

2023

ΘΕΜΑΤΑ Α' ΓΕ.Λ. ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Θέματα προαγωγικών εξετάσεων



Θέμα 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).

1. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, τότε υποχρεωτικά $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.
2. Η εξίσωση $x^v = \alpha$ με $\alpha < 0$ και v περιττό φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μία λύση την $-\sqrt[v]{|\alpha|}$.
3. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$.
4. Τα σημεία $A(x, y)$ και $B(-x, y)$ είναι για κάθε τιμή των x, y συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.
5. Αν $\alpha_1 \neq \alpha_2$ και $\beta_1 = \beta_2$, τότε οι ευθείες $y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $y = \alpha_2 x + \beta_2$ είναι παράλληλες.

(Μονάδες 10)

β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ να αποδείξετε ότι $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$.

(Μονάδες 15)

Θέμα 2

Δίνεται η ανίσωση $|x - 7| < 1$ (I).

α) Να αποδείξετε ότι $x \in (6, 8)$.

(Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζουμε ότι $k \in (6, 8)$, να αποδείξετε ότι $\frac{24}{k} \in (3, 4)$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 3

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 7x + 12 = 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 12 \leq 7x$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν $K = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} - \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$, να αποδείξετε ότι $K = 2\sqrt{3}$ και να εξετάσετε αν το K είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β).

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{(x+2)(x+1)^2}{1+(x+2)x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 4)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 8)

γ) Αν είναι $f(x) = x + 2$, $x \neq -1$, τότε:

i. Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση της f τη γραφική παράσταση της $g(x) = x^2$.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g .

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει:

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$$

(μονάδες 15)

A2. Να απαντήσετε με «Σωστό» ή «Λάθος» στα παρακάτω:

α) Η εξίσωση $0x = -\beta$ είναι αδύνατη για οποιοδήποτε αριθμό β .

β) Αν $\Delta < 0$ η ανίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ με $\alpha \neq 0$ είναι αδύνατη.

γ) Για οποιουσδήποτε αριθμούς α, β ισχύει: $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$

δ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ τότε

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$$

ε) Οι μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει

$$\beta^2 = \alpha\gamma.$$

(μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 15$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-1) + f(0) + f(1)$. (Μονάδες 10)

B2. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να βρεθούν οι ρίζες του τριωνύμου $2x^2 + x - 1$ και να αναλυθεί αυτό το τριώνυμο σε γινόμενο. (μονάδες 10)

Γ2. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες το τριώνυμο του ερωτήματος **Γ1** γίνεται αρνητικό. (μονάδες 10)

Γ3. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x^2 + x - 1}} \quad (\text{μονάδες 10})$$

ΘΕΜΑ Δ

Για τις ανάγκες ενός αρχιτεκτονικού σχεδίου ενός κτηρίου, απαιτείται η κατασκευή μιας μακέτας ενός πάρκου, σχήματος ορθογώνιου $AB\Gamma\Delta$, με διαστάσεις x και $2x - 1$, όπου $x > \frac{1}{2}$.

Δ1. Να εκφράσετε την περίμετρο Π και το εμβαδόν E της μακέτας σε συνάρτηση του x .

(Μονάδες 8)

Δ2. Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνονται οι διαστάσεις της μακέτας, ώστε η περίφραξη του πάρκου στη μακέτα, να μη ξεπερνά τα 8 μέτρα.

(Μονάδες 7)

Δ3. Να βρείτε τις τιμές του x , ώστε το εμβαδόν της μακέτας, να είναι το πολύ 1 τετραγωνικό μέτρο.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Α

A.1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

(Μονάδες 10)

α. Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, με $a \neq 0$, έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες εάν η διακρίνουσα είναι $\Delta > 0$.

β. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ έχει κλίση $\alpha = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$.

γ. Αν f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο A , το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές $f(x)$ για όλα τα $x \in A$, λέγεται σύνολο τιμών της f .

δ. Για α, β μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς ισχύει $\sqrt[n]{\alpha + \beta} = \sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\beta}$.

ε. Ισχύει $|x| > \theta \Leftrightarrow x < -\theta$ ή $x > \theta$, όπου θ θετικός αριθμός.

