

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ) ΤΩΝ ΕΠΑ.Λ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 4/6/2022

ΘΕΜΑ Α

- A_1 . Απόδειξη πρότασης - Σχολικό βιβλίο, σελ. 28-29.
- A_2 . Ορισμός (Θεωρία) - Σχολικό βιβλίο, σελ. 87.
- A_3 . α) Λάθος β) Σωστό γ) Λάθος.
- A_4 . α). $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$
- β). $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

ΘΕΜΑ Β

B_1 . Μέση τιμή: $\bar{x} = \frac{25+10+5+20+15}{5} = \frac{75}{5} = 15$

Εύρος: $R = \max(x_i) - \min(x_i) = 25 - 5 = 20$

B_2 . Διακύμανση:

$$s^2 = \frac{(25-15)^2 + (10-15)^2 + (5-15)^2 + (20-15)^2 + (15-15)^2}{5}$$
$$= \frac{10^2 + (-5)^2 + (-10)^2 + 5^2 + 0^2}{5} = \frac{250}{5} = 50$$

B_3 . Συντελεστής μεταβολής:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{50}}{15} = \frac{5\sqrt{2}}{15} = \frac{\sqrt{2}}{3} = 0,4714$$

ή $47,14\% > 10\%$ άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

ΘΕΜΑ Γ

Γ₁. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
(ως πολυωνμική) με:

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + a, \quad a \in \mathbb{R}$$

Αφού ο ρυθμός μεταβολής της f στο $x=1$
είναι ίσος με 0 έχουμε:

$$f'(1) = 0 \iff 3 - 18 + a = 0 \iff a = 15$$

Γ₂. Για $a = 15$ η συνάρτηση είναι:

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{και } f'(x) = 3x^2 - 18x + 15, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής
παράστασης της f στο σημείο $M(2, f(2)) = M(2, 3)$
είναι γενικά:

$$y = \lambda x + \beta, \quad \lambda = f'(2) = -9$$

$$\text{Άρα: } y = -9x + \beta$$

Επειδή η C_f διέρχεται από το σημείο $M(2, 3)$
έχουμε:

$$3 = -9 \cdot 2 + \beta \implies 3 = -18 + \beta \implies \beta = 21$$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης
της C_f στο $M(2, 3)$ είναι:

$$y = -9x + 21$$

3. Έχουμε: $f'(x) = 3x^2 - 18x + 15, x \in \mathbb{R}$ και:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 18x + 15 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 6x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 5$$

Επομένως ο πίνακας για την μονοτονία της f είναι:

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$				

Άρα

-) Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[5, +\infty)$
-) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 5]$

Στο $x=1$ έχει τοπικό μέγιστο το $f(1)=8$ και
στο $x=5$ έχει τοπικό ελάχιστο το $f(5)=-24$

Γ₄. Για $a=15$ το ζητούμενο όριο είναι:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-18x+15}{x^2-1} = \\&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^2-6x+5)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x-5)}{(x-1)(x+1)} = \\&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-5)}{x+1} = \frac{3(1-5)}{1+1} = \frac{-12}{2} = -6\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ₁. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

είναι τα $x \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

Άρα είναι $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{-1\}$ με παράγωγο:

$$f'(x) = \frac{(x)'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{(x+1)^2}, \quad x \neq -1$$

