13^{ος} Διαγωνισμός «Εύδημος» Παραρτήματος ΕΜΕ Δωδεκανήσου

Ενδεικτικές και συνοπτικές λύσεις των θεμάτων

Θέμα 1^{ο}

Α) Μ = 506 – 483 = 23 ή Μ = 23·(22 – 21) = 23·1 = 23 ή Μ = 1·23 + 21·23 – 21·23 = 23.

Και οι δύο λύσεις είναι σωστές.

Β) Για α = 10 και β = 11 έχουμε 5·10 – 4·11 = 50 – 44 = 6

Επίσης για α = 6 και β = 6, έχουμε 5·6 – 4·6 = 30 – 24 = 6 (μορφή λύσεων α = 6 – 4t, β = 6 – 5t)

Εναλλακτικά: Αρκεί να βρούμε δύο φυσικούς αριθμούς Α και Β ώστε 5Α – 4Β = 1 και μετά να πολλαπλασιάσουμε με το 6, οπότε Α = 1, Β = 1 και έτσι α = 6 και β = 6.

Γενικά Α = 4ν + 1 και Β = 5ν + 1

Γ) Αν x=2023 και y=2023, έχουμε: 2022·2023–2021·2023 = 2023·(2022–2021) = 2023·1=2023

Επίσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω ιδέα οπότε αρχικά για Α = 1 και Β = 1 έχουμε:

2022·1–2021·1 = 1 οπότε τελικά x=2023 και y=2023…

Θέμα 2^{ο}

Αν συνεχίσουμε να βρίσκουμε όρους της ακολουθίας αυτής θα έχουμε κατά σειρά:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, …

Α) Ο 12^{ος} όρος είναι ο 144 = 12^2 και επίσης 144 = $2^4 \cdot 3^2$

Β) Αφού ξεκινάμε με δύο περιττούς ο τρίτος είναι άρτιος, κατόπιν ο 4^{ος} περιττός, ο 5^{ος} περιττός σαν άθροισμα άρτιου με περιττός, οπότε η μορφή της ακολουθίας είναι:

περιττός, περιττός, άρτιος, περιττός, περιττός, άρτιος, περιττός, περιττός, άρτιος, …

Άρα μετά από δύο διαδοχικούς περιττούς θα ακολουθήσει υποχρεωτικά άρτιος, οπότε δεν γίνεται να υπάρχουν τρεις διαδοχικοί περιττοί ποτέ.

Γ) Θα σταματήσουμε στον 15^{ο} όρο (610) και θα προκύψει ο αριθμός 11235813213455891442333776 10, ο οποίος ικανοποιεί τα ζητούμενα…

Θέμα 3ο

Α) Αφού έχουμε 20 άσπρα ξυλάκια μήκους 3 εκ., για 3 ίσες πλευρές από Ευκλείδεια διαίρεση προκύπτει ότι $20 = 3 \cdot 6 + 2$, δηλαδή για να πετύχουμε το μέγιστο δυνατό μήκος κάθε πλευρά θα αποτελείται από 6 άσπρα ξυλάκια και θα έχει μήκος 18 εκ. Θα χρησιμοποιηθούν τα 18 άσπρα ξυλάκια και θα περισσέψουν 2.

Β) Η πλευρά του μεγαλύτερου δυνατού ισοπλεύρου τριγώνου που μπορούμε να κατασκευάσουμε θα αποτελείται από 16 πράσινα, 10 κόκκινα και 6 άσπρα ξυλάκια και θα έχει μήκος $(16 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 6 \cdot 3)$ δηλαδή 54 εκ. Αυτό γιατί για να μοιραστούν τα ξυλάκια ομοιόμορφα στις 3 πλευρές το μέγιστο δυνατό πλήθος πράσινων είναι 16 αφού $16 \cdot 3 = 48 < 50 < 17 \cdot 3 = 51$ οπότε θα περισσέψουν 2 πράσινα και ομοίως 10 κόκκινα γιατί $10 \cdot 3 = 30$ και δεν θα περισσέψει κανένα κόκκινο και 6 άσπρα αφού $6 \cdot 3 = 18 < 20 < 7 \cdot 3 = 21$, οπότε θα περισσέψουν και 2 άσπρα. Με αυτά που περισσεύουν δεν γίνεται να κατασκευάσουμε μεγαλύτερη πλευρά.

Γ) Θέλουμε μια πλευρά πράσινη, μια πλευρά κόκκινη και μια πλευρά άσπρη ίσου μήκους. Άρα το μήκος πρέπει να είναι κοινό πολλαπλάσιο του 1, 2, 3 που είναι τα μήκη κάθε είδους. Άρα για μήκος πλευράς 6 εκ. θα χρειαστούμε 6 πράσινα, 3 κόκκινα και 2 άσπρα και συνολικά μπορούμε να φτιάξουμε το πολύ 8 τέτοια ίσα τρίγωνα αφού:

$6 \cdot 8 = 48 < 50$ και $3 \cdot 8 = 24 < 30$ και $2 \cdot 8 = 16 < 20$ και δεν περισσεύουν αρκετά για άλλο ένα.

Ομοίως για μήκος πλευράς 12 εκ. θα χρειαστούμε 12 πράσινα, 6 κόκκινα και 4 άσπρα και συνολικά μπορούμε να φτιάξουμε το πολύ 4 τέτοια ίσα τρίγωνα αφού:

$12 \cdot 4 = 48 < 50$ και $6 \cdot 4 = 24 < 30$ και $4 \cdot 4 = 16 < 20$ και δεν περισσεύουν αρκετά για άλλο ένα.

Ομοίως για μήκος πλευράς 18 εκ. θα χρειαστούμε 18 πράσινα, 9 κόκκινα και 6 άσπρα και συνολικά μπορούμε να φτιάξουμε το πολύ 2 τέτοια ίσα τρίγωνα αφού:

$18 \cdot 2 = 36 < 50$ και $9 \cdot 2 = 18 < 30$ και $6 \cdot 2 = 12 < 20$ και δεν περισσεύουν αρκετά για άλλο ένα.

Ομοίως για μήκος πλευράς 24 εκ. θα χρειαστούμε 24 πράσινα, 12 κόκκινα και 8 άσπρα και συνολικά μπορούμε να φτιάξουμε το πολύ 2 τέτοια ίσα τρίγωνα αφού:

$24 \cdot 2 = 48 < 50$ και $12 \cdot 2 = 24 < 30$ και $8 \cdot 2 = 16 < 20$ και δεν περισσεύουν αρκετά για άλλο ένα.

Ομοίως για μήκος πλευράς 30 εκ. θα χρειαστούμε 30 πράσινα, 15 κόκκινα και 10 άσπρα και συνολικά μπορούμε να φτιάξουμε το πολύ 1 τέτοιο τρίγωνο αφού: $30 \cdot 2 = 60 > 50$.