A.2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$. **(Μονάδες 15)**

ΘΕΜΑ Β

α) Να λύσετε τη εξίσωση: $|2x - 4| = 3|x - 1|$ **(Μονάδες 9)**

β) Να λύσετε τη ανίσωση: $|3x - 5| > 1$ **(Μονάδες 9)**

γ) Είναι ιοι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 7)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος με $a_1 = 3$ και $a_{10} = 39$.

Γ.1. Να βρείτε τη διαφορά της προόδου ω . **(Μονάδες 7)**

Γ.2. Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = \alpha_7 + \alpha_8 + \dots + \alpha_{20}$, όπου $\alpha_7, \alpha_8, \dots, \alpha_{20}$ είναι όροι της παραπάνω αριθμητικής προόδου. **(Μονάδες 9)**

Γ.3. Να λύσετε την εξίσωση $|x - \alpha_1| = a_2^3 + a_3^2$ όπου α_2, α_3 είναι όροι της παραπάνω αριθμητικής προόδου. **(Μονάδες 9)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση όταν $\lambda = 0$. **(Μονάδες 5)**

β) Έστω $\lambda \neq 0$.

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια αναβρείτε. **(Μονάδες 10)**

ii. Αν $x_1 = -1$ και $x_2 = -1 + \frac{2}{\lambda}$ είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να προσδιορίσετε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει $|x_1 - x_2| > 1$

(Μονάδες 10)

Όλα τα θέματα θα πρέπει να απαντηθούν στο φύλλο απαντήσεων που σας δίνεται και κάθε ένα από αυτά βαθμολογείται συνολικά με 25 μονάδες.

Θέμα 1^ο

A. Μεταφέρετε στο φύλλο απαντήσεων σας τον αριθμό κάθε πρότασης και δίπλα σε αυτό το γράμμα (Σ) ή (Λ) αντίστοιχα αν αυτή είναι σωστή ή λάθος.

1. Ο τύπος της διακρίνουσας της εξίσωσης $ax^2+bx+c=0$ με $a \neq 0$ είναι $\Delta=b^2 - 4ac$.
2. Τρεις αριθμοί a, b, c είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει $2b=a+c$.
3. Ισχύει $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, για κάθε $a \geq 0, b \geq 0$.
4. $ab=0$ με a, b πραγματικούς αριθμούς $\Leftrightarrow a=0$ ή $b=0$.
5. Για να οριστεί μία πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής αρκεί να ξέρουμε μόνο τον τύπο της.

(Μονάδες 10)

B. Δίνεται η εξίσωση $ax^2+bx+c=0$, με $a \neq 0, b, c$ πραγματικούς αριθμούς. Αποδείξτε ότι αν η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2 τότε το άθροισμα τους $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

(Μονάδες 15)

Θέμα 2^ο

Δίνεται η εξίσωση $(|a-1|-3)x = a+2$ (1), με παράμετρο $a \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση για $a=0$ και $a=5$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του a ισχύει $|a-1|=3$.

(Μονάδες 8)

ii. Να λύσετε την εξίσωση (1) για τις τιμές του a που βρήκατε στο ερώτημα β)i.

(Μονάδες 9)

Θέμα 3^ο

Δίνεται το τριώνυμο $K=x^2+7x+12$ με x πραγματικό αριθμό.

α) Να λυθεί η εξίσωση $K=0$.

(Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές του x το τριώνυμο K είναι θετικός αριθμός; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

γ) Βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου K όταν:

i. $x = -304,5679$

ii. $x = 2022$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

(Μονάδες 4)

Θέμα 4^ο

Σε ένα γήπεδο καλαθοσφαίρισης, σε μία από τις κερκίδες του, η οποία διαθέτει 40 σειρές καθισμάτων, στη 10η σειρά υπάρχουν 50 καθίσματα. Μετά την πρώτη σειρά κάθε επόμενη διαθέτει 2 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

α) Αν a_n το πλήθος των καθισμάτων της n -οστής σειράς, τότε να αποδείξετε ότι a_n είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 και τη διαφορά ω .
(Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε το σύνολο των καθισμάτων που διαθέτει η συγκεκριμένη κερκίδα.

