ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΟΥ

ΤΕΛΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ 2022-2023

«Ο ΙΠΠΑΡΧΟΣ»

Σάββατο 18 Φεβρουαρίου 2023

ΘΕΜΑ 1ο (5 Μονάδες)

Υποθέτουμε ότι ΑΑΑΑ είναι ένας τετραψήφιος με 4 ίδια ψηφία που αντιστοιχούν στο γράμμα Α, ΒΒΒ τριψήφιος με 3 ίδια ψηφία ίσα με Β και ομοίως ΓΓ διψήφιος και Δ μονοψήφιος αριθμός.

Να αντικαταστήσετε τα γράμματα Α, Β, Γ, Δ με κατάλληλα ψηφία έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα: ΑΑΑΑ + ΒΒΒ – ΓΓ + Δ = 2023.

ΘΕΜΑ 2ο (5 Μονάδες)

Πάνω σε 30 ίδια καρτελάκια γράφουμε 30 διαφορετικούς φυσικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 0 και μικρότεροι από το 60 και τα τοποθετούμε σε ένα τραπέζι ώστε να μη φαίνονται οι αριθμοί. Υποθέτουμε ότι ισχύει ο εξής κανόνας: «Αν επιλέξουμε δύο οποιαδήποτε από αυτά τα καρτελάκια τότε η διαφορά των αριθμών που είναι γραμμένοι σε αυτά είναι άρτιος (ζυγός) αριθμός». Να βρείτε:

α) Ποιοι είναι οι 30 αριθμοί που είναι γραμμένοι στα καρτελάκια;

Μονάδες 3

β) Ποιο είναι το άθροισμα των 30 αυτών αριθμών;

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3ο (5 Μονάδες)

Έστω το σύνολο των φυσικών αριθμών Ω = {1, 2, 3, 4, …, 50} που περιέχει όλους τους φυσικούς αριθμούς από το 1 έως και το 50.

α) Πόσοι αριθμοί του Ω είναι πολλαπλάσια του 3 και ποιο το ποσοστό % τους, επί του συνόλου των αριθμών του Ω;

Μονάδα 1

β) Τα πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού α που ανήκουν στο σύνολο Ω, αποτελούν το 24% του πλήθους των αριθμών του Ω. Ποιος είναι ο αριθμός α;

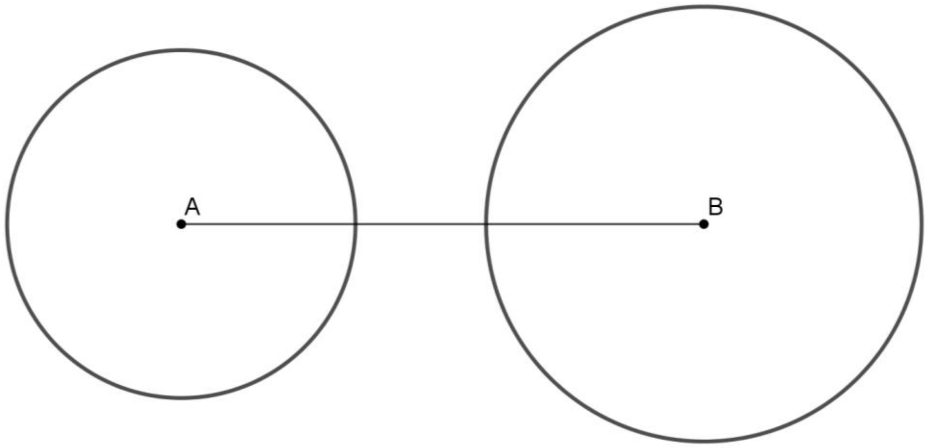
Μονάδες 2

γ) Πόσοι αριθμοί του Ω δεν είναι ούτε πολλαπλάσια του 3 ούτε πολλαπλάσια του 5;

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 4ο (5 Μονάδες)

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 12 cm και δύο κύκλοι με κέντρα τα σημεία Α, Β και ακτίνες 4cm και 5cm αντίστοιχα.