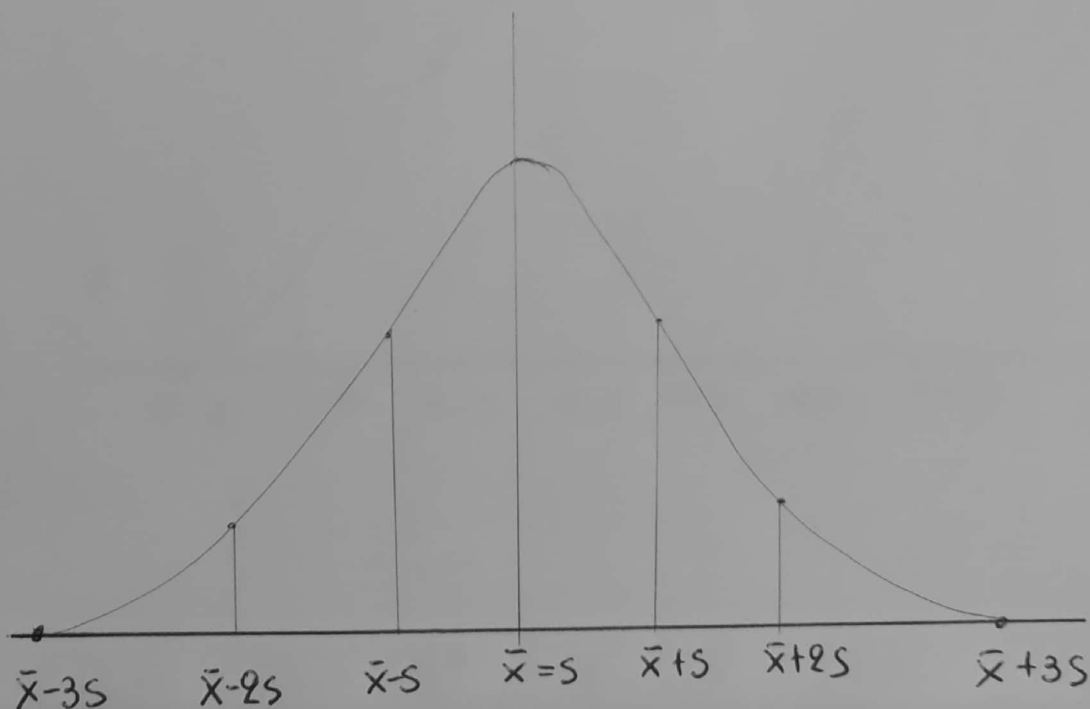
Δ_2 : Βρίσκουμε την αριθμητική τιμή των $\bar{x}$, s
και έχουμε:

$$f'(2) = \frac{1}{(2+1)^2} = \frac{1}{9}, \quad f'(1) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$$

Άρα: $\bar{x} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$ και

$$s = \frac{1}{2 f'(1)} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 2.$$

Δ_3 . Αφού ο χρόνος επιστροφής, σε λεπτά,
ακολουθεί την κανονική κατανομή με
 $\bar{x} = 9$, $s = 2$ έχουμε:



Είναι:

$$\bar{x} - s = 9 - 2 = 7$$

$$\bar{x} - 2s = 9 - 4 = 5$$

$$\bar{x} - 3s = 9 - 6 = 3$$

$$\bar{x} + s = 9 + 2 = 11$$

$$\bar{x} + 2s = 9 + 4 = 13$$

$$\bar{x} + 3s = 9 + 6 = 15$$

Από την θεωρία της κανονικής κατανομής γνωρίζουμε ότι:

Στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ βρίσκεται το 68%

Στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} - s)$ βρίσκεται το 13,5%

Άρα, αντίστοιχα, από $(5, 11)$ βρίσκεται το
 $68\% + 13,5\% = 81,5\%$ των μαθητών

Επομένως ο αριθμός των μαθητών είναι:

$$\frac{81,5}{100} \cdot 2000 = 1630 \text{ μαθητές.}$$

Πάνω από 15 λεπτά θα είναι:

$\bar{x} + 3s = 15$ που αντιστοιχεί στο 0,15% δηλαδή

$$\frac{0,15}{100} \cdot 2000 = 3 \text{ μαθητές.}$$

Δ4: Όταν ο χρόνος επιστροφής των μαθητών αυξηθεί κατά 3 λεπτά θα έχουμε:

$\bar{y} = \bar{x} + 3 = 9 + 3 = 12$ λεπτά, όπου $\bar{y}$ η νέα μέση τιμή μετά την αύξηση. Για την νέα τυπική απόκλιση έχουμε: $S_y = S_x = 2$ λεπτά (δεν μεταβάλλεται)