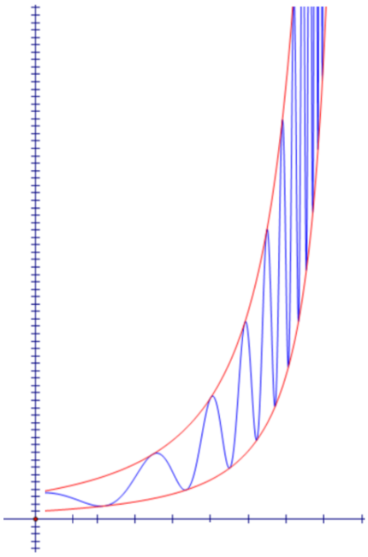
Α1. α) $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \le \frac{1}{|x|} \Rightarrow -\frac{1}{|x|} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \frac{1}{|x|}$ και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\pm\frac{1}{|x|}\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$

β) $x\eta\mu\frac{1}{x} = \frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{1}{x}=t}{=} \frac{\eta\mu t}{t}$ με $t \to 0$ οπότε $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{\eta\mu t}{t}\right) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right) = 1$

Α2. Θεωρία

Α3. α. Σωστό
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Λάθος
ε. Λάθος

Α4. Ψευδής, ας δούμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που ενώ ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ παρόλα αυτά δεν είναι γνησίως αύξουσα.



ΘΕΜΑ Β

Β1. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(f(x) - 2x + 2x\right) = -3 + 2 = -1$.

Β2. Θέτουμε $u = x + 1$ άρα $\lim\limits_{x\to 0}(x+1) = 1 = u_0$ οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x+1)-2}{x} = \ell \Rightarrow \lim_{u\to 1}\frac{g(u)-2}{u-1} = \ell \in \mathbb{R}$$

οπότε

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1}\left[\frac{g(x)-2+2}{x-1}(x-1)\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{g(x)-2}{x-1}(x-1) + \frac{2}{x-1}(x-1)\right] = \ell\cdot 0 + 2 = 2.$$

Β3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to 1} h(x) < 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1}\left(e^{f(x)+1} - |g(x)|\right) < 0.$$

Που ισχύει διότι

$$\lim_{x\to 1}\left(e^{f(x)+1}-\left|g(x)\right|\right)=1-2=-1<0$$

και

- $\lim\limits_{x\to 1} g(x)>0 \Rightarrow g(x)>0$ κοντά στο $x_0=1$
- $\lim\limits_{x\to 1} e^{f(x)+1}=\lim\limits_{u\to 0} e^{u}=1$ όπου $u=f(x)+1$ και $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)+1\right)=0=u_0$.

Β4. Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x\sqrt{x}+\ln x-1}=\left(\dfrac{-1}{0}\right)$.

1ος τρόπος: Έχουμε

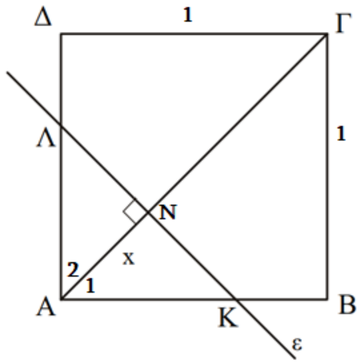
$$x\sqrt{x}+\ln x-1=\frac{\left(x\sqrt{x}-1\right)\left(x\sqrt{x}+1\right)}{x\sqrt{x}+1}+\ln x=\frac{x^3-1}{x\sqrt{x}+1}+\ln x=\frac{(x-1)\left(\overbrace{x^2+x+1}^{+}\right)}{\underbrace{x\sqrt{x}+1}_{+}}+\ln x$$

- για $x>1$ έχουμε $x-1>0$ και $\ln x>0 \Rightarrow x\sqrt{x}+\ln x-1>0$
- για $0<x<1$ έχουμε $x-1<0$ και $\ln x<0 \Rightarrow x\sqrt{x}+\ln x-1<0$

2ος τρόπος: Έστω η συνάρτηση $k(x)=x\sqrt{x}+\ln x-1$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ (γιατί;) άρα για $0<x<1$ είναι $k(x)<k(1)=0$ ενώ για $x>1$ είναι $k(x)>k(1)=0$.

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)}{x\sqrt{x}+\ln x-1}=\left(\dfrac{-1}{0^+}\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)}{x\sqrt{x}+\ln x-1}=\left(\dfrac{-1}{0^-}\right)=+\infty$.

ΘΕΜΑ Γ



Γ1. Το τρίγωνο ΚΑΛ είναι ισοσκελές διότι η ΑΓ η διαγώνιος του τετραγώνου είναι και διχοτόμος της γωνίας Α, άρα $A_1=A_2=45^0$ και ύψος. Επομένως, η ΑΝ είναι διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου άρα

$$(AN)=\frac{(K\Lambda)}{2}\Rightarrow (K\Lambda)=2x\,.$$

Συνεπώς, το εμβαδό Ε του τριγώνου ΚΑΛ είναι $\dfrac{2x\cdot x}{2}=x^2$ οπότε δίνεται από τη συνάρτηση

$$\mathrm{E}(x)=x^2, x\in\left(0,\sqrt{2}\right)$$

διότι το μήκος της διαγωνίου είναι $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

Γ2. Αν $(\mathrm{AK})=(\mathrm{A\Lambda})=y$ εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΛ:

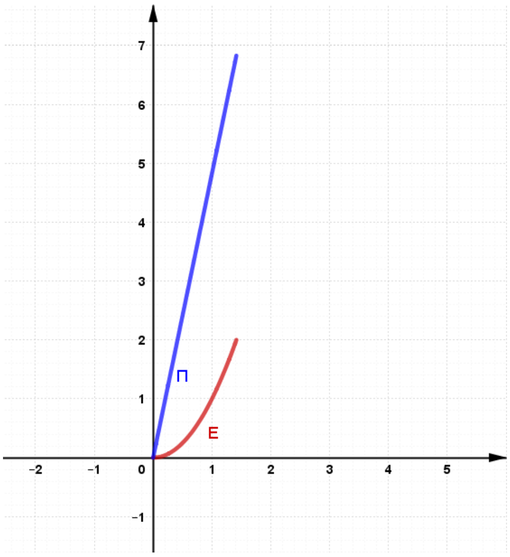
$$y^2+y^2=(2x)^2 \Leftrightarrow 2y^2=4x^2 \Leftrightarrow y^2=2x^2 \Leftrightarrow y=\sqrt{2}x$$

οπότε η περίμετρος Π του τριγώνου ΑΚΛ είναι

$$2x+2\sqrt{2}x=2\left(1+\sqrt{2}\right)x$$

οπότε δίνεται από τη συνάρτηση $\Pi(x)=2\left(\sqrt{2}+1\right)x$ cm για $x\in\left(0,\sqrt{2}\right)$.

