

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).

1. Κάθε εξίσωση της μορφής $AX + BY + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ παριστάνει ευθεία.
2. Για οποιαδήποτε μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ ισχύει $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$.
3. Η εξίσωση της εφαπτομένης κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$, δίνεται από τη σχέση $x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = \rho^2$.
4. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ ισχύει ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.
5. Για τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ του καρτεσιανού επιπέδου, ισχύει ότι $\vec{i} \cdot \vec{j} = 1$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με: $|\vec{\alpha}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\vec{\beta}| = \frac{1}{2}$ και $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\frac{3}{8}$.

(Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές $A(1, 1)$, $B(4, 4)$ και $\Gamma(3, 1)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ της πλευράς ΑΒ.

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του μέσου Μ από την ευθεία ΒΓ είναι $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

(Μονάδες 7)

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 6)

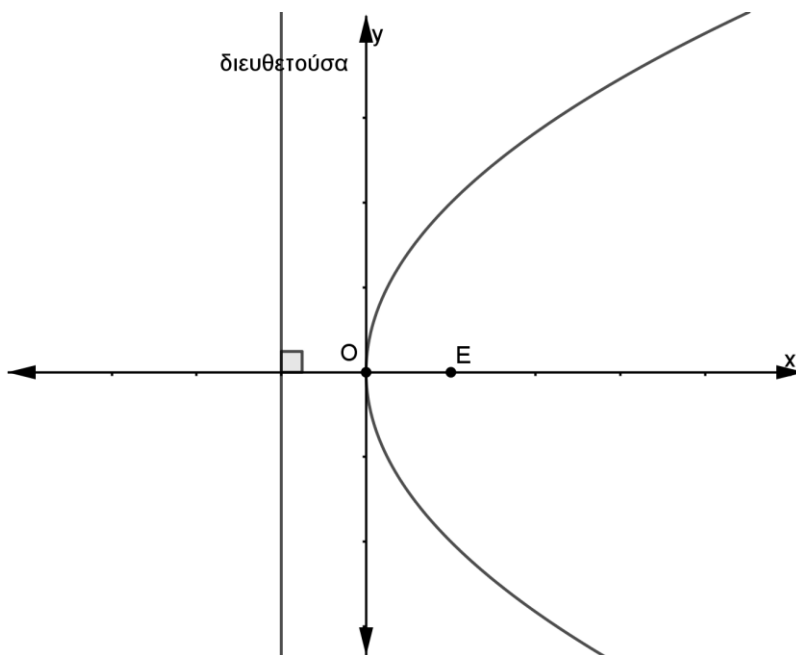
ΘΕΜΑ 4

Έστω παραβολή C με κορυφή την αρχή των αξόνων O και άξονα συμμετρίας τον $x'x$. Η απόσταση της εστίας E από την διευθετούσα δ της παραβολής C είναι 4 και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

α) Να δικαιολογήσετε ότι η εστία της είναι η $E(2, 0)$, η διευθετούσα της είναι η $\delta : x = -2$ και η εξίσωσή της παραβολής είναι $y^2 = 8x$. **(Μονάδες 9)**

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της $A(2, 4)$ είναι η $\epsilon: y=x+2$. **(Μονάδες 9)**

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από την εστία της παραβολής και εφάπτεται στην ευθεία ϵ στο σημείο της $A(2, 4)$. **(Μονάδες 7)**



ΘΕΜΑ 1^ο

A) Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

- i) Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας παράλληλης στον άξονα των x δεν ορίζεται.
- ii) Δύο κάθετα διανύσματα έχουν εσωτερικό γινόμενο ίσο με 0.
- iii) Η ορίζουσα δύο παράλληλων διανυσμάτων είναι ίση με 0.
- iv) Η ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{\delta} = (-B, A)$.
- v) Η εξίσωση $y^2 = 2px$ είναι παραβολή με άξονα συμμετρίας τον άξονα των y.
- vi) Τα σημεία που ανήκουν σε μία έλλειψη έχουν σταθερή απόσταση από κάθε εστία της έλλειψης.
- vii) Αν δύο ευθείες έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, τότε είναι παράλληλες.

B) Για δύο διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ που δεν είναι παράλληλα στον άξονα $y'y$, να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

όπου λ_1 και λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

(μονάδες: 10 + 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται τα σημεία A(1,3) και B(-3,5).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K του τμήματος AB.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $(KA) = \sqrt{5}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται το τρίγωνο ABΓ με A(1,4), B(3,1) και Γ(4,6).

A) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του.

B) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$.

Γ) Τί είδους είναι το τρίγωνο ως προς τις πλευρές και τις γωνίες;

(μονάδες: 10 + 10 + 5)

ΘΕΜΑ 4^ο

Τα σημεία A(-7, -1) και B(3, -5) είναι σημεία ενός κύκλου C κέντρου K. Το σημείο M είναι το μέσο της χορδής AB και μία ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία K και M.

α) Να βρείτε:

i. Τις συντεταγμένες του σημείου M. (Μονάδες 04)

ii. Την εξίσωση της ευθείας KM. (Μονάδες 08)

β) Αν από το κέντρο K του κύκλου διέρχεται η ευθεία (δ): $x+y=-12$, τότε:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου K. (Μονάδες 07)

ii. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C. (Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 1.

1. Να γράψετε στην κόλα σας το γράμμα και δίπλα τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**, αναλόγως αν η πρόταση είναι Σωστή ή Λανθασμένη:

α. Είναι $\overrightarrow{AB} = (x_1 + x_2, \psi_1 + \psi_2)$ όπου $A(x_1, \psi_1)$ και $B(x_2, \psi_2)$

Μονάδες 2

β. Η εξίσωση $x^2 + \psi^2 + Ax + B\psi + \Gamma = 0$ παριστάνει πάντα κύκλο.

Μονάδες 2

γ. $\varepsilon // \eta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\eta = -1$

Μονάδες 2

δ. $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG})|$

Μονάδες 2

ε. Η εξίσωση $\psi = \psi_0$ παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 2

2. Να δείξετε $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{a}} \cdot \lambda_{\vec{\beta}} = -1$ όπου $\vec{a} = (x_1, \psi_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, \psi_2)$ με $x_1 \cdot x_2 \neq 0$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 2

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(3, 4)$, $B(2, 1)$, $\Gamma(3, -1)$ και $\Delta(4, 2)$.

α) Να σχεδιάσετε τα παραπάνω σημεία A, B, Γ και Δ .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 3.

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{\beta} = (3, -4)$ και $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{\beta}$.

α) Να βρεθούν τα $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$, $\vec{a} \cdot \vec{v}$

Μονάδες 8

β) Να βρεθεί το $|\vec{\beta}|$

Μονάδες 7

γ) Να υπολογιστεί το $\widehat{(\vec{a}, \vec{\beta})}$ (μονάδες 6). Η γωνία $\widehat{(\vec{a}, \vec{\beta})}$ είναι αμβλεία ή οξεία, δικαιολογήστε την απάντησή σας. (μονάδες 4)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ο κύκλος $C: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$ και η ευθεία $\varepsilon: 2x + y + 5 = 0$.

α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C .

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C και η ευθεία (ε) δεν έχουν κοινά σημεία. (Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ευθείες $(\eta_1), (\eta_2)$ που είναι παράλληλες στην ευθεία (ε) και εφάπτονται του κύκλου C και να βρείτε τις εξισώσεις τους. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε τη μεσοπαράλληλη των ευθειών $(\eta_1), (\eta_2)$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Α

A.1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

(Μονάδες 10)

α. Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται ίσα όταν έχουν την ίδια κατεύθυνση και ίσα μέτρα.

β. Όσο μικραίνει η εκκεντρότητα της έλλειψης τόσο πιο επιμηκής γίνεται.

γ. Αν ωείναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ τότε για τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας λ_ε ισχύει $\varepsilon\varphi\omega = \lambda_\varepsilon$.

δ. Αν για το διάνυσμα $\vec{a}$ και τον πραγματικό αριθμό λ ισχύει $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0}$ τότε αναγκαστικά είναι $\vec{a} = \vec{0}$.

ε. Η εξίσωση της παραβολής C με εστία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα $\delta: x = -\frac{p}{2}$ έχει εξίσωση $y^2 = 2px$.

A.2. Να δείξετε ότι, σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy , η εξίσωση του κύκλου C με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ , είναι $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 5.

α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C και να τον σχεδιάσετε στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 10)

β) Δίνεται το σημείο $A(3, -4)$.

i. Να αποδείξετε ότι το σημείο A ανήκει στον κύκλο C .

(Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο A .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ένα τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $A(2\lambda - 1, 3\lambda + 2)$, $B(1, 2)$ και $\Gamma(2, 3)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\lambda \neq 2$.

Γ.1. Να αποδείξετε ότι το σημείο A κινείται σε ευθεία, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$. **(Μονάδες 08)**

Γ.2. Εάν $\lambda = 1$, να βρείτε:

i. το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. **(Μονάδες 08)**

ii. την εξίσωση του κύκλου, που έχει κέντρο το σημείο $A(1, 5)$ και εφαπτεται στην ευθεία $B\Gamma$. **(Μονάδες 09)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (4 - 2k)x - 2(1 + k)y + 5 - 2k = 0(I)$, όπου $k \in (0, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η (I) παριστάνει κύκλο με κέντρο $M(k - 2, k + 1)$ και ακτίνα $k\sqrt{2}$ για κάθε $k > 0$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο M ανήκει σε μια σταθερή ευθεία για κάθε $k > 0$.

(Μονάδες 07)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = -x - 1$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου για κάθε $k > 0$.

(Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Το διάνυσμα $\vec{AB}$ με άκρα τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ έχει συνταγμένες

$$\vec{AB} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) .$$

β) Η εξίσωση μιας κατακόρυφης ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ είναι $x=x_0$.

γ) Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.

δ) Ο κύκλος με κέντρο $K(x_0, y_0)$ διαφορετικό από την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ έχει εξίσωση

$$x^2 + y^2 = \rho^2 .$$

ε) Η παραβολή με εξίσωση: $x^2 = 2py, p < 0$ έχει διευθετούσα με εξίσωση $y = -\frac{p}{2}$.

Μονάδες 10

A2. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2

αντίστοιχα. Να αποδείξετε την ισοδυναμία: $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, 3)$ και $\vec{\beta} = (-\sqrt{3}, 1)$.

B1. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσής των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ καθώς και τη γωνία που σχηματίζει καθένα από αυτά με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 16

B2. Να βρείτε τη γωνία $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}$.

Μονάδες 09

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το σημείο $A(1, 2)$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = x + 3$.

Γ1. Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε) . **Μονάδες 8**

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη προς την (ε) . **Μονάδες 8**

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΚΛ όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων και Κ, Λ είναι τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα .**Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ Δ

Σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων Οxy η εξίσωση $3x + 4y = 25$ περιγράφει τη θέση ενός αγωγού ύδρευσης. Σε αυτό το σύστημα θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα κυκλικό σιντριβάνι με κέντρο το Ο(0,0) και ακτίνα 2.

Δ1.i) Ποια είναι η εξίσωση του κύκλου που περιγράφει την θέση του σιντριβανιού;

Μονάδες 04

ii) Να εξετάσετε αν ο αγωγός ύδρευσης διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, προκειμένου να ενωθεί με αυτό. **Μονάδες 05**

iii) Αν ο αγωγός ύδρευσης δεν διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, ποιο σημείο του αγωγού ύδρευσης πρέπει να ενωθεί με το κέντρο του σιντριβανιού ώστε να έχουμε την μικρότερη δυνατή απόσταση, άρα και οικονομικότερη κατασκευή;

Μονάδες 08

Δ2. Ο μηχανικός που θέλει να χαράξει έναν ευθύγραμμο δρόμο, κατέληξε στην εξίσωση $\lambda x + y + \lambda - 2 = 0$, με $\lambda \neq 0$. Μπορείτε να τον βοηθήσετε να βρει για ποια τιμή του λ ο δρόμος αυτός εφάπτεται του σιντριβανιού; **Μονάδες 08**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Τάξη : Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣ/ΜΟΥ

Εισηγητής: _____

Επιτηρητές: _____

Ημερομηνία: _____

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στην κόλλα σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα τη λέξη Σωστό (**Σ**), αν θεωρείτε πως η πρόταση είναι **σωστή** ή τη λέξη Λάθος (**Λ**), αν θεωρείτε πως η πρόταση είναι **λανθασμένη**.

α. Ένας κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $x^2 - y^2 = \rho$.

