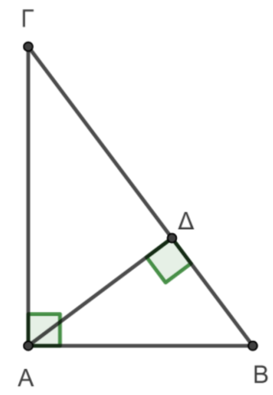
ΘΕΜΑ 1^{Ο}

Α) Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

i) Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν ίση μία οξεία γωνία είναι όμοια.
ii) Η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου και η κεντρική του γωνία είναι συμπληρωματικές.
iii) Το εμβαδόν Ε κάθε τριγώνου δίνεται από τον τύπο $E = \tau \cdot R$, όπου τ η ημιπερίμετρος του και R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.
iv) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.
v) Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των αντίστοιχων υψών.

Β) Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.
Δηλαδή, σύμφωνα με το διπλανό σχήμα, να αποδείξετε ότι:

$$ΑΒ^2 = ΒΓ \cdot ΒΔ \text{ και } ΑΓ^2 = ΒΓ \cdot ΓΔ$$



(μονάδες: 2·5 + 15)

ΘΕΜΑ 2^{Ο}

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ=8 , ΑΓ=12 και γωνία $\widehat{A} = 60^o$.

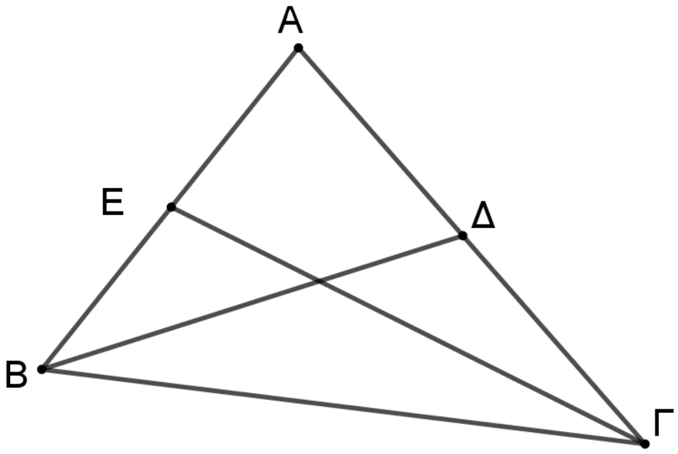
α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι (ΑΒΓ)=$24\sqrt{3}$.

(Μονάδες 13)

β) Αν ΒΔ και ΓΕ διάμεσοι του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι :

i. Τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΑΕΓ είναι ισοδύναμα. (Μονάδες 4)
ii. Τα τρίγωνα ΕΒΓ και ΔΓΒ είναι ισοδύναμα με (ΕΒΓ)=(ΔΓΒ)=$12\sqrt{3}$

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 3^{O}

Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχουμε κατασκευάσει εσωτερικά ένα ημικύκλιο όπως φαίνεται στο σχήμα. Δίνεται ότι: ΒΓ = 4.

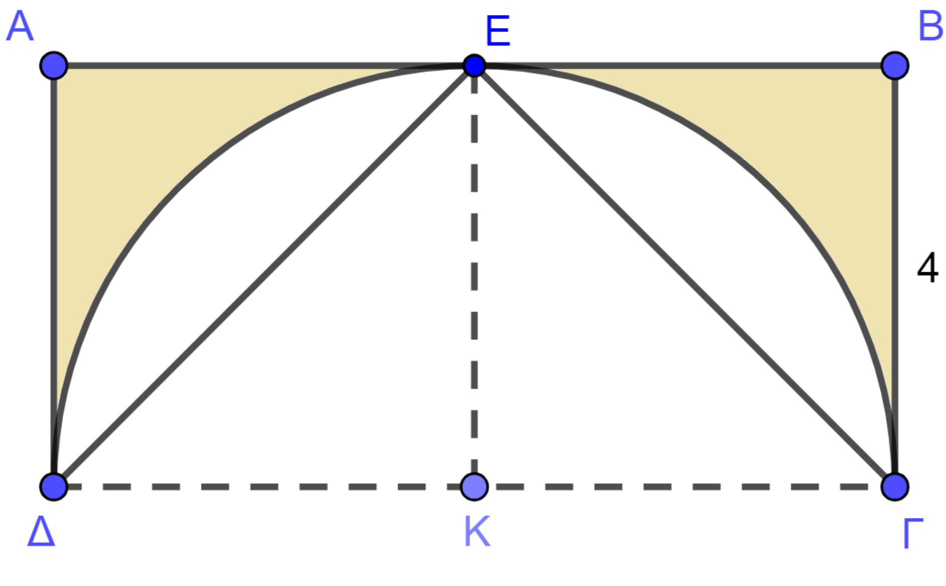
Να υπολογίσετε:

Α) Το τμήμα ΔΕ και την περίμετρο του ΔΕΓ.

(μονάδες 9)

Β) Το εμβαδόν και την περίμετρο της γραμμοσκιασμένης περιοχής.

(μονάδες 16)



ΘΕΜΑ 4^{O}

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ, $\widehat{A} = 36^{o}$.

α) Αν η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια.

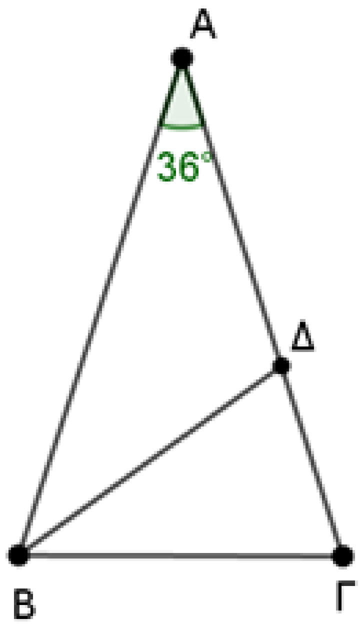
(Μονάδες 10)

ii. Να γράψετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών.

(Μονάδες 06)

β) Μετακινούμε το σημείο Δ στο εσωτερικό της ΑΓ. Για ποια θέση του σημείου Δ θα ισχύει $\frac{(AB\Delta)}{(\Delta B\Gamma)} = 3$.

(Μονάδες 09)



ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας την λέξη **«Σωστό» ή «Λάθος»** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Δύο ισοσκελή τρίγωνα που έχουν μία αντίστοιχη γωνία ίση, είναι όμοια.

β. Σε κάθε τρίγωνο $\mathrm{ΑΒΓ}$ ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{\mathrm{A}} > 90^0$

γ. Το εμβαδόν ενός τριγώνου δίνεται και από την σχέση: $\mathrm{E} = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{2R}$, όπου α, β, γ τα μήκη των πλευρών του και R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.

δ. Σε κάθε κανονικό $\nu-$γωνο ισχύει η σχέση: $\alpha_\nu^2 + \dfrac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$, όπου α_ν το απόστημα, λ_ν η πλευρά και R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του $\nu-$γωνου.

ε. Το μήκος l ενός τόξου μ^0 κύκλου (O, R) δίνεται από τη σχέση: $l = \dfrac{\pi R \mu}{360}$.

(Μονάδες 10)

Α2. Να αποδείξετε ότι αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με τον λόγο των γινομένων των πλερών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 Στο παρακάτω σχήμα τα τμήματα ΑΒ και ΔΕ είναι παράλληλα και τα τμήματα ΑΓ και ΓΕ είναι τέτοια, ώστε ΑΓ=2ΓΕ.

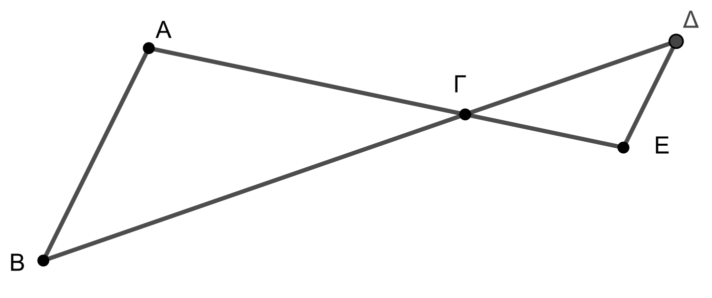
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ είναι όμοια. ***(Μονάδες 13)***

β)

i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δύο τριγώνων.

ii. Ποιος είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων;

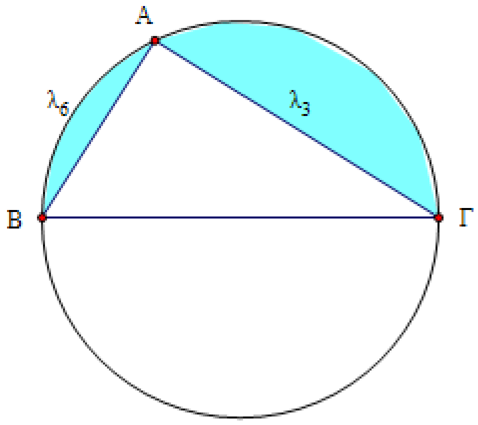
(Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ Γ Σε κύκλο (O, R) θεωρούμε τις χορδές AB και $\mathrm{A\Gamma}$ οι οποίες είναι ίσες με τις πλευρές κανονικού εξαγώνου και ισοπλεύρου τριγώνου αντίστοιχα εγγεγραμμένων στον κύκλο.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο

(Μονάδες 08)



Γ2. Να βρείτε ως συνάρτηση του R.