Γ3. Η γραφική παράσταση των συναρτήσεων φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Γ4. $\Pi(x)=2\left(\sqrt{2}+1\right)x$ cm για $x\in\left(0,\sqrt{2}\right)$.

$\mathrm{E}(x)=x^2, x\in\left(0,\sqrt{2}\right)$

$$D_{\mathrm{E}\circ\Pi}=\left\{x\in\left(0,\sqrt{2}\right)/\,2\left(\sqrt{2}+1\right)x\in\left(0,\sqrt{2}\right)\right\}=\begin{cases}0<x<\sqrt{2}\\ 0<2\left(1+\sqrt{2}\right)x<\sqrt{2}\end{cases}=\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2\left(1+\sqrt{2}\right)}\right)=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}+2}\right)$$

και

$$(\mathrm{E}\circ\Pi)(x)=\mathrm{E}(\Pi(x))=\mathrm{E}\left(2\left(1+\sqrt{2}\right)x\right)=4\left(1+\sqrt{2}\right)^2x^2.$$

Επίσης,

$$D_{\Pi\circ\mathrm{E}}=\left\{x\in\left(0,\sqrt{2}\right)/\,x^2\in\left(0,\sqrt{2}\right)\right\}=\begin{cases}0<x<\sqrt{2}\\ 0<x^2<\sqrt{2}\end{cases}=\left(0,\sqrt[4]{2}\right)$$

και

$$(\Pi\circ\mathrm{E})(x)=\Pi(\mathrm{E}(x))=\mathrm{E}\left(x^2\right)=2\left(1+\sqrt{2}\right)x^2.$$

ΘΕΜΑ Δ

Είναι,

$$f^2(x) \le |x^2-5x+6| \Rightarrow \sqrt{f^2(x)} \le \sqrt{|x^2-5x+6|} \Rightarrow |f(x)| \le \sqrt{|x^2-5x+6|}$$
$$\Rightarrow -\sqrt{|x^2-5x+6|} \le f(x) \le \sqrt{|x^2-5x+6|}$$

Δ1. Για $x=2$ και $x=3$ έχουμε:

$$f^2(2) \le 0 \Rightarrow f(2)=0 \text{ και } f^2(3) \le 0 \Rightarrow f(3)=0.$$

Οπότε $f(2)=f(3)$ άρα δεν είναι 1 - 1, άρα η f δεν αντιστρέφεται.

Αν η f ήταν γνησίως μονότονη, τότε θα ήταν και 1 - 1, άτοπο! Οπότε η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

Δ2. Είναι,

$$\lim_{x\to 2}\left(-\sqrt{|x^2-5x+6|}\right) = \lim_{x\to 2}\sqrt{|x^2-5x+6|} = 0$$

άρα από Κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$.

Είναι,

$$\lim_{x\to 3}\left(-\sqrt{|x^2-5x+6|}\right) = \lim_{x\to 3}\sqrt{|x^2-5x+6|} = 0$$

άρα από Κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 0$.

Δ3. Είναι,

$$\lim_{x\to 3}\left(f^3(x)\,\eta\mu\frac{1}{f(x)}\,\sigma\upsilon\nu\frac{2}{f(x)}\right) = 0$$

διότι

$$\left|f^3(x)\,\eta\mu\frac{1}{f(x)}\,\sigma\upsilon\nu\frac{2}{f(x)}\right| \le |f(x)|^3 \Leftrightarrow -|f(x)|^3 \le f^3(x)\,\eta\mu\frac{1}{f(x)}\,\sigma\upsilon\nu\frac{2}{f(x)} \le |f(x)|^3$$

όμως $\lim\limits_{x\to 3}\left(-|f(x)|^3\right) = \lim\limits_{x\to 3}|f(x)|^3 = 0$ άρα από Κριτήριο Παρεμβολής έπεται το ζητούμενο.

Δ4. Είναι,

$$\lim_{x\to 2}\frac{3}{f^{2022}(x)} = +\infty \text{ διότι } \lim_{x\to 2} f(x) = 0 \text{ και } f^{2022}(x) > 0 \text{ κοντά στο } x_0 = 2.$$

Είναι,

$$\eta\mu\left(\frac{1}{x-2}\right) \le 1 \Rightarrow -2\eta\mu\left(\frac{1}{x-2}\right) \ge -2 \Rightarrow \frac{3}{f^{2022}(x)} - 2\eta\mu\left(\frac{1}{x-2}\right) \ge \frac{3}{f^{2022}(x)} - 2$$

όμως

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{3}{f^{2022}(x)}-2\right)=+\infty$$

άρα

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{3}{f^{2022}(x)}-2\eta\mu\left(\frac{1}{x-2}\right)\right)=+\infty .$$

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Το διαγώνισμα επιμελήθηκε ο **Χατζόπουλος Μάκης,** Μαθηματικός του ΓΕΛ Φιλοθέης.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο.**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

3Ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΘΕΜΑΤΑ
[Κεφάλαιο 1 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου]

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ,η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν :

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε: $f(x_0)=\eta$.

(Μονάδες 7)

Α2. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν για τις συναρτήσεις $f:A\to\mathbb{R}, g:A\to\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\cdot g(x)=0$ για κάθε $x\in A$, τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in A$ ή $g(x)=0$ για κάθε $x\in A$ »

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)
β . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

(Μονάδες 4)

Α3. Πότε μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

(Μονάδες 4)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση την ένδειξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεσή τους $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

β. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)<0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=-\infty$

γ. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

ε. Αν f, g είναι δυο συναρτήσεις και ορίζονται οι $g\circ f$ και $f\circ g$, τότε αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} 1-\ln x, & 0<x\leq 1 \\ -x^2+2x-1, & x>1 \end{cases}$

Β1. Να μελετήσετε τη παραπάνω συνάρτηση ως προς τη συνέχεια και μετά να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 6)

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 6)

Β3.Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}, της f και να την ορίσετε.

