

Τάξη: Γ
Ημερομηνία: Πέμπτη 26 Μαΐου 2022

Θέμα 1

- A.** Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **(Μονάδες 10)**
- B.** Πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται 1-1; **(Μονάδες 5)**
- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες**
- α)** Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ και συνεχής στο (α, β) , τότε παίρνει πάντοτε στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή.
- β)** Αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε πάντοτε θα ισχύει και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$.
- γ)** Αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν έχει ρίζες στο Δ , τότε η f διατηρεί πρόσημο στο Δ .
- δ)** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι 1-1 τότε υπάρχει εφαπτομένη της C_f η οποία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- ε)** Αν η f είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ . **(Μονάδες 10)**

Θέμα 2

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \sqrt{x}$.

- α)** Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ και να εξετάσετε αν είναι ίσες. **(Μονάδες 15)**
- β)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση $(g \circ f)(x) = \sqrt{\ln x}$, με $x \geq 1$, ως προς τις ασύμπτωτες. **(Μονάδες 10)**

Θέμα 3

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [3, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(3) + f(5) = 0$.

- α)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [3, 5]$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. **(Μονάδες 9)**
- β)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_1 \in (3, 5)$, τέτοιο ώστε $f'(x_1) = f(5)$. **(Μονάδες 9)**
- γ)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $f(3)x + y + 2022 = 0$. **(Μονάδες 7)**

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x - 1}{e^x}$, η οποία παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 0$.

- α)** Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και να προσδιορίσετε το είδος του ακροτάτου. **(Μονάδες 9)**
- β)** Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. **(Μονάδες 7)**
- γ)** Να λύσετε την εξίσωση $ef(x) = x - 3$. **(Μονάδες 9)**

Ο Διευθυντής

Οι Εισηγητές

ΘΕΜΑ Α

A.1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0

β. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1 – 1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

γ. Ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$.

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ , βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.

ε. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη

της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ **(Μονάδες 10)**

A.2. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **(Μονάδες 15)**

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x - 1$

Να δείξετε ότι:

B.1. Η f είναι γνησίως αύξουσα.

(12 μονάδες)

B.2. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $(0,1)$ **(13 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - ax^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1$.

Γ.1. να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)$ να είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
(12 μονάδες)

Γ.2. για $a = 0$ να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = f(x) + 1$, τον άξονα x' και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$. **(13 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Δ.1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 . **(6 μονάδες)**

Δ.2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της. **(9 μονάδες)**

Δ.3. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της παρακάτω εξίσωσης για όλες τις πραγματικές τιμές του a **(10 μονάδες)**

$$x = e^{\frac{a}{x}}$$

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Η ΕΙΣΗΓΗΤΡΙΑ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

ΤΑΞΗ: Γ'

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α.

A₁. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathcal{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1$. (10 μονάδες)

A₂. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος: (6 μονάδες)

1. Για κάθε $x \in \mathcal{R}$ ισχύει: $\eta\mu x \leq x$.

2. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη είναι $f(\beta) > 0$.

3. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης είναι πάντοτε μέγιστο αυτής.

A₃. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$ ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως Αληθή ή Ψευδή. (2 μονάδες)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (7 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β.

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2 \ln(\sqrt{x-1} + 1) + 3$.

B₁. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (8 μονάδες)

B₂. Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1". (9 μονάδες)

B₃. Αν το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα $[3, +\infty)$ να λύσετε την εξίσωση

$$f^{-1}(1+x) = 2.$$

(8 μονάδες)

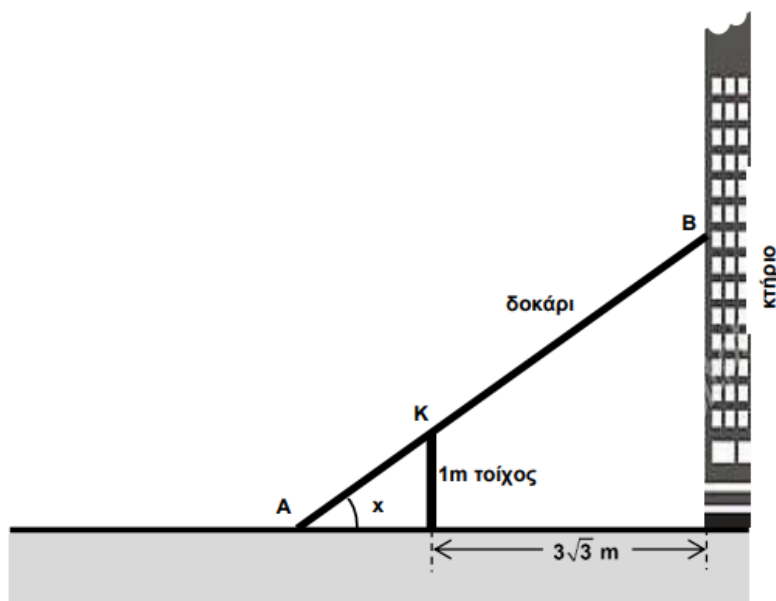
ΘΕΜΑ Γ.