α) Να βρείτε αν υπάρχει σημείο Ρ του επιπέδου, ώστε να ισχύει συγχρόνως ΡΑ = 4 cm και ΡΒ = 5 cm και να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

Μονάδα 1

β) Βρείτε σημείο Γ στον κύκλο με κέντρο το Α και σημείο Δ στον κύκλο με κέντρο το Β ώστε ΓΔ = 3 cm.

Μονάδα 1

γ) Βρείτε σημείο Ε στον κύκλο με κέντρο το Α και σημείο Ζ στον κύκλο με κέντρο το Β ώστε ΕΖ = 21 cm.

Μονάδα 1

δ) Περιγράψτε ή ζωγραφίστε τα σημεία Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύουν συγχρόνως οι ανισότητες: ΜΑ > 4 cm και ΜΒ > 5 cm.

Μονάδα 2

Σας ευχόμαστε επιτυχία!

Ενδεικτικές Λύσεις

ΘΕΜΑ 1ο

Αφού στον 4-ψήφιο αριθμό ΑΑΑΑ προστίθεται ο τριψήφιος ΒΒΒ θα πρέπει Α=1 διαφορετικά το άθροισμα τους υπερβαίνει το 2023
Επομένως 1111 + ΒΒΒ – ΓΓ + Δ = 2023 και αρκεί να βρούμε 3-ψήφιο αριθμό ΒΒΒ ώστε ΒΒΒ – ΓΓ + Δ = 2023 – 1111 = 912
Αφού απ' τον 3-ψήφιο αριθμό ΒΒΒ αφαιρείται ο διψήφιος ΓΓ θα πρέπει Β=9 διαφορετικά η διαφορά τους θα υπολείπεται του 912
Επομένως 999 – ΓΓ + Δ = 912 και συνεπώς Γ=8 και Δ=1
Πράγματι, αν Γ=9 τότε Δ=12 αδύνατο γιατί το Δ είναι ψηφίο ενώ αν Γ=7 ή μικρότερο τότε το πρώτο μέλος της ισότητας 999 – ΓΓ + Δ = 912 υπερβαίνει το 912
Επαλήθευση 1111 + 999 – 88 + 1 = 2023

ΘΕΜΑ 2ο

α) Αφού η διαφορά 2 οποιονδήποτε αριθμών είναι άρτιος αριθμός θα πρέπει όλοι οι αριθμοί να είναι άρτιοι (άρτιος – άρτιος = άρτιος) ή όλοι οι αριθμοί περιττοί (περιττός – περιττός = άρτιος) διότι άρτιος – περιττός = περιττός και περιττός – άρτιος = περιττός.
Αν όλοι οι αριθμοί ήταν άρτιοι τότε αυτοί θα ήταν όλοι οι άρτιοι φυσικοί αριθμοί μέχρι το 60 που είναι οι: 0, 2, 4, …, 58 (συνολικά 30 αριθμοί), αυτό όμως είναι αδύνατο γιατί δεν υπάρχει καρτελάκι με τον αριθμό 0. Άρα οι 30 αριθμοί στα καρτελάκια είναι οι 30 περιττοί αριθμοί : 1, 3, 5, …, 59
β) Το άθροισμα των 30 αυτών αριθμών μπορεί να βρεθεί είτε με απευθείας πρόσθεση είτε πιο γρήγορα παρατηρώντας το εξής (τέχνασμα Gauss) : 1 + 59 = 3+57 = 5+55 κ.ο.κ. που σημαίνει ότι έχουμε 30:2 = 15 ζευγάρια με άθροισμα 60 το καθένα, άρα $15 \cdot 60 = 900$

ΘΕΜΑ 3^{ο}

α) Τα πολλαπλάσια του 3 που βρίσκονται στο σύνολο Ω μπορούν να βρεθούν με τους εξής τρόπους:

1^{ος} τρόπος: Με απευθείας καταμέτρηση και θα τα βρούμε 16

2^{ος} τρόπος: Με το πηλίκο της διαίρεσης 50:3 αγνοώντας το υπόλοιπο, οπότε 16

3^{ος} τρόπος: Κάθε διάστημα μεταξύ δυο διαδοχικών πολλαπλασίων του 3 έχει μήκος 3 μονάδες, οπότε το 48 (που είναι το μεγαλύτερο πολλαπλάσιο του 3 στο Ω) απέχει από το 3 (που είναι το μικρότερο πολλαπλάσιο του 3 στο Ω) 48 – 3 = 45 μονάδες άρα (45:3+1)=16

4^{ος} τρόπος: Είναι τα: 3=3·**1**, 6=3·**2**, 9=3·**3**, …,45=3·**15**, 48=3·**16**, οπότε το πλήθος τους είναι 16.

Το ποσοστό αυτών είναι (16/50)·100 % = 32 %

β) Επειδή τα πολλαπλάσια που ζητάμε είναι λιγότερα από τα πολλαπλάσια του 3 (αφού 24 % < 32 %) θα ψάξουμε στα πολλαπλάσια του α , όπου α>3 αρχίζοντας απ’ τα πολ4 τα οποία βρίσκουμε (με έναν από τους παραπάνω 3 τρόπους) 12 και το αντίστοιχο

ποσοστό τους (12/50)·100 % = 24 % άρα α=4

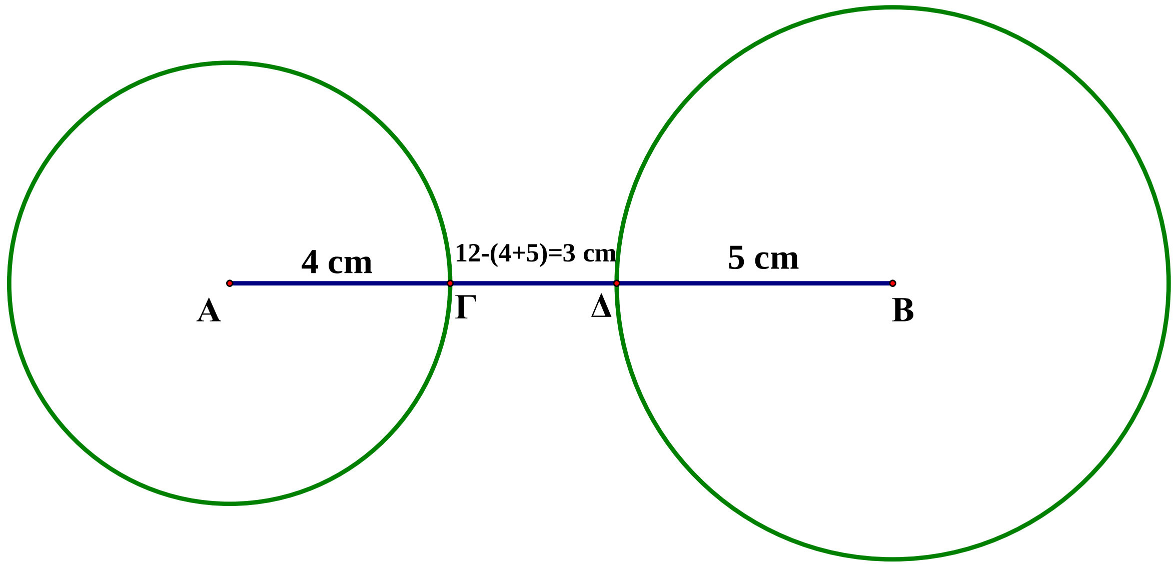
Σημείωση: Στο σύνολο Ω,
τα πολλαπλάσια του 1 είναι 50 δηλ. το 100% των αριθμών του Ω
τα πολλαπλάσια του 2 είναι 25 δηλ. το 50% των αριθμών του Ω
τα πολλαπλάσια του 3 είναι 16 δηλ. το 32% των αριθμών του Ω
τα πολλαπλάσια του 4 είναι 12 δηλ. το 24% των αριθμών του Ω
τα πολλαπλάσια του 5 είναι 10 δηλ. το 20% των αριθμών του Ω
τα πολλαπλάσια του 6 είναι 8 δηλ. το 16% των αριθμών του Ω
κ.ο.κ. όπως εύκολα μπορείτε να επαληθεύσετε.