α) Την περίμετρο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$

(Μονάδες 07)

β) Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του κύκλου.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ και ΓΔ = 2ΑΒ. Δίνεται επίσης ότι το σημείο Κ είναι μέσο της ΓΔ και Μ τυχαίο σημείο στην ΑΔ.

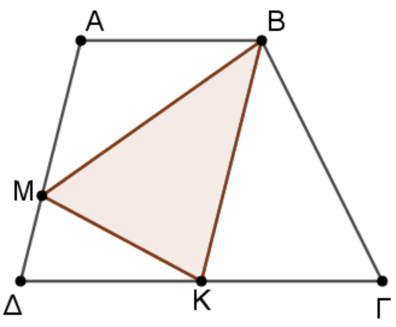
α) Να αποδείξετε ότι:

i. (ΒΚΓ) = $\frac{1}{2}$(ΑΒΚΔ) ***(Μονάδες 09)***

ii. (ΒΜΚ) = (ΒΚΓ) ***(Μονάδες 09)***

β) Δίνεται η πρόταση: «Αν το σημείο Μ κινείται πάνω στο εσωτερικό της ΑΔ, τότε ο λόγος των εμβαδών (ΑΒΓΔ) και (ΜΒΚ) παραμένει σταθερός και ίσος με 3». Να διερευνήσετε την ορθότητα της πρότασης αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)



Καλή επιτυχία.

Να απαντηθούν όλα τα θέματα.
Διάρκεια εξέτασης: Δύο (2) ώρες.

Οι Καθηγητές

ΓΡΑΠΤΕΣ <u>ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ</u> ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΜΑΙΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ

Όλα τα θέματα θα πρέπει να απαντηθούν στο φύλλο απαντήσεων που σας δίνεται και κάθε ένα από αυτά βαθμολογείται συνολικά με 25 μονάδες.

Θέμα 1ο

Α.

Μεταφέρετε στο φύλλο απαντήσεων σας τον αριθμό κάθε πρότασης και δίπλα σε αυτό το γράμμα (Σ) ή (Λ) αντίστοιχα αν αυτή είναι σωστή ή λάθος.

1. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία τότε είναι όμοια.

2. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι $α^2=β^2+γ^2$ τότε αυτό είναι ορθογώνιο.

3. Το εμβαδόν Ε ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας R δίνεται από τη σχέση $E=πR^2$.

4. Το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα $\mathrm{O}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{B}$ $μ^o$ και ακτίνας R δίνεται από τη σχέση $(\mathrm{O}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{B})=\dfrac{\pi R^2 \mu^o}{180^o}$.

5. Η πλευρά κάθε εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο,R) κανονικού εξαγώνου ισούται με R.

(Μονάδες 10)

Β.

Αποδείξτε ότι το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του.

(Μονάδες 15)

Θέμα 2ο

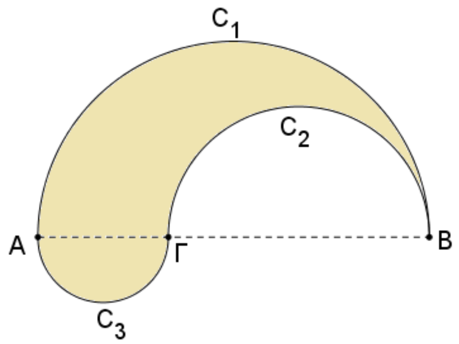
Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{AB}=6$, και σημείο του Γ, ώστε $\mathrm{B\Gamma}=4$. Στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΑΒ σχεδιάζουμε τα ημικύκλια C_1 και C_2 με διαμέτρους ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα και στο άλλο ημιεπίπεδο σχεδιάζουμε ημικύκλιο C_3 με διάμετρο ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των ημικυκλίων C_1, C_2 και C_3 είναι $\frac{9\pi}{2}$, 2π και $\frac{\pi}{2}$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.

(Μονάδες 10)



Θέμα 3ο

Δίνεται κανονικό πολύγωνο εγγεγραμμένο σε κυκλικό δίσκο με κέντρο Ο και ακτίνα R=2. Αν η κεντρική γωνία του πολυγώνου είναι $\varphi=60^o$.

α) Υπολογίστε την γωνία του πολυγώνου, το πλήθος ν των γωνιών, το μήκος κάθε πλευράς, το απόστημα του πολυγώνου.

(Μονάδες 12)

Θεωρώντας ν=6 ότι είναι το πλήθος των γωνιών του πολυγώνου

β) Υπολογίστε την περίμετρο και το εμβαδόν του πολυγώνου.

(Μονάδες 8)

γ) Θεωρώντας ότι η μία πλευρά του πολυγώνου έχει άκρα ΑΒ υπολογίστε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην κυρτή γωνία ΑΟΒ.

(Μονάδες 05)

Θέμα 4ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ έχουν σταθερά μήκη 3 και 4 αντίστοιχα.

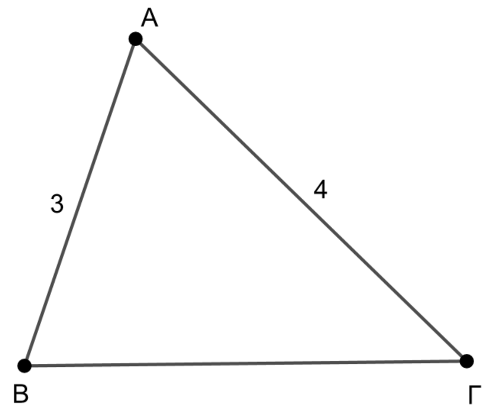
α) Αν η γωνία Α έχει μέτρο 60^o, τότε να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 08)

ii. Το μήκος της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 09)

β) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας Α ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ να γίνεται μέγιστο; Να υπολογίσετε το μέγιστο εμβαδόν και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 08)



Όλα τα θέματα θα πρέπει να απαντηθούν στο φύλλο απαντήσεων που σας δίνεται και κάθε ένα από αυτά βαθμολογείται συνολικά με 25 μονάδες.

Θέμα 1^o

Α. Μεταφέρετε στο φύλλο απαντήσεων σας τον αριθμό κάθε πρότασης και δίπλα σε αυτό το γράμμα (Σ) ή (Λ) αντίστοιχα αν αυτή είναι σωστή ή λάθος.

1. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία τότε είναι όμοια.
2. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι $α^2<β^2+γ^2$ τότε αυτό είναι οξυγώνιο.
3. Δύο σχήματα που έχουν ίδιο εμβαδόν είναι ίσα.
4. Το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα $\mathrm{O\widehat{A}B}$ $μ^o$ και ακτίνας R δίνεται από τη σχέση ($\mathrm{O\widehat{A}B}$)= $\dfrac{\pi R^2 \mu^o}{360^o}$.
5. Η πλευρά κάθε εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο,R) κανονικού τετραγώνου ισούται με R.

(Μονάδες 10)

Β. Αποδείξτε ότι το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

(Μονάδες 15)

Θέμα 2^o

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ=13 και ΓΔ=14. Αν ΓΕ είναι το κάθετο τμήμα από το σημείο Γ στην πλευρά ΑΒ και το τμήμα ΑΕ έχει μήκος 9, τότε:

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΓΕ. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό

i. του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

ii. του τραπεζίου ΑΕΓΔ.

(Μονάδες 12)

Θέμα 3^o

Δίνεται κανονικό πολύγωνο εγγεγραμμένο σε κυκλικό δίσκο με κέντρο Ο και ακτίνα R=4. Αν η γωνία του πολυγώνου είναι φ=120^o.

α) Υπολογίστε την κεντρική γωνία, το πλήθος ν των γωνιών, το μήκος κάθε πλευράς, το απόστημα του πολυγώνου.

(Μονάδες 12)

Θεωρώντας ν=6 ότι είναι το πλήθος των γωνιών του πολυγώνου

β) Υπολογίστε την περίμετρο και το εμβαδόν του πολυγώνου.

(Μονάδες 8)

γ) Θεωρώντας ότι η μία πλευρά του πολυγώνου έχει άκρα ΑΒ υπολογίστε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην κυρτή γωνία ΑΟΒ.

(Μονάδες 5)

Θέμα 4ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ, $\hat{A}=36^o$.

α) Αν η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

ii. Να γράψετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών. (Μονάδες 06)

β) Μετακινούμε το σημείο Δ στο εσωτερικό της ΑΓ. Για ποια θέση του σημείου Δ θα ισχύει $\frac{(ΑΒΔ)}{(ΔΒΓ)}=3$. (Μονάδες 09)

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ/ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

ΤΑΞΗ: Β΄

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές τη λέξη Σωστή αν η πρόταση είναι Σωστή, ή τη λέξη Λάθος αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα.

ii. Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι πάντα όμοια.

iii. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

iv. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 \prec \beta^2 + \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι πάντα οξυγώνιο.

v. Ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός κανονικού πολυγώνου είναι ομόκεντροι.