(Μονάδες 7)

Β4. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=1-\alpha$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=2\ln(1-x)+1$, $x<1$ και $g(x)=2-\dfrac{2}{x+1}$, $x>-1$

Γ1. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f και g ως προς την μονοτονία.

(Μονάδες 6)

Γ2. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

(Μονάδες 7)

Γ3. Αν $h(x)=(f\circ g)(x)=2\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)+1$, $-1<x<1$ τότε, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,1)$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 6)

Γ4. Αν $-1<\alpha<\beta<1$ τότε, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $h(\xi)=2\ln\left(\dfrac{2-(\alpha+\beta)}{2+\alpha+\beta}\right)+1$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x)-2f(1-x)=3x-3-e^{-x}+2e^{x-1} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι : $f(x)=x-e^{-x}+1$

(Μονάδες 6)

Δ2. Να βρείτε τις ρίζες , το πρόσημο της συνάρτησης f και το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 6)

Δ3. Να λύσετε την ανίσωση $f(e^{-x}-x-2)+e>0$.

(Μονάδες 6)

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει:

$$e^{x_0}\cdot(x_0-2020)=1$$

(Μονάδες 7)

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:
Τα θέματα επιμελήθηκε ο **Βαβουρανάκης Μιχάλης, Μαθηματικός -MSc του 2ου ΓΕΛ Ηρακλείου Κρήτης.**
Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο.**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
3ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ -ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελ. 76

Α2. α) Ψ

β) Ως παράδειγμα έχουμε τις συναρτήσεις:

$f(x)=x-|x|,\ x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=x+|x|,\ x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$f(x)\cdot g(x)=(x-|x|)\cdot(x+|x|)=x^2-|x|^2=x^2-x^2=0$$

✓ Όμοια και με τις συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ x, & x>1\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}2, & x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}$.

Α3. Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελ. 33

Α4. α. Λ (σελ. 72)

β. Σ (σελ. 60)

γ. Λ (σελ. 76)

δ. Σ (σελ. 74)

ε. Λ (σελ. 26)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases}1-\ln x, & 0<x\le 1\\ -x^2+2x-1, & x>1\end{cases}$.

Β1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα :

- $(0,1)$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- $(1,+\infty)$, ως πολυωνυμική συνάρτηση

Θα εξετάσουμε αν η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Έχουμε,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(1-\ln x)=1=f(1)$$

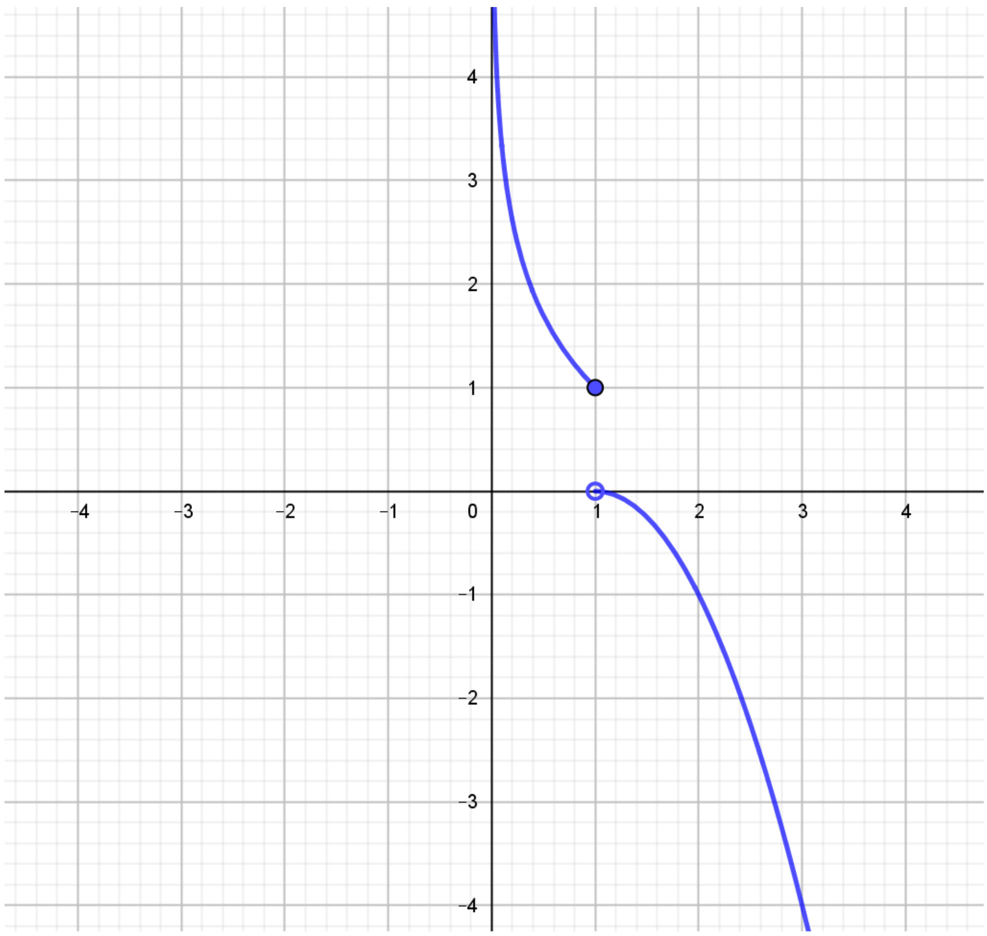
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (-x^2+2x-1) = 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, επομένως η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Η γραφική παράσταση της $f(x) = 1 - \ln x,\ 0<x\leq 1$ προκύπτει από την συμμετρική της $y = \ln x,\ 0<x\leq 1$ ως προς τον άξονα x΄x και στη συνέχεια με κατακόρυφη μετατόπιση κατά μια μονάδα προς τα πάνω.