γ) Η πρώτη σκέψη που κάνουμε είναι από τους 50 αριθμούς του Ω να αφαιρέσουμε το πλήθος των πολ3 και το πλήθος των πολ5 που είναι 50 – (16 + 10) = 50 – 26.
Όμως σε αυτά τα 26 πολλαπλάσια του 3 και του 5 μετρήσαμε από δύο φορές τα κοινά τους πολλαπλάσια, δηλ. διπλομετρήσαμε τα πολ15 που είναι 3, άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι 50 – 26 + 3 = 27

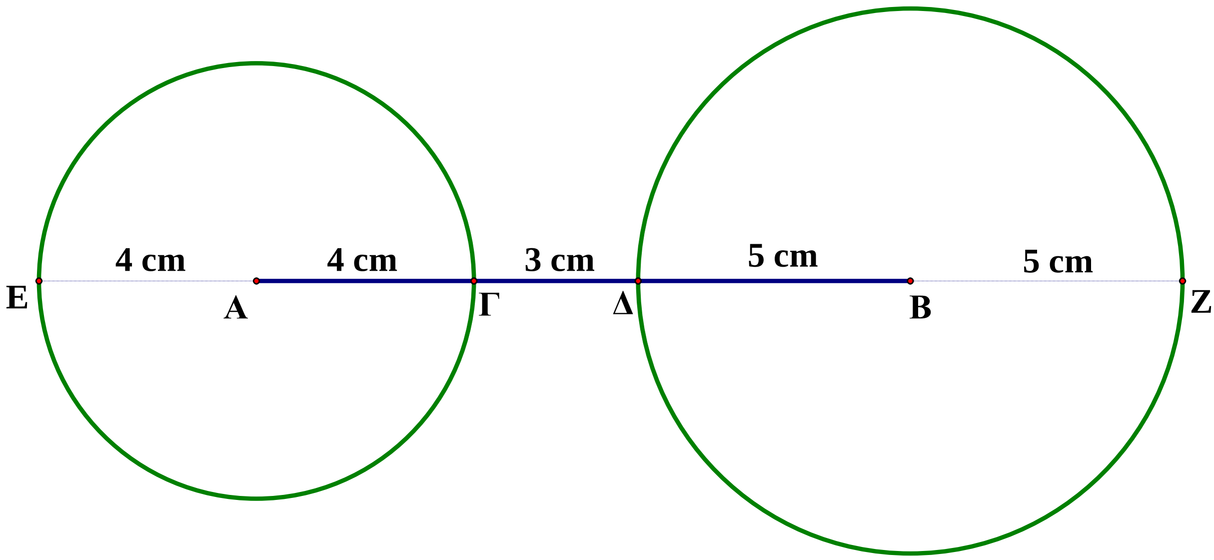
ΘΕΜΑ 4ο

α) Αν υπάρχει σημείο Ρ του επιπέδου ώστε να ισχύει συγχρόνως ΡΑ = 4 cm και ΡΒ = 5 cm τότε αυτό θα έπρεπε να ανήκει στον κύκλο με κέντρο Α και συγχρόνως στον κύκλο με κέντρο Β. Αυτό όμως είναι αδύνατο γιατί οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία. Άρα δεν υπάρχει τέτοιο σημείο.

β) Τα σημεία Γ και Δ είναι όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



γ) Τα σημεία Ε και Ζ είναι όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



δ) Δεν θέλουμε τα σημεία Μ που βρίσκονται πάνω στις δύο περιφέρειες επειδή εκεί ΜΑ = 4 cm και ΜΒ = 5 cm. Επίσης δεν θέλουμε τα εσωτερικά σημεία των κύκλων επειδή εκεί ΜΑ < 4 cm και ΜΒ < 5 cm. Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι όλα τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται εξωτερικά των δύο κύκλων.