

The background features an abstract geometric design. It includes three sets of concentric circles in shades of blue. One set is in the top right, another is in the middle right, and a third, larger one is in the bottom right. Thin blue lines intersect these circles, creating a dynamic, geometric pattern.

**ΘΕΜΑΤΑ  
ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ  
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Β'  
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ**

ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2021-2022

# Γραπτές Προαγωγικές εξετάσεις περιόδου Μαΐου – Ιουνίου 2022

Ημερομηνία: Τρίτη 7 Ιουνίου 2022

## ΘΕΜΑ 1

**A. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).**

1. Αν δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά τότε η διάκεντρος τους ισούται με το άθροισμα των ακτίνων τους.
2. Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.
3. Κάθε τετράπλευρο με ίσες και κάθετες διαγώνιες είναι τετράγωνο.
4. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι εσωτερικές γωνίες του τριγώνου.
5. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

(Μονάδες 10)

**B. Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος.**

(Μονάδες 15)

## ΘΕΜΑ 2

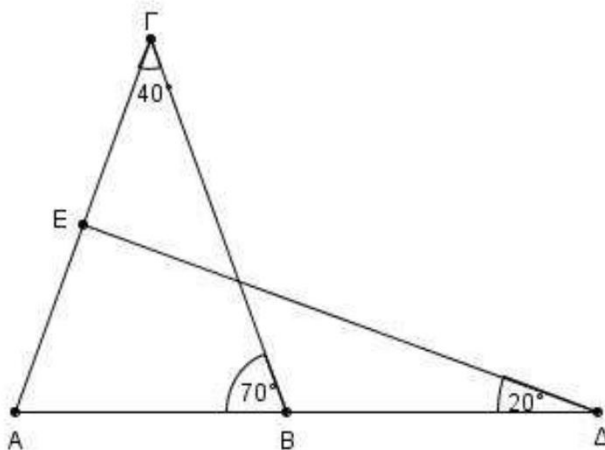
Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές,

(Μονάδες 12)

β) η γωνία  $AE\Delta$  είναι ορθή.

(Μονάδες 13)



## ΘΕΜΑ 3

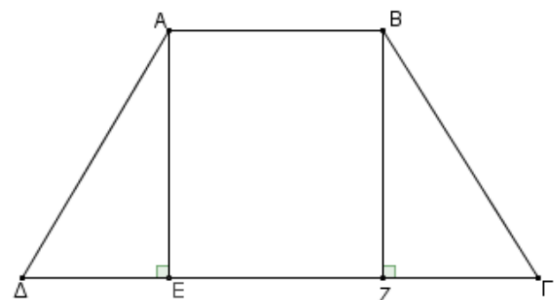
Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με  $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^\circ$ .

Φέρουμε τα ύψη του  $AE$  και  $BZ$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $DE = \Gamma Z$

(Μονάδες 9)

β) Το τετράπλευρο  $AEZB$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)



γ) Αν  $AB = 8$  και  $B\Gamma = 10$  να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραπεζίου  $AB\Gamma\Delta$ .

(Μονάδες 10)

#### ΘΕΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ . Από το  $B$  φέρουμε κάθετη στην διχοτόμο  $AM$  της γωνίας  $A$ , η οποία τέμνει την  $AM$  στο  $H$  και την  $A\Gamma$  στο  $\Delta$ . Στην προέκταση της  $AH$  θεωρούμε σημείο  $Z$  τέτοιο ώστε  $AH = HZ$  και έστω  $\Theta$  το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι

α) το τετράπλευρο  $ABZ\Delta$  είναι ρόμβος.

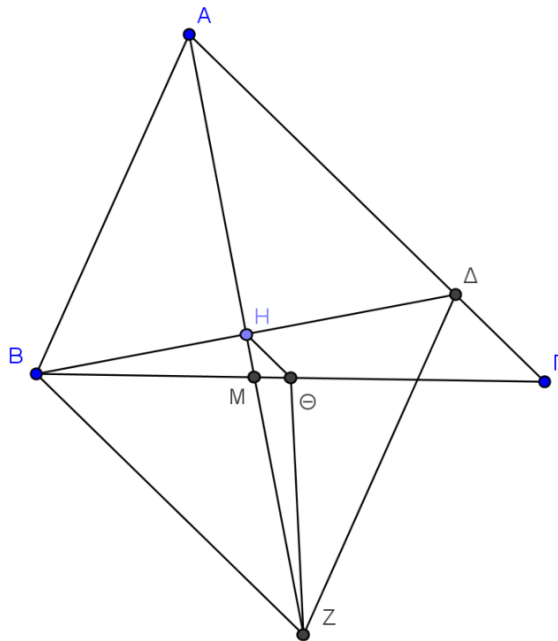
(Μονάδες 9)

β)  $H\Theta // BZ$ .

(Μονάδες 9)

γ)  $H\Theta = \frac{A\Gamma - AB}{2}$

(Μονάδες 7)



Ο Διευθυντής

Οι Εισηγητές

## ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας τη λέξη “Σωστό” ή “Λάθος”, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.
- β.** Οι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου είναι παραπληρωματικές.
- γ.** Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, μία προς μία, τότε θα έχουν και τις τρίτες γωνίες ίσες.
- δ.** Οι διαγώνιες ενός ισοσκελούς τραπεζίου είναι ίσες.
- ε.** Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται ομοίως άνισες γωνίες.

**Μονάδες 10**

**A2.** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

(η απόδειξη να συνοδεύεται με σχήμα).

**Μονάδες 15**

### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται γωνία  $\hat{xOy}$  και η διχοτόμος της  $Οδ$ . Θεωρούμε σημείο  $M$  της  $Οδ$  και σημεία  $A$  και  $B$  στις ημιευθείες  $Ox$  και  $Oy$  αντίστοιχα, τέτοια ώστε  $OA = OB$ .

Να αποδείξετε ότι:

**B1.**  $MA = MB$

**Μονάδες 15**

**B2.** Η  $Οδ$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{AMB}$ .

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ Γ

Από το σημείο τομής  $I$  των διχοτόμων των γωνιών τριγώνου  $AB\Gamma$  φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την  $B\Gamma$  που τέμνει τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα.

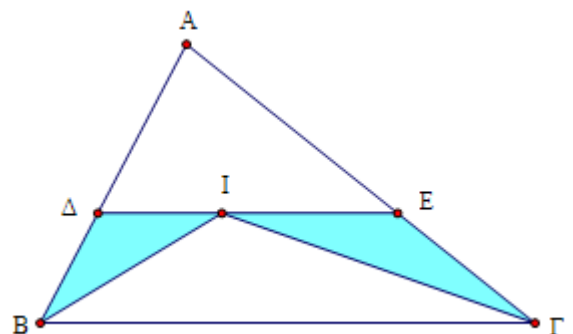
Να αποδείξετε ότι:

**Γ1.** Τα τρίγωνα  $\Delta BI$  και  $E\Gamma I$  είναι ισοσκελή.

**Μονάδες 15**

**Γ2.**  $\Delta E = B\Delta + \Gamma E$

**Μονάδες 10**



**ΘΕΜΑ Δ** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διάμεσός του  $ΑΔ$ . Έστω  $E, Z$  και  $H$  είναι τα μέσα των  $B\Delta, A\Delta$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.

**Μονάδες 10**

**Δ2.** Να βρείτε τη σχέση των πλευρών ΑΒ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε το παραλληλόγραμμο ΔΕΖΗ να είναι ρόμβος.

**Μονάδες 10**

**Δ3.** Στην περίπτωση που το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ( η γωνία  $\hat{B}$  ορθή), να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου ΔΕΖΗ.

**Μονάδες 5**

*Καλή επιτυχία.*

*Να απαντηθούν όλα τα θέματα.*

*Διάρκεια εξέτασης: Δύο (2) ώρες.*

# ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

## ΘΕΜΑ Α

**A1.** Να απαντήσετε με «Σωστό» ή «Λάθος» στα παρακάτω:

- α) Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν δύο πλευρές τους και μία γωνία τους ίσες μία προς μία.
- β) Δύο παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μια άλλη ευθεία έχουν τις εντός και επί τα αυτά γωνίες τους ίσες.
- γ) Ένα σημείο εσωτερικό μιας γωνίας είναι σημείο της διχοτόμου της αν ισαπέχει από τις πλευρές της.
- δ) Ένα τετράπλευρο με κάθετες διαγωνίους είναι ρόμβος
- ε) Η διάμεσος ενός ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

(μονάδες 10)

**A2.** Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι διάμεσος και ύψος. (μονάδες 15)

## ΘΕΜΑ Β

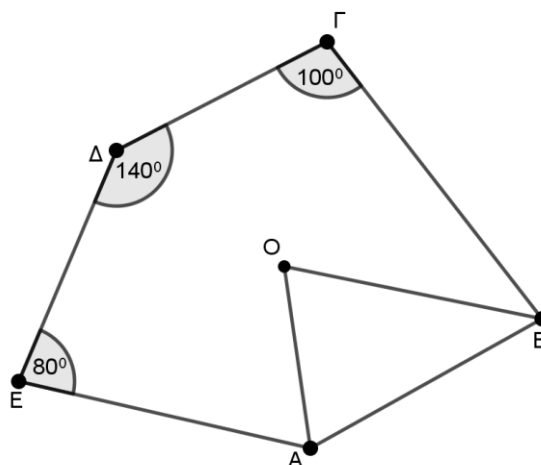
Στο κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ, οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο. Αν η γωνία του Γ ισούται με  $100^\circ$ , η γωνία του Δ ισούται με  $140^\circ$  και η γωνία του Ε ισούται με  $80^\circ$  τότε, να υπολογίσετε:

**B1.** το μέτρο του αθροίσματος  $\hat{A} + \hat{B}$ .

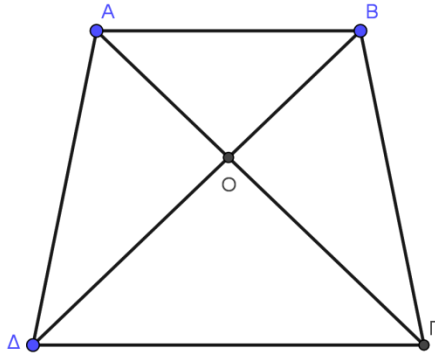
(Μονάδες 12)

**B2.** το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.

(Μονάδες 13)



### ΘΕΜΑ Γ



Για το παραπάνω σχήμα γνωρίζουμε ότι  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $OA=OB$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $\hat{A}BO = \hat{O}\hat{\Delta}\Gamma$  και  $\hat{B}\hat{A}O = \hat{O}\hat{\Gamma}\Delta$ . **(5 μονάδες)**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $\Delta O\Gamma$  είναι ισοσκελές **(10 μονάδες)**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι  $A\Delta=B\Gamma$  **(7 μονάδες)**

**Γ4.** Αν ισχύουν όλα όσα έπρεπε να αποδείξετε στα παραπάνω ερωτήματα, τι είδους τετράπλευρο είναι τότε το  $AB\Gamma\Delta$ ; **(3 μονάδες)**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A}=90^\circ$ . Από το μέσο  $\Delta$  της πλευράς  $B\Gamma$  φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά  $A\Gamma$  που τέμνει την πλευρά  $AB$  στο σημείο  $E$ . Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι  $\hat{E}\hat{\Delta}\Gamma=120^\circ$ , τότε:

**Δ1.** Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνία  $\hat{\Delta}\hat{\Gamma}A$ . **(Μονάδες 5)**

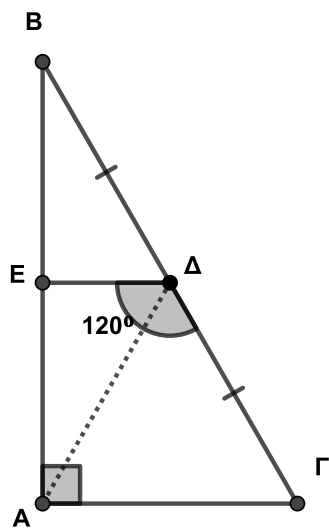
**Δ2.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$  είναι ισόπλευρο.

**(Μονάδες 8)**

**Δ3.** Προεκτείνουμε την πλευρά  $A\Gamma$  προς το  $\Gamma$  κατά τμήμα  $\Gamma Z=A\Gamma$  και την πλευρά  $B\Gamma$  προς το  $\Gamma$  κατά τμήμα  $\Gamma H=\frac{B\Gamma}{2}$ . Να αποδείξετε ότι

$\hat{A}\hat{H}Z=90^\circ$ .

**(Μονάδες 12)**



Ο διευθυντής

Ο εισηγητής

ΠΕΜΠΤΗ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας τη λέξη “Σωστό” ή “Λάθος”, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.
- β.** Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι αμβλεία, τότε απέναντί της βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.
- γ.** Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά αν η διάκεντρος είναι ίση με τη διαφορά των ακτίνων.
- δ.** Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των άλλων δύο.
- ε.** Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.

(Μονάδες 10)

**A2.** Να αποδείξετε ότι: "Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους."

(η απόδειξη να συνοδεύεται με σχήμα).

(Μονάδες 15)

**ΘΕΜΑ Β**

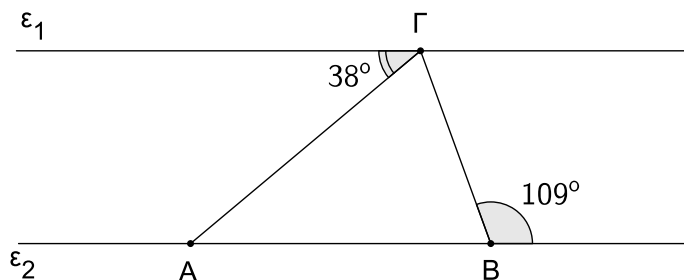
Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία  $\varepsilon_1$  διέρχεται από την κορυφή  $\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  και είναι παράλληλη στην ευθεία  $\varepsilon_2$  που ορίζεται από τις κορυφές του  $A$  και  $B$ . Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:

**α)** να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 15)

**β)** να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές και να εξηγήσετε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.

(Μονάδες 10)



**ΘΕΜΑ Γ** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ , φέρουμε το ύψος  $AH$ . Αν  $\Delta$  και  $E$  είναι τα μέσα των πλευρών  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α)  $\hat{B} = \hat{E}_1$

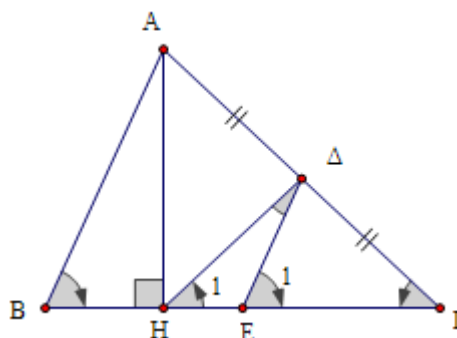
Μονάδες 08

β)  $\hat{\Gamma} = \hat{H}_1$

Μονάδες 08

γ)  $\hat{H}\hat{\Delta}E = \hat{B} - \hat{\Gamma}$

Μονάδες 09



### ΘΕΜΑ Δ

Έστω ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Delta\Gamma$ ) με  $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$  και  $AB = B\Gamma = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ . Φέρουμε την διχοτόμο της γωνίας  $\hat{B}$ , η οποία τέμνει το  $\Delta\Gamma$  στο  $K$  και η κάθετη από το  $K$  προς το  $B\Gamma$  το τέμνει στο  $M$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του  $AB\Gamma\Delta$ .

(Μονάδες 10)

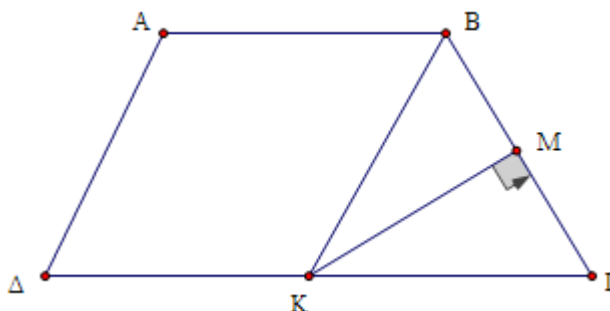
β) Να αποδείξετε ότι:

i) Το τετράπλευρο  $ABK\Delta$  είναι ρόμβος.

(Μονάδες 8)

ii) Το σημείο  $M$  είναι το μέσο του  $B\Gamma$ .

(Μονάδες 7)



Καλή επιτυχία.

Να απαντηθούν όλα τα θέματα.  
Διάρκεια εξέτασης: Δύο (2) ώρες.



### ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- i. Οι διαγώνιοι ενός ισοσκελούς τραπεζίου διχοτομούνται.
- ii. Στο ισόπλευρο τρίγωνο κάθε ύψος είναι και διάμεσος.
- iii. Το τετράγωνο είναι ρόμβος.
- iv. Τα εφαπτόμενα τμήματα από ένα σημείο προς ένα κύκλο είναι ίσα.
- v. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι: *το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.*

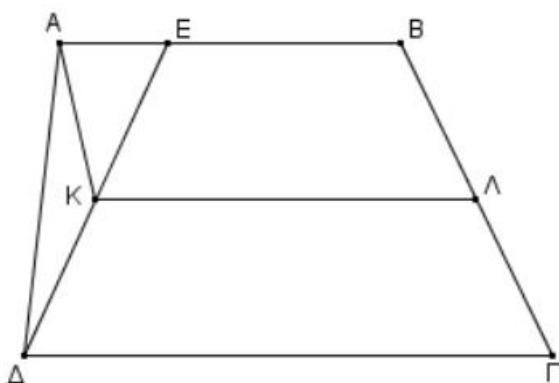
(Μονάδες 15)

### ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με  $AB=3$ ,  $\Gamma\Delta=4$ . Θεωρούμε σημείο  $E$  στην  $AB$  ώστε  $AE=1$ . Στο τραπέζιο  $EB\Gamma\Delta$  θεωρούμε τα  $K$  και  $\Lambda$ , μέσα των  $ED$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο  $K\Lambda$  του τραπεζίου  $EB\Gamma\Delta$ . (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AB\Lambda K$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)



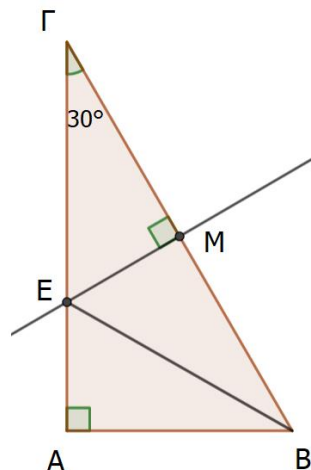
### ΘΕΜΑ 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$  και  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ . Από το μέσο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$  φέρνουμε κάθετη στη  $B\Gamma$  η οποία τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $AB = \frac{B\Gamma}{2}$ . (Μονάδες 10)

β)  $EM = EA$ . (Μονάδες 10)

γ)  $EM = \frac{A\Gamma}{3}$ . (Μονάδες 5)



### ΘΕΜΑ 4

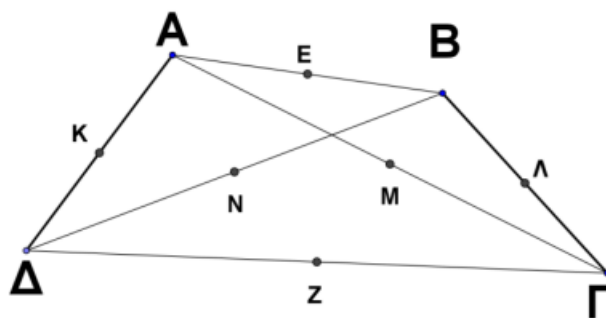
Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AD = B\Gamma$ . Αν  $E, \Lambda, Z, K, N, M$  είναι τα μέσα των  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A, \Delta B$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο  $EMZN$  ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Η  $EZ$  είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος  $MN$ . (Μονάδες 7)

γ)  $KE = Z\Lambda$  (Μονάδες 5)

δ) Τα ευθύγραμμα τμήματα  $K\Lambda, MN, EZ$  διέρχονται από ίδιο σημείο. (Μονάδες 5)



## ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας τη λέξη “Σωστό” ή “Λάθος”, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.
- β.** Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι αμβλεία, τότε απέναντί της βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.
- γ.** Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά αν η διάκεντρος είναι ίση με τη διαφορά των ακτίνων.
- δ.** Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των άλλων δύο.
- ε.** Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.