Η γραφική παράσταση της $f(x) = -x^2+2x-1 = -(x-1)^2,\ \ x>1$ προκύπτει από την συμμετρική της $y = x^2,\ x>1$ ως προς τον άξονα x΄x και στη συνέχεια με οριζόντια μετατόπιση κατά μια μονάδα προς τα δεξιά.

Επομένως η γραφική παράσταση της f είναι:



Β2. Από τη γραφική παράσταση της f προκύπτει ότι συνάρτηση είναι :

- γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$,
- γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$ και
- δεν παρουσιάζει ακρότατα

Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο των τεταγμένων των σημείων της γραφικής παράστασης, επομένως είναι το $f(A)=(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$

Β3. Η συνάρτηση f είναι 1-1 γιατί κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει την γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο. Επομένως υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και η οποία έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f, δηλαδή το $f(A)=(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$.

Για την εύρεση του τύπου της f^{-1}, έχουμε:

$$y=f(x)\Rightarrow\begin{cases}y=1-\ln x,\ 0<x\le 1\\ y=-(x-1)^2,\ x>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ln x=1-y,\ 0<x\le 1\\ (x-1)^2=-y,\ x>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=e^{1-y},\ y\ge 1\\ |x-1|=\sqrt{-y},\ y<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=e^{1-y},\ y\ge 1\\ x=1+\sqrt{-y},\ y<0\end{cases}\quad \text{άρα } f^{-1}(x)=\begin{cases}e^{1-x},\ x\ge 1\\ 1+\sqrt{-x},\ x<0\end{cases}$$

Β4. Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=1-\alpha$ είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας (ε) με εξίσωση $y=1-\alpha$. Επομένως θα βρούμε πότε ισχύει $(1-\alpha)\in f(A)$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $1-\alpha<0\Leftrightarrow\alpha>1$, τότε $(1-\alpha)\in f(A)$, οπότε η C_f και η ευθεία (ε) έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, άρα η εξίσωση έχει μια μόνο λύση.
- Αν $0\le 1-\alpha<1\Leftrightarrow 0<\alpha\le 1$, τότε $(1-\alpha)\notin f(A)$, οπότε η C_f και η ευθεία (ε) δεν έχουν κοινό σημείο, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $1-\alpha\ge 1\Leftrightarrow\alpha\le 0$, τότε $(1-\alpha)\in f(A)$, οπότε η C_f και η ευθεία (ε) έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, άρα η εξίσωση έχει μια μόνο λύση.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=2\ln(1-x)+1,\ \ x<1$ και $g(x)=2-\dfrac{2}{x+1},\ \ x>-1$.

Γ1. Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in(-\infty,1)$ με $x_1<x_2<1$, έχουμε:

$$x_1<x_2<1\Rightarrow -x_1>-x_2>-1\Rightarrow 1-x_1>1-x_2>0\Rightarrow \ln(1-x_1)>\ln(1-x_2)\Rightarrow 2\ln(1-x_1)>2\ln(1-x_2)\Rightarrow$$

$1+2\ln(1-x_1)>1+2\ln(1-x_2) \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1)$.

Για οποιαδήποτε $x_1,x_2 \in(-1,+\infty)$ με $-1<x_1<x_2$, έχουμε:

$$-1<x_1<x_2 \Rightarrow 0<x_1+1<x_2+1 \Rightarrow \frac{1}{x_1+1}>\frac{1}{x_2+1} \Rightarrow -\frac{2}{x_1+1}<-\frac{2}{x_2+1} \Rightarrow 2-\frac{2}{x_1+1}<2-\frac{2}{x_2+1} \Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$.

Γ2. Η συνάρτηση $f\circ g$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο:

$$A_{fog}=\left\{x\in A_g \,/\, g(x)\in A_f\right\}=\left\{x\in(-1,+\infty)/2-\frac{2}{x+1}\in(-\infty,1)\right\}=\left\{x\in(-1,+\infty)/2-\frac{2}{x+1}<1\right\}=$$

$$=\left\{x\in(-1,+\infty)/1-\frac{2}{x+1}<0\right\}=\left\{x\in(-1,+\infty)/\frac{x-1}{x+1}<0\right\}=\left\{x\in(-1,+\infty)/(x-1)(x+1)<0\right\}=$$

$$=\left\{x\in(-1,+\infty)/x\in(-1,1)\right\}=(-1,1)$$

και έχει τύπο $(f\circ g)(x)=f(g(x))=2\ln(1-\frac{2x}{x+1})+1=2\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)+1$

Γ3. Για οποιαδήποτε $x_1,x_2 \in(-1,1)$ με $-1<x_1<x_2<1$, έχουμε:

$$-1<x_1<x_2<1 \overset{g\uparrow(-1,+\infty)}{\Rightarrow} g(x_1)<g(x_2) \overset{f\downarrow(-\infty,1)}{\Rightarrow} f(g(x_1))>f(g(x_2)) \Rightarrow (fog)(x_1)>(fog)(x_2) \Rightarrow h(x_1)>h(x_2)$$

Επομένως η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,1)$

Η συνάρτηση $h=fog$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο πεδίο ορισμού της $A=(-1,1)$ ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων g και f επομένως έχει σύνολο τιμών $h(A)=\left(\lim\limits_{x\to1^-}h(x),\lim\limits_{x\to-1^+}h(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ γιατί:

$$\lim_{x\to1^-}h(x)=\lim_{x\to1^-}\left(2\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)+1\right)\overset{u=\frac{1-x}{1+x}\to0}{=}\lim_{u\to0^+}\left(2\ln u+1\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} h(x) = \lim_{x\to -1^+}\left(2\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)+1\right) \overset{u=\frac{1-x}{1+x}\to+\infty}{=} \lim_{u\to+\infty}\left(2\ln u+1\right)=+\infty$$

Γ4.