Γ₁. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x) = x - \ln x$. (15 μονάδες)

Γ₂. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x$. (10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ.

Ο τοίχος ύψους 1m του παρακάτω σχήματος απέχει $3\sqrt{3}$ m από ένα ψηλό κτήριο. Ένα δοκάρι στηρίζεται στα αριστερά του τοίχου και φτάνει μέχρι το κτήριο. Αν θεωρήσουμε ότι το πάχος του τοίχου όπως και του δοκαριού είναι αμελητέα και x rad με $0 < x < \frac{\pi}{2}$, είναι η γωνία που σχηματίζει το δοκάρι AB με το έδαφος όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, τότε:



Δ₁.

Να εκφράσετε τα KA και KB συναρτήσει της γωνίας x και να αποδείξετε ότι το μήκος AB του δοκαριού σε μέτρα συναρτήσει της γωνίας x είναι

$$f(x) = \frac{1}{\eta\mu x} + \frac{3\sqrt{3}}{\sigma\upsilon\nu x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

(9 μονάδες)

Δ₂.

Να βρείτε το ελάχιστο μήκος του δοκαριού AB που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε.
(8 μονάδες)

Δ3.

Να εξετάσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα (κυρτή ή κοίλη).
(8 μονάδες)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.
- Οι απαντήσεις σας να είναι στην κόλλα σας και όχι στην φωτοτυπία με τα θέματα.
- Να γράψετε με ανεξίτηλο στυλό χρώματος μπλε ή μαύρο.
- Να μην χρησιμοποιήσετε μολύβι ή διορθωτικό (blanko).
- Διάρκεια εξέτασης: Δύο (02) ώρες από την διανομή των θεμάτων.

Σας Ευχόμαστε Επιτυχία!

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α.

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε να δείξετε ότι για κάθε αριθμό η που είναι μεταξύ των $f(\alpha)$, $f(\beta)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \eta$. (μονάδες 15)

A2. Να γράψετε στη κόλλα σας το γράμμα και δίπλα **ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ**(ολογράφως):

α. Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε έχει ελάχιστο. (μονάδες 2)

β. Είναι $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$, όπου f, g παραγωγίσιμες. (μονάδες 2)

γ. Αν f αντιστρέψιμη τότε ισχύει ότι $f^{-1}(f(x)) = x, x \in D_f$. (μονάδες 2)

δ. Αν $f'(x_0) = 0$ τότε x_0 θέση ακρότατου της f πάντα. (μονάδες 2)

ε. Είναι $(x^x)' = x^{x-1}$, για κάθε $x > 0$ (μονάδες 2)

ΘΕΜΑ Β.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ και $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ και $h(x) = \sqrt{x}$

B1. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες. (μονάδες 5)

B2. Να ορίσετε την συνάρτηση $\phi = g \circ h$. (μονάδες 10)

B3. Να υπολογίσετε τα $\lim_{x \rightarrow 2} [\varphi(x)(x^2 - 2x)]$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. (μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Γ.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα (μονάδες 10)

Γ2. Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τα κοίλα-κυρτά και να βρεθούν τα σημεία καμπής (μονάδες 10)

Γ3. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 2022$ (μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ.

Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x)=e^x$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x)=\ln x$, $x>0$.

