ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

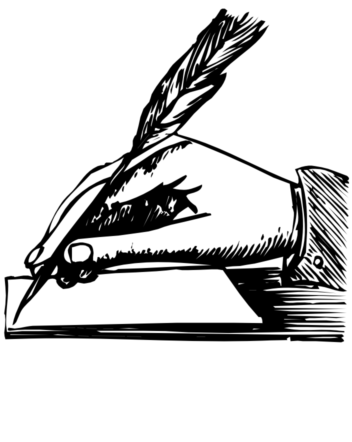
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Δευτέρα 6 Ιουνίου 2022

Λύσεις

των

θεμάτων



Έκδοση 1η

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς
των Επιμελητών των φακέλων του Λυκείου
του Δικτυακού Τόπου **mathematica.gr**
με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica
https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=133&t=71772

Συνεργάστηκαν οι:
Αντωνέας Στρατής, Βαρβεράκης Αντρέας, Κακκαβάς Βασίλης,
Καλαθάκης Γιώργης, Κατσίπης Νίκος, Κωστάκος Γρηγόρης,
Μάγκος Θάνος, Μπεληγιάννης Αθανάσιος,
Μουρούκος Βαγγέλης Παπαγρηγοράκης Μίλτος,
Πρωτοπαπάς Λευτέρης, Ρίζος Γιώργος, Στεργίου Μπάμπης,
Στόγιας Σωτήρης, Συγκελάκης Αλέξανδρος,
Συννεφακόπουλος Αχιλλέας, Τσιφάκης Χρήστος

Το **Δελτίο** διατίθεται ελεύθερα
από το δικτυακό τόπο **mathematica.gr**

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x)=F(x)+c,$$

όπου $c\in\mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x)=F(x)+c,$$

με $c\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

Α3. Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $0<\alpha<1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=0$

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0, 1], παραγωγίσιμη στο (0, 1) και $f'(x)\neq 0$, για όλα τα $x\in(0,1)$, τότε $f(0)\neq f(1)$.

γ) Η συνάρτηση f(x) = σφx είναι παραγωγίσιμη στο $R_2=\mathbb{R}-\{x\,|\,\eta\mu x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$.

δ) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=1$.

ε) Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

A1. Θεωρία. Στο σχολικό βιβλίο, σελ. 186.

A2. Θεωρία. Στο σχολικό βιβλίο, σελ. 192.

A3. Θεωρία. Στο σχολικό βιβλίο, σελ. 161.

A4. **α. Σ** **β. Σ** **γ. Σ** **δ. Λ** **ε. Λ**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(-\infty,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^4-2x^2+1$ και η συνάρτηση $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x}$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h=f\circ g$.

Μονάδες 6

B2. Αν $h(x)=(x-1)^2$, $x\in[0,1]$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι "$1-1$" (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} της h (μονάδες 6).

Μονάδες 9

B3. Έστω $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x}$, $x\in[0,1]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $\phi(x)=\begin{cases}\dfrac{h^{-1}(x)}{1-x} & , \ x\in[0,1) \\ \dfrac{1}{2} & , \ x=1\end{cases}$.

(i) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση ϕ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0,1]$. (μονάδες 6)

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\phi(x_0)=\eta\mu\alpha$, όπου $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. (μονάδες 4)

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ:

Για $x\in D_f=(-\infty,1]$, ισχύει ότι $f(x)=x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2$.

Επίσης $g(x)=\sqrt{x}, x\in D_g=[0,+\infty)$.

Β1. Το πεδίο ορισμού της h είναι το παρακάτω:

$$\left\{x \in D_g : g(x) \in D_f\right\} = \left\{x \in [0,+\infty) : \sqrt{x} \in (-\infty,1]\right\} =$$
$$= \left\{x \geq 0 : \sqrt{x} \leq 1\right\} = \left\{x \geq 0 : x \leq 1\right\} = [0,1].$$

Άρα $D_h = D_{f \circ g} = [0,1] \neq \varnothing$.