1ος Τρόπος

Έχουμε $-1<\alpha<\beta<1 \Rightarrow -1<\alpha<\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\beta<1 \overset{h\downarrow(-1,1)}{\Rightarrow} h(\alpha)>h\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)>h(\beta)$ τότε,

- η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]\subseteq(-1,1)$
- $h(\beta)<h\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)<h(\alpha)$

Από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $h(\xi)=h(\dfrac{\alpha+\beta}{2}) \Rightarrow h(\xi)=2\ln\left(\dfrac{1-(\frac{\alpha+\beta}{2})}{1+\frac{\alpha+\beta}{2}}\right)+1 \Rightarrow h(\xi)=2\ln\left(\dfrac{2-(\alpha+\beta)}{2+\alpha+\beta}\right)+1$ και

επειδή η h είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και 1-1, το ξ είναι μοναδικό.

2ος Τρόπος

$$h(\xi)=2\ln\left(\frac{2-(\alpha+\beta)}{2+\alpha+\beta}\right)+1 \Leftrightarrow h(\xi)=2\ln\left(\frac{1-(\frac{\alpha+\beta}{2})}{1+\frac{\alpha+\beta}{2}}\right)+1 \Leftrightarrow h(\xi)=h(\frac{\alpha+\beta}{2}) \overset{h\,1-1}{\Leftrightarrow} \xi=\frac{\alpha+\beta}{2}\in(\alpha,\beta)$$

Άρα υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi=\dfrac{\alpha+\beta}{2}\in(\alpha,\beta)$ για το οποίο ισχύει:

$$h(\xi)=2\ln\left(\frac{2-(\alpha+\beta)}{2+\alpha+\beta}\right)+1\,.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x)-2f(1-x)=3x-3-e^{-x}+2e^{x-1} \quad (1), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Δ1. Στη σχέση (1) θέτουμε όπου x το $1-x$ και έχουμε

$$f(1-x)-2f(x)=3(1-x)-3-e^{-1+x}+2e^{-x} \Leftrightarrow f(1-x)-2f(x)=-3x-e^{-1+x}+2e^{-x} \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των (1) και (2) :

$$\begin{cases} f(x)-2f(1-x)=3x-3-e^{-x}+2e^{x-1} \\ f(1-x)-2f(x)=-3x-e^{-1+x}+2e^{-x} \end{cases} \underset{x2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f(x)-2f(1-x)=3x-3-e^{-x}+2e^{x-1} \\ 2f(1-x)-4f(x)=-6x-2e^{-1+x}+4e^{-x} \end{cases} \overset{+}{\Leftrightarrow}$$

$$-3f(x)=-3x-3+3e^{-x} \Leftrightarrow f(x)=x+1-e^{-x}$$

Δ2. Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, έχουμε: $x_1<x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1+1<x_2+1 \\ -x_1>-x_2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1+1<x_2+1 \\ e^{-x_1}>e^{-x_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+1<x_2+1 \\ -e^{-x_1}<-e^{-x_2} \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} x_1+1-e^{-x_1}<x_2+1-e^{-x_2} \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $f(0)=0$ άρα η $x=0$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως και 1-1 , η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$

- Για $x<0 \overset{f\uparrow\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} f(x)<f(0) \Leftrightarrow f(x)<0$
- Για $x>0 \overset{f\uparrow\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0) \Leftrightarrow f(x)>0$

Το πρόσημο της f είναι:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-$		$+$

Δ3.

$$f(e^{-x}-x-2)+e>0 \Leftrightarrow f(e^{-x}-x-2)>-e \Leftrightarrow f(e^{-x}-x-2)>f(-1) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} e^{-x}-x-2>-1 \Leftrightarrow$$
$$e^{-x}-x-1>0 \Leftrightarrow x+1-e^{-x}<0 \Leftrightarrow f(x)<0 \Leftrightarrow x<0$$

Δ4. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο πεδίο ορισμού της $A=\mathbb{R}$ ως άθροισμα των συνεχών συναρτήσεων $x+1$ και e^{-x} επομένως έχει σύνολο τιμών $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ γιατί:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1-e^{-x})=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1-e^{-x})=+\infty$

$$e^{x_0}\cdot(x_0-2020)=1 \Leftrightarrow x_0-2020=e^{-x_0} \Leftrightarrow x_0+1-e^{-x_0}=2021 \Leftrightarrow f(x_0)=2021$$

Το $2021\in f(A)=\mathbb{R}$ επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=2021$ και επειδή η f είναι 1-1, το x_0 είναι μοναδικό.

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη Βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Το διαγώνισμα επιμελήθηκε ο **Βαβουρανάκης Μιχάλης**, Μαθηματικός -MSc του 2ου ΓΕΛ Ηρακλείου Κρήτης.
Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο.**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

4ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΘΕΜΑΤΑ (Κεφάλαιο 2)

[Κεφάλαιο 1 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου]

ΘΕΜΑ Α

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$, με $x_0\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 10

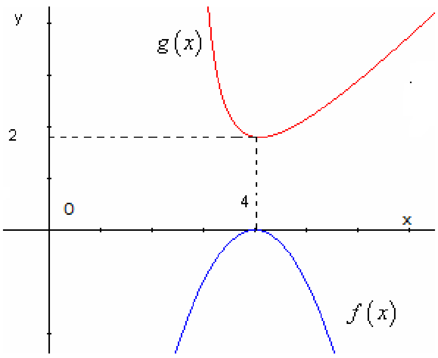
2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

3. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως **Σωστή (Σ)** ή **Λάθος (Λ)**:

α) Δίνεται το παρακάτω σχήμα τότε $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{g(x)}{f(x)}=+\infty$.

Μονάδες 2



β) Αν η f δεν είναι αντιστρέψιμη τότε η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

Μονάδες 2

γ) Η f είναι 1-1 αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $y=f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

Μονάδες 2

δ) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο σύνολο $A=[1,4]$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,4]$ και $f(3)=-2$. Τότε ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in[1,4]$.

Μονάδες 2

ε) Δίνεται η συνεχής και αντιστρέψιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^{-1}(-2015)=4,\ f^{-1}(1949)=-1$. Τότε δεν υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει
$f^2(x)+2f(x)\eta\mu x=x^2+\sigma\upsilon\nu^2 x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$.

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)+\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$ διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Μονάδες 10

2. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x$.

Μονάδες 5

3. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2+\sigma\upsilon\nu x}{x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2+\ln^2 x, & 0<x\le e\\ \alpha x+\ln(x-e+1), & e<x\end{cases}$

α) Να βρείτε τον αριθμό $\alpha\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

β) Αν $\alpha=\dfrac{3}{e}$, τότε η εξίσωση $f(x)=6$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1,2e)$.