(Μονάδες 10)

**A2.** Να αποδείξετε ότι: "Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους."

(η απόδειξη να συνοδεύεται με σχήμα).

(Μονάδες 15)

### ΘΕΜΑ Β

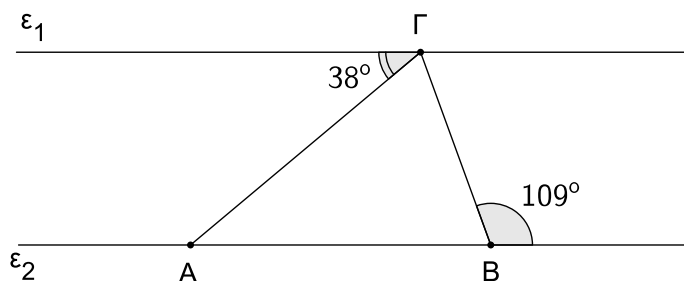
Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία  $\varepsilon_1$  διέρχεται από την κορυφή  $\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  και είναι παράλληλη στην ευθεία  $\varepsilon_2$  που ορίζεται από τις κορυφές του  $A$  και  $B$ . Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:

**α)** να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 15)

**β)** να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές και να εξηγήσετε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.

(Μονάδες 10)



**ΘΕΜΑ Γ** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ , φέρουμε το ύψος  $AH$ . Αν  $\Delta$  και  $E$  είναι τα μέσα των πλευρών  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α)  $\hat{B} = \hat{E}_1$

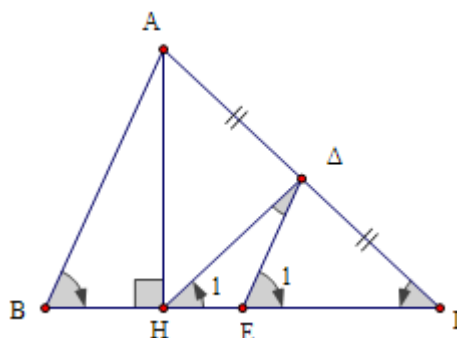
Μονάδες 08

β)  $\hat{\Gamma} = \hat{H}_1$

Μονάδες 08

γ)  $\hat{H}\hat{\Delta}E = \hat{B} - \hat{\Gamma}$

Μονάδες 09



### ΘΕΜΑ Δ

Έστω ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Delta\Gamma$ ) με  $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$  και  $AB = B\Gamma = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ . Φέρουμε την διχοτόμο της γωνίας  $\hat{B}$ , η οποία τέμνει το  $\Delta\Gamma$  στο  $K$  και η κάθετη από το  $K$  προς το  $B\Gamma$  το τέμνει στο  $M$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του  $AB\Gamma\Delta$ .

(Μονάδες 10)

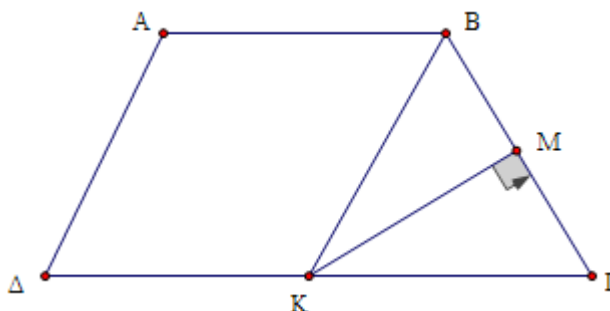
β) Να αποδείξετε ότι:

i) Το τετράπλευρο  $ABK\Delta$  είναι ρόμβος.

(Μονάδες 8)

ii) Το σημείο  $M$  είναι το μέσο του  $B\Gamma$ .

(Μονάδες 7)



Καλή επιτυχία.

Να απαντηθούν όλα τα θέματα.  
Διάρκεια εξέτασης: Δύο (2) ώρες.

### ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- i. Οι διαγώνιοι ενός ισοσκελούς τραπεζίου διχοτομούνται.
- ii. Στο ισόπλευρο τρίγωνο κάθε ύψος είναι και διάμεσος.
- iii. Το τετράγωνο είναι ρόμβος.
- iv. Τα εφαπτόμενα τμήματα από ένα σημείο προς ένα κύκλο είναι ίσα.
- v. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι: *το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.*

(Μονάδες 15)

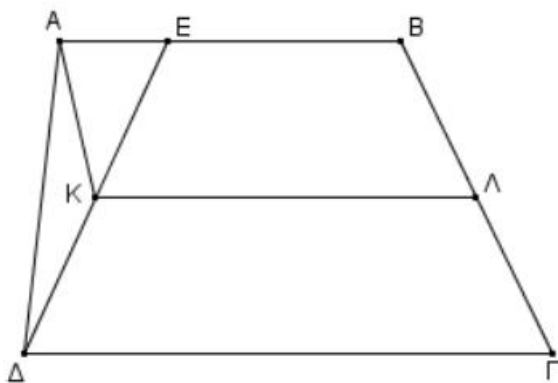
### ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με  $AB=3$ ,  $\Gamma\Delta=4$ . Θεωρούμε σημείο  $E$  στην  $AB$  ώστε  $AE=1$ . Στο τραπέζιο  $EB\Gamma\Delta$  θεωρούμε τα  $K$  και  $\Lambda$ , μέσα των  $ED$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο  $K\Lambda$  του τραπεζίου  $EB\Gamma\Delta$ .

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AB\Lambda K$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)



### ΘΕΜΑ 3

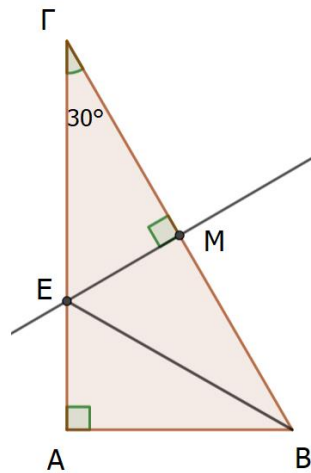
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$  και  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ . Από το μέσο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$  φέρνουμε κάθετη στη  $B\Gamma$  η οποία τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $AB = \frac{B\Gamma}{2}$ . (Μονάδες 10)

β)  $EM=EA$ . (Μονάδες 10)

γ)  $EM = \frac{AG}{3}$ .

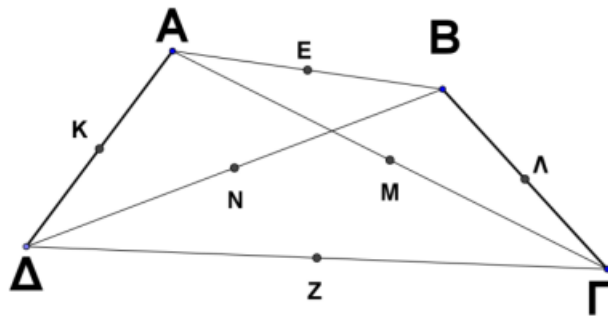
(Μονάδες 5)



#### ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AD=BG$ . Αν  $E, \Lambda, Z, K, N, M$  είναι τα μέσα των  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A, \Delta B$  και  $AG$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο  $EMZN$  ρόμβος. (Μονάδες 8)
- β) Η  $EZ$  είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος  $MN$ . (Μονάδες 7)
- γ)  $KE=Z\Lambda$  (Μονάδες 5)
- δ) Τα ευθύγραμμα τμήματα  $K\Lambda, MN, EZ$  διέρχονται από ίδιο σημείο. (Μονάδες 5)



Ο διευθυντής

Η Εισηγήτρια

### ΘΕΜΑ 1

**A.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα αναφοράς σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1) Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα
- 2) Αν  $\alpha, \beta, \gamma$  πλευρές τριγώνου ABΓ με  $\beta \geq \gamma$  ισχύει  $\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma$ .
- 3) Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μία μόνο παράλληλη προς αυτή.
- 4) Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου τέμνονται κάθετα
- 5) Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με την ημιδιαφορά τους.

(Μονάδες 10)

**B.** Να αποδείξετε ότι, το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι  $180^\circ$  (2 ορθές).

(Μονάδες 15)

### ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο ABΓ και τα μέσα Δ, Ε και Ζ των πλευρών του AB, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΔΒΕΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) Η ευθεία ΔΖ διχοτομεί το τμήμα ΑΕ. (Μονάδες 12)

**ΘΕΜΑ**

**3**

Στον

κύκλο

του

παρακάτω σχήματος είναι  $\widehat{AB} = 120^\circ$ ,  $\widehat{BG} = 90^\circ$ ,  $\widehat{GD} = 90^\circ$  και  $\widehat{DA} = 60^\circ$ .

α) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες του τετραπλεύρου ABΓΔ έχουν μέτρα:

$$\hat{A} = 90^\circ, \hat{B} = 75^\circ, \hat{G} = 90^\circ \text{ και } \hat{D} = 105^\circ.$$

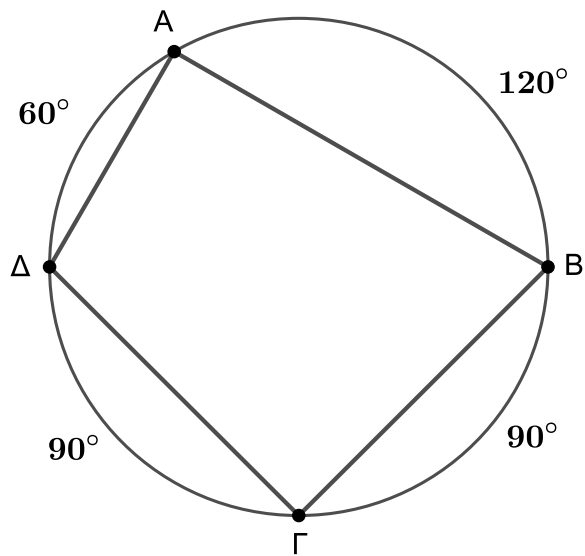
(Μονάδες 12)

β) Έστω ότι είναι  $BD = 2$ . Να αποδείξετε ότι:

i.  $AD = 1$ . (Μονάδες 7)

ii. Ποιο είναι το είδος του τριγώνου ΒΔΓ ως προς τις πλευρές και τις γωνίες του. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)



#### ΘΕΜΑ 4

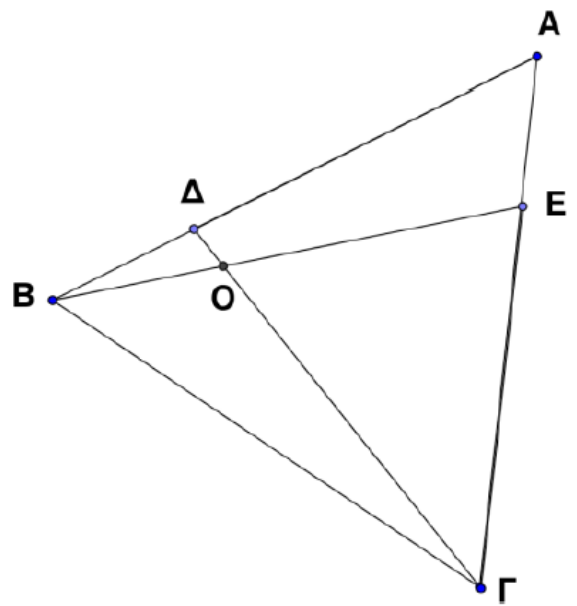
Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο  $ABΓ$  και τα σημεία  $Δ$  και  $Ε$  των πλευρών  $AB$  και  $AΓ$  αντίστοιχα, ώστε να είναι  $AD=ΓΕ$ . Έστω  $O$  το σημείο τ

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $\widehat{BΕΓ} = \widehat{ΓΔΑ}$ .

ii.  $\widehat{BΟΓ} = 120^\circ$ .

β) Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο  $ΑΕΟΔ$  είναι εγγράσιον.  
απάντησή σας.



ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: .....

### ΘΕΜΑ Α

*Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στη κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση την λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α)** Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.

**β)** Οι διαγώνιες ενός ορθογωνίου τέμνονται κάθετα.

**γ)** Σε κάθε τρίγωνο  $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ .

**δ)** Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

**ε)** Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με την επίκεντρη γωνία που βαίνει στο ίδιο τόξο.

**Μονάδες 10**

**Α2.** Να αποδείξετε ότι αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μία γωνία του ισούται με  $30^\circ$ , τότε η απέναντι πλευρά του είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

**Μονάδες 15**

### ΘΕΜΑ Β

Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $\widehat{A} \triangle B \Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) με  $\widehat{A} > 90^\circ$ . Στις προεκτάσεις των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  προς το  $A$  φέρνουμε τμήματα  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  κάθετα στις  $A\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα.

**B1)** Να αποδείξετε ότι  $B\Delta = \Gamma E$ .

**Μονάδες 10**

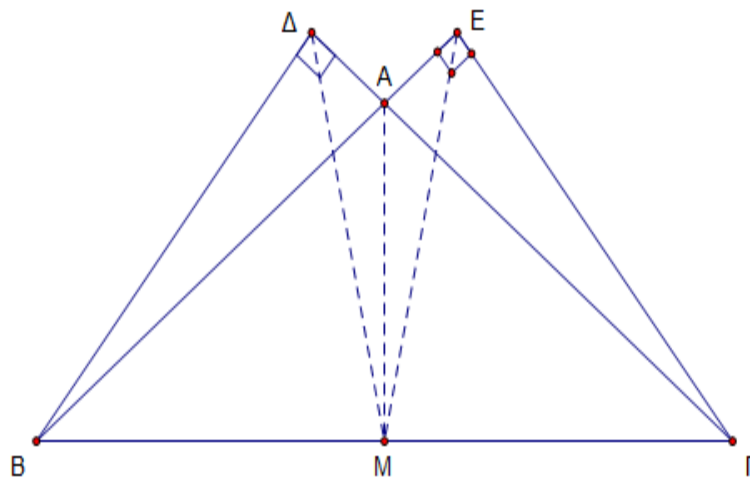
**B2)** Αν  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$  τότε:

**i.** Να αποδείξετε ότι  $M\Delta = ME$ .

**Μονάδες 8**

**ii.** Να αποδείξετε ότι η  $AM$  διχοτομεί τη γωνία  $\widehat{A} M E$

**Μονάδες 7**



### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται κύκλος κέντρου  $O$  και δύο τυχαία σημεία του  $A, B$ . Από σημείο  $M$  εκτός του κύκλου φέρνουμε τις εφαπτομένες  $MA, MB$ . Προεκτείνουμε την ακτίνα  $OB$  κατά ίσο τμήμα  $B\Gamma$ . Να δείξετε ότι:

Γ1) τα τρίγωνα  $OAM, OBM$  είναι ίσα

**Μονάδες 15**

Γ2)  $\widehat{AM\Gamma} = 3\widehat{BM\Gamma}$

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ Δ

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $\hat{A} = 108^\circ$ .

Στη βάση  $\Gamma\Delta$  θεωρούμε σημείο  $E$ , ώστε οι  $A\Gamma, AE$  να τριχοτομούν τη γωνία  $\hat{A}$ .

Δ1) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $A\Delta E$ .

**Μονάδες 10**

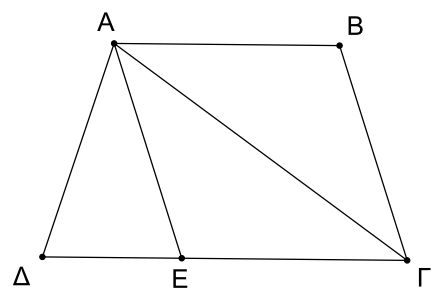
Δ2) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές.

**Μονάδες 5**

ii. Το τετράπλευρο  $AB\Gamma E$  είναι ρόμβος.

**Μονάδες 10**



**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!**

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

ΤΑΞΗ: Α΄

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΜΑΤΑ

**ΘΕΜΑ Α**

**A<sub>1</sub>.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως **Σωστές** ή **Λάθος**: (10 Μονάδες)

1. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
2. Δύο ορθογώνια τρίγωνα με ίσες υποτείνουσες είναι πάντοτε ίσα.
3. Κάθε σημείο της διχοτόμου μίας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.
4. Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μία γωνία ορθή.
5. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.

**A<sub>2</sub>.** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

(15 Μονάδες)

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και η διάμεσός του  $A\Delta$  τέτοια ώστε  $\hat{B}\hat{A}\Delta = 30^\circ$ .  
Θεωρούμε σημείο  $E$  στην  $A\Gamma$  τέτοιο ώστε  $A\Delta = AE$ .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισόπλευρο.

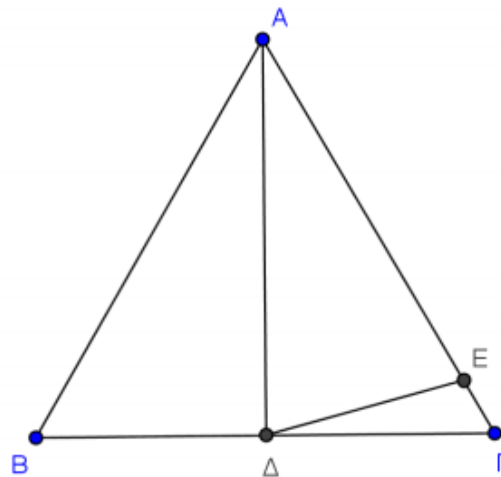
(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $A\Delta E$ .

(Μονάδες 9)

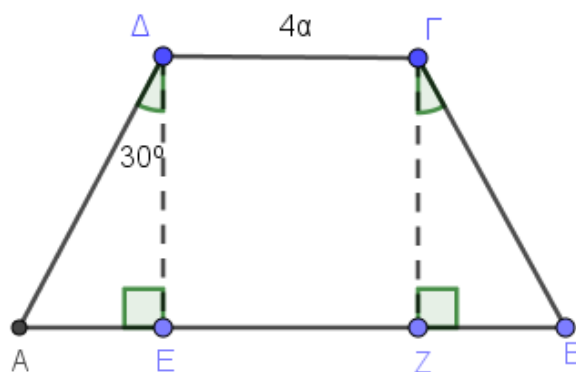
γ) Να υπολογίσετε τη γωνία  $E\Delta\Gamma$ .