Συνεπώς ορίζεται η συνάρτηση h , με τύπο :

$$h(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = \left((\sqrt{x})^2 - 1\right)^2 = (x-1)^2,\ x \in D_h = \left[0,\,1\right].$$

Β2. Η συνάρτηση h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική, με $h'(x) = 2(x-1)$.

Για $x \in [0,1)$, ισχύει $h'(x) < 0$, οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ ως συνεχής στο $[0,1]$.

Αφού η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$, άρα και 1–1, έπεται ότι η h αντιστρέφεται.

Η h είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[0,1]$, οπότε $h(D_h) = [h(1), h(0)] = [0,1]$ και κατά συνέπεια το πεδίο ορισμού της h^{-1} είναι το $D_{h^{-1}} = [0,1]$.

Τότε για $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$, ισχύει $x - 1 \leq 0$, οπότε :

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = (x-1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{y} = |x-1| \Leftrightarrow \sqrt{y} = -(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{y} = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{y}$$

Άρα

$$h^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y},\ y \in [0,1],\ \text{δηλαδή}\ \ h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x},\ x \in [0,1]$$

Β3. Έχουμε ότι

$$\phi(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x} & , \quad x \in [0,1) \\ \dfrac{1}{2} & , \quad x = 1 \end{cases}.$$

(i) Η συνάρτηση ϕ είναι συνεχής στο $(0,1)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{(1-x)((1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2} = \phi(1),$$

οπότε η ϕ είναι συνεχής στο 1.

Τέλος

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = 1 = \phi(0),$$

οπότε η ϕ είναι συνεχής και στο 0. Συνεπώς η ϕ είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Επιπλέον:

$$\phi(1)=\frac{1}{2}\neq\phi(0)=1,$$

οπότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών για τη συνάρτηση ϕ στο $[0,1]$.

ii. Η συνάρτηση ημx είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$, οπότε

$$\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}\Rightarrow \eta\mu\frac{\pi}{6}<\eta\mu\alpha<\eta\mu\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}<\eta\mu\alpha<1.$$

Επομένως

$$\phi(1)<\eta\mu\alpha<\phi(0)$$

Αφού η ϕ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών, υπάρχει $x_0\in(0,1)$ έτσι ώστε $\phi(x_0)=\eta\mu\alpha$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Δίνεται ακόμα ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ και για την παράγωγο f' της f ισχύει ότι:

$$f'(x)=\begin{cases}-2 & , x<-1\\ 3x^2-1 & , x>-1\end{cases}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\begin{cases}-2x-2 & , x\leq-1\\ x^3-x & , x>-1\end{cases}$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f σε σημείο $A(x_0,f(x_0))$ με $x_0>-1$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -2.

Μονάδες 5

Γ3. Έστω $y=2x-2$ η εξίσωση της ευθείας (ε) του ερωτήματος Γ2. Ένα σημείο $M(x,y)$ με $x>2$ κινείται κατά μήκος της ευθείας (ε). Έστω ακόμα E το εμβαδόν του τριγώνου $MK\Gamma$, όπου K είναι η προβολή του σημείου M στον άξονα $x'x$ και Γ είναι το σημείο με συντεταγμένες $(2,0)$. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $B(3,4)$ ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E τη χρονική στιγμή t_0.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]$.

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ:

Γ1. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων, οπότε $f(0)=0$.

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,+\infty)$ και για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ είναι

$$f'(x)=3x^2-1 \Leftrightarrow f'(x)=(x^3-x)'.$$

Άρα $f(x)=x^3-x+c_1$, με $x\in[-1,+\infty)$, όπου c_1 σταθερά.

Είναι $f(0)=c_1 \Leftrightarrow c_1=0$. Άρα $f(x)=x^3-x$, $x\in[-1,+\infty)$.

