

Εξεταζόμενο Μάθημα: Άλγεβρα
Τάξη: Β

Θέμα 1

A. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).

1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = \phi(x-c)$, όπου $c > 0$, προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της ϕ κατά c μονάδες **προς τα δεξιά**.
2. Το μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.
3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $\sin(\pi + x) = -\sin x$.
4. Αν $a > 0$ με $a \neq 1$, τότε για οποιουδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ ισχύει: $\log_a(\theta_1 + \theta_2) = \log_a \theta_1 \cdot \log_a \theta_2$.
5. Αν $a > 1$ τότε η συνάρτηση $f(x) = a^x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

B. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$. Είναι δηλαδή $u = P(\rho)$.

(Μονάδες 15)

Θέμα 2

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha, 3)$ είναι άρτια και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(2, 2)$.

α) Να βρείτε την τιμή του α .

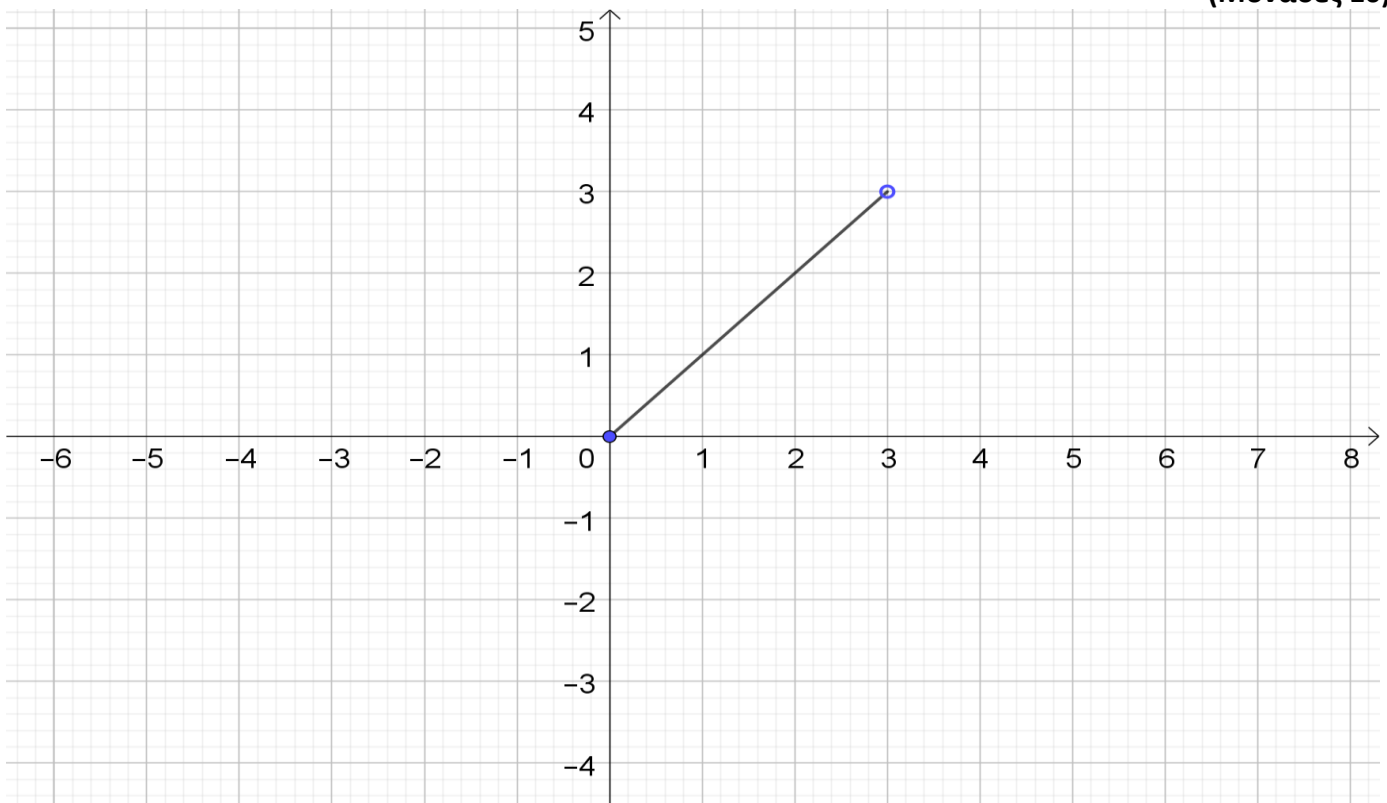
(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το $f(-2)$.

(Μονάδες 8)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 3)$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 10)



Θέμα 3

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι το $x - 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $P(\ln \sqrt{e})$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}.$$

(Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) και του τριγωνομετρικού κύκλου, να βρείτε όλες τις γωνίες ω , με $0 \leq \omega \leq 2\pi$, που ικανοποιούν τη σχέση

$$\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega = -1$$

και να τις απεικονίσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο.

(Μονάδες 13)

Ο Διευθυντής

Οι Εισηγητές

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ –ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

A) Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

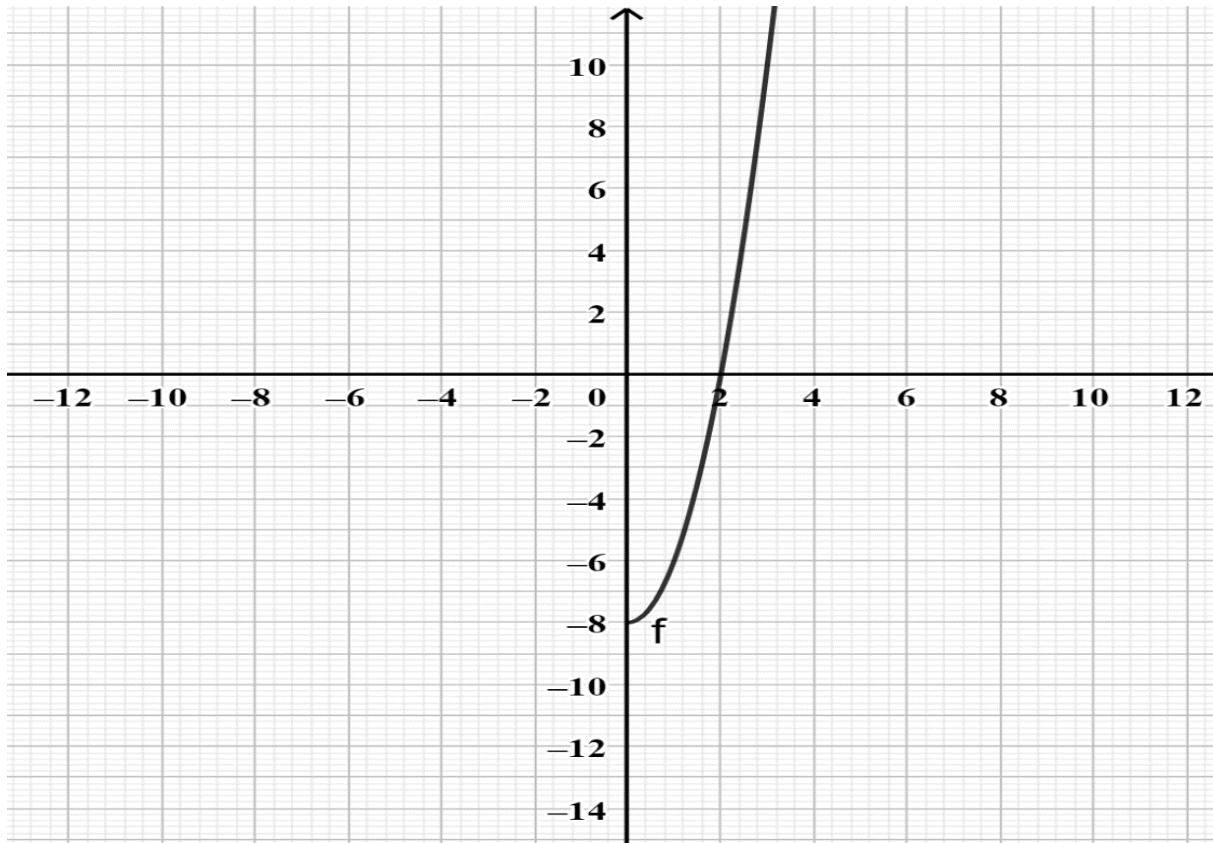
- i) Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν ίδιο ημίτονο.
- ii) Οι αντίθετες γωνίες έχουν ίδια εφαπτομένη.
- iii) Είναι: $\ln e = 1$
- iv) Αν μία συνάρτηση δεν είναι περιττή, τότε είναι άρτια.
- v) Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα.

B) Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1$

(θεωρούμε $\varepsilon\varphi\omega \neq 0$ και $\sigma\varphi\omega \neq 0$)

(μονάδες: $2 \cdot 5 + 15$)

ΘΕΜΑ 2^ο



Στο παραπάνω σχήμα δίνεται ένα τμήμα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να μεταφέρεται το σχήμα στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση με το κομμάτι της καμπύλης που λείπει. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε:

i. Τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

ii. Το είδος του ακροτάτου και τη θέση που το παρουσιάζει.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3^ο

A) Να λύσετε το σύστημα:

$$x \cdot y = 9$$

$$x + y = 10$$

B) Να λύσετε το σύστημα:

$$3^x \cdot 3^y = 9$$

$$3^x + 3^y = 10$$

(μονάδες: 13 + 12)

ΘΕΜΑ 4^ο

α) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 5$, με $x \in \mathbb{R}$.

i. Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x - 1)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με $(x - 2)$ είναι -1 , να δείξετε ότι:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -6 \\ \text{και} \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases}.$$

(Μονάδες 6)

ii. Να δείξετε ότι $\alpha = -9$ και $\beta = 12$.

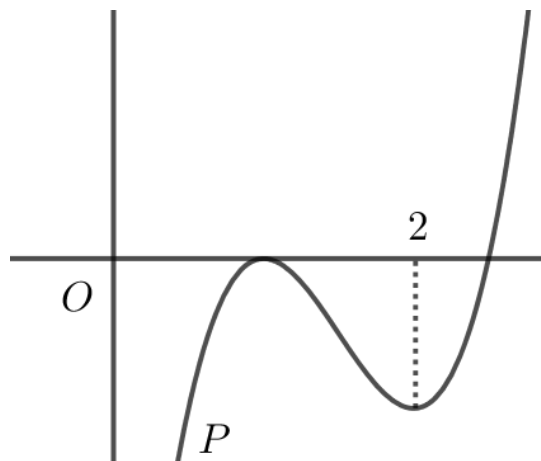
(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν η γραφική παράσταση της $P(x)$ είναι η ακόλουθη, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.

(Μονάδες 4)



Ο διευθυντής

Η εισηγήτρια

Ονομ/νυμο Μαθ. :

ΘΕΜΑΤΑ**ΘΕΜΑ 1^ο**

A. Έστω $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι : $(x^2)' = 2x$ (μονάδες 15)

B. Να χαρακτηρίσετε με **Σωστό** ή **Λάθος** τις επόμενες προτάσεις:

α. Είναι $(2018)' = 1$

β. Είναι $(\sin x)' = -\eta \mu x$

γ. Είναι $(\eta \mu x)' = \sin x$

δ. Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις τότε:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$$

ε. Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις τότε:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \quad (\text{μονάδες 10})$$

ΘΕΜΑ 2^ο

Μία μεταβλητή x παίρνει τις τιμές: **8, 6α, 4, 8α, 5α** οι οποίες έχουν μέση τιμή **10**.

α) Να βρείτε την τιμή του **α**. (5 μον.)

β) Να βρείτε τη **διάμεσο** και το **εύρος** των τιμών. (5 μον.)

γ) Να υπολογίσετε την **τυπική απόκλιση** (10 μον.)

δ) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι **ομοιογενές**. (5 μον.)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο :

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \alpha x^2 - 3x + 1.$$

α) Να βρείτε το **α**, αν $\alpha = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ (μονάδες 10).

Για **α=2** **β)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. (μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τις θέσεις , το είδος και τις τιμές των τοπικών ακρότατων της συνάρτησης f (μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο : $f(x) = -x^3 + \alpha x^2 + \beta$.

α) Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=2$ και η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(1,3)$, να βρείτε τα α και β . (10 μονάδες)

β) Για $\alpha=3$ και $\beta=1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία .

(7 μονάδες)

γ) Να συγκρίνετε τις τιμές $f(123)$ και $f(124)$. (8 μονάδες)

).



ΤΑΞΗ: Β΄

ΜΑΘΗΜΑ: ΆΛΓΕΒΡΑ

ΗΜ/ΝΙΑ: 25-05-2022

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1°

Α) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ) :

α) Στο γραμμικό σύστημα $\begin{cases} a_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ a_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$, όπου $D = \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 \\ a_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$,

$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & \gamma_1 \\ a_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$ και $a_1, a_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ πραγματικοί αριθμοί, αν $D \neq 0$ τότε το

σύστημα έχει μοναδική λύση: $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$

β) Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέγεται άρτια, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει: $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$.

γ) Ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x) = 2x^3 + 4x^2 + x + 2$, είναι ίσος με 3.

δ) Αν $a > 0$ με $a \neq 1$, τότε για οποιαδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$, ισχύει ότι:

$$\log_a(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

ε) Για κάθε γωνία ω με $\eta\mu\omega \neq 0$ και $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$ ισχύει ότι:

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \quad \text{και} \quad \sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$

(Μονάδες 2Χ5=10)

Β) Να αποδείξετε ότι $\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = 1$, εφόσον $\eta\mu\omega \neq 0$ και $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$.

(Μονάδες 15)



ΘΕΜΑ 2ο

α) Να αποδείξετε ότι: $2x^3 + x^2 - x = x(2x^2 + x - 1)$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $2x^3 + x^2 - x = 0$.

(Μονάδες 15)

Θέμα 3ο

Δίνεται το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} 3x + y = 13 \\ x + y = 11 \end{cases}$

α) Να υπολογίσετε τις ορίζουσες του παραπάνω συστήματος: D, Dx, Dy

(Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι οι λύσεις του συστήματος είναι $x=1$ και $y=10$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η εξίσωση $(2\pi x - 1)(x^2 - 4) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει ρίζα τον αριθμό $\frac{\pi}{6}$.

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν έχει ρίζα τον αριθμό $\frac{\pi}{4}$.

(Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση.

(Μονάδες 10)

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ –ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

A) Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

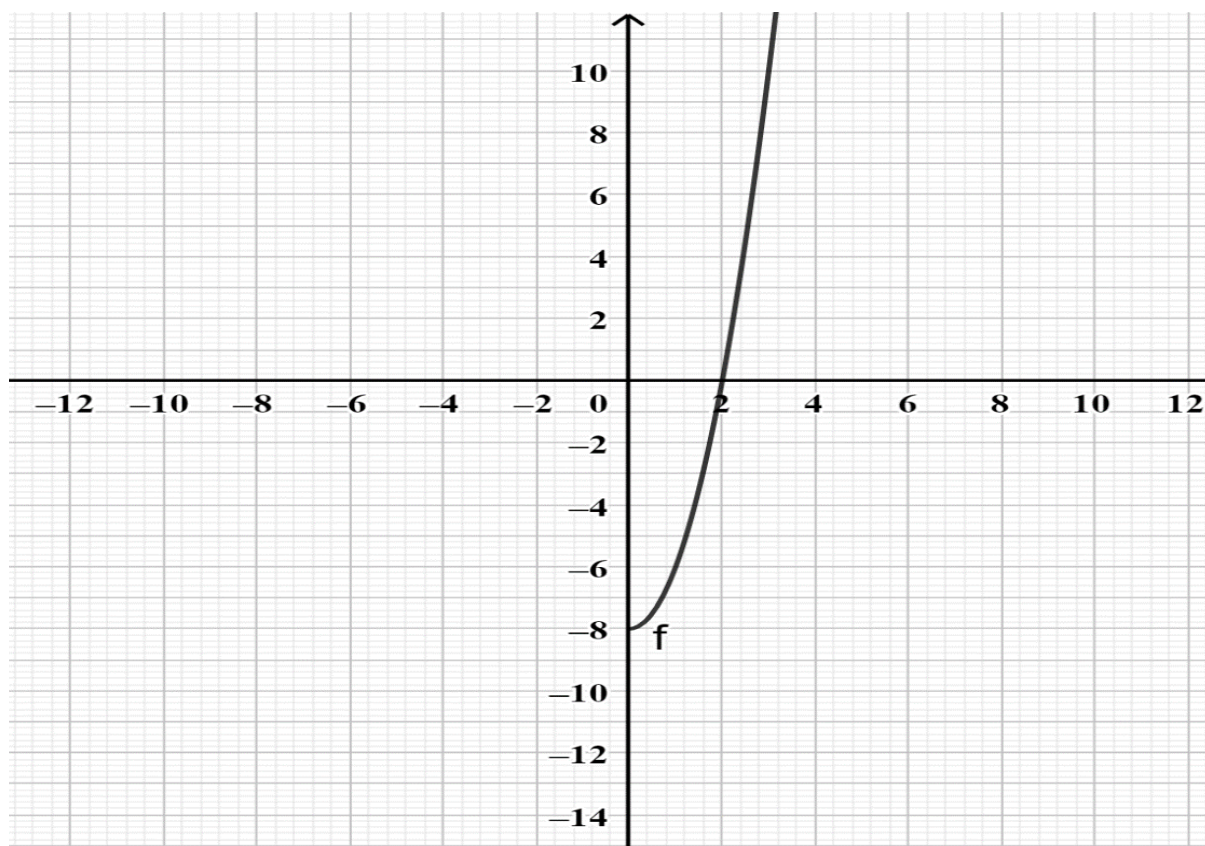
- i) Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν ίδιο ημίτονο.
- ii) Οι αντίθετες γωνίες έχουν ίδια εφαπτομένη.
- iii) Είναι: $\ln e = 1$
- iv) Αν μία συνάρτηση δεν είναι περιττή, τότε είναι άρτια.
- v) Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα.

B) Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1$

(θεωρούμε $\varepsilon\varphi\omega \neq 0$ και $\sigma\varphi\omega \neq 0$)

(μονάδες: $2 \cdot 5 + 15$)

ΘΕΜΑ 2^ο



Στο παραπάνω σχήμα δίνεται ένα τμήμα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να μεταφέρεται το σχήμα στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση με το κομμάτι της καμπύλης που λείπει. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε:

i. Τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

ii. Το είδος του ακροτάτου και τη θέση που το παρουσιάζει.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3^ο

A) Να λύσετε το σύστημα:

$$x \cdot y = 9$$

$$x + y = 10$$

B) Να λύσετε το σύστημα:

$$3^x \cdot 3^y = 9$$

$$3^x + 3^y = 10$$

(μονάδες: 13 + 12)

ΘΕΜΑ 4^ο

α) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 5$, με $x \in \mathbb{R}$.

i. Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x-1)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με $(x-2)$ είναι -1 , να δείξετε ότι:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -6 \\ \text{και} \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases}.$$

(Μονάδες 6)

ii. Να δείξετε ότι $\alpha = -9$ και $\beta = 12$.

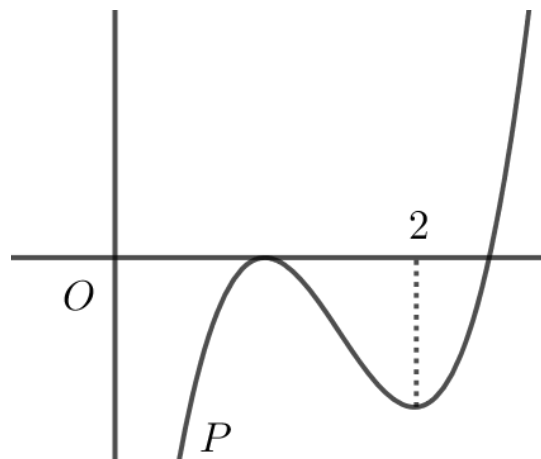
(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν η γραφική παράσταση της $P(x)$ είναι η ακόλουθη, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.

(Μονάδες 4)



Ο διευθυντής

Η εισηγήτρια

Γραπτές Προαγωγικές Εξετάσεις Μαΐου-Ιουνίου 2022

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α(25 μονάδες)

A1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, την λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1) Αν η ελάχιστη τιμή μιας συνάρτησης g είναι το 3, τότε η g δεν έχει καμία ρίζα.
- 2) Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον x' .
- 3) Το ημίτονο μιας γωνίας ω στο 3° τεταρτημόριο είναι θετικό.
- 4) Αν η μέγιστη τιμή μιας συνάρτησης είναι το -7, τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν έχει με τον άξονα x' κανένα κοινό σημείο.
- 5) Κάθε σταθερό πολυώνυμο έχει βαθμό 2.

Μονάδες 10

A2. Να αποδείξετε την τριγωνομετρική ταυτότητα :

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β(25 μονάδες)

Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2+1)=1+\log 3-\log 6$.

B1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση γράφεται $\log(x^2+1)=\log 5$.

Μονάδες 12

B2. Να λύσετε την εξίσωση.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ Γ(25 μονάδες)

Δίνεται η εξίσωση $x^3-3x^2+x+2=0$ (1)

Γ1. Ποιες είναι οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης (1).

Μονάδες 10

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση (1).

Μονάδες 8

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση $x^3 - 3x^2 + x + 2 > 0$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ (25 μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a \cdot \eta\mu\beta x$, με a, β ακέραιους θετικούς αριθμούς.

Δ1. Να βρείτε την τιμή του a , αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2.

Μονάδες 6

Δ2. Αν $a=2$, να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του β για την οποία είναι

$$f\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2$$

είναι $\beta=8$.

Μονάδες 10

Δ3. Αν $a=2$ και $\beta=8$, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=1$ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 1.

1. Να γράψετε το γράμμα και δίπλα την ένδειξη **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** αναλόγως αν η

πρόταση είναι σωστή ή λάθος:

α. Είναι $\ln 1 = 1$.

(μονάδες 2)

β. Ισχύει ότι $\eta\mu(\pi - x) = -\eta\mu x$ για κάθε γωνία x .

(μονάδες 2)

γ. Αν $P(\rho) = 0$ τότε το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.

(μονάδες 2)

δ. Αν $x > 0$ τότε ισχύει $\ln x = \theta \Leftrightarrow x = e^\theta$

(μονάδες 2)

ε. Είναι $\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x = -1$ για κάθε γωνία x .

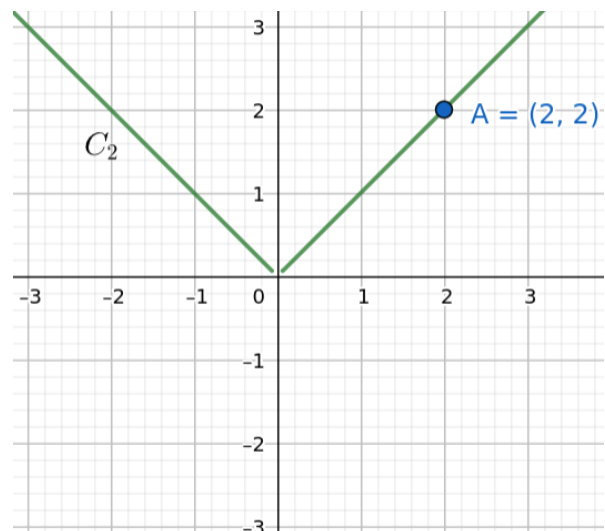
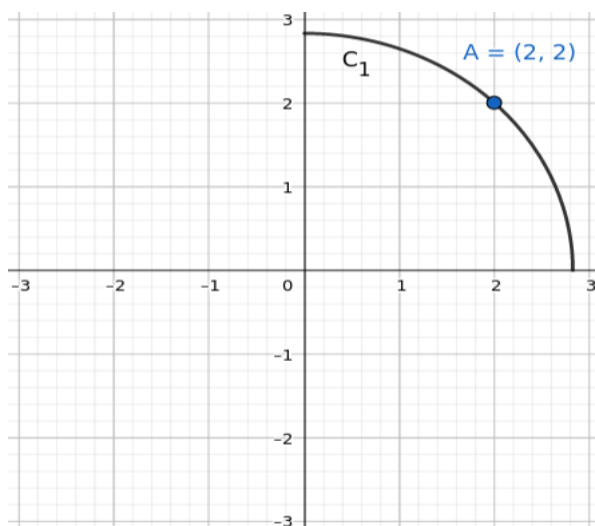
(μονάδες 2)