(Μονάδες 9)

γ) Αν για λόγους ασφαλείας σε έναν αγώνα επιτρέπεται να καθίσουν θεατές μόνο στις περιττές σειρές καθισμάτων της κερκίδας, να βρείτε πόσους καθημένους θεατές θα χωρέσει αυτή η κερκίδα.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

A₁. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως **Σωστές** ή **Λάθος**: (10 Μονάδες)

1. Για οποιουδήποτε αριθμούς α, β ισχύει η ισοδυναμία:
 $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $\beta = 0$.
2. Για οποιουδήποτε αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο n ισχύει πάντα η ισοδυναμία:
 $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^n > \beta^n$
3. Το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ γίνεται ετερόσημο του a , μόνο όταν είναι $\Delta < 0$.
4. Ο $n^{\text{ος}}$ όρος μίας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι
 $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega$.
5. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax + \beta$ είναι μία ευθεία.

A₂. Αν η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1 και x_2 να

δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ και $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$. (15 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x+4| \geq 3$ (Μονάδες 12)

β) Αν $\alpha \geq -1$, να γράψετε την παράσταση $A = ||\alpha+4|-3|$ χωρίς απόλυτες τιμές. Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (5 Μονάδες)
- β) Να δείξετε ότι $f(x) = x + 2$. (7 Μονάδες)
- γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = |f(-3)| - \sqrt{f(0)^2}$. (7 Μονάδες)
- δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 3$. (6 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται η εξίσωση: $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $p_1 = \alpha$ και $p_2 = -\frac{1}{\alpha}$

(Μονάδες 10)

γ) Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε: $|p_1 - p_2| = 2$.

(Μονάδες 10)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.
- Οι απαντήσεις σας να είναι στην κόλλα σας και όχι στην φωτοτυπία με τα θέματα.
- Να γράψετε με ανεξίτηλο στυλό χρώματος μπλε ή μαύρο.
- Να μην χρησιμοποιήσετε μολύβι ή διορθωτικό (blanko).
- Διάρκεια εξέτασης: Δύο (02) ώρες από την διανομή των θεμάτων.

ΘΕΜΑ 1

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στη κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς ισχύει $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η συνεπαγωγή:
 $(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$ **Μονάδες 2**

β) Η εξίσωση $x^n = \alpha$, με $\alpha > 0$ και n περιττό φυσικό αριθμό έχει ακριβώς μία λύση την $\sqrt[n]{\alpha}$. **Μονάδες 2**

γ) Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ με $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$, λέμε ότι είναι αδύνατη. **Μονάδες 2**

δ) Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, ισχύει: $|\alpha| \leq \alpha$ **Μονάδες 2**

ε) Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ με διακρίνουσα $\Delta > 0$ και πραγματικές ρίζες x_1, x_2 μετασχηματίζεται σε $\alpha(x - x_1)(x - x_2)$. **Μονάδες 2**

A2. Να αποδείξετε ότι στην περίπτωση που η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2 τότε: **$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$** . **Μονάδες 15**

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{x}{x^2 + 2} + \sqrt{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g . **Μονάδες 8**

β) Να βρείτε (εφόσον ορίζονται) τις τιμές της συνάρτησης g για $x=1$, $x=-2$, $x=2$.

Μονάδες 9

γ) Τέμνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τον $y'y$ άξονα; **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq -2$

Γ1. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες:

- Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. **Μονάδες 7**
- Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2. **Μονάδες 5**

Γ2. Αν $\lambda = -3$ και x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης

i. Να λύσετε την ανίσωση : $|x - \lambda| + x_1 x_2 > 4 - x_1 - x_2$ **Μονάδες 5**

ii. να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $18(x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3)$. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 4

Στην Α' τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλευέται το Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα:

«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x - 1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x+3$ σειρές με $x-3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α) Να βρείτε την τιμή του x **(Μονάδες 6)**

β) Να αποδείξετε η Α' τάξη έχει 90 μαθητές. **(Μονάδες 6)**

γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω 90 μαθητές σε n ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του n , δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν. **(Μονάδες 13)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο φύλλο των απαντήσεών σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που ακολουθεί σε κάθε πρόταση.

i) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τότε $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$

ii) Το μήκος του τμήματος AB λέγεται απόσταση των αριθμών α και β , συμβολίζεται $d(\alpha, \beta)$ και ισχύει ότι: $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$

iii) Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει: $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$

iv) Αν $\theta > 0$ τότε $|x| < \theta \iff -\theta < x < \theta$

v) Αν τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου τότε ισχύει: $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$ **Μονάδες 10**