Έχουμε ότι $f(-1)=(-1)^3-(-1)=-1+1=0 \qquad (1)$

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty,-1]$ και για κάθε $x\in(-\infty,-1)$ είναι

$$f'(x)=-2 \Leftrightarrow f'(x)=(-2x)'.$$

Άρα $f(x)=-2x+c_2$, με $x\in(-\infty,-1]$, όπου c_2 σταθερά.

Έχουμε ότι $f(-1)=-2(-1)+c_2=2+c_2 \qquad (2)$.

Η f είναι συνεχής συνάρτηση, οπότε από τις (1),(2) παίρνουμε: $0=2+c_2 \Leftrightarrow c_2=-2$.

Επομένως,

$$f(x)=-2x-2,\ \ x\in(-\infty,-1].$$

Τελικά είναι

$$f(x)=\begin{cases}-2x-2, & x\le -1\\ x^3-x, & x\ge -1\end{cases}.$$

Γ2. Η εξίσωση της εφαπτόμενης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$, με $x_0>-1$ είναι:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-(x_0^3-x_0)=(3x_0^2-1)(x-x_0) \Leftrightarrow$$

$$y=(3x_0^2-1)x-3x_0^3+x_0+x_0^3-x_0 \Leftrightarrow y=(3x_0^2-1)x-2x_0^3.$$

Η εφαπτόμενη (ε) τέμνει τον άξονα y'y στο -2, οπότε για $x=0$ και $y=-2$ η εξίσωσή της δίνει: $-2=(3x_0^2-1)\cdot 0-2x_0^3 \Leftrightarrow 2x_0^3=2 \Leftrightarrow x_0^3=1 \Leftrightarrow x_0=1$.

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η $(\varepsilon): y=2x-2$.

Γ3. Το σημείο K είναι η προβολή του M στον άξονα x'x, οπότε $K(x,0)$.

Αφού $x>2$, θα είναι $(K\Gamma)=x-2$. Ακόμα $y=2x-2=2(x-1)>0$, οπότε $(KM)=2(x-1)$.

Το εμβαδόν του τριγώνου ΜΚΓ είναι

$$E=\frac{1}{2}(K\Gamma)\cdot(KM)=\frac{1}{2}(x-2)2(x-1)=(x-2)(x-1)=x^2-3x+2.$$

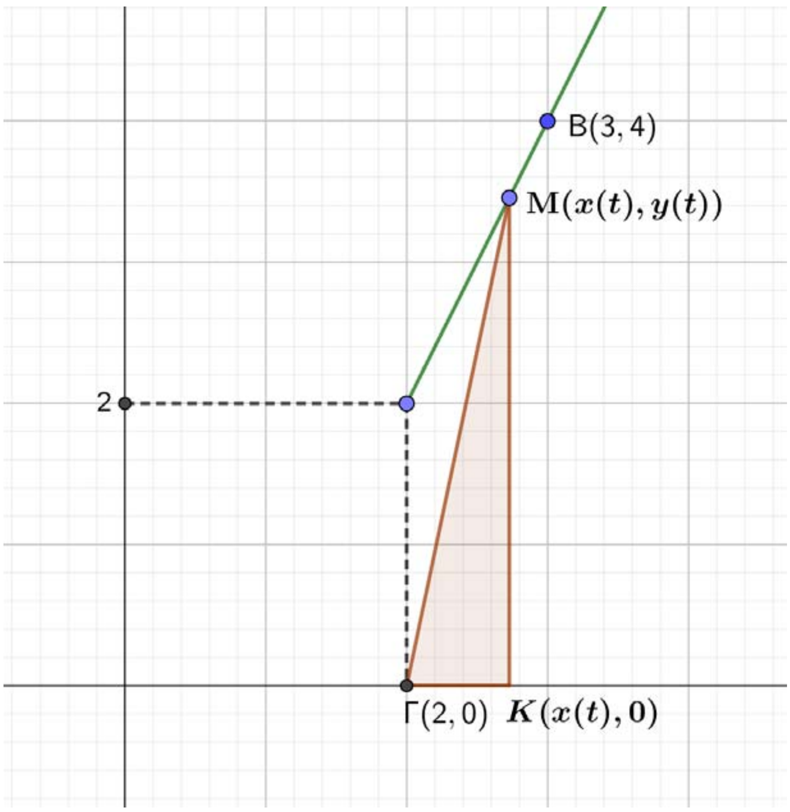
Έστω ότι το x μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη συνάρτηση $x=x(t)$. Τότε :