(Μονάδες 10)

Β. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε (με το κατάλληλο σχήμα) το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ=13 και ΓΔ=14. Αν ΓΕ είναι το κάθετο τμήμα από το σημείο Γ στην πλευρά ΑΒ και το τμήμα ΑΕ έχει μήκος 9, τότε:

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΓΕ. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό

i. του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

ii. του τραπεζίου ΑΕΓΔ.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 3ο

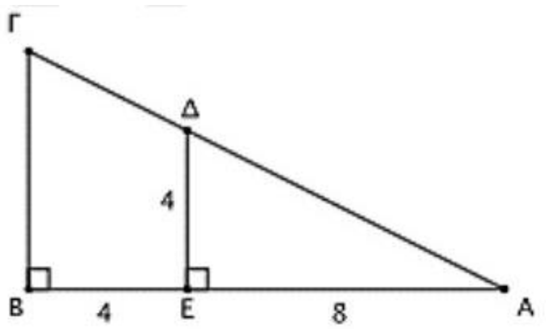
Στο παρακάτω σχήμα δίνονται Β=Ε=90°, ΑΕ=8,ΕΒ=4 ΚΑΙ ΔΕ=4.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΒΓ είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

β) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΕΔ και ΑΒΓ. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 05)



ΘΕΜΑ 4^{Ο}

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε σημείο Δ και στην πλευρά ΑΓ σημείο Ε ώστε ΑΕ = ΑΒ. Με κέντρο το σημείο Α και ακτίνες ρ = ΑΔ , r = AB = AE και R = ΑΓ γράφουμε τρεις ομόκεντρους κύκλους (Α,ρ) , (A,r) και (A,R) όπως στο σχήμα. Έστω $E_{ΕΓ}$ το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, r) και (A, R) , $E_{ΔΒ}$ το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, ρ) και (A, r), $E_{ΑΕ}$ το εμβαδόν του κύκλου (A, r) και $E_{ΑΔ}$ το εμβαδόν του κύκλου (A, ρ).

α) Να αποδείξετε ότι:

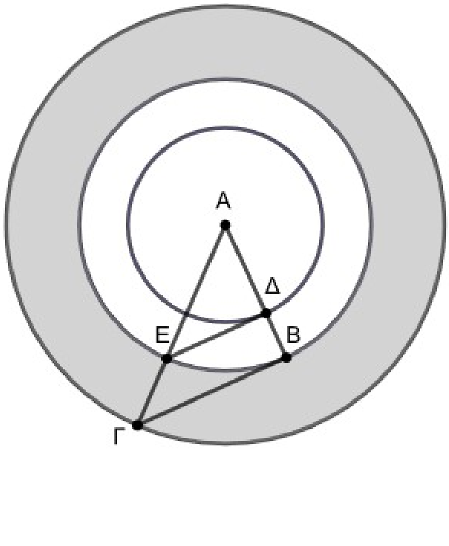
i. $\frac{E_{ΕΓ}}{E_{ΑΕ}} = \frac{R^2 - r^2}{r^2}$ (Μονάδες 10)

ii. $\frac{E_{ΔΒ}}{E_{ΑΔ}} = \frac{r^2 - ρ^2}{ρ^2}$ (Μονάδες 07)

β) Αν επιπλέον οι ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{E_{ΕΓ}}{E_{ΑΕ}} = \frac{E_{ΔΒ}}{E_{ΑΔ}}$$

(Μονάδες 08)



ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ/ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

ΤΑΞΗ:Β΄

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1$^{\text{ο}}$

Α. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές τη λέξη Σωστή αν η πρόταση είναι Σωστή, ή τη λέξη Λάθος αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα.

ii. Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι πάντα όμοια.

iii. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

iv. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 \prec \beta^2 + \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι πάντα οξυγώνιο.

v. Ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός κανονικού πολυγώνου είναι ομόκεντροι.

(Μονάδες 10)

Β. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε (με το κατάλληλο σχήμα) το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2$^{\text{ο}}$

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ=13 και ΓΔ=14. Αν ΓΕ είναι το κάθετο τμήμα από το σημείο Γ στην πλευρά ΑΒ και το τμήμα ΑΕ έχει μήκος 9, τότε:

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΓΕ. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό

i. του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

ii. του τραπεζίου ΑΕΓΔ.

(Μονάδες 12)

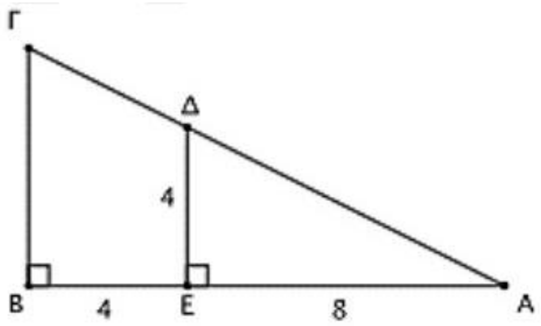
ΘΕΜΑ 3ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται B=E=90°, AE=8,EB=4 KAI ΔE=4.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΒΓ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

β) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΕΔ και ΑΒΓ. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 05)



ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε σημείο Δ και στην πλευρά ΑΓ σημείο Ε ώστε ΑΕ = ΑΒ. Με κέντρο το σημείο Α και ακτίνες ρ = ΑΔ , r = AB = AE και R = ΑΓ γράφουμε τρεις ομόκεντρους κύκλους (Α,ρ) , (A,r) και (A,R) όπως στο σχήμα. Έστω $E_{E\Gamma}$ το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, r) και (A, R) , $E_{\Delta B}$ το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, ρ) και (A, r), E_{AE} το εμβαδόν του κύκλου (A, r) και $E_{A\Delta}$ το εμβαδόν του κύκλου (A, ρ).

α) Να αποδείξετε ότι:

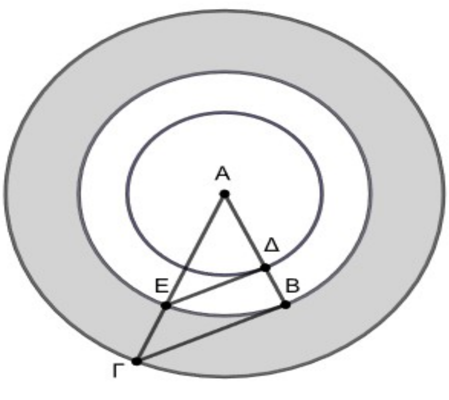
i. $\dfrac{E_{E\Gamma}}{E_{AE}} = \dfrac{R^2 - r^2}{r^2}$ (Μονάδες 10)

ii. $\dfrac{E_{\Delta B}}{E_{A\Delta}} = \dfrac{r^2 - \rho^2}{\rho^2}$ (Μονάδες 07)

β) Αν επιπλέον οι ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{E_{E\Gamma}}{E_{AE}} = \frac{E_{\Delta B}}{E_{A\Delta}}$$

(Μονάδες 08)



<u>ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ</u>

<u>Θέμα 1ο</u>

Α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στοναριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Αν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες τέμνουν δυο άλλες ευθείες ορίζουν σε αυτήν τμήματα ανάλογα.

ii. Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες ίσες μια προς μια τότε δεν είναι όμοια.

iii. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης.

iv. Ισοσκελές ονομάζεται ένα τραπέζιο που έχει όλες του τις πλευρές άνισες.

v. Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

(Μονάδες 10)

Β) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μια από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δυο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα και αντίστροφα.

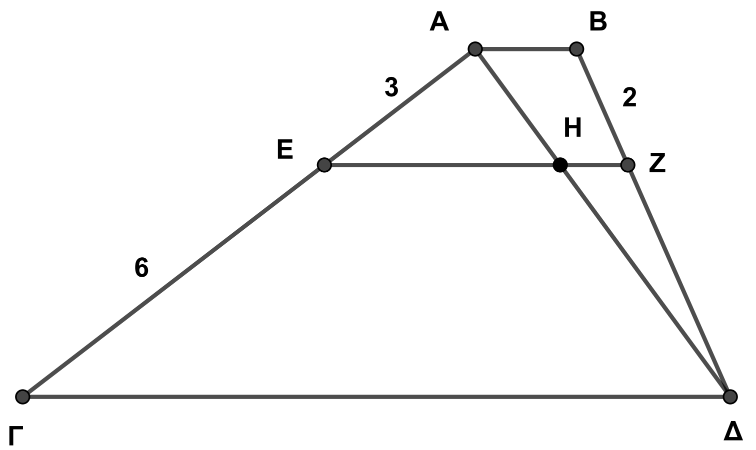
(Μονάδες 15)

<u>Θέμα 2ο</u>

Στο παρακάτω σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΕΖ και ΓΔ είναι παράλληλα. Αν έχουμε ότι ΑΕ = 3, ΕΓ = 6 και ΒΖ = 2, τότε:

α) να υπολογίσετε το μήκος του τμήματοςΔΖ. (Μονάδες 12)

β) να αποδείξετε ότι ΗΔ= 2·ΑΗ. (Μονάδες 13)



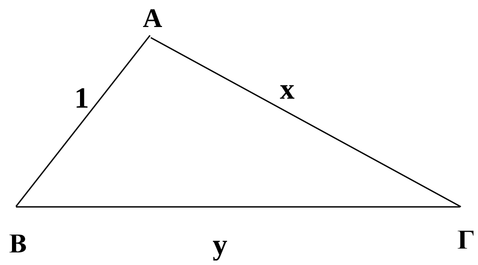
<u>Θέμα 3ο</u>

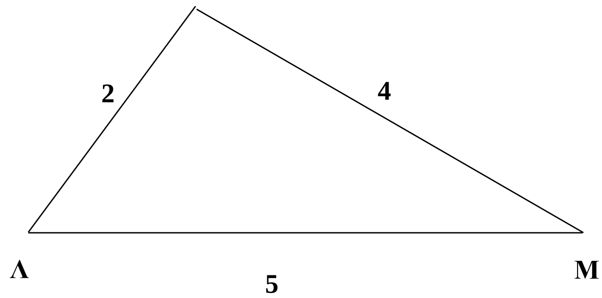
Δίνονται δυο τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ με:

$$\hat{A} = 80°, \hat{B} = 60°, \hat{\Gamma} = 40°, AB = 1\ cm, A\Gamma = \boldsymbol{x}\ \kappa\alpha\iota\ B\Gamma = \boldsymbol{y}$$

$$\hat{K} = 80°, \hat{\Lambda} = 60°, \hat{M} = 40°, K\Lambda = 2\ cm, KM = 4\ cm\ \kappa\alpha\iota\ \Lambda M = 5\ cm$$

Κ





Α) Να υπολογίσετε το **x**.