Μονάδες 5

2. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν: $f\left(e^{f(x)}\right)=4\ln x+3$, για κάθε $x>0$
και $(f\circ f)\left(e^{f(x)}\right)=\ln\left(\ln x^4+3\right)^2+1$ για κάθε $x>e^{-3/4}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

Μονάδες 5

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Μονάδες 3

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(f \circ f)(x) = f\left(e^{x-2014} + \frac{3}{2}\right)$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(1, e)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x,\ x \in \mathbb{R}$

1. Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

2. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης f στο $[0, +\infty)$.

Μονάδες 3

3. Να δείξετε ότι $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ (Μονάδες 2) και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ (Μονάδες 5).

Μονάδες 7

4. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\left(\sqrt{\alpha^2+1} + \alpha\right)\left(\sqrt{\beta^2+1} + \beta\right) = 1$ να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 0$.

Μονάδες 5

5. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Το θέμα Δ επιμελήθηκε ο **Συγκελάκης Αλέξανδρος, Μαθηματικός του Πρότυπου Γενικού Λυκείου Ηρακλείου.**

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο, Μοτσάκο Βασίλειο και Σούγελα Ελένη.**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

4ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ -ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Κεφάλαιο 2)

[Κεφάλαιο 1 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου]

ΘΕΜΑ Α

1.Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδα 49.

2. Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδα 73.

3. **α)** Λ, **β)** Σ, **γ)** Σ, **δ)** Λ, **ε)** Λ.

ΘΕΜΑ Β

1.

1ος τρόπος

- Η συνάρτηση $g(x)=f(x)+\eta\mu x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων .
- Έστω x_0 μια ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$, οπότε έχουμε
  $g(x_0)=0 \Leftrightarrow g(x_0)=f(x_0)+\eta\mu x_0=0 \Leftrightarrow f(x_0)=-\eta\mu x_0,(1)$
- Η σχέση $f^2(x)+2f(x)\eta\mu x=x^2+\sigma\upsilon\nu^2 x$ για $x=x_0$ γίνεται
  $f^2(x_0)+2f(x_0)\eta\mu x_0=x_0^2+\sigma\upsilon\nu^2 x_0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} (-\eta\mu x_0)^2-2\eta\mu^2 x_0=x_0^2+\sigma\upsilon\nu^2 x_0$
  $\Leftrightarrow 0=x_0^2+\eta\mu^2 x_0+\sigma\upsilon\nu^2 x_0 \Leftrightarrow 0=x_0^2+1$ αδύνατο, επομένως $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και επειδή είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο .

2ος τρόπος

Η συνάρτηση $g(x)=f(x)+\eta\mu x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

- Η σχέση $f^2(x)+2f(x)\eta\mu x=x^2+\sigma\upsilon\nu^2 x$ γίνεται
  $f^2(x)+2f(x)\eta\mu x=x^2+1-\eta\mu^2 x \Leftrightarrow f^2(x)+2f(x)\eta\mu x+\eta\mu^2 x=x^2+1 \Leftrightarrow$
  $(f(x)+\eta\mu x)^2=x^2+1 \Leftrightarrow g^2(x)=x^2+1>0$ άρα $g(x)\neq 0$ και αφού είναι συνεχής

θα διατηρεί πρόσημο. Όμως $g(0)=f(0)+\eta\mu 0=1+0=1>0$, οπότε $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

2.

1ος τρόπος

- Η σχέση $f^2(x)+2f(x)\eta\mu x=x^2+\sigma\upsilon\nu^2 x$ γίνεται
  $f^2(x)+2f(x)\eta\mu x=x^2+1-\eta\mu^2 x \Leftrightarrow f^2(x)+2f(x)\eta\mu x+\eta\mu^2 x=x^2+1\Leftrightarrow$
  $(f(x)+\eta\mu x)^2=x^2+1\Leftrightarrow g^2(x)=x^2+1$
- Επειδή η g διατηρεί σταθερό πρόσημο θα έχουμε $g(x)>0$ ή $g(x)<0$, οπότε
  $g(x)=\sqrt{x^2+1}$ ή $g(x)=-\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow g(x)=f(x)+\eta\mu x=\sqrt{x^2+1}$ ή
  $g(x)=f(x)+\eta\mu x=-\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow f(x)=-\eta\mu x+\sqrt{x^2+1}$ ή $f(x)=-\eta\mu x-\sqrt{x^2+1}$
  και επειδή $f(0)=1$ έχουμε $f(x)=-\eta\mu x+\sqrt{x^2+1}$

2ος τρόπος

- Αφού $g(x)>0$ τότε από το προηγούμενο ερώτημα θα έχουμε
  $g^2(x)=x^2+1\Rightarrow g(x)=\sqrt{x^2+1}$, όμως $g(x)=f(x)+\eta\mu x$,

  οπότε $f(x)+\eta\mu x=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x$.

3. α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2+\sigma\upsilon\nu x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\eta\mu x+\sqrt{x^2+1}-2+\sigma\upsilon\nu x}{x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-\eta\mu x}{x}+\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-\eta\mu x}{x}+\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-\eta\mu x}{x}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right]=-1+0+0=-1$$

β)

1ος τρόπος

$0 \le -1+\sqrt{x^2+1} \le -\eta\mu x+\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow 0 \le \dfrac{1}{-\eta\mu x+\sqrt{x^2+1}} \le \dfrac{1}{-1+\sqrt{x^2+1}}$ και επειδή

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{-1+\sqrt{x^2+1}}\right)=0$ και από το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{-\eta\mu x+\sqrt{x^2+1}}\right)=0$ με

$0 \le -\eta\mu x+\sqrt{x^2+1} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\eta\mu x+\sqrt{x^2+1}\right)=+\infty$

2οςτρόπος

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\eta\mu x+\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty} x\left[-\frac{\eta\mu x}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]=(+\infty)(0+1)=+\infty$$

Γιατί $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right| \le \dfrac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{|x|} \le \dfrac{\eta\mu x}{x} \le \dfrac{1}{|x|}$ όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{|x|}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)=0$ οπότε από το κριτήριο της παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=0$.