(Μονάδες 8)



### ΘΕΜΑ Γ

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Delta\Gamma$ ,  $A\Delta = B\Gamma$ ,  $\Delta\Gamma = 4\alpha$ ,  
 $AB = 8\alpha$ ,  $\hat{A}\hat{\Delta}E = 30^\circ$  και  $\hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$ , όπου  $\alpha > 0$ .



Αφού μεταφέρετε το σχήμα στη κόλλα σας να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $B\Gamma Z$  είναι ίσα.

(7 Μονάδες)

β) Να δείξετε ότι  $AE = BZ = 2\alpha$ .

(6 Μονάδες)

γ) Να βρείτε την πλευρά  $AD$  συναρτήσει του θετικού αριθμού  $\alpha$  αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(7 Μονάδες)

δ) Να σχεδιάσετε την διάμεσο του τραπεζίου και να την υπολογίσετε συναρτήσει του θετικού αριθμού  $\alpha$  αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(5 Μονάδες)

#### ΘΕΜΑ Δ

Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  θεωρούμε σημεία  $E, Z, H, \Theta$  στις πλευρές  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$  αντίστοιχα, με  $AE = \Gamma H$  και  $BZ = \Delta\Theta$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο  $AE\Gamma H$  είναι παραλληλόγραμμο.

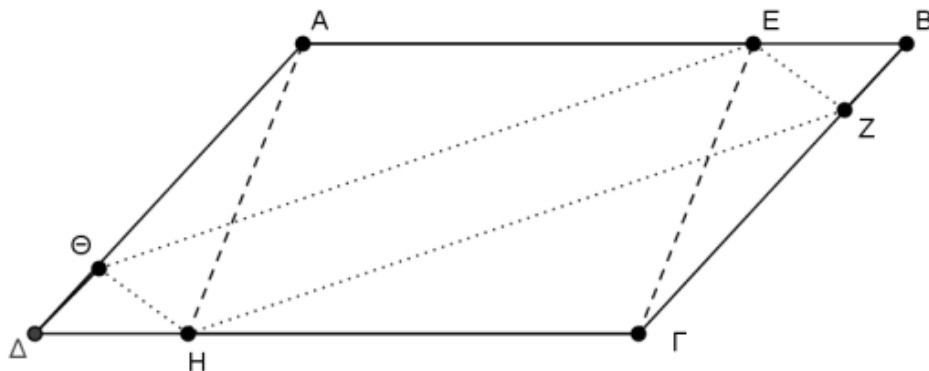
(6 μονάδες)

β) Το τετράπλευρο  $EZH\Theta$  είναι παραλληλόγραμμο.

(10 μονάδες)

γ) Τα τμήματα  $A\Gamma, B\Delta, EH$  και  $Z\Theta$  διέρχονται από το ίδιο σημείο.

(9 μονάδες)



#### ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.
- Οι απαντήσεις σας να είναι στην κόλλα σας και όχι στην φωτοτυπία με τα θέματα.
- Να γράψετε με ανεξίτηλο στυλό χρώματος μπλε ή μαύρο.
- Να μην χρησιμοποιήσετε μολύβι ή διορθωτικό (blanko).
- Διάρκεια εξέτασης: Δύο (02) ώρες από την διανομή των θεμάτων.

Σας Ευχόμαστε Επιτυχία!

## Γραπτές Προαγωγικές Εξετάσεις Μαΐου-Ιουνίου 2022

### ΘΕΜΑΤΑ

#### ΘΕΜΑ Α (25 μονάδες)

A1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, την λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1) Ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο όταν μια γωνία του είναι οξεία.
- 2) Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.
- 3) Από σημείο εκτός ευθείας άγονται δυο ή περισσότερες παράλληλες προς αυτή.
- 4) Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.
- 5) Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος.

Μονάδες 10

A2. Να αποδείξετε το παρακάτω θεώρημα :

«Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας».

Μονάδες 15

#### ΘΕΜΑ Β (25 μονάδες)

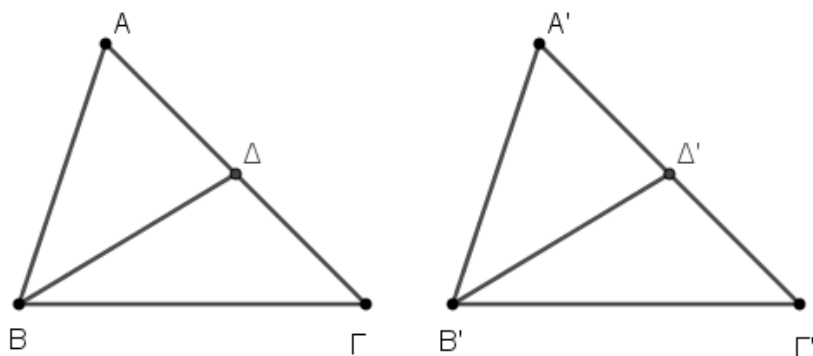
Δίνονται τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  του σχήματος με  $A\Gamma = A'\Gamma'$  και  $\angle AAB = \angle A'B'$ .  
Αν οι διάμεσοι  $B\Delta$  και  $B'\Delta'$  είναι ίσες, να αποδείξετε ότι :

$$B1. \hat{A} = \hat{A}'$$

Μονάδες 15

B2. Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  είναι ίσα.

Μονάδες 10



### **ΘΕΜΑ Γ**(25 μονάδες)

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διάμεσος του  $AM$ . Στην προέκταση της  $A\Gamma$  προς το  $\Gamma$  παίρνουμε τμήμα  $\Gamma\Delta = A\Gamma$ . Από το  $\Delta$  φέρνουμε παράλληλη προς την  $AM$  που τέμνει την προέκταση της  $B\Gamma$  στο  $E$ . Να κατασκευάσετε το σχήμα και να αποδείξετε ότι:

$\Gamma 1. M\Gamma = \Gamma E.$

Μονάδες 9

$\Gamma 2. \text{Το τετράπλευρο } AM\Delta E \text{ είναι παραλληλόγραμμο.}$

Μονάδες 7

$\Gamma 3. \hat{B} + B\hat{A}M = \Gamma\hat{E}\Delta.$

Μονάδες 9

### **ΘΕΜΑ Δ**(25 μονάδες)

Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ,  $\Delta\Gamma = 2AB$  και  $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$ .

Από το  $B$  φέρουμε κάθετη στην  $\Gamma\Delta$  που τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $K$  και την  $\Gamma\Delta$  στο  $E$ . Επίσης φέρνουμε την  $AE$  που τέμνει την  $B\Delta$  στο σημείο  $\Lambda$ .

Να αποδείξετε ότι :

$\Delta 1. \hat{\Gamma} = 45^\circ$

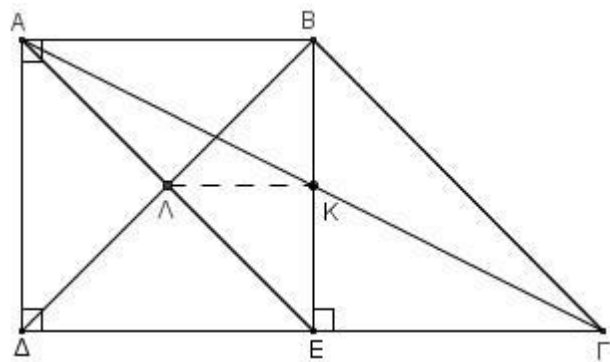
Μονάδες 8

$\Delta 2. B\Delta = AE$

Μονάδες 9

$$\Delta 3.K\Lambda = \frac{1}{4} \Delta \Gamma$$

Μονάδες 8



ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: .....

### ΘΕΜΑ 1°

**A1.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στη κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση την λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α) Σε κάθε τρίγωνο ABΓ είναι  $\widehat{A\epsilon\xi} = \widehat{B} - \widehat{\Gamma}$ .
- β) Το μέτρο μίας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου της.
- γ) Οι διαγώνιες ενός ρόμβου τέμνονται κάθετα.
- δ) Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.
- ε) Η διάμεσος κάθε τραπεζίου ισούται με την ημιδιαφορά των βάσεων του.

**Μονάδες 10**

**A2.** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου ABΓ είναι  $180^\circ$  μοίρες.

**Μονάδες 15**

### ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με  $AB < AG$ . Έστω Ax η διχοτόμος της εξωτερικής του γωνίας  $\hat{A\epsilon\xi} = 120^\circ$ . Από την κορυφή B φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Ax, η οποία τέμνει την πλευρά AG στο σημείο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $\widehat{AB\Delta} = 60^\circ$

**Μονάδες 5**

ii. Το τρίγωνο ABΔ είναι ισόπλευρο.