(Μονάδες 10)

Β) Να υπολογίσετε το **y**.

(Μονάδες 15)

Θέμα 4ο

Δίνεται κύκλος με κέντρο Α και τα σημεία του Β, Γ και Δ όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο Κ και είναι $ΚΑ = ΚΓ$ και $ΚΒ = ΚΔ$.

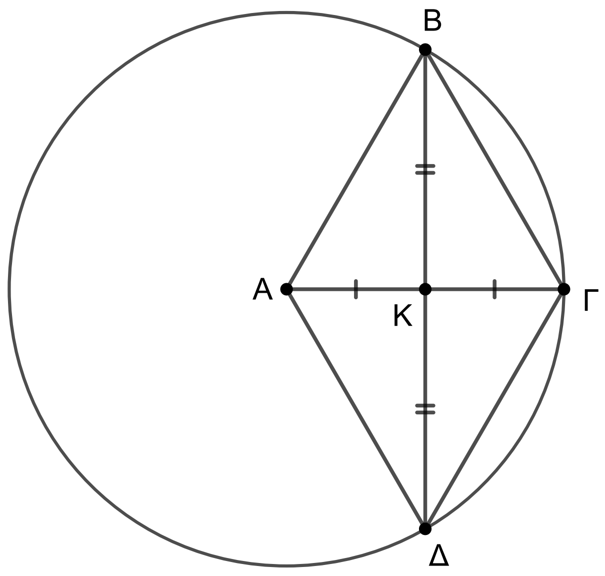
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΑΒ = ΑΓ = ΑΔ$. (Μονάδες 7)

ii. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

iii. Η γωνία $Κ\widehat{Β}Γ = 30°$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{ΓΔ}$. (Μονάδες 5)



Γραπτές ΠροαγωγικέςΕξετάσεις Μαΐου-Ιουνίου2022

<u>ΘΕΜΑΤΑ</u>

<u>ΘΕΜΑ Α</u>(25 μονάδες)

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, την λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1) Αν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες τέμνουν δυο άλλες ευθείες, ορίζουν σ' αυτές τμήματα ανάλογα.
2) Όλα τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους.
3) Σε κάθε τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει η σχέση :
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}$$
4) Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το άθροισμα της διαμέσου και του ύψους του.
5) Το μήκοςLενός κύκλου ακτίνας R δίνεται από την σχέση $L = 2\pi R^2$.

Μονάδες 10

Α2. Να αποδείξετε το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος, δηλαδή αν σ' ένα τρίγωνο$ΑΒΓ$ισχύει:$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ^2$, τότε $\hat{A} = 90^o$.

Μονάδες 15

<u>ΘΕΜΑ Β</u>(25 μονάδες)

Στο σχήμα, τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΒΔ$ είναι ισοσκελή με $ΑΓ = ΒΓ = 3$ και $ΑΒ = ΑΔ = 2$.

Β1. Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\hat{B}$ και $Β\hat{Α}Γ$ είναι ίσες.

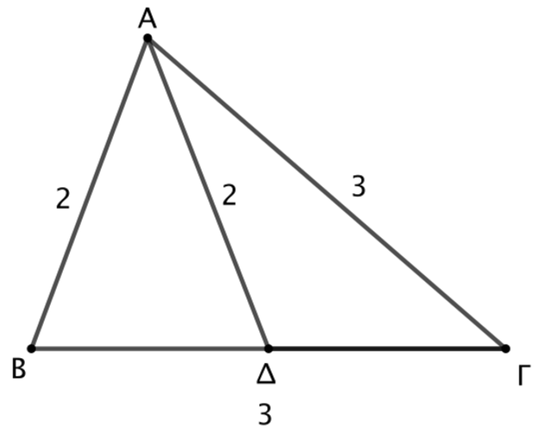
Μονάδες 8

Β2. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΒΔΑ$ είναι όμοια.

Μονάδες 9

Β3. Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΒΔΑ)}$ των εμβαδών των δυο τριγώνων.

Μονάδες 8



<u>ΘΕΜΑ Γ</u>(25 μονάδες)

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με πλευρές α, β και γ για τις οποίες ισχύει η σχέση :

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι αμβλυγώνιο.

Μονάδες 10

Γ2. Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{Γ}$.

Μονάδες 8

Γ3. Να υπολογιστεί η προβολή της πλευράς β πάνω στην πλευρά α, ως συνάρτηση του β.

Μονάδες 7

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>(25 μονάδες)

Το ευθύγραμμο τμήμα $ΒΓ$ έχει τα άκρα του $Β$ και $Γ$ στις προεκτάσεις των πλευρών $ΔΑ$ και $ΕΑ$, αντίστοιχα, του τριγώνου $ΑΔΕ$, έτσι ώστε να είναι παράλληλο στην πλευρά $ΔΕ$. Επίσης δίνονται τα μήκη των πλευρών του τριγώνου $ΑΒΓ$, $ΑΒ = 4$ και $ΑΓ = 5$. Έστω ότι ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων $ΑΒΓ$ και $ΑΔΕ$ είναι $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΔΕ)} = \frac{1}{4}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΔΕ$ είναι όμοια με λόγο $\frac{1}{2}$.

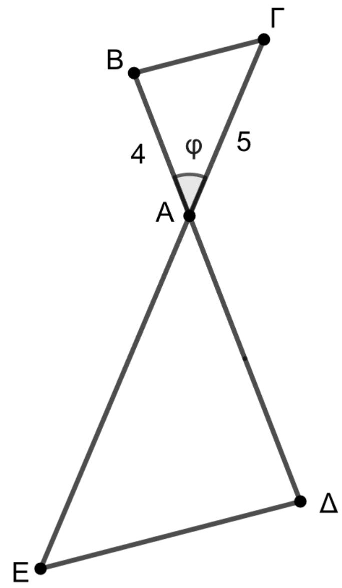
Μονάδες 10

Δ2. Αν $Β\hat{Α}Γ = \varphi$, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $(ΑΔΕ)$ του τριγώνου $ΑΔΕ$ είναι ίσο με 40*ημφ.

Μονάδες 7

Δ3. Να βρείτε το σημείο Z εσωτερικό της πλευράς $ΑΔ$, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΓZ$ που σχηματίζεται να είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου $ΑΔΕ$.

Μονάδες 8



Εισηγητής: ______________________

Επιτηρητές: ______________________

Ημερομηνία: ______________________

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στην κόλλα σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα τη λέξη Σωστό (**Σ**), αν θεωρείτε πως η πρόταση είναι **σωστή** ή τη λέξη Λάθος (**Λ**), αν θεωρείτε πως η πρόταση είναι **λανθασμένη**.

α. Όλα τα ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους.

Μονάδες 2

β. Αν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα.

Μονάδες 2

γ. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

Μονάδες 2

δ. Το εμβαδόν Ε ενός ορθογωνίου ισούται με το άθροισμα των πλευρών του.

Μονάδες 2

ε. Μέτρο ή μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο λόγος του προς ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα, που παίρνουμε ως μονάδα μέτρησης.

Μονάδες 2

Β. Να αποδείξετε το Πυθαγόρειο Θεώρημα, δηλαδή ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Να λυθεί το, με αριθμό **…..**, θέμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας.

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές ΑΒ = 3 cm, ΑΓ = 4 cm και ΒΓ = 5 cm.

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 10

β. Να υπολογίσετε την πλευρά ενός ισόπλευρου τριγώνου, που έχει περίμετρο ίση με την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 8

γ. Με δεδομένο ότι το ισόπλευρο τρίγωνο του προηγούμενου ερωτήματος (**β’**) έχει πλευρά ίση με 4 cm, να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Να λυθεί το, με αριθμό **…..**, θέμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας.

Παρατηρήσεις :

1. Οι απαντήσεις να δοθούν στις κόλλες αναφοράς και όχι στα φύλλα που περιέχουν τα θέματα.
2. Στα φύλλα θεμάτων να γράψετε μόνο το ονοματεπώνυμό σας, ενώ στις κόλλες αναφοράς – απαντήσεων το ονοματεπώνυμό σας, την ημερομηνία, το τμήμα και το εξεταζόμενο μάθημα.
3. Τα γραφόμενα σας να είναι ευανάγνωστα, να κάνετε σχήμα όπου χρειάζεται ή ζητείται, να απαντήσετε προσεκτικά, κατανοητά, με επάρκεια και να αιτιολογείτε τις απαντήσεις σας.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή. Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.
5. Όσον αφορά τα **2ο**, **4ο** θέματα, επισυνάπτονται σχετικά φωτοαντίγραφα.

Καλή Επιτυχία

ΘΕΜΑ 1^{Ο}

Α) Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

i) Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν ίση μία οξεία γωνία είναι όμοια.

ii) Η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου και η κεντρική του γωνία είναι συμπληρωματικές.