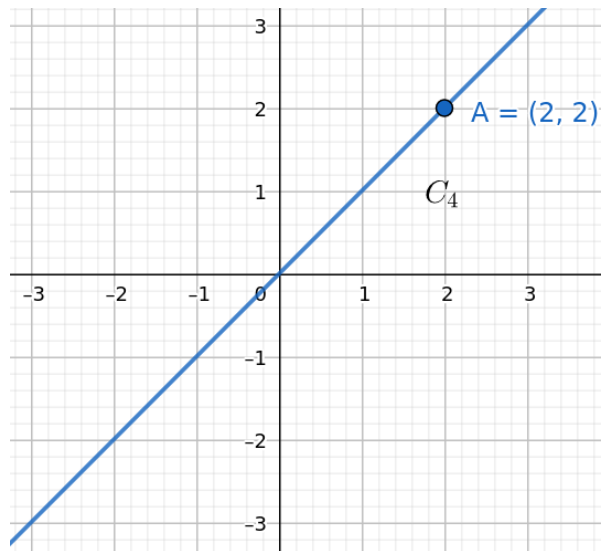
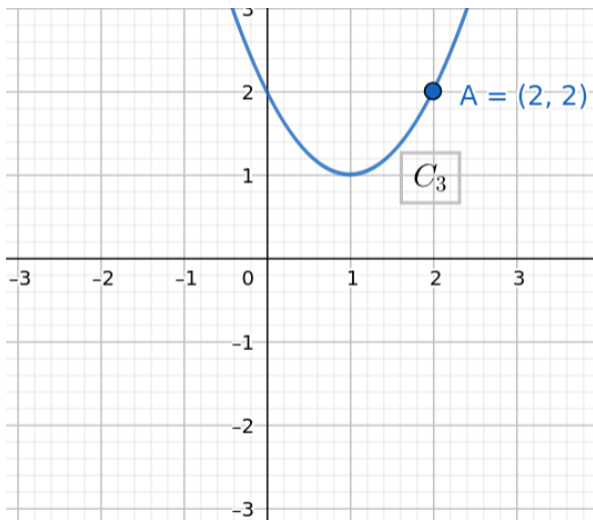
2. Να δείξετε ότι $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$ όπου $0 < \alpha \neq 1$ και $\theta_1, \theta_2 > 0$

(μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα παρακάτω σχήματα:





α) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3, C_4 αναπαριστούν άρτιες ή περιττές συναρτήσεις, ποιες όχι και γιατί. Δίνεται ότι τουλάχιστον μία είναι άρτια και τουλάχιστον μία είναι περιττή.

(Μονάδες 12)

β) Για τις συναρτήσεις C_2, C_4 να βρείτε την τεταγμένη του σημείου τους $B(-2, k)$, αιτιολογώντας την τιμή που βρήκατε από την ιδιότητα συμμετρίας καθεμίας συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3.

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - 6x + \alpha$.

1. Αν το πολυώνυμο έχει για ρίζα του το 3 να δείξετε ότι $\alpha = 0$.
(μονάδες 10)

Για $\alpha = 0$

2. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$
(μονάδες 8)

3. Να λυθεί η ανίσωση $P(x) > 0$
(μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.
(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε δυο κοινά σημεία της γραφικής παράστασης
της f με την ευθεία $\psi = 1$
(Μονάδες 5)

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ και $f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
(Μονάδες 6)

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση, στο
διάστημα $[0, 2\pi]$.
(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{x^2-3x}$.

Γ1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
(μονάδες 10)

Γ2. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) \leq 0$.
(μονάδες 15)

Γραπτές Προαγωγικές Εξετάσεις Μαΐου-Ιουνίου 2022

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α(25 μονάδες)

A1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, την λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1) Αν η ελάχιστη τιμή μιας συνάρτησης g είναι το 3, τότε η g δεν έχει καμία ρίζα.
- 2) Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$.
- 3) Το ημίτονο μιας γωνίας ω στο 3° τεταρτημόριο είναι θετικό.
- 4) Αν η μέγιστη τιμή μιας συνάρτησης είναι το -7, τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν έχει με τον άξονα $x'x$ κανένα κοινό σημείο.
- 5) Κάθε σταθερό πολυώνυμο έχει βαθμό 2.

Μονάδες 10

A2. Να αποδείξετε την τριγωνομετρική ταυτότητα :

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β(25 μονάδες)

Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2+1) = 1 + \log 3 - \log 6$.

B1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση γράφεται $\log(x^2+1) = \log 5$.

Μονάδες 12

B2. Να λύσετε την εξίσωση.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ Γ(25 μονάδες)

Δίνεται η εξίσωση $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$ (1)

Γ1. Ποιες είναι οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης (1).

Μονάδες 10

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση (1).

Μονάδες 8

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση $x^3 - 3x^2 + x + 2 > 0$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ (25 μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a \sin \beta x$, με a, β ακέραιους θετικούς αριθμούς.

Δ1. Να βρείτε την τιμή του a , αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2.

Μονάδες 6

Δ2. Αν $a=2$, να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του β για την οποία είναι

$$f\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2$$

είναι $\beta=8$.

Μονάδες 10

Δ3. Αν $a=2$ και $\beta=8$, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=1$ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Α

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο φύλλο των απαντήσεών σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που ακολουθεί σε κάθε πρόταση.

α. Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , θα λέγεται **άρτια**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει: $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$.

β. Η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$ είναι περιοδική με περίοδο π .

γ. Ισχύει ότι: $\log_a a = 1$, με $a > 0$ και $a \neq 1$.

δ. Το μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 0.

ε. Η συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $0 < a < 1$ είναι αύξουσα στο R . **(Μονάδες 10)**

A2. Αν $a > 0$ με $a \neq 1$ τότε για οποιαδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\log_a(\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2 \text{ (Μονάδες 15)}$$

ΘΕΜΑ Β

Σε μια συνεστίαση μεταξύ συγγενών παρευρίσκονται οι γονείς με τα παιδιά τους. Στο τραπέζι υπάρχουν 5 παιδιά επιπλέον από τους γονείς. Κάθε γονιός πλήρωσε 12€ και κάθε παιδί τα μισά. Ο συνολικός λογαριασμός ήταν 300€.

α) Αν x το πλήθος των γονιών και y το πλήθος των παιδιών, να διαλέξετε από τις παρακάτω επιλογές, ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους που εκφράζει τα δεδομένα του παραπάνω προβλήματος.

$$A. \begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases}$$

$$B. \begin{cases} x - y = 5 \\ 6x + 12y = 300 \end{cases}$$

$$Γ. \begin{cases} y = x + 5 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases}$$

$$Δ. \begin{cases} y = x + 5 \\ 6x + 12y = 300 \end{cases}$$

(Μονάδες 10)

β) Από τη λύση του συστήματος που επιλέξατε στο **α)** ερώτημα να βρείτε πόσοι γονείς και πόσα παιδιά υπήρχαν στο τραπέζι. **(Μονάδες 15)**

Θέμα Γ

Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x) = x^3 - 7x + 6$.

Γ1. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα της εξίσωσης. **(Μονάδες 5)**

Γ2. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης:

$$P(x) : (x - 1) \text{ (Μονάδες 8)}$$

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση:

$$P(x) = 0 \text{ (Μονάδες 6)}$$

Γ4. Αν $P(x) = (x - 1)(x^2 + x - 6)$ να λύσετε την ανίσωση:

$$P(x) < 0 \quad \text{(Μονάδες 6)}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2(\pi - x) - 3\eta\mu(\frac{\pi}{2} + x) + \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha$. (Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε το α αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται

από το σημείο $M(\frac{\pi}{3}, 1)$. (Μονάδες 5)

δ) Για $\alpha = 2$ και $g(x) = 2\eta\mu^2 x + 9\sigma\upsilon\nu x - 9$, να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 7)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ/ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ -
ΙΟΥΝΙΟΥ 2022**

ΤΑΞΗ: Β΄

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή ή

Λανθασμένη, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε

καθεμιά από αυτές, τη λέξη Σωστή αν η πρόταση είναι Σωστή, ή τη λέξη Λάθος

αν αυτή είναι Λάθος.

i. Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους έχει άπειρο πλήθος

λύσεων όταν οι ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος είναι

παράλληλες.

ii. Μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , θα λέγεται περιττή όταν για

κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(-x) = -f(x)$.

iii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$.

iv. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του

$P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$.

v. Η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 1$, $x \in \mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

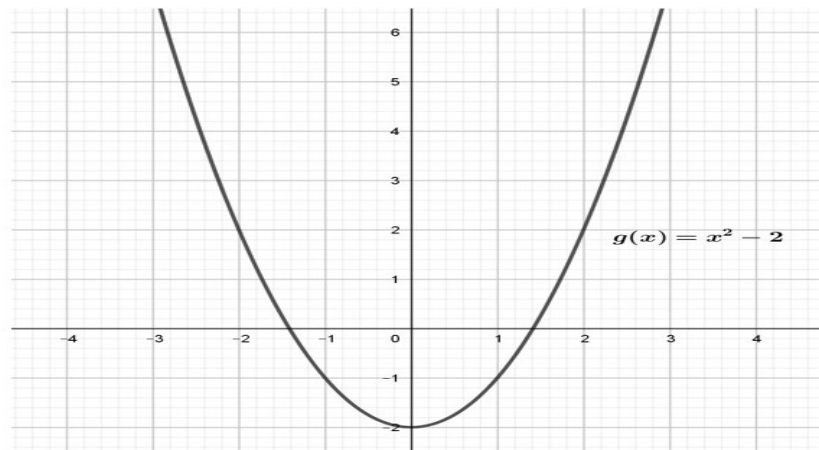
B. Να αποδείξετε ότι αν $a > 0$ με $a \neq 1$, τότε για οποιαδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$

ισχύει: $\log_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$.