Μονάδες 2

β. Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BA}$ είναι αντίθετα, δηλαδή ισχύει $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Μονάδες 2

γ. Οι συντεταγμένες (x,y) του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ με άκρα τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δίνονται από τις σχέσεις $x = x_1 + x_2$ και $y = y_1 + y_2$. Είναι δηλαδή $\overrightarrow{AB} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Μονάδες 2

δ. Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$, με $x_1 \neq x_2$ είναι $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Μονάδες 2

ε. Μια ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης λ που διέρχεται από το σημείο $A(x_0,y_0)$ έχει εξίσωση $y - y_0 = \lambda \cdot (x - x_0)$.

Μονάδες 2

B. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του μέσου $M(x,y)$ ενός τμήματος AB με $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ είναι $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 2^ο

Να λυθεί το, με αριθμό, θέμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας.

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται τα σημεία $A(-3,2)$, $B(1,6)$ και $\Gamma(-13,-7)$.

α. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης λ , της ευθείας που διέρχεται από τα A , B .

Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα A , B έχει εξίσωση $y = x + 5$.

Μονάδες 7

γ. Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο Γ δεν ανήκει στην AB .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4^ο

Να λυθεί το, με αριθμό, θέμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας.

Παρατηρήσεις :

1. Οι απαντήσεις να δοθούν στις κόλλες αναφοράς και όχι στα φύλλα που περιέχουν τα θέματα.
2. Στα φύλλα θεμάτων να γράψετε μόνο το ονοματεπώνυμό σας, ενώ στις κόλλες αναφοράς – απαντήσεων το ονοματεπώνυμό σας, την ημερομηνία, το τμήμα και το εξεταζόμενο μάθημα.
3. Τα γραφόμενα σας να είναι ευανάγνωστα, να κάνετε σχήμα όπου χρειάζεται ή ζητείται, να απαντήσετε προσεκτικά, κατανοητά, με επάρκεια και να αιτιολογείτε τις απαντήσεις σας.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή. Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.
5. Όσον αφορά τα 2^ο, 4^ο θέματα, επισυνάπτονται σχετικά φωτοαντίγραφα.

Γραπτές Προαγωγικές Εξετάσεις Μαΐου-Ιουνίου 2022

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α (25 μονάδες)

A1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, την λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1) Αν $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} * \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| * |\vec{\beta}|$ και αντίστροφα.
- 2) Η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το σημείο $B(x_0, y_0)$ έχει εξίσωση $x = x_0$.
- 3) Η ευθεία με εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο όταν $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$.
- 4) Η εφαπτόμενη της υπερβολής στο σημείο $A(x_1, y_1)$ με εστίες στον x' χείναι
$$\frac{y * y_1}{\alpha^2} - \frac{x * x_1}{\beta^2} = 1$$
- 5) Μια ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n} = (A, B)$.

Μονάδες 10

A2. Θεωρούμε τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου. Έστω (x, y) οι συντεταγμένες του μέσου M του AB . Να αποδείξετε ότι ισχύει :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β (25 μονάδες)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(2,5)$, $B(3,6)$ και $\Gamma(-1,-2)$.

B1. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $B\Gamma$.

Μονάδες 7

B2. Να βρείτε την εξίσωση του ύψους που άγεται από το A .

Μονάδες 9

Γ3. Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ευθεία AB με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ(25 μονάδες)

Δίνεται η εξίσωση $x(x - 4) + y(y - 2) = 2(x + y - 4)$ (1).

Γ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(3, 2)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$.

Μονάδες 9

Γ2. Δίνονται τα σημεία $A(4, 4)$ και $B(2, 0)$.

α) Να δείξετε ότι τα σημεία A και B είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου.

Μονάδες 7

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στην διάμετρο AB .

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ(25 μονάδες)

Έστω παραβολή C με κορυφή την αρχή των αξόνων O και άξονα συμμετρίας τον $x'x$. Η απόσταση της εστίας E από την διευθετούσα δ της παραβολής C είναι 4 και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

Δ1. Να δικαιολογήσετε ότι η εστία της είναι η $E(2,0)$, η διευθετούσα της είναι η $\delta : x=-2$ και η εξίσωσή της παραβολής είναι $y^2=8x$.