ΘΕΜΑ Γ

1. α) Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $(0,+\infty)$, θα είναι συνεχής και στο e οπότε θα ισχύει:

$\lim\limits_{x\to e^-} f(x)=\lim\limits_{x\to e^+} f(x)=f(e) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to e^-}\left(2+\ln^2 x\right)=\lim\limits_{x\to e^+}\left(\alpha x+\ln(x-e+1)\right)=f(e)$

$\Leftrightarrow 3=\alpha e=3 \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{3}{e}$.

β) Επειδή $f(1)=2+\ln^2 1=2<6$,

$f(2e)=\dfrac{3}{e}2e+\ln(2e-e+1)=6+\ln(e+1)>6$, γιατί

$e+1>e \Leftrightarrow \ln(e+1)>\ln e \Leftrightarrow 6+\ln(e+1)>6+1=7 \Leftrightarrow f(2e)>7$

δηλαδή $f(1) < 6 < f(2e)$ και η f είναι συνεχής στο $[1,2e]$ τότε, σύμφωνα με το Θ. ενδιαμέσων τιμών υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,2e) : f(x_0) = 6$.

2. α) Έστω $x_1, x_2 > 0$ με

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{f(x_1)} = e^{f(x_2)} \Rightarrow f\left(e^{f(x_1)}\right) = f\left(e^{f(x_2)}\right) \Rightarrow$$

$4\ln x_1 + 3 = 4\ln x_2 + 3 \Rightarrow \ln x_1 = \ln x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Άρα η f είναι $1-1$.

β) $(f \circ f)\left(e^{f(x)}\right) = \ln\left(\ln x^4 + 3\right)^2 + 1 \Rightarrow (f \circ f)\left(e^{f(x)}\right) = 2\ln\left(\ln x^4 + 3\right) + 1 \Rightarrow$

$$f(f(e^{f(x)})) = 2\ln\left(4\ln x + 3\right) + 1 \Rightarrow f(4\ln x + 3) = 2\ln\left(4\ln x + 3\right) + 1$$

Θέτουμε $4\ln x + 3 = y > 0$, οπότε $f(y) = 2\ln y + 1$, άρα $f(x) = 2\ln x + 1,\ \ x > 0$.

γ) Το πεδίο ορισμού της $f \circ f$ είναι :

$$\{x \in A_f \ \text{και}\ f(x) \in A_f\} = \{x > 0 \ \text{και}\ 2\ln x + 1 > 0\} = \left\{x > 0 \ \text{και}\ x > \frac{1}{\sqrt{e}}\right\} = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$$

$$(f \circ f)(x) = f\left(e^{x-2014} + \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow f(f(x)) = f\left(e^{x-2014} + \frac{3}{2}\right) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = e^{x-2014} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2\ln x + 1 = e^{x-2014} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\ln x + 1 - e^{x-2014} - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow 2\ln x - e^{x-2014} - \frac{1}{2} = 0 \ \textbf{(2)}$$

Θέτουμε $t(x) = 2\ln x - e^{x-2014} - \frac{1}{2}$, η οποία είναι συνεχής στο $[1,e] \subseteq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και

$$t(1) = 2\ln 1 - e^{1-2014} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{2013}} < 0$$

$t(e) = 2\ln e - e^{e-2014} - \frac{1}{2} = 2 - e^{e-2014} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{e^{2014-e}} > 0$, επομένως ισχύει $t(e)t(1) < 0$, οπότε από το Θ.Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,e)$ τέτοιο ώστε $t(x_0) = 0$ και λόγω της **(2)** έχουμε ισοδύναμα ότι η εξίσωση $(f \circ f)(x) = f\left(e^{x-2014} + \frac{3}{2}\right)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,e)$.

ΘΕΜΑ Δ

1.

1ος τρόπος

Θα δείξουμε ότι $\sqrt{x^2+1} > -x$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι, αν ο x είναι θετικός τότε το 1ο μέλος της (1) είναι θετικό και το δεύτερο αρνητικό οπότε η (1) ισχύει για όλους τους θετικούς αριθμούς x. Αν $x \leq 0$ τότε και τα δύο μέλη της (1) είναι μη αρνητικά συνεπώς υψώνοντας στο τετράγωνο παίρνουμε ισοδύναμα $x^2+1 > x^2 \Leftrightarrow 1 > 0$ που ισχύει για όλους τους μη αρνητικούς αριθμούς x. Άρα τελικά η (1) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2ος τρόπος

Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x ισχύει $x^2+1 > x^2$ και επειδή η $\sqrt{x}$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $[0,+\infty)$, άρα παίρνουμε $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > |x|$. Όμως από τις ιδιότητες της απόλυτης τιμής ισχύει $|x| \geq -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνδυάζοντας τις προηγούμενες δύο ανισότητες παίρνουμε $\sqrt{x^2+1} > -x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} + x > 0$ που είναι αυτό που θέλαμε να δείξουμε.

3ος τρόπος

Αν υπάρχει αριθμός x_0 ώστε $f(x_0) = 0$, τότε παίρνουμε ισοδύναμα $\sqrt{x_0^2+1} = -x_0$ και υψώνοντας στο τετράγωνο για εκείνα τα x_0 που επιτρέπεται (προφανώς για $x_0 \leq 0$), παίρνουμε $x_0^2+1 = x_0^2 \Leftrightarrow 1 = 0$, άτοπο. Άρα η συνάρτηση δε μηδενίζεται και από την άλλη είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αφού προκύπτει από πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων. Συνεπώς διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Αφού επιπλέον $f(0) = 1 > 0$, άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. Έστω $x_1, x_2 \in [0,+\infty)$ με $x_1 < x_2$ (1). Αφού η συνάρτηση x^2 είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, άρα $x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2+1 < x_2^2+1 \overset{\sqrt{x}\uparrow}{\Leftrightarrow} \sqrt{x_1^2+1} < \sqrt{x_2^2+1}$ (2).

Προσθέτοντας τις (1), (2) κατά μέλη παίρνουμε

$$\sqrt{x_1^2+1} + x_1 < \sqrt{x_2^2+1} + x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ όπως το θέλαμε.

3.