α) Με βάση τη γραφική της παράσταση,

i. να αιτιολογήσετε γιατί η g είναι άρτια.

(Μονάδες 9)

ii. να βρείτε το ελάχιστο της g και τη θέση αυτού.

(Μονάδες 7)

β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 3^ο

Για τις ηλικίες των μελών μιας τριμελούς οικογένειας ισχύουν τα παρακάτω:

Η ηλικία της μητέρας είναι τριπλάσια από την ηλικία του παιδιού, ο λόγος της ηλικίας του πατέρα προς την ηλικία του παιδιού είναι

ίσος με $\frac{11}{3}$ και το άθροισμα των ηλικιών και των τριών ισούται με 115 χρόνια.

A. Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους .

(Μονάδες 13)

B. Να βρείτε την ηλικία του καθενός.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4^ο

Η μέση θερμοκρασία T (σε βαθμούς Κελσίου) στην επιφάνεια ενός πλανήτη, μετά από x εκατομμύρια χρόνια, έχει εκτιμηθεί ότι είναι $T(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$.

α) Αποδείξτε ότι 2 εκατομμύρια χρόνια μετά, η μέση θερμοκρασία στον πλανήτη θα είναι μηδέν $^{\circ}C$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τους αριθμούς α, β, γ με $\alpha < \beta < \gamma$ ώστε να ισχύει

$$T(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

(Μονάδες 10)

γ) Θεωρούμε ότι μια χρονική περίοδος παγετώνων στον πλανήτη είναι αυτή στην οποία η μέση θερμοκρασία T είναι συνεχώς κάτω από μηδέν $^{\circ}C$. Ποιες χρονικές περιόδους θα έχουμε παγετώνες στον πλανήτη;

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Θέμα 1°

A) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- i. $a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}}$.
- ii. $(\alpha \cdot \beta)^x = \alpha^x \beta$.
- iii. $\eta\mu(90^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$.
- iv. $\eta\mu 45^\circ = -1$.
- v. $\sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

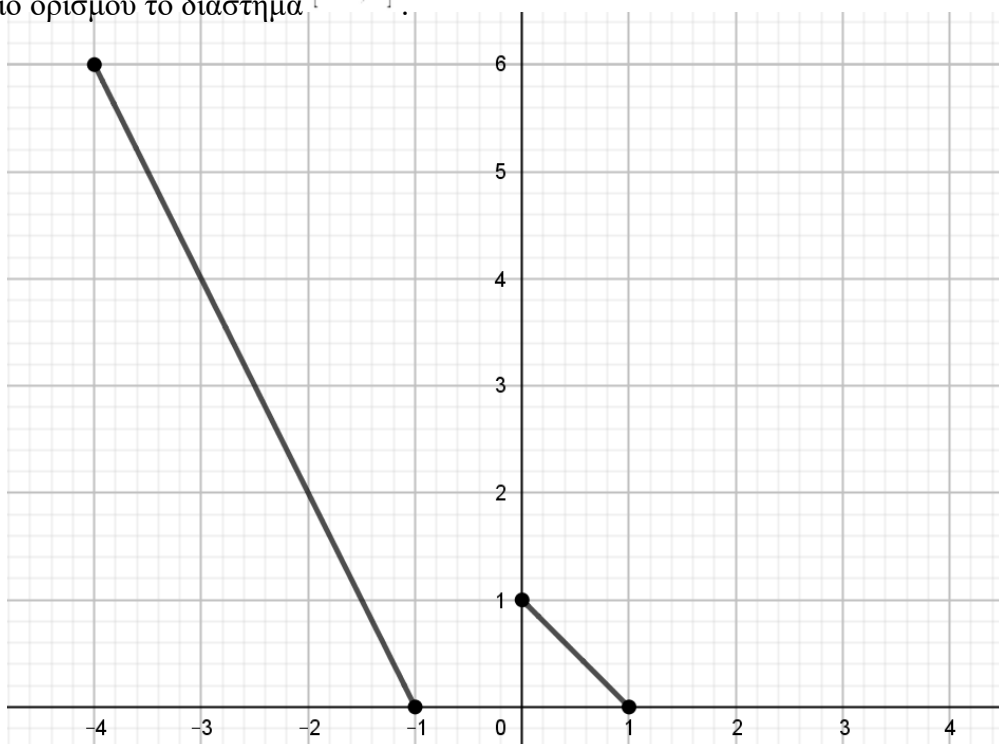
(Μονάδες 10)

B) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1$.

(Μονάδες 15)

Θέμα 2°

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-4, 4]$.



α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να χαράξετε τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της f .

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

Θέμα 3^ο

A) Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

(Μονάδες 10)

B) Να λύσετε την ανίσωση:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \geq 0$$

(Μονάδες 15)

Θέμα 4^ο

Να λύσετε το καθένα από τα παρακάτω συστήματα

$$\alpha) \begin{cases} 2\omega + 3\phi = 17 \\ 4\omega - 3\phi = 7 \end{cases}$$

(Μονάδες 10)

$$\beta) \begin{cases} 2 \cdot 2^x + 3 \cdot 3^y = 17 \\ 4 \cdot 2^x - 3 \cdot 3^y = 7 \end{cases}$$

(Μονάδες 15)

**Να απαντήσετε όλα τα θέματα
Καλή Επιτυχία**

Εξεταζόμενο Μάθημα: Άλγεβρα

Τάξη: Β

Θέμα 1

A. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).

1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \phi(x-c)$, όπου $c > 0$, προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της ϕ κατά μονάδες **προς τα δεξιά**.
2. Το μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.
3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $\sin(\pi + x) = -\sin x$.
4. Αν $a > 0$ με $a \neq 1$, τότε για οποιουδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ ισχύει: $\log_a(\theta_1 + \theta_2) = \log_a \theta_1 \cdot \log_a \theta_2$.
5. Αν $a > 1$ τότε η συνάρτηση $f(x) = a^x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

B. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$. Είναι δηλαδή $u = P(\rho)$.

(Μονάδες 15)

Θέμα 2

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha, 3)$ είναι άρτια και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(2, 2)$.

α) Να βρείτε την τιμή του α .

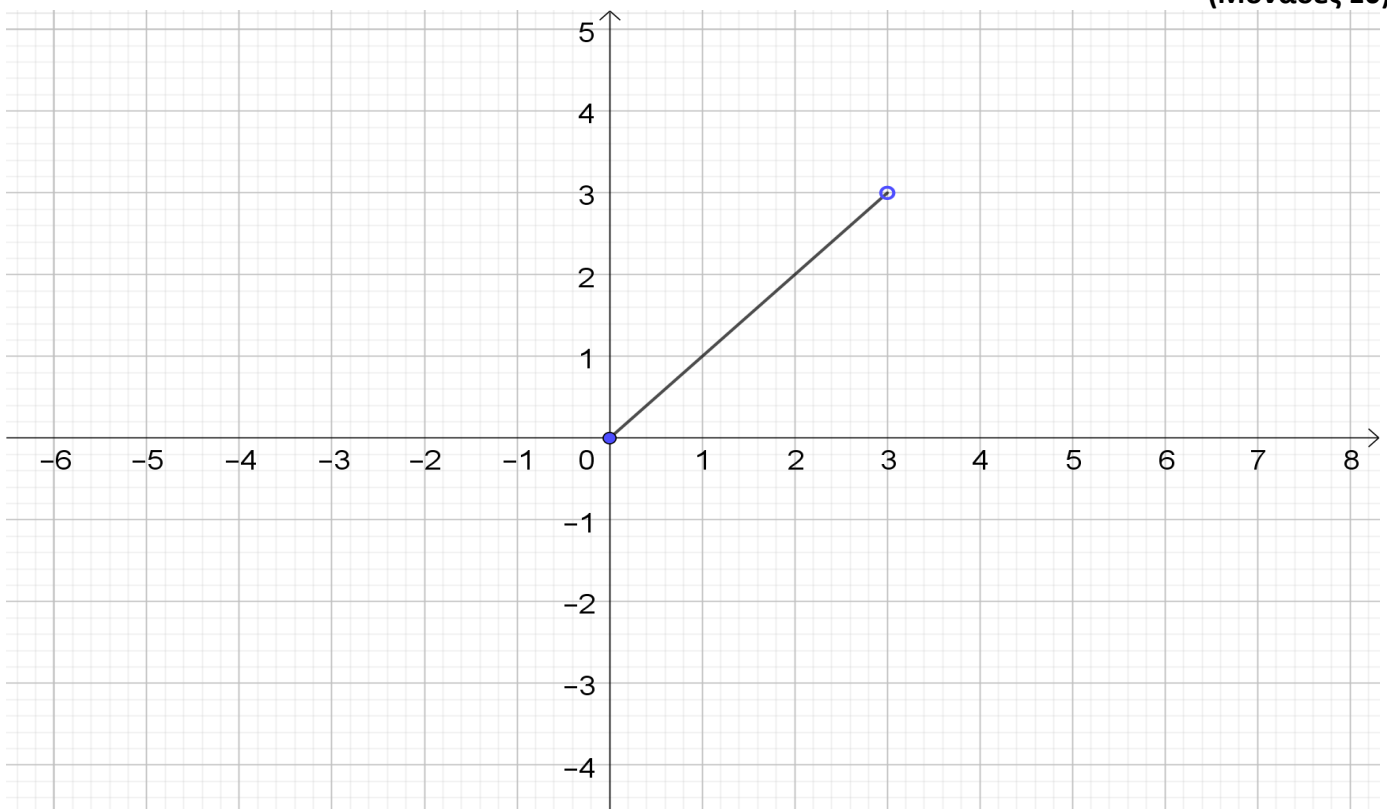
(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το $f(-2)$.