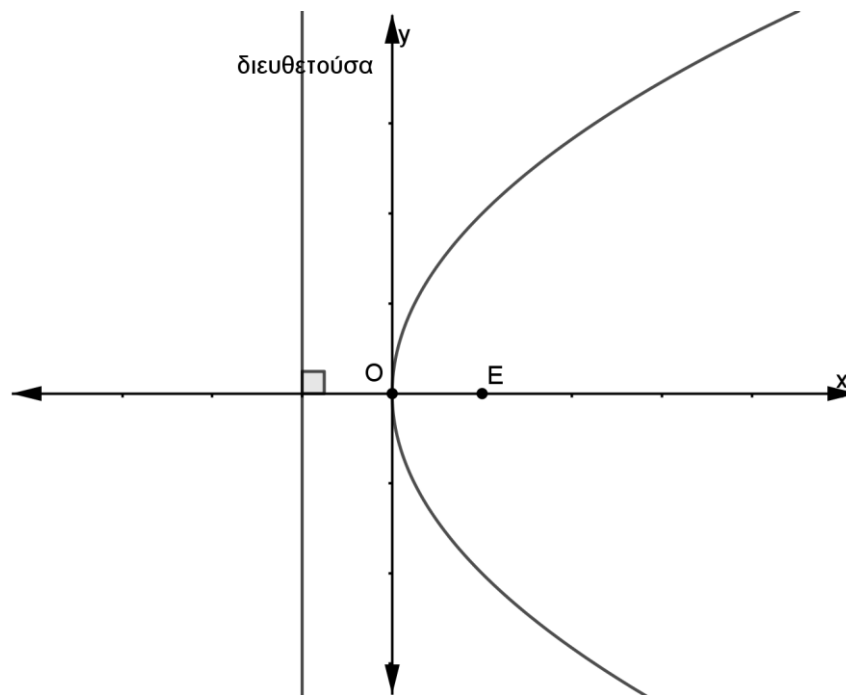
Μονάδες 9

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της $A(2,4)$ είναι η $\epsilon: y=x+2$.

Μονάδες 9

Δ3. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από την εστία της παραβολής και εφάπτεται στην ευθεία ϵ στο σημείο της $A(2,4)$.

Μονάδες 7



ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

ΤΑΞΗ: Β'

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

A₁. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως **Σωστές** ή **Λάθος**: (10 Μονάδες)

1. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ ισούται με: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2$.

2. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, όπου A, B και Γ πραγματικοί αριθμοί, παριστάνει κύκλο αν ισχύει $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$.

3. Η εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, όπου $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$, παριστάνει έλλειψη με εστίες E'(-γ,0) και E(γ,0) και σταθερό άθροισμα 2α.

4. Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A(x₀, y₀) και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι: $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

5. Οι ευθείες $x = -1$ και $y = 7$ είναι κάθετες.

A₂. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση: $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$. (15 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 5$, $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{2\pi}{3}$

και $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(-2,2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + y + \alpha = 0$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου A από το σημείο B .

(Μονάδες 5)

β) Για ποιες τιμές του α , η απόσταση AB είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε .

(Μονάδες 8)

γ) Για $\alpha = 4$ να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Δ

Σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων Oxy η εξίσωση $3x + 4y = 25$ περιγράφει τη θέση ενός αγωγού ύδρευσης. Σε αυτό το σύστημα θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα κυκλικό σιντριβάνι με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα 2.

α)

i. Ποια είναι η εξίσωση του κύκλου που περιγράφει την θέση του σιντριβανιού;

(Μονάδες 04)

ii. Να εξετάσετε αν ο αγωγός ύδρευσης διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, προκειμένου να ενωθεί με αυτό.

(Μονάδες 05)

iii. Αν ο αγωγός ύδρευσης δεν διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, ποιο σημείο του αγωγού ύδρευσης πρέπει να ενωθεί με το κέντρο του σιντριβανιού ώστε να έχουμε την μικρότερη δυνατή απόσταση, άρα και οικονομικότερη κατασκευή;

(Μονάδες 08)

β) Ο μηχανικός που θέλει να χαράξει έναν ευθύγραμμο δρόμο, κατέληξε στην εξίσωση $\lambda x + y + \lambda - 2 = 0$, με $\lambda \neq 0$. Μπορείτε να τον βοηθήσετε να βρει για ποια τιμή του λ ο δρόμος αυτός εφάπτεται του σιντριβανιού; (Μονάδες 08)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.
- Οι απαντήσεις σας να είναι στην κόλλα σας και όχι στην φωτοτυπία με τα θέματα.
- Να γράψετε με ανεξίτηλο στυλό χρώματος μπλε ή μαύρο.
- Να μην χρησιμοποιήσετε μολύβι ή διορθωτικό (blanko).
- Διάρκεια εξέτασης: Δύο (02) ώρες από την διανομή των θεμάτων.