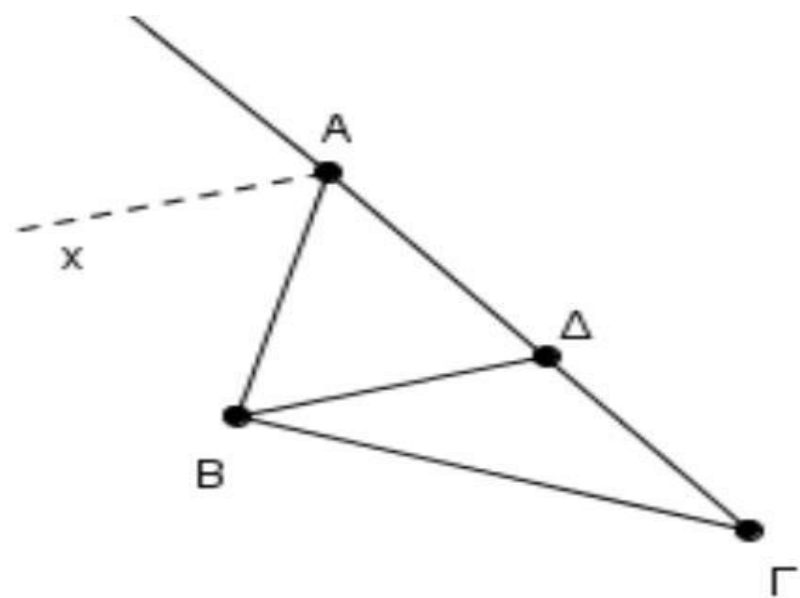
**Μονάδες 5**

iii.  $AG - AB = \Delta\Gamma$

**Μονάδες 5**

β) Αν η γωνία  $\widehat{B\Delta A}$  είναι διπλάσια της γωνίας  $\hat{\Gamma}$  του τριγώνου ABΓ, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου BΔΓ.

**Μονάδες 10**



### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία MN εφάπτεται στον κύκλο (O, R) στο σημείο B, η γωνία  $\widehat{A\Gamma\Delta} = 30^\circ$  και η γωνία  $\widehat{A\Gamma B} = 50^\circ$ . Να υπολογίσετε:

Γ1. το μέτρο του τόξου BΑΔ

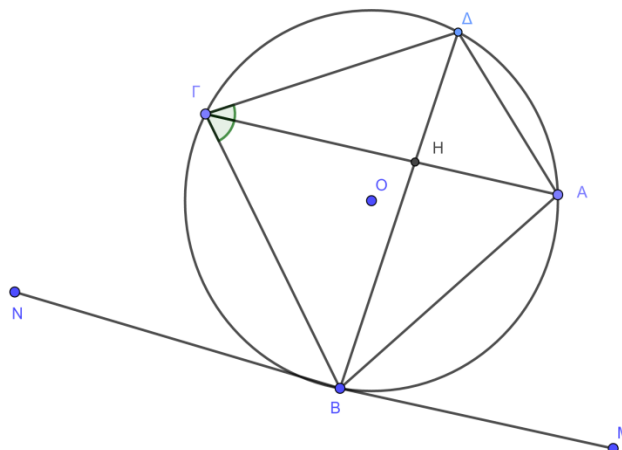
Μονάδες 8

Γ2. τη γωνία  $\widehat{\Delta AB}$

Μονάδες 9

Γ3. τη γωνία  $\widehat{ABM}$

Μονάδες 8



### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ και σημεία K, Λ της διαγωνίου του BΔ, τέτοια ώστε να ισχύει  $BK=K\Lambda=\Lambda\Delta$ .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο AKΓΛ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι, αν το αρχικό παραλληλόγραμμο ABΓΔ είναι ρόμβος, τότε και το AKΓΛ είναι ρόμβος.

Μονάδες 8

γ) Ποιά πρέπει να είναι η σχέση των διαγωνίων του αρχικού παραλληλογράμμου ABΓΔ, ώστε το AKΓΛ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Όνοματεπώνυμο : \_\_\_\_\_

Εισηγητής: \_\_\_\_\_

Τάξη : Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιτηρητές: \_\_\_\_\_

Μάθημα : ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ημερομηνία: \_\_\_\_\_

### **ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στην κόλλα σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα τη λέξη Σωστό ( **Σ** ), αν θεωρείτε πως η πρόταση είναι **σωστή** ή τη λέξη Λάθος ( **Λ** ), αν θεωρείτε πως η πρόταση είναι **λανθασμένη**.

**α.** Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν τις εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.

**Μονάδες 2**

**β.** Οι διαγώνιοι του ορθογώνιου ( παραλληλογράμμου ) είναι ίσες.

**Μονάδες 2**

**γ.** Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μικρότερη από τη διαφορά τους.

**Μονάδες 2**

**δ.** Διχοτόμος μιας γωνίας ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή, της γωνίας αυτής, με το μέσο της απέναντι πλευράς.

**Μονάδες 2**

**ε.** Κάθε εξωτερική ευθεία ενός κύκλου δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο.

**Μονάδες 2**

**B.** Να αποδείξετε ότι κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.

**Μονάδες 15**

### **ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Να λυθεί το, με αριθμό ....., θέμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας.

### **ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Έστω  $AB\Gamma$  ένα ισοσκελές τρίγωνο με βάση  $B\Gamma$  και  $AM$  η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του.

**α.** Να κατασκευάσετε το σχήμα που περιγράφεται παραπάνω.

**Μονάδες 5**

**β.** Να γράψετε τις ισότητες που προκύπτουν για τις πλευρές και τις γωνίες του τριγώνου.

**Μονάδες 5**

**γ.** Να εξηγήσετε γιατί ισχύει ότι  $B\hat{A}M = \Gamma\hat{A}M$ .

**Μονάδες 8**

**δ.** Αν προεκτείνουμε τη  $B\Gamma$  κατά τμήματα  $BE$  και  $\Gamma Z$ , με  $BE = \Gamma Z$  να αποδείξετε ότι  $AE = AZ$ .

**Μονάδες 7**

#### **ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Να λυθεί το, με αριθμό ....., θέμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας.

#### **Παρατηρήσεις :**

1. Οι απαντήσεις να δοθούν στις κόλλες αναφοράς και όχι στα φύλλα που περιέχουν τα θέματα.
2. Στα φύλλα θεμάτων να γράψετε μόνο το ονοματεπώνυμό σας, ενώ στις κόλλες αναφοράς – απαντήσεων το ονοματεπώνυμό σας, την ημερομηνία, το τμήμα και το εξεταζόμενο μάθημα.
3. Τα γραφόμενα σας να είναι ευανάγνωστα, να κάνετε σχήμα όπου χρειάζεται ή ζητείται, να απαντήσετε προσεκτικά, κατανοητά, με επάρκεια και να αιτιολογείτε τις απαντήσεις σας.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή. Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.
5. Όσον αφορά τα 2<sup>ο</sup>, 4<sup>ο</sup> θέματα, επισυνάπτονται σχετικά φωτοαντίγραφα.

***Κ α λ ή   Ε π ι τ υ χ ί α***



## ΘΕΜΑ 1

A. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

- i. Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από μία τρίτη ευθεία, τότε σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.
- ii. Κάθε σημείο της διχοτόμου ισαπέχει από τις πλευρές της.
- iii. Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες είναι ισόπλευρο.
- iv. Η διάμεσος κάθε τραπεζίου ισούται με το άθροισμα των βάσεων του.
- v. Η απόσταση του βαρύκεντρου τριγώνου από την κορυφή του είναι το  $\frac{1}{3}$  της αντίστοιχης διαμέσου.

Μονάδες (5 x 2=10)

B. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με  $180^\circ$ .

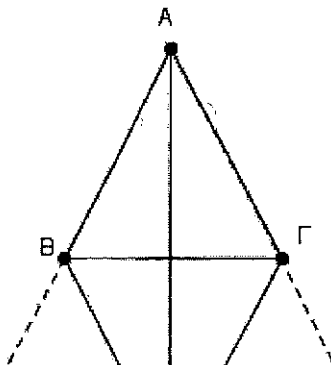
Μονάδες (15)

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ρόμβος  $AB\Delta\Gamma$ . Στην προέκταση της διαγωνίου  $A\Delta$  (προς το  $\Delta$ ) παίρνουμε τυχαίο σημείο  $E$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το σημείο  $E$  ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  (προς το μέρος των  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα). (Μονάδες 10)
- β) Το σημείο  $E$  ισαπέχει από τα σημεία  $B$  και  $\Gamma$ . (Μονάδες 15)



Έστω  $AB\Gamma\Delta$  παραλληλόγραμμο και  $M$  μέσο της  $B\Gamma$ . Αν η προέκταση της  $AM$  τέμνει τη  $\Delta\Gamma$  στο  $E$ ,

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα  $AMB$  και  $\Gamma ME$

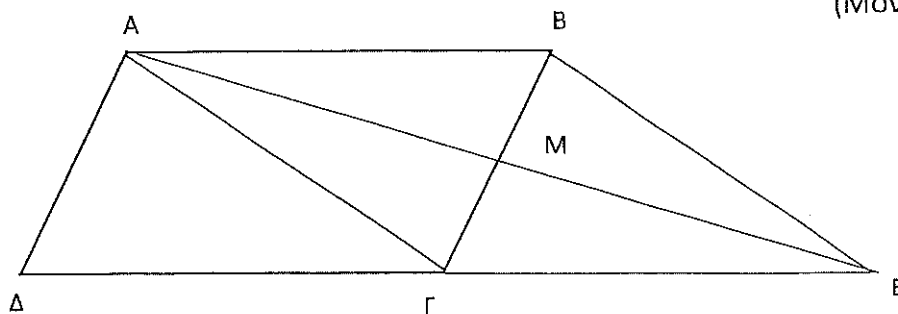
(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο  $A\Gamma EB$  είναι παραλληλόγραμμο

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το  $\Gamma$  είναι μέσο της  $\Delta E$

(Μονάδες 10)



#### ΘΕΜΑ 4

Σε ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) είναι  $AB = AD$ .

α) Να αποδείξετε ότι η  $BD$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\Delta$ .

(Μονάδες 7)

β) Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου  $E$ , ώστε το τετράπλευρο  $ABE\Delta$  να είναι ρόμβος.

(Μονάδες 10)

γ) Αν επιπλέον είναι γωνία  $BA\Delta = 120^\circ$  και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο  $O$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου  $EOB\Gamma$ .