(Μονάδες 8)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 3)$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 10)



Θέμα 3

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι το $x - 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $P(\ln \sqrt{e})$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x + y = -1 \\ \sin x = \sin y \end{cases}$.

(Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) και του τριγωνομετρικού κύκλου, να βρείτε όλες τις γωνίες ω , ω με $0 \leq \omega \leq 2\pi$, που ικανοποιούν τη σχέση

$$\sin \omega + \eta \mu \omega = -1$$

και να τις απεικονίσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο.

(Μονάδες 13)

Ο Διευθυντής

Οι Εισηγητές

ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ – ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα αναφοράς σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1) Για κάθε πραγματικό αριθμό α , ισχύει $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$

2) Ισχύει $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$, για κάθε $\alpha, \beta \in R$

3) Αν η διακρίνουσα μιας εξίσωσης 2ου βαθμού είναι $\Delta > 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη

4) Τρεις αριθμοί, α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει:

$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

5) Αν $\lambda_1 = \lambda_2$ και $\beta_1 \neq \beta_2$, τότε οι ευθείες $y = \lambda_1 x + \beta_1$ και $y = \lambda_2 x + \beta_2$ είναι παράλληλες

(Μονάδες 10)

B. Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει:

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-2| < 3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$

(Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|x+1| + |x-5|}{3}$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 1| = 3$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την εξίσωση δευτέρου βαθμού που έχει ρίζες τις $x_1 = -2$ και $x_2 = 4$

(Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 2x - 8 < 0$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 6x + \lambda = 0$ (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 7)

β) Αν δύο πραγματικοί αριθμοί α και β έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο $\alpha \cdot \beta = \lambda$, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta \leq 9$.

(Μονάδες 6)

ii. Να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 9$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta$.

(Μονάδες 5)

γ) Να δείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις α , β και περίμετρο 12, μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο.

(Μονάδες 7)

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** ,αν η πρόταση είναι σωστή , ή **Λάθος** , αν η πρόταση είναι λανθασμένη .

1. Για κάθε γωνία θ ισχύει : $\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1$
2. Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό ελάχιστο όταν ισχύει : $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.
3. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέγεται περιττή όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει: $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$.
4. Οι άρτιες συναρτήσεις έχουν άξονα συμμετρίας τον $y'y$.
5. Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ είναι πάντα γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

α) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 5x - 10y = 3 \end{cases}$.

(Μονάδες 13)

β) Τι συμπεραίνετε για τη σχετική θέση των ευθειών $\varepsilon_1: 2x - 4y = -2$

και $\varepsilon_2: 5x - 10y = 3$;

(Μονάδες 12)

$P(x)=2x^3+\alpha x^2+x+2$, έχει παράγοντα το $(x-2)$.

(Μονάδες 5)

β) Για $\alpha=-5$ να λυθεί η εξίσωση: $P(x)=0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να λυθεί η εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu^3x+5\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu x-3=0$.

(Μονάδες 10)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + x = 3\ln 2$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + x \geq 3\ln 2$.

(Μονάδες 9)

ΟΔΗΓΙΕΣ: Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2022
ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΙΤΗ 7 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ: Ευτύχιος Πετράκης

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ:

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα Α

A1. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιαδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\log_a(\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

(15 μονάδες)

A2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- i. Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι περιοδική με περίοδο π .
- ii. Το μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.
- iii. Για κάθε $x > 0$ ισχύει $e^{\ln x} = x$.
- iv. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ με $0 < \alpha < 1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- v. Το αόριστο σύστημα έχει τουλάχιστον μία λύση.

(10 μονάδες)

Θέμα Β

Έστω γωνία x για την οποία ισχύουν: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ και $\eta\mu x + \eta\mu(\pi - x) = 1$

B1. Να αποδείξετε ότι $\eta\mu x = \frac{1}{2}$.

(12 μονάδες)

Θέμα Δ

Σε ένα πείραμα εργαστηρίου, ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο

$$P(t) = 200 \cdot e^{ct},$$

Όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος ($t = 0$). Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328.

(Δίνεται ότι $\ln(1,64) \cong 0,5$ και $\ln 10 \cong 2,3$)

Δ1. Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα.

(7 μονάδες)

Δ2. Να αποδείξετε ότι $c = \frac{1}{2}$.

(9 μονάδες)

Δ3. Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής.

(9 μονάδες)

ΟΝΟΜ/ΜΟ ΜΑΘΗΤΗ : _____

ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**ΘΕΜΑ 1**

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της κάθε μίας από τις παρακάτω προτάσεις και δίπλα την ένδειξη Σ αν είναι σωστή και Λ αν είναι λάθος :

1. Αν για το σύστημα $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$ είναι $D \neq 0$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση.
2. Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$.
3. Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$.
4. Η συνάρτηση $f(x) = a^x$ είναι γνησίως αύξουσα αν $0 < a < 1$.
5. Για $\theta_1, \theta_2 > 0$ ισχύει $\log(\theta_1 + \theta_2) = \log\theta_1 \cdot \log\theta_2$

Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι το $x - \rho$ είναι παράγοντας του πολυώνυμου $P(x)$ αν και μόνον αν $P(\rho) = 0$.

Μονάδες 15

μονάδα προς τα πάνω.

α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση όσον αφορά τον τύπο της $f(x)$.

(I) $f(x) = g(x + 3) + 1$. (II) $f(x) = g(x + 3) - 1$. (III) $f(x) = g(x - 3) + 1$.

(IV) $f(x) = g(x - 3) - 1$.

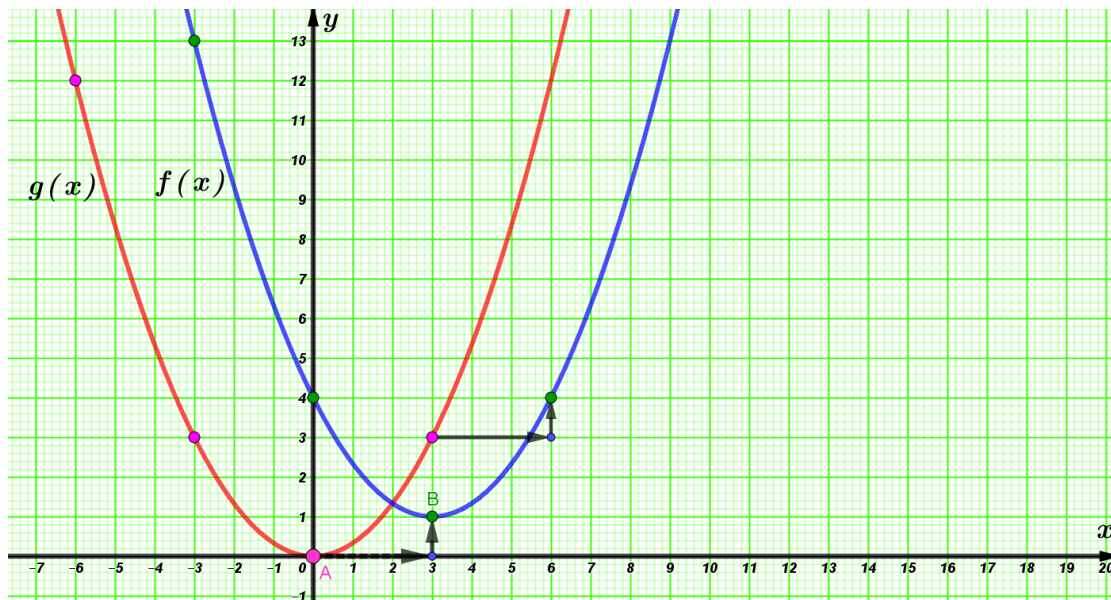
(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)$ και την θέση ελαχίστου.