Σας Ευχόμαστε Επιτυχία!

Πάρος, 27 Μαΐου 2022

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).

1. Κάθε εξίσωση της μορφής $AX + BY + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ παριστάνει ευθεία.
2. Για οποιαδήποτε μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ ισχύει $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$.
3. Η εξίσωση της εφαπτομένης κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$, δίνεται από τη σχέση $x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = \rho^2$.
4. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ ισχύει ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.
5. Για τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ του καρτεσιανού επιπέδου, ισχύει ότι $\vec{i} \cdot \vec{j} = 1$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με: $|\vec{\alpha}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\vec{\beta}| = \frac{1}{2}$ και $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\frac{3}{8}$.

(Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές $A(1, 1)$, $B(4, 4)$ και $\Gamma(3, 1)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ της πλευράς ΑΒ.

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του μέσου Μ από την ευθεία ΒΓ είναι $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

(Μονάδες 7)

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 6)

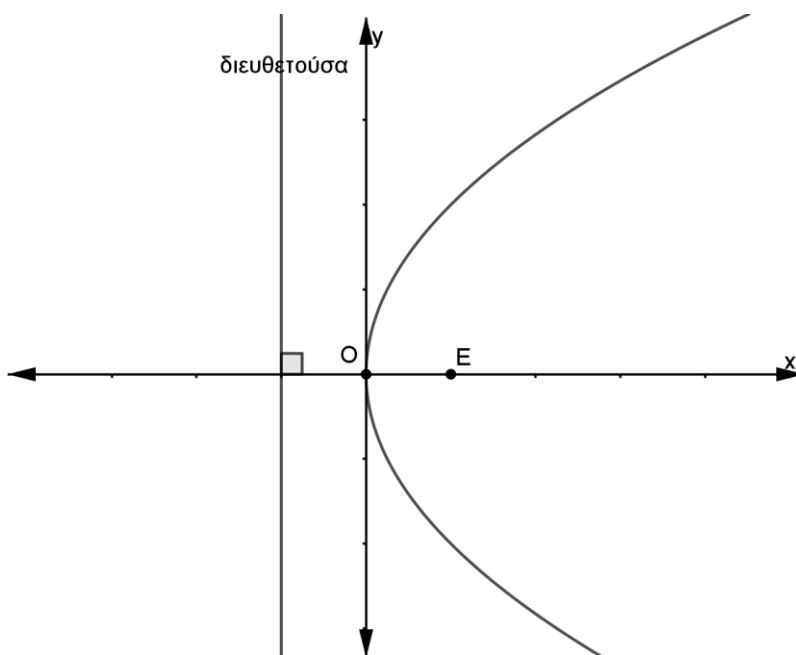
ΘΕΜΑ 4

Έστω παραβολή C με κορυφή την αρχή των αξόνων O και άξονα συμμετρίας τον $x'x$. Η απόσταση της εστίας E από την διευθετούσα δ της παραβολής C είναι 4 και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

α) Να δικαιολογήσετε ότι η εστία της είναι η $E(2, 0)$, η διευθετούσα της είναι η $\delta : x = -2$ και η εξίσωσή της παραβολής είναι $y^2 = 8x$. **(Μονάδες 9)**

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της $A(2, 4)$ είναι η $\epsilon : y = x + 2$. **(Μονάδες 9)**

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από την εστία της παραβολής και εφάπτεται στην ευθεία ϵ στο σημείο της $A(2, 4)$. **(Μονάδες 7)**



ΘΕΜΑ 1

A) Σε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε στο γραπτό σας αν είναι Σωστή ή Λάθος .

1. Αν δύο διανύσματα είναι κάθετα τότε το εσωτερικό τους γινόμενο είναι ίσο με το μηδέν.
2. Δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης για ευθείες παράλληλες στον άξονα $x'x$.
3. Αν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$ τότε $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$.
4. Η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ παριστάνει πάντοτε κύκλο.
5. Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ ισούται με $\lambda = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

(Μονάδες 10)

B) Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$ και $B(6,7)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

α) Να σχεδιάσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$.