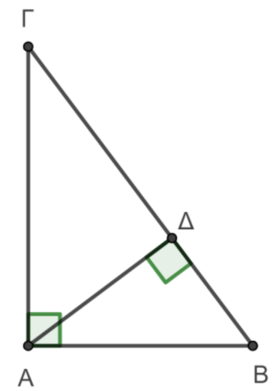
iii) Το εμβαδόν Ε κάθε τριγώνου δίνεται από τον τύπο $Ε = τ\cdot R$, όπου τ η ημιπερίμετρος του και R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

iv) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

v) Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των αντίστοιχων υψών.

Β) Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.
Δηλαδή, σύμφωνα με το διπλανό σχήμα, να αποδείξετε ότι:

$ΑΒ^{2} = ΒΓ\cdot ΒΔ$ και $ΑΓ^{2} = ΒΓ\cdot ΓΔ$



(μονάδες: $2\cdot 5 + 15$)

ΘΕΜΑ 2^{Ο}

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ=8 , ΑΓ=12 και γωνία $\widehat{Α} = 60^{o}$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $(ΑΒΓ)=24\sqrt{3}$.

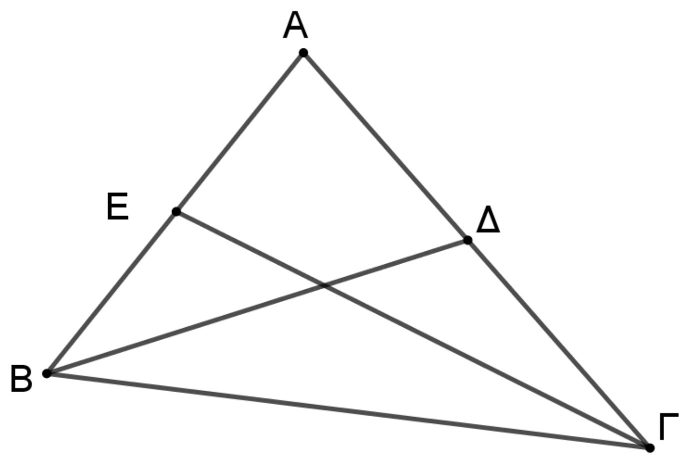
(Μονάδες 13)

β) Αν ΒΔ και ΓΕ διάμεσοι του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι :

i. Τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΑΕΓ είναι ισοδύναμα. (Μονάδες 4)

ii. Τα τρίγωνα ΕΒΓ και ΔΓΒ είναι ισοδύναμα με $(ΕΒΓ)=(ΔΓΒ)=12\sqrt{3}$

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 3$^{\text{Ο}}$

Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχουμε κατασκευάσει εσωτερικά ένα ημικύκλιο όπως φαίνεται στο σχήμα. Δίνεται ότι: ΒΓ = 4.

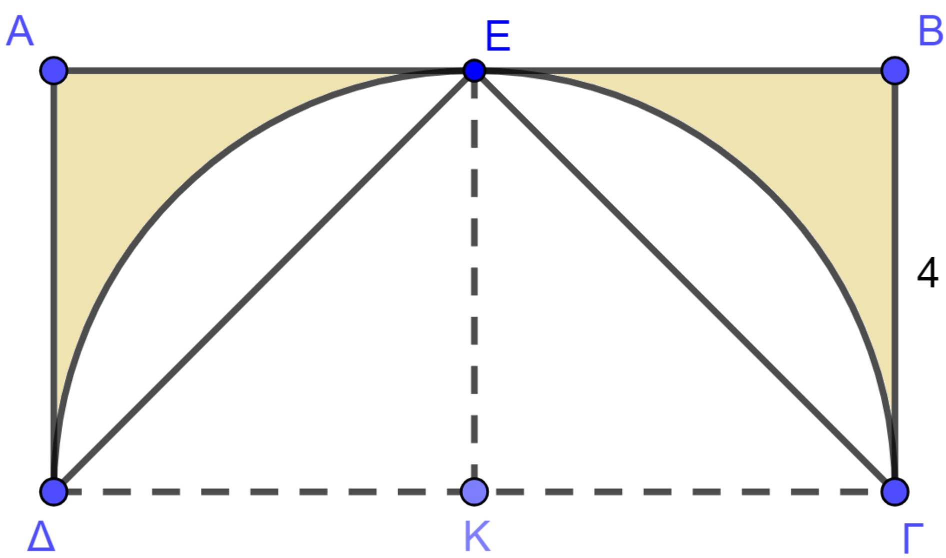
Να υπολογίσετε:

Α) Το τμήμα ΔΕ και την περίμετρο του ΔΕΓ.

(μονάδες 9)

Β) Το εμβαδόν και την περίμετρο της γραμμοσκιασμένης περιοχής.

(μονάδες 16)



ΘΕΜΑ 4$^{\text{Ο}}$

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ, $\widehat{A} = 36^o$.

α) Αν η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια.

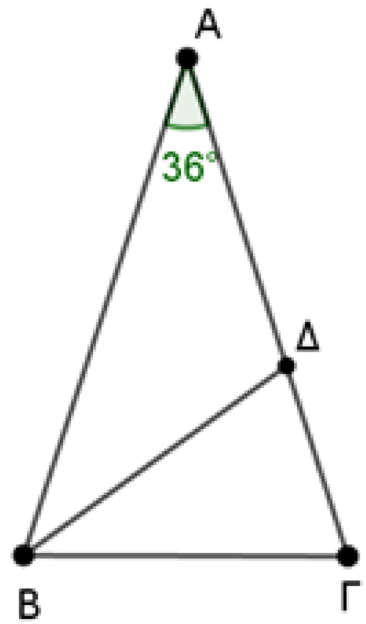
(Μονάδες 10)

ii. Να γράψετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών.

(Μονάδες 06)

β) Μετακινούμε το σημείο Δ στο εσωτερικό της ΑΓ. Για ποια θέση του σημείου Δ θα ισχύει $\frac{(ΑΒΔ)}{(ΔΒΓ)} = 3$.

(Μονάδες 09)



ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας την λέξη **«Σωστό» ή «Λάθος»** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Δύο ισοσκελή τρίγωνα που έχουν μία αντίστοιχη γωνία ίση, είναι όμοια.

β. Σε κάθε τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{\mathrm{A}} > 90^0$

γ. Το εμβαδόν ενός τριγώνου δίνεται και από την σχέση: $\mathrm{E} = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{2R}$, όπου $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ τα μήκη των πλευρών του και R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.

δ. Σε κάθε κανονικό $\nu-$γωνο ισχύει η σχέση: $\alpha_\nu^2 + \dfrac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$, όπου α_ν το απόστημα, λ_ν η πλευρά και R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του $\nu-$γωνου.

ε. Το μήκος l ενός τόξου μ^0 κύκλου (O,R) δίνεται από τη σχέση: $l = \dfrac{\pi R\mu}{360}$.

(Μονάδες 10)

Α2. Να αποδείξετε ότι αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με τον λόγο των γινομένων των πλερών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 Στο παρακάτω σχήμα τα τμήματα ΑΒ και ΔΕ είναι παράλληλα και τα τμήματα ΑΓ και ΓΕ είναι τέτοια, ώστε ΑΓ=2ΓΕ.

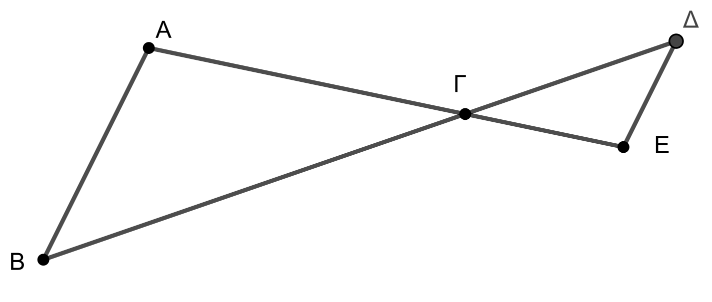
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ είναι όμοια. ***(Μονάδες 13)***

β)

i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δύο τριγώνων.

ii. Ποιος είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων;

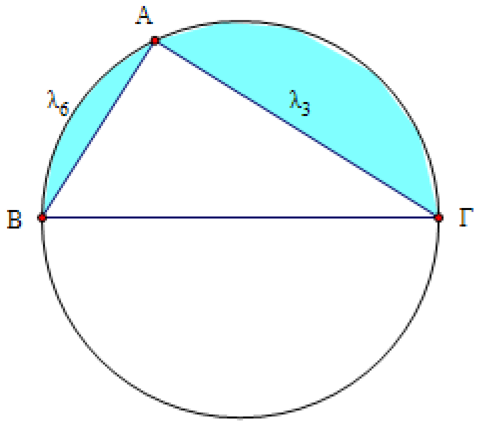
(Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ Γ Σε κύκλο (O, R) θεωρούμε τις χορδές AB και $A\Gamma$ οι οποίες είναι ίσες με τις πλευρές κανονικού εξαγώνου και ισοπλεύρου τριγώνου αντίστοιχα εγγεγραμμένων στον κύκλο.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο

(Μονάδες 08)



Γ2. Να βρείτε ως συνάρτηση του R.

α) Την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$

(Μονάδες 07)

β) Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του κύκλου.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ και ΓΔ = 2ΑΒ. Δίνεται επίσης ότι το σημείο Κ είναι μέσο της ΓΔ και Μ τυχαίο σημείο στην ΑΔ.