A2. Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$, έχει πραγματικές ρίζες τις x_1, x_2 και με S συμβολίζουμε το άθροισμά τους $x_1 + x_2$ και με P το γινόμενό τους $x_1 \cdot x_2$ τότε να δείξετε τους τύπους:

$$S = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ και } P = \frac{\gamma}{\alpha} \text{ Μονάδες 15}$$

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. **Μονάδες 8**

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 8**

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 \text{ Μονάδες 9}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση: $|2x - 3| = 7$ **Μονάδες 5**

Γ2. Να λύσετε την ανίσωση: $|3x - 5| < 1$ **Μονάδες 5**

Γ3. Να λύσετε την επόμενη ανίσωση και να παραστήσετε τις λύσεις της σε μορφή διαστήματος.

$$-2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \text{ Μονάδες 15}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x-1| - |3-3x| + |2x-4|}{2}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = d(x, 2) - d(x, 1)$.

Μονάδες 9

β) Αν τα σημεία A και B παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς 1 και 2, να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης $f(x) = 0$ και να προσδιορίσετε τη λύση της.

Μονάδες 8

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Μονάδες 8

Εισηγητής: _____

Επιτηρητές: _____

Ημερομηνία: _____

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στην κόλλα σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα τη λέξη Σωστό (**Σ**), αν θεωρείτε πως η πρόταση είναι **σωστή** ή τη λέξη Λάθος (**Λ**), αν θεωρείτε πως η πρόταση είναι **λανθασμένη**.

α. Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$.

Μονάδες 2

β. Η εξίσωση $x^v = \alpha$, με $\alpha < 0$ και v περιττό φυσικό αριθμό, είναι αδύνατη.

Μονάδες 2

γ. Η ανίσωση $0 \cdot x > -\beta$, αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν είναι $\beta > 0$.

Μονάδες 2

δ. Για κάθε α, β πραγματικούς αριθμούς, ισχύει ότι $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - \beta^3$.

Μονάδες 2

ε. Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με $\alpha \neq 0$ γίνεται ομόσημο του α , για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όταν η διακρίνουσα είναι αρνητική, δηλαδή όταν $\Delta < 0$.

Μονάδες 2

B. Να αποδείξετε ότι για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει η ιδιότητα : $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 2^ο

Να λυθεί το, με αριθμό, θέμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας.

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η εξίσωση $x^2 - 11x + 28 = 0$.

α. Να υπολογίσετε το άθροισμα (S) και το γινόμενο (P) των ριζών της εξίσωσης.

Μονάδες 5

β. Να λύσετε την εξίσωση και να επαληθεύσετε τα αποτελέσματα που βρήκατε στο α' ερώτημα.

Μονάδες 8

γ. Αν η μία ρίζα της εξίσωσης είναι ο πρώτος όρος (α_1) αριθμητικής προόδου και η άλλη ρίζα της εξίσωσης η διαφορά (ω) της ίδιας αριθμητικής προόδου τότε :

i. Να βρείτε τον δωδέκατο όρο (α_{12}) της αριθμητικής προόδου και το άθροισμα (S_5) των πέντε πρώτων όρων της.

ii. Να βρείτε ποιός όρος της αριθμητικής προόδου είναι ο 67.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 4^ο

Να λυθεί το, με αριθμό, θέμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας.

Παρατηρήσεις :

1. Οι απαντήσεις να δοθούν στις κόλλες αναφοράς και όχι στα φύλλα που περιέχουν τα θέματα.
2. Στα φύλλα θεμάτων να γράψετε μόνο το ονοματεπώνυμό σας, ενώ στις κόλλες αναφοράς – απαντήσεων το ονοματεπώνυμό σας, την ημερομηνία, το τμήμα και το εξεταζόμενο μάθημα.
3. Τα γραφόμενα σας να είναι ευανάγνωστα, να κάνετε σχήμα όπου χρειάζεται ή ζητείται, να απαντήσετε προσεκτικά, κατανοητά, με επάρκεια και να αιτιολογείτε τις απαντήσεις σας.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή. Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.
5. Όσον αφορά τα **2^ο**, **4^ο** θέματα, επισυνάπτονται σχετικά φωτοαντίγραφα.