- Δ1.** Να δείξετε η f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή, ενώ η g είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη. (μονάδες 8)
- Δ2.** Να βρεθούν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(0,1)$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο $B(1,0)$. (μονάδες 6)
- Δ3.** Να δείξετε ότι $e^x \geq x+1$ και $\ln x \leq x-1$ (μονάδες 6)
- Δ4.** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι πιο πάνω από της g (μονάδες 5)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

Θέμα 1^ο

A₁) Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Bolzano. (Μονάδες 5)

A₂) Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες σε ένα σημείο x_0 τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(Μονάδες 10)

A₃) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 \neq x_2, \text{ τότε } f(x_1) \neq f(x_2)$$

β) Ισχύει ότι : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$

γ) Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

δ) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 τότε δεν είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

ε) Ισχύει ότι : $(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$

(Μονάδες 10)

Θέμα 2^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$ και $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.

A. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων. (Μονάδες 4)

B. Να βρείτε τις παραγώγους f' , g' των συναρτήσεων. (Μονάδες 6)

Γ. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f, g ως προς τη μονοτονία τους.

(Μονάδες 10)

Δ. Να υπολογίσετε τα ακρότατα των συναρτήσεων f, g και να δείξετε ότι έχουν τοπικό μέγιστο στην ίδια θέση.

(Μονάδες 5)

Θέμα 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x^2 - ax - 2$.

Α. Να δείξετε ότι για κάθε $a \neq 1$ η εξίσωση $x^3 + 2x^2 = + ax + 2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$.

(Μονάδες 13)

Β. Αν $a = 1$ να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x+2}$

(Μονάδες 12)

Θέμα 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 2x + 3$.

Α. Να μελετήσετε την $f(x)$ ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής αν υπάρχουν.

(Μονάδες 10)

Β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ τις ευθείες $x = 0, x = 1$ και τον άξονα των x .

(Μονάδες 15)

Ο Διευθυντής

Οι Διδάσκοντες

Γραπτές Απολυτήριες Εξετάσεις Μαΐου-Ιουνίου 2022

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α(25 μονάδες)

A1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, την λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 6} (f(x)g(x))$, τότε είναι ίσο με $f(6) * g(6)$.
2. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.
3. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο x_0 σημείο καμπής, τότε και η $h = f * g$ έχει στο x_0 σημείο καμπής.
4. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$.
5. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Μονάδες 10

A2. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β(25 μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2a, & \text{αν } x \leq 0 \\ \frac{\eta \mu x}{x}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}.$$

B1. Δικαιολογήστε για ποιο λόγο η συνάρτηση f είναι συνεχής σε κάθε διάστημα.

Μονάδες 10

B2. Για ποια τιμή του a είναι συνεχής η συνάρτηση f ;

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Γ(25 μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$ και μια, τουλάχιστον, στο διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 12

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 60x^2 - 50x - 1 = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ Δ(25 μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x + x - 1$.

Δ1. Να εξετάσετε την συνάρτηση g ως προς την μονοτονία.

Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε τις ρίζες της συνάρτησης g .

Μονάδες 10

Δ3. Να κάνετε τον πίνακα προσήμων της συνάρτησης g .

Μονάδες 10

Καλή επιτυχία!

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο Δ .

(Μονάδες 15)

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α) Αν για 2 συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε ισχύει πάντοτε ότι $f \circ g = g \circ f$.
- β) Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
- γ) Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- δ) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .
- ε) Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει:
 $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+6x-7}{2x-2}, & x < 1 \\ 2a, & x = 1, a \in \mathbb{R} \\ \frac{x-1}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$$

- Γ1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f . (Μονάδες 10)
- Γ2. Να βρείτε τα ακρότατα της f . (Μονάδες 8)
- Γ3. Να αποδείξετε ότι $x^e \leq e^x$ για κάθε $x > 0$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln x$, $x > 0$.

- Δ1. Να οριστεί η σύνθεση της g με την f , δηλαδή η συνάρτηση $f \circ g$. (Μονάδες 7)
- Δ2. Να αποδειχτεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να οριστεί η f^{-1} . (Μονάδες 8)
- Δ3. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f . (Μονάδες 5)
- Δ4. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες έχει ακριβώς μία λύση στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση: $e^x - \alpha = \alpha e^x - 1$. (Μονάδες 5)

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα
Όλες οι απαντήσεις να γραφούν στην κόλλα των εξετάσεων

Να έχετε επιτυχία!

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ . **(μονάδες 15)**

A2. Να απαντήσετε με «Σωστό» ή «Λάθος» στα παρακάτω:

α) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

β) Αν $0 < a < 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$

γ) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

δ) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .