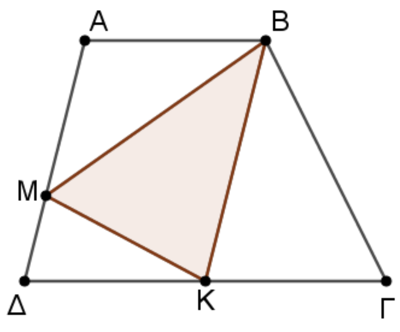
α) Να αποδείξετε ότι:

i. (ΒΚΓ) = $\frac{1}{2}$(ΑΒΚΔ) ***(Μονάδες 09)***

ii. (ΒΜΚ) = (ΒΚΓ) ***(Μονάδες 09)***

β) Δίνεται η πρόταση: «Αν το σημείο Μ κινείται πάνω στο εσωτερικό της ΑΔ, τότε ο λόγος των εμβαδών (ΑΒΓΔ) και (ΜΒΚ) παραμένει σταθερός και ίσος με 3». Να διερευνήσετε την ορθότητα της πρότασης αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)



Καλή επιτυχία.

Να απαντηθούν όλα τα θέματα.
Διάρκεια εξέτασης: Δύο (2) ώρες.

Οι Καθηγητές

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

<u>ΘΕΜΑ 1</u>

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στη κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**,αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Αν α η μεγαλύτερη πλευρά και $\alpha^2<\beta^2+\gamma^2$, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο.

ii) Σύμφωνα με το Νόμο των Συνημιτόνων σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$.

iii) Το εμβαδόν ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ πλευράς α είναι $E=\dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}$

iv) Το μήκος του κύκλου είναι $L=\pi R$, όπου R η ακτίνα του κύκλου.

v) Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου είναι $E=\pi R^2$, όπου R η ακτίνα του κύκλου.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του.

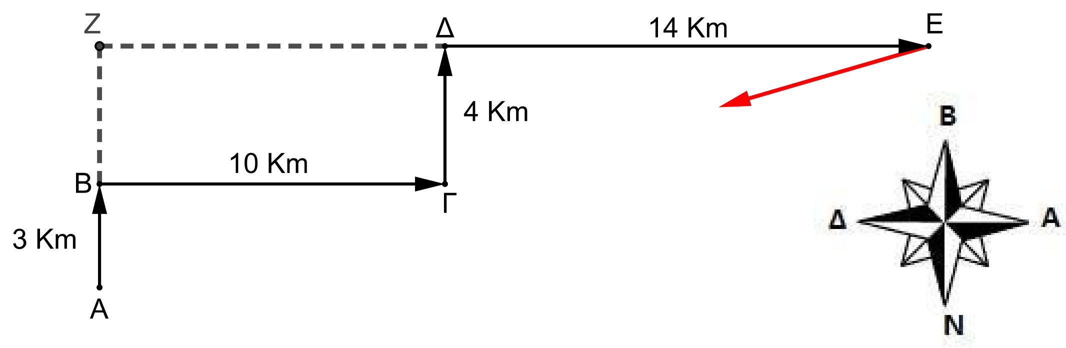
(Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. **(Μονάδες 07)**

γ) Να υπολογίσετε το ύψος ΑΔ. **(Μονάδες 09)**

(Μονάδες 12)

Το δεύτερο κινητό ξεκινάει από το σημείο Α κινείται βόρεια μέχρι το σημείο Ζ και συνεχίζει ανατολικά μέχρι το σημείο Ε. Όταν συναντιούνται στο σημείο Ε επιστρέφουν μαζί στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα.



α)

i. Πόσα χιλιόμετρα διάνυσε το κάθε κινητό από το σημείο Α στο σημείο Ε με τον τρόπο που κινήθηκε; **(Μονάδες 05)**

ii. Να βρείτε την απόσταση ΑΕ που διάνυσαν τα δύο κινητά κατά την επιστροφή από το σημείο Ε στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα. **(Μονάδες 12)**

β) Επιστρέφοντας τα δύο κινητά από το σημείο Ε στο σημείο Α, θα περάσουν από το σημείο Γ; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. **(Μονάδες 08)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!

Τάξη : Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΘΕΜΑ 1

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί στην κάθε πρόταση την λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε είναι και ίσα.

β) Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $β^2 > α^2 + γ^2$ τότε το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

γ) Αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ, τότε $\frac{(ΑΒΓ)}{(Α'Β'Γ')} = λ$

δ) Το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R δίνεται από τον τύπο $E = \frac{αβγ}{R}$

ε) Η πλευρά και το απόστημα ενός τετραγώνου που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R δίνονται από τους τύπους: $λ_4 = R\sqrt{2}$ $και$ $α_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

(Μονάδες 10)

2. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ έχει πλευρά $ΒΓ = 9$ και αντίστοιχο ύψος $ΑΔ = 8$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha=4$, $\beta=6$ και $\hat{\Gamma}=60^0$.

α) Να δείξετε ότι $\gamma=2\sqrt{7}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την προβολή της πλευράς ΒΓ πάνω στη ΑΒ. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Έστω Ε σημείο στην πλευρά ΓΑ του τριγώνου ΑΒΓ. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ του ΑΒΓ η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ και παίρνουμε σημείο Ζ στην προέκταση $A\chi$ της πλευράς ΓΑ του τριγώνου ΑΒΓ ώστε να είναι $ΑΖ = ΑΕ$, όπως στο σχήμα.

α) Έστω $A\Gamma = 3AE$. Να αποδείξετε ότι:

i. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

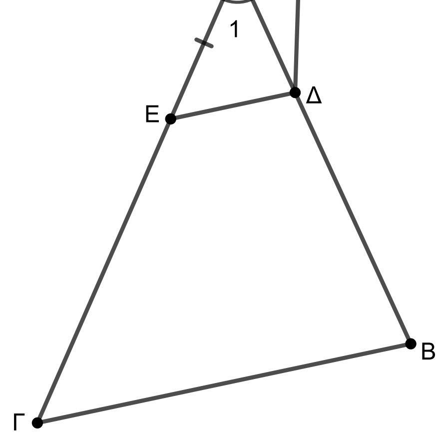
(Μονάδες 07)

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ είναι ίσο με τα $\frac{2}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του ΔΕΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του ΑΒΓ, να υπολογίσετε το λόγο $\frac{AE}{A\Gamma}$.

(Μονάδες 08)



Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Η ΕΙΣΗΓΗΤΡΙΑ

ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδειχθεί ότι: Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, ισούται με το γινόμενο των προβολών των καθέτων πλευρών του στην υποτείνουσα. **Μονάδες 15**

Α2. Δίνονται οι παρακάτω προτάσεις. Να χαρακτηριστούν ως σωστές ή λανθασμένες.

(i) Δύο ορθογώνια τρίγωνα με μία οξεία γωνία τους ίση είναι όμοια.

(ii) Όλα τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους**.**

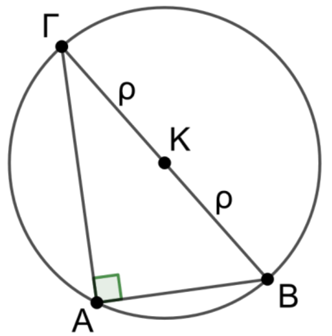
(iii) Κάθε διάμεσος τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα.

(iv) Ανάμεσα σε δύο κανονικά πολύγωνα με διαφορετικό πλήθος πλευρών που είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο, μεγαλύτερο εμβαδό έχει αυτό με τις λιγότερες πλευρές.

(v) Αν τρεις τουλάχιστον ευθείες τέμνουν δυο άλλες ευθείες, ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$, με $\hat{\mathrm{A}}$ ορθή γωνία και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου, που έχει κέντρο το Κ και ακτίνα ρ. Επίσης δίνεται ότι το μήκος του κύκλου ισούται με 10π.



Β1. Να αποδείξετε ότι η ακτίνα ρ του κύκλου έχει μήκος 5. **Μονάδες 8**

Β2. Αν η χορδή ΑΒ έχει μήκος 6 να υπολογίσετε:

i. το μήκος της χορδής ΑΓ του κύκλου. **Μονάδες 10**

ii. το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=6, ΑΓ=5 και ΒΓ=9.

Γ1. Να βρεθεί το είδος του τριγώνου. **Μονάδες 7**

Γ2. Να γίνει το σχήμα και να σχεδιαστεί το ύψος ΓΔ. **Μονάδες 5**

Γ3. Να υπολογιστεί η προβολή της πλευράς ΑΓ πάνω στην ΑΒ. **Μονάδες 7**

Γ4. Να υπολογιστεί το ύψος ΓΔ. **Μονάδες 6**

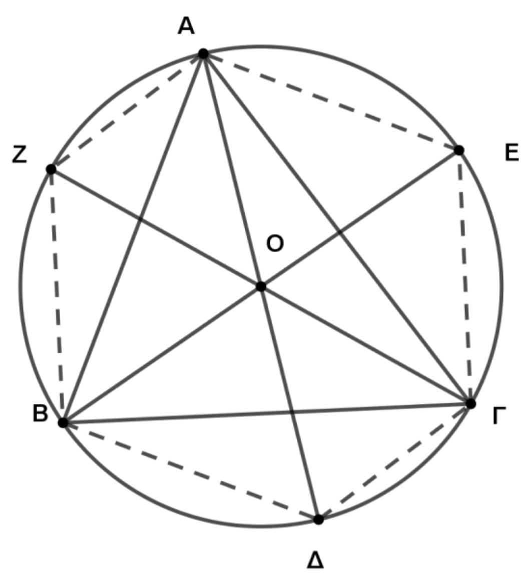
ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο. Θεωρούμε τις διαμέτρους ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Να αποδείξετε ότι:

Δ1. (ΑΟΒ) = (ΒΟΔ) και (ΑΟΓ) = (ΔΟΓ) **Μονάδες 8**

Δ2. (ΒΔΓ) = (ΑΟΒ) + (ΑΟΓ) – (ΒΟΓ) **Μονάδες 8**

Δ3. (ΑΖΒΔΓΕ) = 2(ΑΒΓ) **Μονάδες 9**



ΘΕΜΑ Α

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Η πλευρά ενός κανονικού εξαγώνου είναι $\lambda_6 = \mathrm{R}$**,** όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του.