Γραπτές Προαγωγικές Εξετάσεις Μαΐου-Ιουνίου 2022

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α (25 μονάδες)

A1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, την λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1) Δυο αντίθετοι αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές.
- 2) Για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό θ ισχύει ότι : $|x| = \theta \Leftrightarrow (x = \theta \text{ ή } x = -\theta)$.
- 3) Αν $\alpha \geq 0, \beta > 0$ και ν θετικός ακέραιος τότε $\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}$.
- 4) Αν α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε ισχύει πάντοτε
$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$
- 5) Αν $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$, τότε η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$, έχει διπλή ρίζα την
$$x = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Μονάδες 10

A2. Να αποδείξετε την παρακάτω ιδιότητα :

$$|a * b| = |a| * |b|$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β (25 μονάδες)

B1. Να λύσετε την ανίσωση $-\frac{3-2x}{7} \geq 5$.

Μονάδες 10

B2. Να λύσετε την ανίσωση $|-x - 1| \leq 23$.

Μονάδες 10

B3. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ (25 μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x^2 + 3x - 2$.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της h .

Μονάδες 10

Γ2. Να υπολογίσετε τις τιμές $h(-5), h(0), h(x^2)$.

Μονάδες 8

Γ3. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 ανήκει στο σύνολο τιμών της h .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ (25 μονάδες)

Δ1. Να λύσετε την ανίσωση : $x^2 > x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 8

Δ2. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός a με $a > 1$.

- i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς : $0, 1, a, a^2, \sqrt{a}$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Μονάδες 10

- ii) Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς : $a, a^2, \frac{a+a^2}{2}$

Μονάδες 7

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση Σ (Σωστό), αν η πρόταση είναι αληθής ή Λ (Λάθος), αν η πρόταση είναι ψευδής.

α) Ισχύει $|\alpha| \leq -\alpha$, για κάθε πραγματικό αριθμό α .

β) Ισχύει $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$, για κάθε πραγματικό αριθμό α .

γ) Η εξίσωση $0x = \alpha$ με $\alpha \neq 0$ είναι αδύνατη, για κάθε πραγματικό αριθμό α .

δ) Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η εξίσωση 2^{ου} βαθμού: $x^2 + (\lambda - 3)x + 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι

$$\Delta = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες
άνισες.

(Μονάδες 8)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε το λ ώστε να ισχύει:

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες. (Μονάδες 7)

γ) Αν Α και Β είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα Α και Β. (Μονάδες 8)

ΟΔΗΓΙΕΣ: Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !

Ο Διευθυντής

Οι Εισηγητές

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΑΛΓΕΒΡΑ

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στη κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Η ακολουθία (a_n) : 1 , 4 , 7 , 10 , 13 είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega=4$.

ii) Η ακολουθία (a_n) : 3 , 6 , 12 , 24 είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda=3$.

iii) Το τριώνυμο ax^2+bx+c με $a \neq 0$, γίνεται ετερόσημο του a , μόνο όταν είναι $\Delta > 0$ και για τις τιμές του x , που βρίσκονται μεταξύ των ριζών.

iv) Η εξίσωση με άθροισμα ριζών S και γινόμενο P έχει τη μορφή $x^2+Sx+P=0$

v) Αν $\theta > 0$, τότε ισχύει $|x| > \theta \leftrightarrow x > \theta$

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $|a+b| \leq |a| + |b|$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$

β) Τα διαστήματα του χ που η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την γραφική παράσταση της g

(Μονάδες 13)

$$8x^2 - 14x + 3 = 0 \quad (2)$$

(Μονάδες 10)

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (3) \quad \text{και} \quad \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0 \quad (4),$$

με $\alpha \cdot \gamma \neq 0$.

Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι:

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, τότε

i) $\rho \neq 0$ και **(Μονάδες 05)**

ii) ο $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4). **(Μονάδες 10)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!

ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί στην κάθε πρόταση την λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1) Για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει $\sqrt{a^2} = a$

2) Αν $\theta > 0$ τότε ισχύει: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$

3) Αν $\Delta < 0$, τότε η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες

4) Ο ν-οστός όρος μιας γεωμετρικής προόδου δίνεται από τον τύπο $a_v = a_1 \cdot \lambda^{v-1}$

5) Η ευθεία με εξίσωση $y = a \cdot x + \beta$ με $a > 0$ σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$

Μονάδες: 10

β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$, τότε να αποδείξετε ότι

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a}$$

Μονάδες: 15

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} 8-x & \text{αν } x < 0 \\ 2x+5 & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-5) = f(4)$.

(Μονάδες 13)

β) Αν $a_5 = 3x - 2$, να δείξετε ότι $a_1 = -2$ και να υπολογίσετε τον εικοστό όρο (a_{20}) της αριθμητικής προόδου καθώς και το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της (S_{20}).

Μονάδες: 9

γ) Να λύσετε την εξίσωση $|x + a_1| = a_5$

Μονάδες: 8

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in R$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση έχει, για οποιαδήποτε τιμή του λ , πραγματικές και άνισες ρίζες.

(Μονάδες 6)

β) Να λύσετε την εξίσωση.

(Μονάδες 7)

Έστω ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $\rho_1 < \rho_2$.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου λ , η απόσταση των αριθμών ρ_2 και $-\rho_1$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, είναι τουλάχιστον 8.

(Μονάδες 6)

δ) Θεωρούμε έναν αριθμό k ώστε $\rho_1 < k < \rho_2$. Να βρείτε, με απόδειξη, το πρόσημο του αριθμού $k^2 - 2\lambda k + \lambda^2 - 1$

(Μονάδες 6)

Ονοματεπώνυμο:.....

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΗ** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη

α) Αν $a < 0$ ισχύει: $|a| = a$

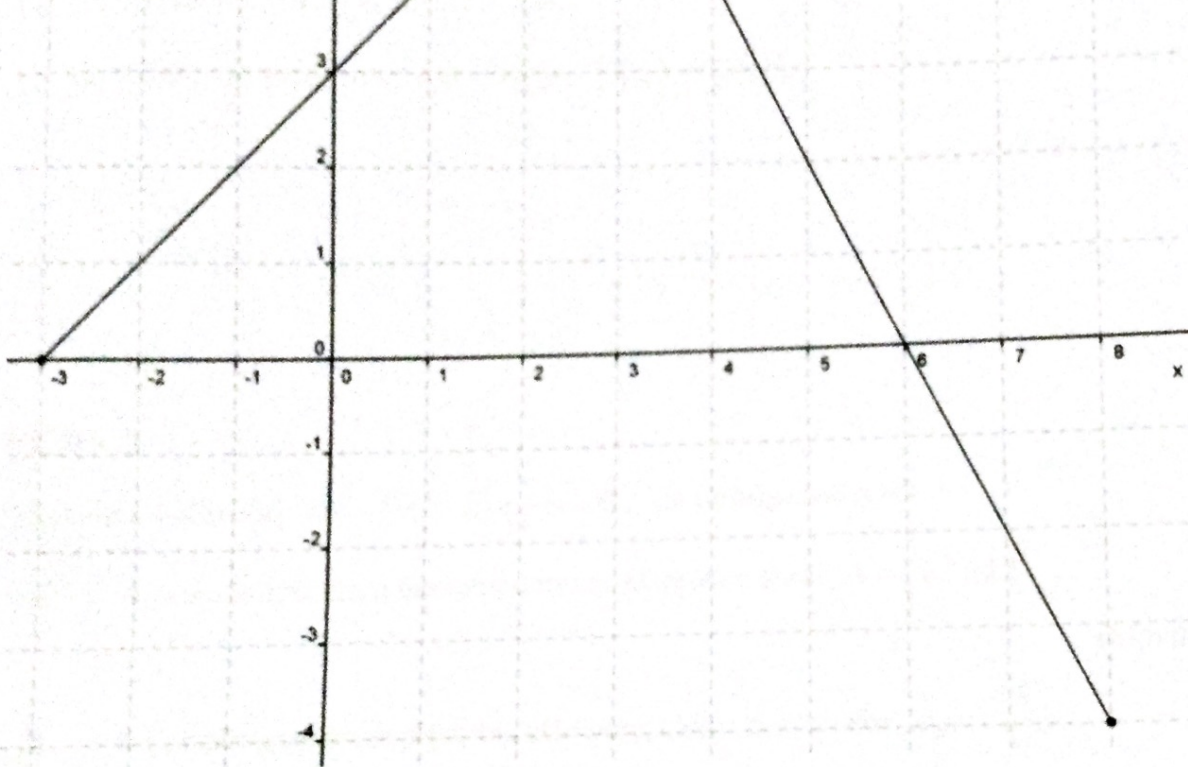
β) Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$, δεν έχει καμία ρίζα όταν $\Delta = 0$