<u>*1ος τρόπος*</u>

$$f(-x)=\sqrt{(-x)^2+1}-x=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{f(x)}\ (3)$$

<u>*2ος τρόπος*</u>

Η $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$ (3) γίνεται ισοδύναμα:

$f(-x)f(x)=1\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=1\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)-x^2=1\Leftrightarrow 1=1$ που ισχύει.

Για τη μονοτονία έχουμε αποδείξει ήδη ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Θα βρούμε τη μονοτονία στο $(-\infty,0]$. Έστω λοιπόν $x_1,x_2\in(-\infty,0]$ με $x_1<x_2$. Τότε, $-x_1>-x_2\geq 0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ (από το ερώτημα Δ2), άρα παίρνουμε $f(-x_1)>f(-x_2)\overset{(3)}{\Leftrightarrow}\dfrac{1}{f(x_1)}>\dfrac{1}{f(x_2)}\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}f(x_1)<f(x_2)$.

Θα δείξουμε τώρα ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

- Αν $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ άρα $f(x_1)<f(x_2)$.
- Αν $x_1,x_2\in(-\infty,0]$ με $x_1<x_2$ τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ άρα $f(x_1)<f(x_2)$.
- Αν $x_1<0<x_2$ τότε $f(x_1)<f(0)<f(x_2)$, άρα και πάλι $f(x_1)<f(x_2)$.

Επομένως σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

4.

<u>*1ος τρόπος*</u>

Η δοσμένη σχέση γράφεται

$$\sqrt{\alpha^2+1}+\alpha=\frac{1}{\sqrt{\beta^2+1}+\beta}\Leftrightarrow f(\alpha)=\frac{1}{f(\beta)}\overset{(3)}{\Leftrightarrow}f(\alpha)=f(-\beta)\overset{f\uparrow\text{ άρα } f\ 1-1}{\Leftrightarrow}\alpha=-\beta\Leftrightarrow\alpha+\beta=0$$

2ος τρόπος

Η δοσμένη σχέση γράφεται

$$\sqrt{\alpha^2+1}+\alpha=\frac{1}{\sqrt{\beta^2+1}+\beta}=\frac{\sqrt{\beta^2+1}-\beta}{\left(\sqrt{\beta^2+1}+\beta\right)\left(\sqrt{\beta^2+1}-\beta\right)}=\sqrt{\beta^2+1}-\beta$$

Άρα $\sqrt{\alpha^2+1}+\alpha=\sqrt{\beta^2+1}-\beta$

Εντελώς όμοια παίρνουμε $\sqrt{\beta^2+1}+\beta=\sqrt{\alpha^2+1}-\alpha$

Προσθέτοντας τις παραπάνω κατά μέλη παίρνουμε

$$\alpha+\beta=-\alpha-\beta \Leftrightarrow 2(\alpha+\beta)=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta=0$$

Σχόλιο: Παρατηρήστε ότι ο 2ος τρόπος δεν απαιτεί τίποτε παραπάνω από γνώσεις Άλγεβρας Α Λυκείου.

5.

1ος τρόπος

Θέτουμε $y=f(x)$, με $y>0$ και έτσι

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+1}+x=y\\ y>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2+1}=y-x\\ y>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+1=(y-x)^2\\ y>0\\ y-x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{y^2-1}{2y}\\ y>0\\ y-\dfrac{y^2-1}{2y}\geq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{y^2-1}{2y}\\ y>0\\ y^2+1\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{y^2-1}{2y}\\ y>0\end{cases}$$

οπότε $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2-1}{2x},\ x>0$.

Σχόλιο: Από τον παραπάνω τρόπο βγάζουμε το συμπέρασμα ότι η εξίσωση $y=f(x)$ έχει για κάθε $y\in(0,+\infty)$ μία και μόνο λύση στο $\mathbb{R}$, την $x=\dfrac{y^2-1}{2y}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η f είναι 1-1 (χωρίς να χρειάζεται να κάνουμε χρήση της μονοτονίας της) και κατά συνέπεια αντιστρέψιμη με $f^{-1}:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ και τύπο $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2-1}{2x}$.

2ος τρόπος

Δείξαμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα 1-1 συνεπώς είναι αντιστρέψιμη. Θέτουμε $y=f(x)$, με $y>0$ (λόγω του Δ1) και έχουμε:

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\sqrt{x^2+1}+x \overset{\sqrt{x^2+1}-x\neq 0}{\Leftrightarrow} y=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\Leftrightarrow \frac{1}{y}=\sqrt{x^2+1}-x$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις $y=\sqrt{x^2+1}+x$ και $\dfrac{1}{y}=\sqrt{x^2+1}-x$ παίρνουμε

$$2x=y-\frac{1}{y}\Leftrightarrow x=\frac{y^2-1}{2y}\quad(4)$$

Λόγω του ότι για να φτάσουμε στη σχέση (4), χάθηκε η ισοδυναμία (διότι αφαιρέσαμε κατά μέλη), έχουμε αποδείξει μόνο τη συνεπαγωγή $f(x)=y\Rightarrow x=g(y)$, με $g(y)=\dfrac{y^2-1}{2y}$, $y>0$. Θα πρέπει τώρα να δείξουμε και το αντίστροφο δηλαδή ότι αν $x=\dfrac{y^2-1}{2y}$, $y>0$ τότε ισχύει $f(x)=y$. Πράγματι

$$f(x)=f\left(\frac{y^2-1}{2y}\right)=\sqrt{\left(\frac{y^2-1}{2y}\right)^2+1}+\frac{y^2-1}{2y}=\sqrt{\frac{y^4-2y^2+1+4y^2}{4y^2}}+\frac{y^2-1}{2y}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{y^2+1}{2y}\right)^2}+\frac{y^2-1}{2y}\overset{y>0}{=}\frac{y^2+1}{2y}+\frac{y^2-1}{2y}=y$$

Άρα τελικά, $f^{-1}(x)=g(x)=\dfrac{x^2-1}{2x}$, $x>0$

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Το θέμα Δ επιμελήθηκε ο **Συγκελάκης Αλέξανδρος, Μαθηματικός του Πρότυπου Γενικού Λυκείου Ηρακλείου.**

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο, Μοτσάκο Βασίλειο και Σούγελα Ελένη.**