β. Αν σε ένα τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι πάντοτε οξυγώνιο.

Γ. Για το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει:(ΑΒΓ) = τ · ρ, όπου τ είναι η ημιπερίμετρος και ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

δ. Η σχέση που συνδέει το απόστημα α_ν , την πλευρά λ_ν κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι: $\frac{\lambda_\nu{}^2}{4} + \alpha_\nu{}^2 = R^2$.

ε. Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

Μονάδες 5·2=10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται A, B, Γ είναι διαδοχικά σημεία κύκλου (O,R), ώστε $\overset{\frown}{AB} = 60^\circ$ και $\overset{\frown}{B\Gamma} = 120^\circ$.

α. Να υπολογίστε το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{AB}$, συναρτήσει του R.

Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$P = (3+\sqrt{3})R$ και $E = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R^2$, αντίστοιχα.

Μονάδες 10

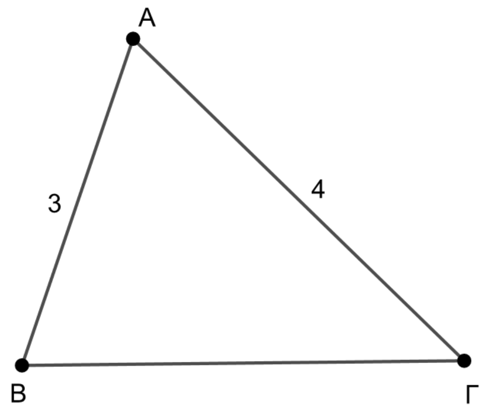
γ. Να υπολογίστε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου, συναρτήσει του R.

Μονάδες 8

(Μονάδες 09)

β) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας Α ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ να γίνεται μέγιστο; Να υπολογίσετε το μέγιστο εμβαδόν και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 08)



<u>Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα</u>

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ **ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ**

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ:

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας. (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

(15 μονάδες)

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Σε κάθε αμβλυγώνιο τρίγωνο ισχύει ότι το τετράγωνο της πλευράς που βρίσκεται απέναντι από την αμβλεία γωνία είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών.

ii. Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ισχύει $\omega_\nu = \frac{180^\circ}{\nu}$

iii. Ισχύει $\lambda_6 = 2R$.

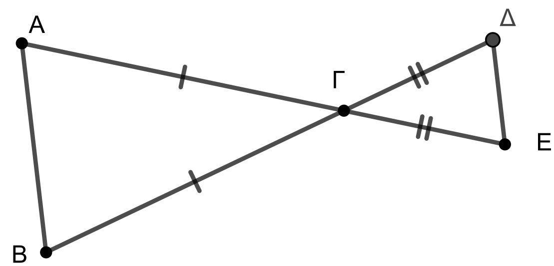
iv. Το μήκος τόξου μ^o κύκλου ακτίνας R δίνεται από τον τύπο $\ell = \frac{\pi R \mu}{180}$.

v. Αν τ είναι η ημιπερίμετρος τριγώνου $AB\Gamma$ με πλευρές α, β και γ, τότε το εμβαδόν του δίνεται από τον τύπο $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$.

(10 μονάδες)

Θέμα Β

Στο παρακάτω σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΒΔ τέμνονται στο Γ, τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΔΕ που σχηματίζονται είναι ισοσκελή και οι βάσεις τους ΑΒ και ΔΕ είναι τέτοιες, ώστε ΑΒ = 2·ΔΕ.



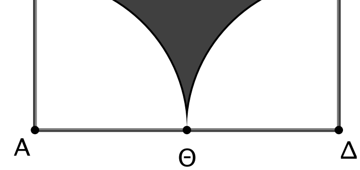
Γ2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου είναι:

$$E = \alpha^2(4-\pi)$$

(12 μονάδες)

Γ3. Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου.

(5 μονάδες)



Θέμα Δ

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημείο Ζ στην πλευρά ΑΔ, ώστε $\mathrm{AZ} = \frac{3}{4}\mathrm{AB}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{BZ} = \frac{5}{4}\mathrm{AB}$.

(6 μονάδες)

Δ2. Αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, Ε το μέσο της ΓΔ και Η είναι το σημείο τομής των ΑΕ, ΒΖ, να αποδείξετε ότι:

i. $\mathrm{BE}^2 = \frac{5}{4}\mathrm{AB}^2$ και $\mathrm{ZE}^2 = \frac{5}{16}\mathrm{AB}^2$,

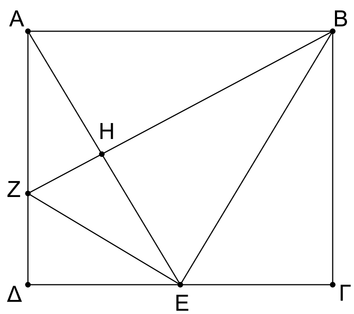
(6 μονάδες)

ii. το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο.

(5 μονάδες)

Δ3. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΒΓΕ είναι όμοια και να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών τους.

(8 μονάδες)



Η Διευθύντρια

Ο Εισηγητής

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή ή Λανθασμένη, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές την λέξη **Σωστό**, ή την λέξη **Λάθος** αν αυτή είναι λανθασμένη.

α. Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.

β. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

γ. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι πάντοτε οξυγώνιο.

δ. Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.

ε. Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

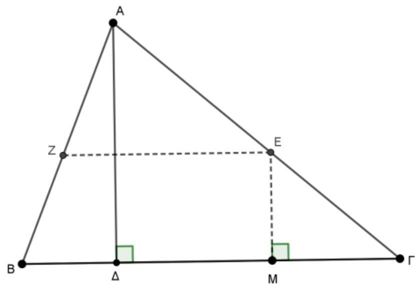
Α2. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα **(Μονάδες 15)**

ΘΕΜΑ Β

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου .Η κάθετος στην πλευρά ΒΓ σε ένα άλλο σημείο της Μ τέμνει την ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη στην ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

Β1. $\frac{ZA}{ZB} = \frac{EA}{E\Gamma}$. **(Μονάδες 10)**

Β2. $\frac{ZA}{ZB} = \frac{M\Delta}{M\Gamma}$. **(Μονάδες 15)**



ΘΕΜΑ Γ

Σε τρίγωνο ΑΒΓ τα μήκη των πλευρών του είναι α=4, $\beta = \sqrt{17}$ και γ=5.

Γ1. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ, ως προς τις γωνίες του. **(Μονάδες 9)**

Γ2. Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ από την κορυφή Α, τότε:

α. να υπολογίσετε το ΔΒ. **(Μονάδες 9)**

β. να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. **(Μονάδες 7)**

ΘΕΜΑ Δ

Ένας κηπουρός θέλει να ποτίσει το γκαζόν που έχει φυτέψει σε έναν τετράγωνο κήπο πλευράς 10 m. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιεί μηχανισμούς ποτίσματος τους οποίους μπορεί να ρυθμίσει, ώστε να ποτίζουν έναν κυκλικό τομέα με συγκεκριμένη γωνία και ακτίνα.

Δ1. Ο κηπουρός τοποθετεί στις απέναντι κορυφές Α, Γ του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 10m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Να αποδείξετε ότι:

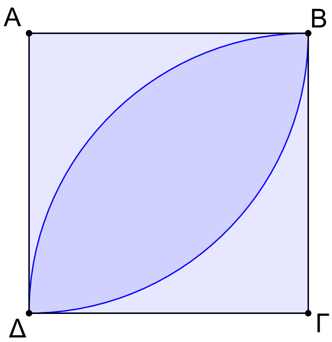
α. το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζει κάθε μηχανισμός είναι $25\pi \text{ m}^2$. **(Μονάδες 4)**

β. το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζουν ταυτόχρονα και οι δύο μηχανισμοί είναι $50(\pi - 2) \text{ m}^2$. **(Μονάδες 5)**

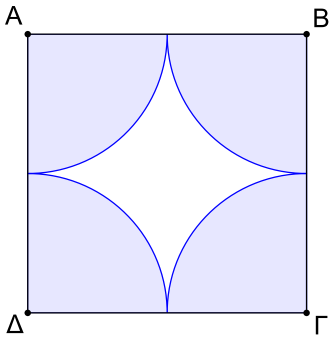
Δ2. Ο κηπουρός τοποθετεί στις τέσσερις κορυφές του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 5m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.