γ) $\sqrt{a^2} = |a|$, $a \in \mathbb{R}$

δ) Ο ν-οστός όρος αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο a_1 και διαφορά ω δίνεται από τον τύπο:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot \omega$$

ε) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, τότε ισχύει ότι $x_1 \cdot x_2 = -\frac{\gamma}{a}$



Στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 6)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
-----	----	----	---	---	--	--

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται η εξίσωση: $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $p_1 = \alpha$ και $p_2 = -\frac{1}{\alpha}$

(Μονάδες 10)

γ) Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε: $|p_1 - p_2| = 2$.

(Μονάδες 10)

Καλή Επιτυχία!

ΘΕΜΑ 1

A. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

- i. Αν $\alpha < \beta < 0$ τότε $\alpha^2 < \beta^2$
- ii. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$
- iii. Για κάθε α, β πραγματικούς αριθμούς ισχύει $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$
- iv. Για κάθε x ισχύει $|3x + 2| = -5$
- v. Αν $f(2)=6$ τότε η συνάρτηση f διέρχεται από το σημείο A (2,6)

Μονάδες (5 x 2)

B. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε αριθμούς α, β ισχύει $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

Μονάδες (15)

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση: $3x^2 - 4x + 1 \leq 0$. (Μονάδες 12)

β) Αν α, β δυο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε

ότι ο αριθμός $\frac{3\alpha + 6\beta}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης. (Μονάδες 13)

Β) Να βρείτε τον 20^ο όρο της προόδου

Μονάδες (8)

Γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των 40 πρώτων όρων της προόδου

Μονάδες (12)

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1| \leq 3$ (1).

(Μονάδες 7)

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x-1|$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x-1| \leq 3$.

(Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $\|x|-1| \leq 3$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

Καλή Επιτυχία!

Οι διδάσκοντες

Ο Διευθυντής



ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Θέμα Α:

A1. Να αποδειχθεί ότι για κάθε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ισχύει $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

Μονάδες 15

A2. Δίνονται οι παρακάτω προτάσεις. Να χαρακτηριστούν ως σωστές ή λανθασμένες.

(i) Ο ν-οστός όρος αριθμητικής προόδου a_n δίνεται από τον τύπο $a_n = a_1 + (n-1)\omega$, όπου a_1 ο πρώτος όρος της προόδου και ω η διαφορά.

(ii) Η εξίσωση $x^{2n} = -a$ είναι αδύνατη για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a \in (0, +\infty)$.

(iii) Η απόσταση δύο σημείων $M(x_M, y_M)$, $N(x_N, y_N)$ δίνεται από τον τύπο

$$(MN) = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_N - y_M)^2}.$$

(iv) Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $\alpha > \beta$ και $\gamma < \beta \Rightarrow \alpha > \gamma$.

(v) Ισχύει $|-a| = a$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

Θέμα Β:

B1. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$.

Μονάδες 12

B2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.

Μονάδες 5

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = \frac{1}{x-3}$.

Μονάδες 8

Θέμα Γ

G1. Να λυθεί η ανίσωση $|2x+5| \leq 7$.

Μονάδες 10

G2. Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Μονάδες 6

G3. Αν $a=1$ η κοινή λύση της παραπάνω ανίσωσης και εξίσωσης, να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$A = \sqrt{-2a} + \sqrt{\sqrt{a+3} + 7a}.$$

Μονάδες 9

Θέμα Δ

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 6x + \lambda - 7$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 7

Δ2. i) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος $S = x_1 + x_2$ των ριζών και να

εκφράσετε συναρτήσει του λ το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

Μονάδες 2

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε λ με $7 < \lambda < 16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες. Ποιο είναι τότε το

πρόσημο των ριζών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

Δ3. i) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $x^2 - 6|x| + \lambda = 7$ (1)

Μονάδες 8

έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

ii) Έχει η εξίσωση (1) για $\lambda = 3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

ΑΛΓΕΒΡΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή ή Λανθασμένη, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές την λέξη **Σωστό** αν είναι σωστή, ή την λέξη **Λάθος** αν αυτή είναι λανθασμένη.