ε) Για κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **(μονάδες 10)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4x+3} + \sqrt{2x+1}$

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης **(μονάδες 15)**

B2. Να βρεθούν οι τιμές της συνάρτησης για $x=0$ και για $x=1$ καθώς και το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον yy' .

(μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + x, & x < 1 \end{cases}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. **(μονάδες 10)**

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(μονάδες 5)

Γ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 , η οποία είναι αρνητική.

(μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1, & x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$ με $\alpha < -3$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. **(μονάδες 6)**

Δ2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί κάθε μια από τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο $[0, \frac{3\pi}{2}]$ **(μονάδες 6)**

Δ3. Να βρεθεί το μοναδικό $\xi \in (0, \frac{3\pi}{2})$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi)=0$.

(μονάδες 6)

Δ4. Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. **(μονάδες 7)**

Ο διευθυντής

ο εισηγητής

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1$, δηλαδή $(x)' = 1$.

(15 μονάδες)

A2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- i. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο x_0 (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.
- ii. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .
- iii. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
- iv. Αν $x \neq 0$ τότε ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.
- v. Μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση $1 - 1$ αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

(10 μονάδες)

Θέμα Β

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$

Γ2. Για $\lambda = -2$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της φ στο σημείο $x_0 = -\frac{2}{3}$.
(9 μονάδες)

Γ3. Για $\lambda = -2$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
(7 μονάδες)

Θέμα Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$f(x) + e^{f(x)} = 5 - 4x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

Δ1. Η συνάρτηση f αντιστρέφεται.
(13 μονάδες)

Δ2. Η εξίσωση $f(f(x)) - f(5 - 10x^3) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.
(12 μονάδες)

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
& ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α:

A1) Αν οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει : $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

(Μονάδες 7)

A2) Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζουμε κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ ;

(Μονάδες 4)

A3) Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

(Μονάδες 4)

A4) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

ΘΕΜΑ Β:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha^2, & x \leq 0 \\ e^{-x} + 2\alpha - 2, & x > 0 \end{cases}$$

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

B1) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και να εξετάσετε αν το $x=0$ είναι κρίσιμο σημείο της f .

(Μονάδες 9)

B2) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

(Μονάδες 8)

B3) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^{x-1} - 1)$

Γ1) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A=(1, +\infty)$ και να

(Μονάδες 8)

Δ2) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή και κοίλη καθώς και τα σημεία καμπής της.

(Μονάδες 8)

Δ3) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $g(x) = e^x$ και $h(x) = x^e$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο.

(Μονάδες 9)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Ο ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
& ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α:

A1) Αν οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει : $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

(Μονάδες 7)

A2) Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζουμε κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ ;

(Μονάδες 4)

A3) Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

(Μονάδες 4)

A4) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(α) Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f .

(β) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta=(\alpha,\beta)$ τότε το σύνολο τιμών της f στο Δ είναι:

$$f(\Delta) = (\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x))$$

(γ) Αν για δύο συναρτήσεις f , g ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες.

(δ) Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες.

ΘΕΜΑ Β:

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha^2, & x \leq 0 \\ e^{-x} + 2\alpha - 2, & x > 0 \end{cases}$$

B1) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και να εξετάσετε αν το $x=0$ είναι κρίσιμο σημείο της f .

(Μονάδες 9)

B2) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

(Μονάδες 8)

B3) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^{x-1} - 1)$

Γ1) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A=(1, +\infty)$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(Μονάδες 9)

Γ2) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και ότι $f^{-1}(x) = \ln(e^x + 1) + 1$

(Μονάδες 8)

Γ3) Να αποδείξετε ότι για την f^{-1} ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[-1, 1]$ και στη συνέχεια να βρείτε την τιμή του ξ , του συμπεράσματος του Θεωρήματος

(Μονάδες 8)

Δ1) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f και τα ακρότατά της.

(Μονάδες 8)

Δ2) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή και κοίλη καθώς και τα σημεία καμπής της.

(Μονάδες 8)

Δ3) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $g(x) = e^x$ και $h(x) = x^e$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο.

(Μονάδες 9)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!