α. Να βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που δεν ποτίζεται. **(Μονάδες 8)**

β. Για να μην μείνει απότιστη κάποια περιοχή του κήπου ο κηπουρός τοποθετεί έναν πέμπτο μηχανισμό ποτίσματος στο κέντρο του κήπου ο οποίος ποτίζει την περιοχή ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας 5m. Να βρείτε το εμβαδόν του κήπου που ποτίζεται από δύο μηχανισμούς ταυτόχρονα και να το συγκρίνετε με την απάντηση που βρήκατε στο ερώτημα Δ1. **(Μονάδες 8)**



Σχήμα 1



Σχήμα 2

ΘΕΜΑ Α

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Η πλευρά ενός κανονικού εξαγώνου είναι $\lambda_6 = \mathrm{R}$ **,** όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του.

β. Αν σε ένα τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι πάντοτε οξυγώνιο.

Γ. Για το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει:(ΑΒΓ) = τ · ρ, όπου τ είναι η ημιπερίμετρος και ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

δ. Η σχέση που συνδέει το απόστημα α_ν , την πλευρά λ_ν κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι: $\dfrac{\lambda_\nu{}^2}{4} + \alpha_\nu{}^2 = R^2$.

ε. Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

Μονάδες 5·2=10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται Α, Β, Γ είναι διαδοχικά σημεία κύκλου (Ο,R), ώστε $\overset{\frown}{AB} = 60^\circ$ και $\overset{\frown}{B\Gamma} = 120^\circ$.

α. Να υπολογίστε το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{AB}$, συναρτήσει του R.

Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$P = (3+\sqrt{3})R$ και $E = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R^2$, αντίστοιχα.

Μονάδες 10

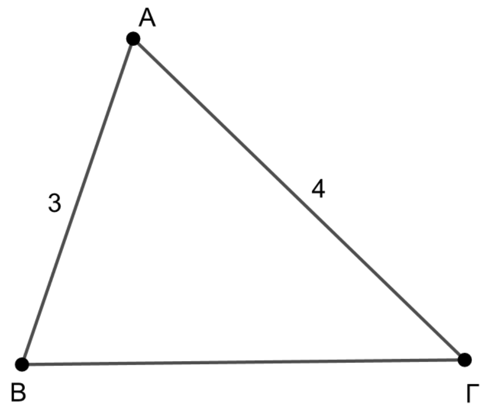
γ. Να υπολογίστε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου, συναρτήσει του R.

Μονάδες 8

(Μονάδες 09)

β) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας Α ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ να γίνεται μέγιστο; Να υπολογίσετε το μέγιστο εμβαδόν και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 08)



<u>Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα</u>

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ **ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ**

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ:

ΘΕΜΑΤΑ

<u>Θέμα Α</u>

Α1. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας. (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

(15 μονάδες)

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Σε κάθε αμβλυγώνιο τρίγωνο ισχύει ότι το τετράγωνο της πλευράς που βρίσκεται απέναντι από την αμβλεία γωνία είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών.

ii. Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ισχύει $\omega_\nu = \frac{180^\circ}{\nu}$

iii. Ισχύει $\lambda_6 = 2R$.

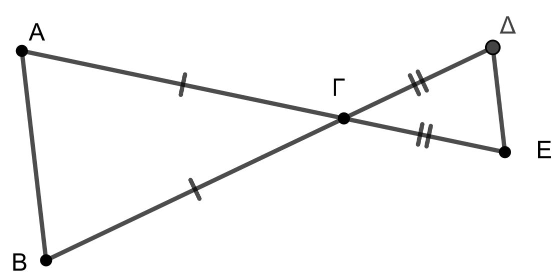
iv. Το μήκος τόξου μ^o κύκλου ακτίνας R δίνεται από τον τύπο $\ell = \frac{\pi R\mu}{180}$.

v. Αν τ είναι η ημιπερίμετρος τριγώνου $ΑΒΓ$ με πλευρές α, β και γ, τότε το εμβαδόν του δίνεται από τον τύπο $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$.

(10 μονάδες)

<u>Θέμα Β</u>

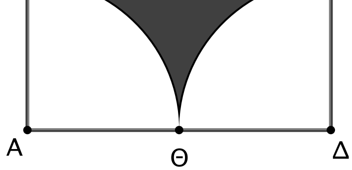
Στο παρακάτω σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΒΔ τέμνονται στο Γ, τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΔΕ που σχηματίζονται είναι ισοσκελή και οι βάσεις τους ΑΒ και ΔΕ είναι τέτοιες, ώστε ΑΒ = 2·ΔΕ.



Γ2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου είναι:

$$E = \alpha^2(4-\pi)$$

(12 μονάδες)



Γ3. Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου.

(5 μονάδες)

<u>Θέμα Δ</u>

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημείο Ζ στην πλευρά ΑΔ, ώστε $\text{AZ} = \frac{3}{4}\text{AB}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\text{BZ} = \frac{5}{4}\text{AB}$.

(6 μονάδες)

Δ2. Αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, Ε το μέσο της ΓΔ και Η είναι το σημείο τομής των ΑΕ, ΒΖ, να αποδείξετε ότι:

i. $\text{BE}^2 = \frac{5}{4}\text{AB}^2$ και $\text{ZE}^2 = \frac{5}{16}\text{AB}^2$,

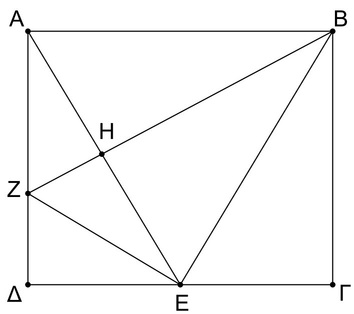
(6 μονάδες)

ii. το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο.

(5 μονάδες)

Δ3. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΒΓΕ είναι όμοια και να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών τους.

(8 μονάδες)



Η Διευθύντρια

Ο Εισηγητής

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή ή Λανθασμένη, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές την λέξη **Σωστό**, ή την λέξη **Λάθος** αν αυτή είναι λανθασμένη.

α. Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.

β. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

γ. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι πάντοτε οξυγώνιο.

δ. Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.

ε. Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

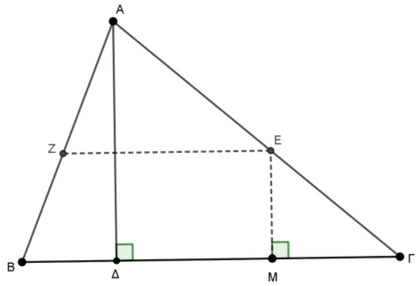
Α2. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα **(Μονάδες 15)**

ΘΕΜΑ Β

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου .Η κάθετος στην πλευρά ΒΓ σε ένα άλλο σημείο της Μ τέμνει την ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη στην ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

Β1. $\frac{ZA}{ZB}=\frac{EA}{E\Gamma}$. **(Μονάδες 10)**

Β2. $\frac{ZA}{ZB}=\frac{M\Delta}{M\Gamma}$. **(Μονάδες 15)**



ΘΕΜΑ Γ

Σε τρίγωνο ΑΒΓ τα μήκη των πλευρών του είναι α=4, β = $\sqrt{17}$ και γ=5.

Γ1. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ, ως προς τις γωνίες του. **(Μονάδες 9)**

Γ2. Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ από την κορυφή Α, τότε:

α. να υπολογίσετε το ΔΒ. **(Μονάδες 9)**

β. να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. **(Μονάδες 7)**

ΘΕΜΑ Δ

Ένας κηπουρός θέλει να ποτίσει το γκαζόν που έχει φυτέψει σε έναν τετράγωνο κήπο πλευράς 10 m. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιεί μηχανισμούς ποτίσματος τους οποίους μπορεί να ρυθμίσει, ώστε να ποτίζουν έναν κυκλικό τομέα με συγκεκριμένη γωνία και ακτίνα.

Δ1. Ο κηπουρός τοποθετεί στις απέναντι κορυφές Α, Γ του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 10m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Να αποδείξετε ότι:

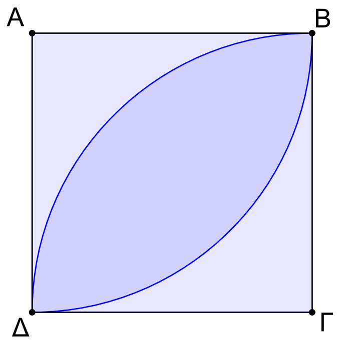
α. το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζει κάθε μηχανισμός είναι $25\pi \ \mathrm{m}^2$. **(Μονάδες 4)**

β. το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζουν ταυτόχρονα και οι δύο μηχανισμοί είναι $50(\pi - 2) \ \mathrm{m}^2$. **(Μονάδες 5)**

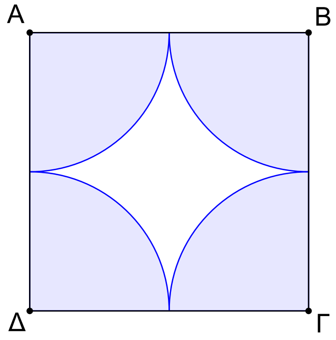
Δ2. Ο κηπουρός τοποθετεί στις τέσσερις κορυφές του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 5m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.

α. Να βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που δεν ποτίζεται. **(Μονάδες 8)**

β. Για να μην μείνει απότιστη κάποια περιοχή του κήπου ο κηπουρός τοποθετεί έναν πέμπτο μηχανισμό ποτίσματος στο κέντρο του κήπου ο οποίος ποτίζει την περιοχή ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας 5m. Να βρείτε το εμβαδόν του κήπου που ποτίζεται από δύο μηχανισμούς ταυτόχρονα και να το συγκρίνετε με την απάντηση που βρήκατε στο ερώτημα Δ1. **(Μονάδες 8)**



Σχήμα 1



Σχήμα 2