α. Η εξίσωση $x^3 = 5$ έχει δύο πραγματικές ρίζες

β. Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η πρόταση:

αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$ τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$

γ. Για οποιαδήποτε συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται

από το σημείο $M(3, 5)$ ισχύει $f(5) = 3$

δ. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν $\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$

ε. Για κάθε γεωμετρική πρόοδο (α_n) με λόγο $\lambda = 1$, το άθροισμα των n πρώτων όρων της δίνεται από τον τύπο $S_n = n \cdot \alpha_1$

(Μονάδες 10)

A2. Να αποδείξετε ότι, για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει η

$$\text{ισότητα: } |\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $(\alpha+3)x = \alpha^2 - 9$ με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$

B1. Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

α. όταν $\alpha=1$

(Μονάδες 5)

β. όταν $\alpha=-3$

(Μονάδες 8)

B2 Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος 3, 7, 11,...

Γ1. Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 8)

Γ2. Να βρείτε τον εικοστό πέμπτο όρο a_{25} της αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 8)

Γ3. Να υπολογίσετε το άθροισμα των πρώτων τριάντα δυο όρων S_{32} της αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύουν ως ισότητες.

α. $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}.$

(Μονάδες 4)

β. $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}.$

(Μονάδες 4)

Δ2 Να δείξετε ότι $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

Δ3 Δίνεται η παράσταση $A = \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1}.$

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A .

(Μονάδες 5)

β. Με τη βοήθεια του υποερωτήματος Δ2 ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να εξετάσετε αν η παράσταση A μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}.$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη *Σωστό* ή *Λάθος* δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ γίνεται ετερόσημο του αριθμού α μόνο όταν $\Delta > 0$ και για τις τιμές του x που βρίσκονται ανάμεσα στις ρίζες .
2. Για κάθε πραγματικό αριθμό α , ισχύει $\alpha^2 > 0$.
3. Αν $\gamma < 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$, για κάθε $\alpha, \beta \in R$.
4. Το συμμετρικό του σημείου $M(a, \beta)$ ως προς τον άξονα $x'x$ έχει συντεταγμένες $M'(-a, \beta)$.
5. Μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.

Μονάδες 10

A2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in R$ ισχύει: $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

α) Να λύσετε την ανίσωση: $\left| x - \frac{1}{2} \right| < 4$. (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x + 5| \geq 3$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) με χρήση

τους άξονες.

Μονάδες 9

Γ2. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

Μονάδες 8

Γ3. Να βρείτε τα διαστήματα του x , στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 5x - 6 < 0$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5\frac{46}{47} - 6$ και να αιτιολογήσετε

το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $\alpha \in (-6, 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda = a^2 - 5|a| - 6$. Να

αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΑΛΓΕΒΡΑ

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στη κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Η ακολουθία (a_n) : 1 , 4 , 7 , 10 , 13 είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega=4$.

ii) Η ακολουθία (a_n) : 3 , 6 , 12 , 24 είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda=3$.

iii) Το τριώνυμο ax^2+bx+c με $a \neq 0$, γίνεται ετερόσημο του a , μόνο όταν είναι $\Delta > 0$ και για τις τιμές του x , που βρίσκονται μεταξύ των ριζών.

iv) Η εξίσωση με άθροισμα ριζών S και γινόμενο P έχει τη μορφή $x^2+Sx+P=0$

v) Αν $\theta > 0$, τότε ισχύει $|x| > \theta \leftrightarrow x > \theta$

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $|a+b| \leq |a| + |b|$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 15)

παράσταση της g

(Μονάδες 13)

(Μονάδες 10)

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (3) \quad \text{και} \quad \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0 \quad (4),$$

με $\alpha \cdot \gamma \neq 0$.

Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι:

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, τότε

i) $\rho \neq 0$ και **(Μονάδες 05)**

ii) ο $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4). **(Μονάδες 10)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Ο ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ

ΚΑΡΑΣΑΒΒΙΔΟΥ ΗΛΕΚΤΡΑ

ΜΑΚΡΗΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