(Μονάδες 8)

γ) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 8)



β) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα x στο σημείο $B(9, 0)$, τότε να δείξετε ότι $\alpha = -1$. (Μονάδες 7)

γ) Αν $\alpha = -1$,

i) να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 4)

ii) να λυθεί η εξίσωση $f(x) = \log 2$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^4 + x^3 + \alpha x - 4$ και $\delta(x) = x^2 - 3x + 2$. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $\delta(x)$, είναι το πολυώνυμο $v(x) = 24x - 24$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α . (Μονάδες 8)

β) Για $\alpha = 2$,

i. να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 1$. (Μονάδες 2)

ii. να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$. (Μονάδες 8)

iii. να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 7)

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Η ΕΙΣΗΓΗΤΡΙΑ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΑΛΓΕΒΡΑ

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στη κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Η εξίσωση $\eta\mu x = \alpha$, με $\alpha > 1$ είναι αδύνατη.

ii) Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει $P(\rho) \neq 0$, τότε ο αριθμός ρ δεν είναι ρίζα του $P(x)$.

iii) Ισχύει η ιδιότητα των λογαρίθμων $\log_a(\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 \cdot \log_a \theta_2$

iv) Ισχύει η ισοδυναμία $\ln \theta = x \leftrightarrow e^x = \theta$, $\theta > 0$

v) Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ λέγεται εκθετική.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε την τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1$

(Μονάδες 15)

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι $\ln 3 + 3 \ln 2 - f(3) = \ln 4$.

(Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln 4$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 5x - 2$

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ και της γραφικής παράστασης της f

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 5$, με $x \in \mathbb{R}$.

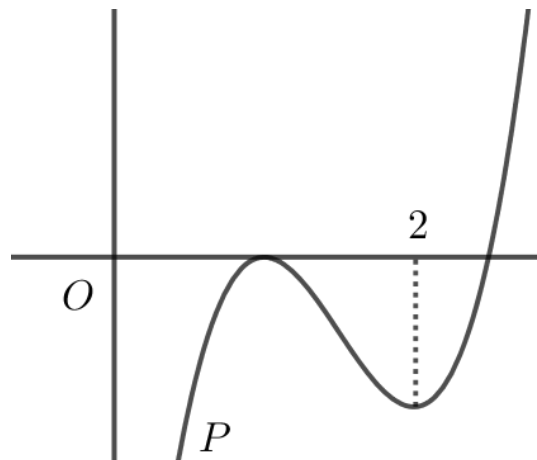
- i. Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x - 1)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με $(x - 2)$ είναι -1 , να δείξετε ότι:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -6 \\ \text{και} \end{cases}.$$

(Μονάδες 10)

γ) Αν η γραφική παράσταση της $P(x)$ είναι η ακόλουθη, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.

(Μονάδες 4)



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΑΛΓΕΒΡΑ

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στη κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Η εξίσωση $\eta\mu x = \alpha$, με $\alpha > 1$ είναι αδύνατη.

ii) Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει $P(\rho) \neq 0$, τότε ο αριθμός ρ δεν είναι ρίζα του $P(x)$.

iii) Ισχύει η ιδιότητα των λογαρίθμων $\log_a(\theta_1\theta_2) = \log_a\theta_1 \cdot \log_a\theta_2$

iv) Ισχύει η ισοδυναμία $\ln\theta = x \leftrightarrow e^x = \theta$, $\theta > 0$

v) Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ λέγεται εκθετική.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε την τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

(Μονάδες 15)

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι $\ln 3 + 3 \ln 2 - f(3) = \ln 4$.

(Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln 4$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 5x - 2$

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ και της γραφικής παράστασης της f

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4

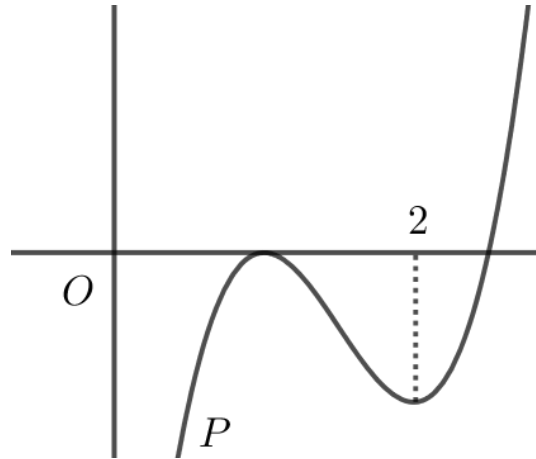
α) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 5$, με $x \in R$.

- i. Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x - 1)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με $(x - 2)$ είναι -1 , να δείξετε ότι:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -6 \\ \text{και} \end{cases}.$$

γ) Αν η γραφική παράσταση της $P(x)$ είναι η ακόλουθη, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.

(Μονάδες 4)



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!

Θέμα Α:

A1. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ να αποδειχθεί ότι:

$$\log_{\alpha}(\theta_1 \theta_2) = \log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2.$$

Μονάδες 15

A2. Δίνονται οι παρακάτω προτάσεις. Να χαρακτηριστούν ως σωστές ή λανθασμένες.

(i) $\eta\mu\omega = \eta\mu\varphi \Leftrightarrow \omega = \varphi$

(ii) Έστω πολυώνυμο $P(x)$ και $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Αν $P(a) \cdot P(b) > 0$, τότε το $P(x)$ δεν έχει ρίζα στο (a, b) .

(iii) Έστω γραμμικό σύστημα 2×2 με ορίζουσες $D = D_x = D_y$, το σύστημα έχει μοναδική λύση $x = y = 1$.

(iv) $\ln(a+b) = \ln a \cdot \ln b$ για κάθε $a, b \in (0, +\infty)$.

(v) Το σύστημα
$$\begin{cases} x + y = a \\ 2x + 2y = 2a \end{cases}$$
 έχει άπειρες λύσεις για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10**Θέμα Β:**

B1. Να λύσετε την εξίσωση: $\ln(x+1) = \ln(2x)$.

Μονάδες 13

B2. Να λύσετε την ανίσωση: $\ln(x+1) > \ln(2x)$.

Μονάδες 12**Θέμα Γ:**

Έστω συνάρτηση $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \epsilon\varphi x} + \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\varphi x}$.

Γ1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Μονάδες 8

Γ2. Να αποδειχθεί ότι $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$.

Μονάδες 9

Γ3. Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες.

Μονάδες 8**Θέμα Δ**

Το διάστημα $S(t)$ σε μέτρα που έχει διανύσει ένα κινητό τη χρονική στιγμή t σε δευτερόλεπτα, δίνεται από τη σχέση: $S(t) = 2t^3 - 6t^2 + 10t$.

Δ1. Να βρείτε το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό τις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t = 2$.

Μονάδες 3

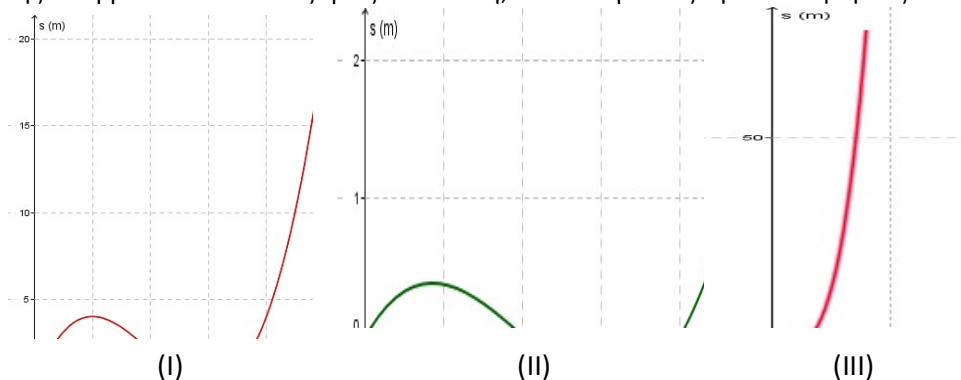
Δ2. Να βρείτε πόσο χρόνο χρειάζεται το κινητό για να διανύσει απόσταση 30 μέτρων.

Μονάδες 10

Δ3. Επειδή το $S(t)$ εκφράζει το διάστημα που διανύει το κινητό, θα πρέπει να είναι πάντα μη αρνητικό. Να αποδείξετε αλγεβρικά αυτόν τον ισχυρισμό.