Θέμα Α

A1. Πότε η ευθεία $\psi = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$) ; (7M)

A2. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(\chi_0) = \eta$ (8M)

A3. Να διατυπώσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λάθος

α) Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις και $f(\chi) \leq g(\chi)$ για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$,

τότε θα ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$

β) Αν $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) = 0$ και $f(\chi) < 0$ κοντά στο χ_0 τότε $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{1}{f(\chi)} = +\infty$

γ) Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο χ_0 ισχύει :

$$(f \cdot g)'(\chi_0) = f'(\chi_0)g(\chi_0) + f(\chi_0)g'(\chi_0)$$

δ) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $n \geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη

ε) Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ , έχει μόνο

μια παράγουσα στο Δ

(10M)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{\chi+1}{\chi-1}$, $\chi \in \mathbb{R} - \{1\}$

B1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη της f , την οποία και να βρείτε

(5 + 10 = 15M)

B2. Δίνεται η συνάρτηση $g(\chi) = \ln \chi$, να βρείτε την σύνθεση της g με την f

(10M)

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{\chi}{\chi^2+9}$, $\chi \in \mathbb{R}$

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

(10M)

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

(8M)

Γ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f

(7M)

Δ2. ι) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

ιι) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$

(6+4M)

Δ3. Ένα υλικό σημείο $A(x(t), y(t))$, $x(t) > \frac{1}{e}$, $t > 0$ κινείται πάνω

στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f με σταθερή ταχύτητα $u = 4\text{cm/sec}$ και έστω K η προβολή του σημείου A στον άξονα $x'x$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAK , όπου O η αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σημείο A διέρχεται από το σημείο του ολικού μεγίστου της f

(5M)

Δ4. Για κάθε $\alpha, \beta \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)-1}{x-1} + \frac{f(\beta)-1}{x-2} = 2022$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$

(5M)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α)** Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$.
- β)** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, τότε η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) .
- γ)** Αν $\alpha > 1$, τότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$.
- δ)** Ισχύει: $(\eta\mu x)' = -\sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ε)** Η εξίσωση εφαπτομένης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f , στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ είναι: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Μονάδες 5·2=10

A2. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 + e^x, & \text{αν } x \leq 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x+4}-2}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}.$$

B1. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

Μονάδες 5

B2. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Μονάδες 10

B3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + kx \ln x$, με $x \in (0, +\infty)$ και $k \in \mathbb{R}$.

Αν η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $(e, 0)$,

Γ1. Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό k . **Μονάδες 8**

Για $k = -1$:

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη και ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 > 0$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 1$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της C_f .

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f .

Μονάδες 8

Δ4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 5

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα

ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ με $x \geq 0$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Μονάδες: 7
- A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία. Μονάδες: 4
- A3.** Έστω μία συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ; Μονάδες: 4
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στην κάθε πρόταση την λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α.** Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση «1-1», τότε ισχύει $f(f^{-1}(x)) = x$ για κάθε $x \in A$.
- β.** Αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και πάντα συνεχής στο x_0 .
- γ.** Αν f συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και G μία παράγουσα της f στο Δ , τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$
- δ.** Αν $0 < \alpha < 1$, τότε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty$.
- ε.** Τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f , όπου η f' είναι διαφορετική από το 0, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων.

Μονάδες: 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - (10 + \alpha)x^2 + \beta$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$ με τιμή -2 , τότε:

- B1.** Να δείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 3$. Μονάδες: 6
- B2.** Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. Μονάδες: 8
- B3.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . Μονάδες: 6
- B4.** Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = 2022$. Μονάδες: 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \ln x + \lambda - 1, & \text{αν } x > 1 \\ e^{x-1} + \mu x - \mu, & \text{αν } x \leq 1 \end{cases}$

Γ1. Να βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Μονάδες: 8

Γ2. Για $\lambda = 2$ και $\mu = 0$,

I) Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης (αν υπάρχουν).

Μονάδες: 7

II) Να υπολογίσετε το $\int_1^e xf(x)dx$

Μονάδες: 5

III) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)\eta\mu(3x)$

Μονάδες: 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = -2 \quad (1)$$

$$\bullet f'(x) + xf''(x) = \frac{1}{x^2} \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty) \quad (2)$$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(1)=1$ και $f'(1)=-2$

Μονάδες: 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της. Μονάδες: 8

Δ3. I) να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$

II) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{f(x)+2x-3}$

Μονάδες: (2+4=6)

Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$f(x^2 + 2) + f(x^2 + 4) < f(x^2 + 1) + f(x^2 + 5) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες: 5

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Η ΕΙΣΗΓΗΤΡΙΑ