(Μονάδες 07)

- α) Να βρεθεί η εξίσωση του ύψους ΑΔ. (Μονάδες 8)
- β) Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοκαθέτου της ΒΓ. (Μονάδες 9)
- γ) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ο κύκλος $C : (x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$ και η ευθεία $\varepsilon : 2x + y + 5 = 0$.

- α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C . (Μονάδες 6)
- β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C και η ευθεία (ε) δεν έχουν κοινά σημεία. (Μονάδες 6)
- γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ευθείες $(\eta_1), (\eta_2)$ που είναι παράλληλες στην ευθεία (ε) και εφάπτονται του κύκλου C και να βρείτε τις εξισώσεις τους. (Μονάδες 7)
- δ) Να βρείτε τη μεσοπαράλληλη των ευθειών $(\eta_1), (\eta_2)$. (Μονάδες 6)

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή ή Λανθασμένη, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές την λέξη **Σωστό**, ή την λέξη **Λάθος** αν αυτή είναι λανθασμένη. **(Μονάδες 10)**

α) Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου, η οποία διέρχεται από το σημείο

$$A(x_0, y_0) \text{ είναι πάντα } xx_0 + yy_0 = \rho^2$$

β) Ισχύει η ισοδυναμία $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = -1$

γ) Η ευθεία $3x - \sqrt{3}y + 1 = 0$ έχει κλίση $\sqrt{3}$

δ) Η απόσταση δυο σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

ε) Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (-B, A)$ είναι παράλληλο στην ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$.

A2. Έστω διάνυσμα $\vec{AB}$ και ένα σημείο αναφοράς O . Αν M μέσο του $\vec{AB}$ να

$$\text{αποδείξετε ότι } \vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}.$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(2,5)$, $B(3,6)$ και $\Gamma(-1,-2)$.

B1. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $B\Gamma$. **(Μονάδες 07)**

B2. Να βρείτε την εξίσωση του ύψους που άγεται από το A . **(Μονάδες 09)**

B3. Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ευθεία AB με τον άξονα $x'x$. **(Μονάδες 09)**

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 4$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και τα διανύσματα

$$\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} \text{ και } \vec{\delta} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}.$$

Γ1. Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. **(Μονάδες 5)**

Γ2. Να βρείτε το $\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$. **(Μονάδες 7)**

Γ3. Να βρείτε τα $|\vec{\gamma}|, |\vec{\delta}|$

(Μονάδες 8)

Γ4. Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\gamma}, \vec{\delta})$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραβολή (C) που έχει εξίσωση $y^2 = 4x$ (1).

Δ1. Να σχεδιάσετε πρόχειρα την παραπάνω παραβολή και να γράψετε τις συντεταγμένες της εστίας της E και την εξίσωση της ευθείας της διευθετούσας δ. (Μονάδες 12)

Δ2. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο A(0, 2) και εφάπτονται στην παραβολή που περιγράφει η εξίσωση (1). (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**ΘΕΜΑ 1**

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της κάθε μίας από τις παρακάτω προτάσεις και δίπλα την ένδειξη Σ αν είναι σωστή και Λ αν είναι λάθος:

1. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$

2. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.

3. Η εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$ παριστάνει κύκλο για κάθε $\rho \in \mathbb{R}$.

4. Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $x^2 = 2py$ στο σημείο $M(x_1, y_1)$ είναι $xx_1 = p(y + y_1)$

5. Η έλλειψη $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ έχει εκκεντρότητα $e < 1$.

Μονάδες 10

β) Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι τρία διανύσματα, να αποδείξετε ότι

$$\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$$

Μονάδες 15

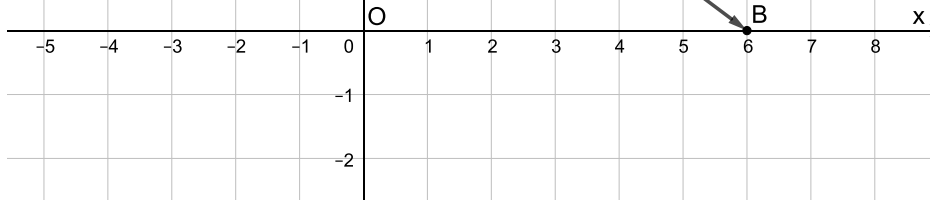
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AF}$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (4, -3)$ και $\overrightarrow{AF} = (0, -2)$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AF}$.