(Μονάδες 8)

Καλή Επιτυχία!

Ο Διευθυντής

Οι διδάσκοντες



ΟΝΟΜ/ΜΟ ΜΑΘΗΤΗ : \_\_\_\_\_

ΤΑΞΗ : Α ΛΥΚΕΙΟΥ

**ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

**ΘΕΜΑ 1**

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της κάθε μίας από τις παρακάτω προτάσεις και δίπλα την ένδειξη Σ αν είναι σωστή και Λ αν είναι λάθος:

1. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και κάποια γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.
2. Αν δύο διαφορετικές ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  είναι παράλληλες προς μία τρίτη ευθεία  $\varepsilon$  τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες.
3. Κάθε τετράπλευρο με ίσες διαγωνίους είναι ορθογώνιο.
4. Η διάμεσος ενός τραπεζίου ισούται με το άθροισμα των δύο βάσεων του τραπεζίου.
5. Το μέτρο μίας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.

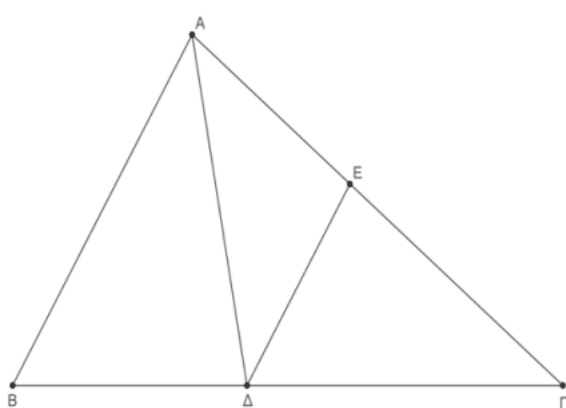
β) Φερνουμε τη διχοτομο  $AD$  και απο το  $D$  φερνουμε παραλληλη στην  $AB$  που τεμνει την  $AG$  στο  $E$ .

i) Να δείξετε ότι  $AE = ED$

Μονάδες 8

ii) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\widehat{ADE}$  και  $\widehat{EDG}$ .

Μονάδες 8

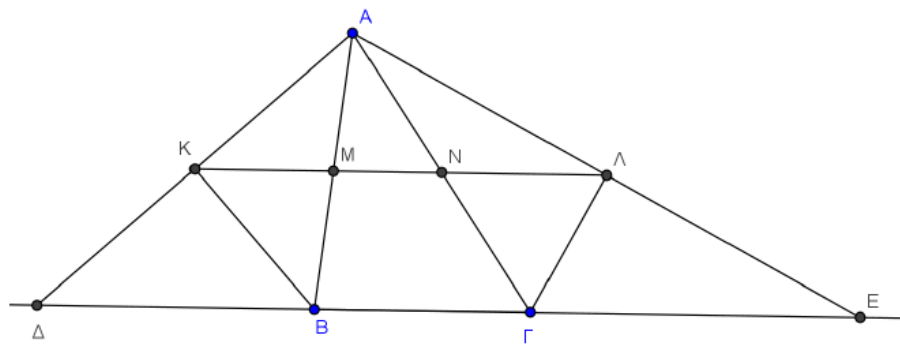


Αν οι εξωτερικοί διχοτομοί των γωνιών Β και Γ τέμνουν τις ΑΔ και ΑΕ στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα, και η ΚΛ τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Κ και Λ είναι μέσα των ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα ΚΜΑ και ΑΝΛ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 9)

γ)  $ΚΛ = \frac{ΑΒ + ΑΓ + ΒΓ}{2}$  (Μονάδες 8)



## ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

### ΘΕΜΑ 1

**α)** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στη κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**i)** Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες, αν και μόνο αν τα αποστήματα τους είναι ίσα.

**ii)** Αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι αμβλεία, τότε η απέναντι πλευρά της είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.

**iii)** Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μία μόνο παράλληλη προς αυτή.

**iv)** Το σημείο τομής των υψών ενός τριγώνου λέγεται βαρύκεντρο.

**v)** Το σημείο τομής των διαμέσων ενός τριγώνου λέγεται ορθόκεντρο.

**(Μονάδες 10)**

**β)** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι δύο ορθές.

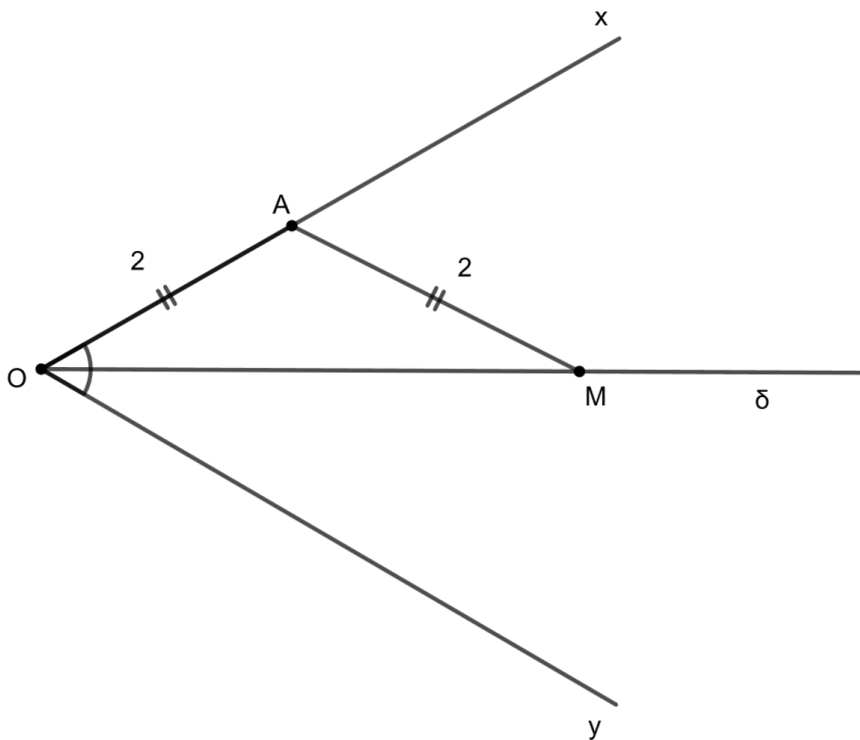
(Μονάδες 08)

β) Τις γωνίες του τριγώνου ΑΟΜ.

(Μονάδες 09)

γ) Το μήκος του ύψους ΑΒ που αντιστοιχεί στη βάση ΟΜ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΟΜ.

(Μονάδες 10)



### ΘΕΜΑ 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με  $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\zeta} = 144^\circ$  και την γωνία  $\hat{A}$  τριπλάσια της γωνίας  $\hat{B}$

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΔΚ είναι ορθογώνιο.

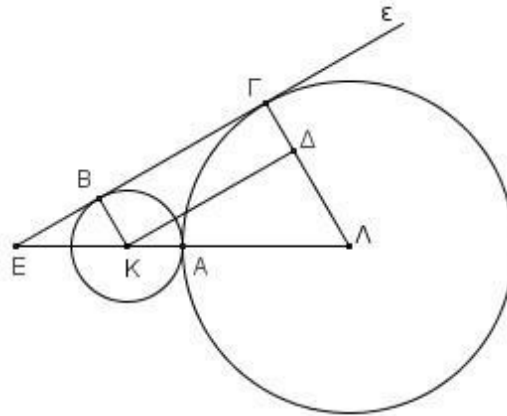
(Μονάδες 09)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΔΚΛ είναι  $30^\circ$ .

(Μονάδες 08)

γ) Να αποδείξετε ότι το τμήμα  $ΕΛ=6\rho$ , όπου  $\rho$  η ακτίνα του κύκλου (Κ,  $\rho$ ).

(Μονάδες 08)



**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!**

## ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

### ΘΕΜΑ 1

**α)** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στη κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**i)** Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες, αν και μόνο αν τα αποστήματα τους είναι ίσα.

**ii)** Αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι αμβλεία, τότε η απέναντι πλευρά της είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.

**iii)** Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μία μόνο παράλληλη προς αυτή.

**iv)** Το σημείο τομής των υψών ενός τριγώνου λέγεται βαρύκεντρο.

**v)** Το σημείο τομής των διαμέσων ενός τριγώνου λέγεται ορθόκεντρο.

**(Μονάδες 10)**

**β)** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι δύο ορθές.

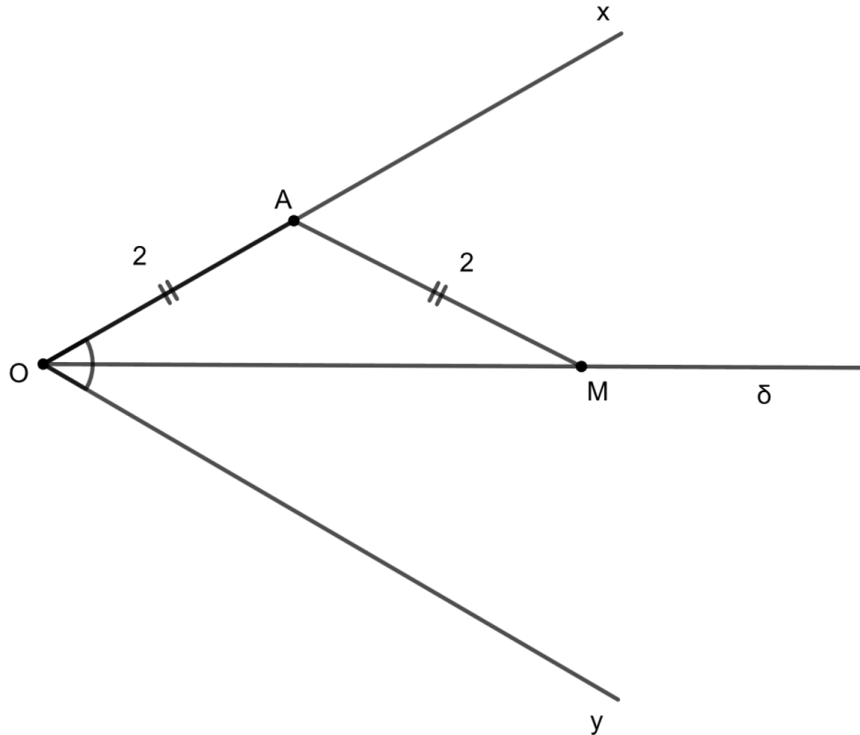
**(Μονάδες 15)**

β) Τις γωνίες του τριγώνου AOM.