Μονάδες 8

Δ4. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών πολυωνύμων $S(t)$. Μία από αυτές εκφράζει το διάστημα $S(t)$ της εκφώνησης. Να βρείτε ποια από τις τρεις είναι αυτή, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

Μονάδες 4

Θέμα Α:

A1. Να αποδειχθεί ότι για κάθε γωνία ω ισχύει: $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$.

Μονάδες 15

A2. Δίνονται οι παρακάτω προτάσεις. Να χαρακτηριστούν ως σωστές ή λανθασμένες.

- i. Η γραφική παράσταση της $f(x+2)$ προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x)$ κατά δύο μονάδες προς τα αριστερά
- ii. Η συνάρτηση $f(x) = \log_a x$, $a > 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.
- iii. Ένα γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους με ορίζουσα $D=0$ είναι αδύνατο.
- iv. Το σύστημα $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις.
- v. Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ δια $(x-\rho)$ ισούται με $P(\rho)$.

Μονάδες 10**Θέμα Β:**

B1. Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 - x$ ως γινόμενο ενός πρωτοβάθμιου και ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου.

Μονάδες 10

B2. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

Μονάδες 15**Θέμα Γ:**

Έστω συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

Γ1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

Γ2. Να βρεθούν τα διαστήματα όπου η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , βρίσκεται πάνω από τον άξονα x' .

Μονάδες 7

Γ3. Να αποδειχθεί ότι $f(\ln 4) = \ln 3$.

Μονάδες 6

Γ4. Να λυθεί η εξίσωση $f(2x) - f(x) = f(\ln 4)$.

Μονάδες 7**Θέμα Δ**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2(\pi - x) - 3\eta\mu(\frac{\pi}{2} + x) + \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2x - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha$.

Μονάδες 8

Δ2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε το α αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(\frac{\pi}{3}, 1)$. **Μον. 5**

Δ4. Για $\alpha = 2$ και $g(x) = 2\eta\mu^2x + 9\sigma\upsilon\nu x - 9$, να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

Μονάδες 7

Θέμα Α:

A1. Να αποδειχθεί ότι για κάθε γωνία ω ισχύει: $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$.

Μονάδες 15

A2. Δίνονται οι παρακάτω προτάσεις. Να χαρακτηριστούν ως σωστές ή λανθασμένες.

- i. Η γραφική παράσταση της $f(x+2)$ προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x)$ κατά δύο μονάδες προς τα αριστερά
- ii. Η συνάρτηση $f(x) = \log_a x$, $a > 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.
- iii. Ένα γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους με ορίζουσα $D=0$ είναι αδύνατο.
- iv. Το σύστημα $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις.
- v. Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ δια $(x-\rho)$ ισούται με $P(\rho)$.

Μονάδες 10

Θέμα Β:

B1. Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 - x$ ως γινόμενο ενός πρωτοβάθμιου και ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου.

Μονάδες 10

B2. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

Μονάδες 15

Θέμα Γ:

Έστω συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

Γ1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

Γ2. Να βρεθούν τα διαστήματα όπου η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 7

Γ3. Να αποδειχθεί ότι $f(\ln 4) = \ln 3$.

Μονάδες 6

Γ4. Να λυθεί η εξίσωση $f(2x) - f(x) = f(\ln 4)$.

Μονάδες 7

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2(\pi - x) - 3\eta\mu(\frac{\pi}{2} + x) + \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2x - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha$.

Μονάδες 8

Δ2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε το α αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(\frac{\pi}{3}, 1)$. Μον. 5

Δ4. Για $\alpha = 2$ και $g(x) = 2\eta\mu^2x + 9\sigma\upsilon\nu x - 9$, να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

Μονάδες 7

Ο Διευθυντής
Σκουλάτος Δημήτριος

Οι Εισηγητές
Ζευγώλη Μαρία
Καπούνης Εμμανουήλ
Σμιτ Σοφία

Θέμα Α:

A1. Να αποδειχθεί ότι για κάθε γωνία ω ισχύει: $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$.

Μονάδες 15

A2. Δίνονται οι παρακάτω προτάσεις. Να χαρακτηριστούν ως σωστές ή λανθασμένες.

- i. Η γραφική παράσταση της $f(x+2)$ προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x)$ κατά δύο μονάδες προς τα αριστερά
- ii. Η συνάρτηση $f(x) = \log_a x$, $a > 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.
- iii. Ένα γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους με ορίζουσα $D=0$ είναι αδύνατο.
- iv. Το σύστημα $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις.
- v. Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ δια $(x-\rho)$ ισούται με $P(\rho)$.

Μονάδες 10**Θέμα Β:**

B1. Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 - x$ ως γινόμενο ενός πρωτοβάθμιου και ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου.

Μονάδες 10

B2. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

Μονάδες 15**Θέμα Γ:**

Έστω συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

Γ1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

Γ2. Να βρεθούν τα διαστήματα όπου η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , βρίσκεται πάνω από τον άξονα x' .

Μονάδες 7

Γ3. Να αποδειχθεί ότι $f(\ln 4) = \ln 3$.

Μονάδες 6

Γ4. Να λυθεί η εξίσωση $f(2x) - f(x) = f(\ln 4)$.

Μονάδες 7**Θέμα Δ**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2(\pi - x) - 3\eta\mu(\frac{\pi}{2} + x) + \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2x - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha$.

Μονάδες 8

Δ2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε το α αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(\frac{\pi}{3}, 1)$. **Μον. 5**

Δ4. Για $\alpha = 2$ και $g(x) = 2\eta\mu^2x + 9\sigma\upsilon\nu x - 9$, να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Α

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$.

β) Για κάθε γωνία ω ισχύει: $\sin(\pi - \omega) = \sin \omega$.

γ) Το πεδίο ορισμού της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x) = \log_{\alpha} x$ είναι το $\mathbb{R}$.

δ) Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιαδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ ισχύει:
 $\log_{\alpha}(\theta_1 + \theta_2) = \log_{\alpha} \theta_1 \cdot \log_{\alpha} \theta_2$.

ε) Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, τότε για κάθε $\theta > 0$ ισχύει: $\alpha^{\log_{\alpha} \theta} = \theta$.

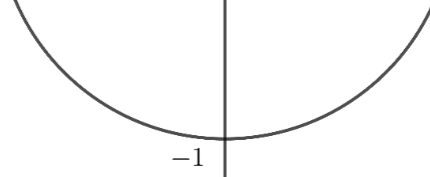
Μονάδες 5·2=10

A2. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$, δηλαδή $u = P(\rho)$.

Μονάδες 15

β) Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$, να βρείτε το $\eta\mu\omega$.

Μονάδες 14



ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + (2\alpha + 1)x^2 - (\alpha + \beta)x - 9$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Γ1. Αν το -3 είναι ρίζα του $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$ είναι -8 , τότε να βρείτε τις τιμές των α, β .

Μονάδες 9

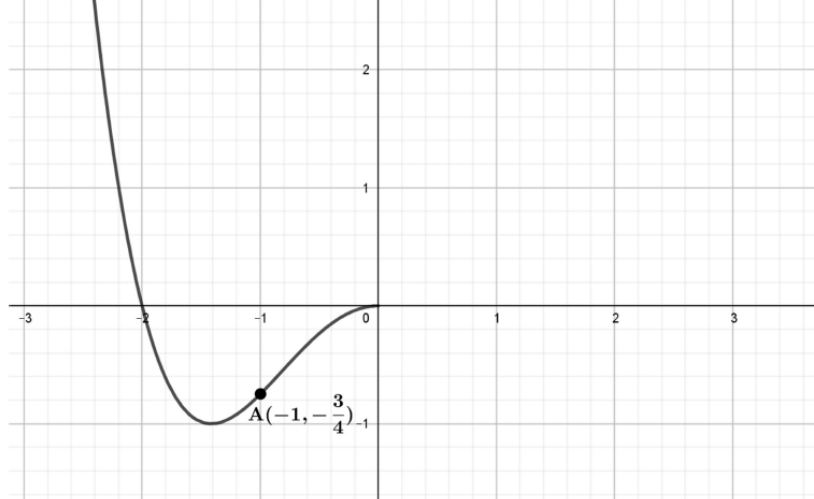
Γ2. Αν $\alpha = 2$ και $\beta = -5$ τότε:

i) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Μονάδες 8

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x)}{x+2} < 0$.

Μονάδες 8



α) Να δείξετε ότι $\alpha = -1$.

(Μονάδες 6)

β) Για $\alpha = -1$,

i. Να αποδείξετε ότι $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x > 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Αφού επιβεβαιώσετε ότι $f(-\sqrt{3}) = -\frac{3}{4}$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο

τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας $y = -\frac{3}{4}$ με την γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 8)