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 3

Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1, 3)$, $B(-2, -7)$ και $\Gamma(4, -1)$.

Να βρείτε:

α) την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$. Μονάδες 6

β) την εξίσωση του ύψους AD , καθώς και τις συντεταγμένες του D .

Μονάδες 7

γ) τις συντεταγμένες του μέσου M της πλευράς $B\Gamma$ και την εξίσωση της διαμέσου AM .

Μονάδες 6

δ) το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παραβολή (C) που έχει εξίσωση $y^2 = 4x$ (1).

α) Να σχεδιάσετε πρόχειρα την παραπάνω παραβολή και να γράψετε τις συντεταγμένες της εστίας της E και την εξίσωση της ευθείας της διευθετούσας δ .

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $A(0, 2)$ και εφάπτονται στην παραβολή που περιγράφει η εξίσωση (1).

(Μονάδες 13)

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Η ΕΙΣΗΓΗΤΡΙΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΗ** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι δύο σημεία του επιπέδου τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της

ευθείας (ϵ) η οποία διέρχεται από τα A, B είναι $\lambda_\epsilon = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_1 \neq x_2$

β) Η ευθεία (ϵ): $Ax + By + \Gamma = 0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{A}{B}$, $B \neq 0$

γ) Για την έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ με εστίες $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$ ισχύει $a^2 = b^2 - \gamma^2$

δ) Για τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ ισχύει η ισοδυναμία $\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0$

ε) Η παραβολή $x^2 = 4y$ έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$. (Μονάδες 10)

A2. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ϵ) του κύκλου (c): $x^2 + y^2 = \rho^2$, στο σημείο του $A(x_1, y_1)$,

έχει εξίσωση (ϵ): $x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = \rho^2$

15M

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση $x(x-4) + y(y-2) = 2(x+y-4)$ (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(3,2)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$.

(Μονάδες 6)

β) Δίνονται τα σημεία $A(4,4)$ και $B(2,0)$.

i. Να δείξετε ότι τα σημεία A και B είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στην διάμετρο AB .

(Μονάδες 9)

Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε η ευθεία (η) με εξίσωση $y = \lambda x + 4$ να τέμνει τον παραπάνω κύκλο σε δύο σημεία Γ και Δ ώστε $(\Gamma\Delta) = \sqrt{20}$.

(Μονάδες 6)

Καλή Ευτυχία!

ΘΕΜΑ Α

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη *Σωστό* ή *Λάθος* δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Για δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει η ισοδυναμία: $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$.
2. Αν $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$, όπου $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο οποιαδήποτε διανύσματα.
3. Το εμβαδόν τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται από τον τύπο: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) \right|$.
4. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$.
5. Η εξίσωση της παραβολής με εστία στον άξονα $x'x$ είναι η $x^2 = 2py$.

Μονάδες 10

A2. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες (x, y) του μέσου M ενός ευθυγράμμου τμήματος AB με άκρα τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(-8, 1)$, $B(4, 5)$ και $\Gamma(-4, 9)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K του ευθυγράμμου τμήματος AB .

(Μονάδες 08)

β) Να δείξετε ότι ο κύκλος (C) που έχει κέντρο το σημείο K και διάμετρο το τμήμα AB διέρχεται από το σημείο Γ .

(Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (C) .

(Μονάδες 08)

Γ2. Αν $\vec{\beta} \perp \vec{\gamma}$, να αποδείξετε ότι $\mu = -4$.

Μονάδες 8

Γ3. Για $\kappa = -8$ και $\mu = -4$ να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{\alpha} - 2\vec{\gamma}$ και να υπολογίσετε το μέτρο του.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση $(2\lambda+1)x - (\lambda-2)y + \lambda - 7 = 0$ (E) με $\lambda \in \mathbb{R}$ και η ευθεία (ζ) με εξίσωση: $6x - 8y + 3 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (E) παριστάνει ευθεία.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (E), για τα διάφορα $\lambda \in \mathbb{R}$, διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε ευθεία (ε) που ορίζεται από την εξίσωση (E) να είναι παράλληλη στη ευθεία (ζ). Ποια είναι η εξίσωση της (ε);

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου $M(1,3)$ από την ευθεία (ζ).

(Μονάδες 5)

Να απαντήσετε στις κόλλες σας σε όλα τα θέματα.