(Μονάδες 09)

γ) Το μήκος του ύψους AB που αντιστοιχεί στη βάση OM του ισοσκελούς τριγώνου AOM.

(Μονάδες 10)



### ΘΕΜΑ 3

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με  $\hat{\Gamma}_{\epsilon\zeta} = 144^\circ$  και την γωνία  $\hat{A}$  τριπλάσια της γωνίας  $\hat{B}$

α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου.

(Μονάδες 13)

β) Ποιο είναι το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του;

(Μονάδες 12)



## ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ΛΥΚΕΙΟΥ

### ΘΕΜΑ 1

A. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λάθος.

α) Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες είναι κάθετες.

β) Στο ισοσκελές τραπέζιο οι διαγώνιες διχοτομούνται.

γ) Ένα παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο όταν όλες οι γωνίες του είναι ίσες.

δ) Δυο κύκλοι  $(K, \rho_1)$  ,  $(\Lambda, \rho_2)$  εφάπτονται εξωτερικά όταν  $K\Lambda = \rho_1 + \rho_2$ .

ε) Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα τότε και οι χορδές τους είναι ίσες.

(10 Μονάδες)

B . Να αποδείξετε ότι:

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ το άθροισμα των γωνιών του είναι δύο ορθές .

(15 Μονάδες)

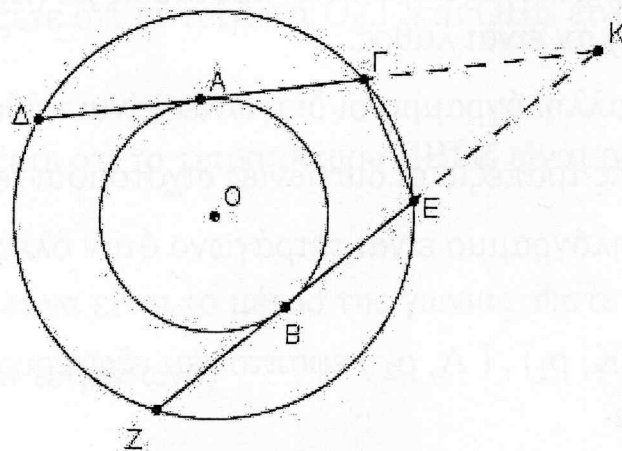
αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι  $\Delta\Gamma = ZE$ .

(12 Μονάδες)

β) Αν οι  $\Delta\Gamma$  και  $ZE$  προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο  $K$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $ΚΕΓ$  είναι ισοσκελές.

(13 Μονάδες)

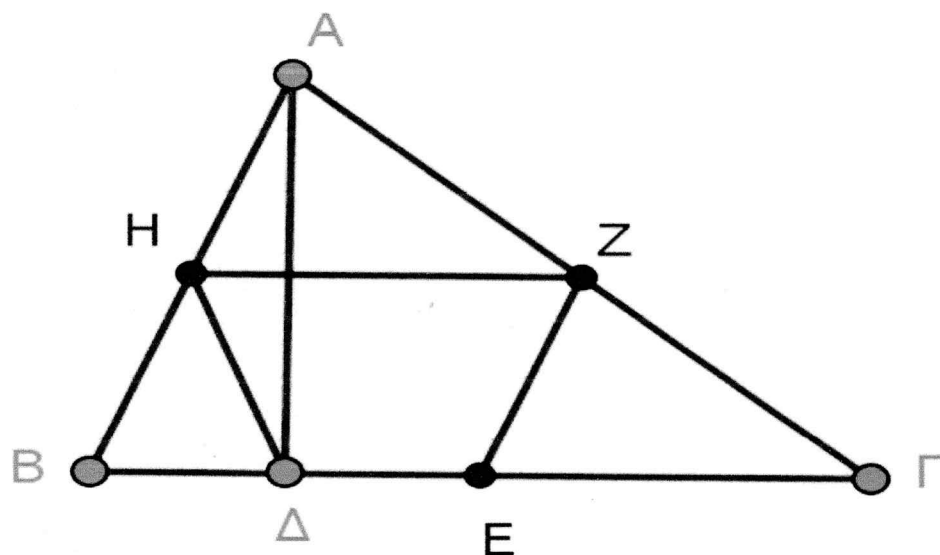


Η, Ζ, Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Η γωνία  $\widehat{B\hat{A}\Delta}$  είναι  $30^\circ$ . Να δείξετε ότι:

Α) Το τρίγωνο ΗΒΔ είναι ισόπλευρο. (10 Μονάδες)

Β) Το τετράπλευρο ΗΖΕΒ είναι παραλληλόγραμμο. (7 Μονάδες)

Γ) Το τετράπλευρο ΗΖΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (8 Μονάδες)



διχοτόμος της γωνίας  $B$ . Φέρουμε  $ΓΟ$  κάθετη στη  $BZ$  και την προεκτείνουμε έτσι ώστε να τέμνει την  $AB$  στο σημείο  $E$ .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $EBΓ$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

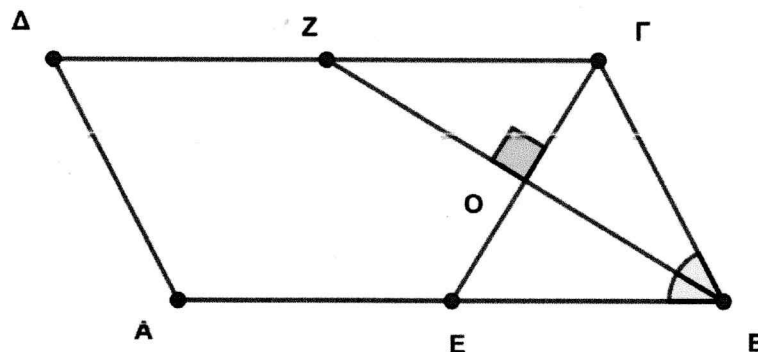
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $ΟΖΓ$  και  $ΟΒΕ$  είναι ίσα.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $EBΓZ$  είναι ρόμβος

(Μονάδες 6)

δ) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας  $B$  ώστε το τετράπλευρο  $EBΓZ$  να είναι τετράγωνο; (Μονάδες 4)



Ο Διευθυντής

Οι εισηγητές

ΑΝΑΣΤΑΣΙΑΔΗ Α.  
ΘΕΟΥΛΑΚΗΣ Κ.  
ΚΟΥΜΠΟΥΛΗ Ε.  
ΣΕΪΤΗΣ Β.

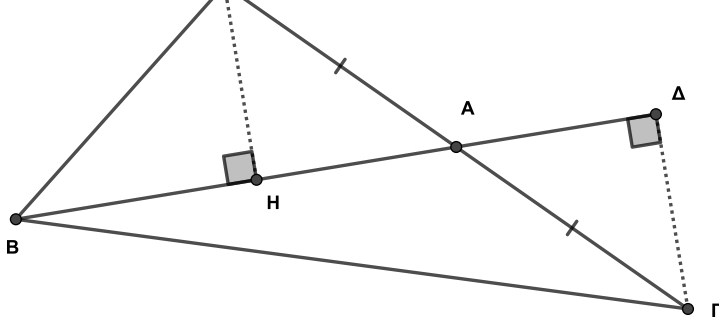
ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

## Εξεταζόμενο μάθημα: Γεωμετρία

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Να αντιστοιχίσετε κάθε φράση της Στήλης Ι με μια φράση της Στήλης ΙΙ έτσι ώστε να προκύπτει μια σωστή πρόταση.

| Στήλη Ι                                                        | Στήλη ΙΙ                                              |
|----------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| A) Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο το ύψος προς τη βάση ...           | 1)...ισαπέχουν από τα άκρα του .                      |
| B) Σε ίσα αποστήματα ... .                                     | 2)...με το ημιάθροισμα των βάσεων .                   |
| Γ) Όλα τα σημεία της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ... | 3) ... τέμνονται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες του |



### ΘΕΜΑ Γ

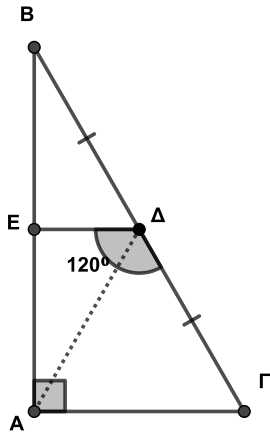
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Αν  $AH$  είναι ύψος του τριγώνου και τα σημεία  $\Delta, E, Z$  είναι τα μέσα των πλευρών του  $AB, B\Gamma, A\Gamma$  αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

$$\Gamma 1. \Delta Z = \frac{B\Gamma}{2}$$

(Μονάδες 8)

$$\Gamma 2. \Delta H = \frac{AB}{2}$$

(Μονάδες 8)



*Καλή Επιτυχία!*

η καθηγήτρια