$$E(t)=x^2(t)-3x(t)+2.$$

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι $E'(t)=2x(t)x'(t)-3x'(t)$.

Τη χρονική στιγμή t_0 έχουμε: $x(t_0)=3$ και $x'(t_0)=2$, οπότε

$$E'(t_0)=2\cdot3\cdot2-3\cdot2=12-6=6 \text{ τετρ.μονάδες/sec.}$$



Γ4. Αν $-x=u$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}u=+\infty$. Άρα

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3}=\lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{1+u^3}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^3-u}{1+u^3}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^3}{u^3}=1,$$

αφού $f(u)=u^3-u$, κοντά στο $+\infty$.

Για $x<-1$ είναι $f(x)=-2x-2$. Επομένως

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}(-2x-2) = \lim_{x\to -\infty}(-2x) = +\infty.$$

Άρα, $\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{f(x)} = 0$ και $f(x) > 0$, κοντά στο $-\infty$.

Επίσης, για $x < -1$, είναι

$$\left|\frac{ημf(x)}{f(x)}\right| = \frac{|ημf(x)|}{|f(x)|} \le \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} \le \frac{ημf(x)}{f(x)} \le \frac{1}{f(x)}.$$

Από κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim_{x\to -\infty}\frac{ημf(x)}{f(x)} = 0$.

Επομένως η τιμή του ζητούμενου ορίου είναι

$$\lim_{x\to -\infty}\left[\frac{ημf(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3}\right] = \lim_{x\to -\infty}\frac{ημf(x)}{f(x)} + \lim_{x\to -\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3} = 0+1=1.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x - \ln(3x)$$

Δ1. **i)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2, με $x_1 < 1 < x_2$.

(μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. (μονάδες 2)

Μονάδες 8

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ1.

Δ2. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι:

$$E = \frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2).$$

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι: $f(2-x_1) < 0$.

Μονάδες 4

Δ4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση: $2f(x)+\ln 3 = 1 + f'(x_2)(x-x_2)$ έχει λύση.

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ:

Δ1.i. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$ και παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = (x-\ln(3x))' = 1 - \frac{1}{3x}\cdot(3x)' = 1-\frac{1}{3x}\cdot 3 = 1-\frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

και $f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x}>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[1,+\infty\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,1\right]$.

Θεωρούμε το διάστημα $A_1=\left(0,1\right]$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο A_1, οπότε το σύνολο τιμών της είναι το σύνολο $f\left(A_1\right)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right)$

Είναι $f(1)=1-\ln(3\cdot 1)=1-\ln 3$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x-\ln(3x)\right)=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln(3x)\right)=-\infty$

Άρα είναι

$$f\left(A_1\right)=\left[1-\ln 3,+\infty\right)$$

Θεωρούμε το διάστημα $A_2=\left[1,+\infty\right)$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο A_2, οπότε το σύνολο τιμών της είναι το σύνολο $f\left(A_2\right)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right)$

Είναι $f(1)=1-\ln(3\cdot 1)=1-\ln 3$ και

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\ln(3x)\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[x\left(1-\dfrac{\ln(3x)}{x}\right)\right]=+\infty$

διότι $\lim\limits_{x\to +\infty} x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(3x)}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\left(\ln(3x)\right)'}{x'}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{1}{3x}\cdot(3x)'}{1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{3x}\cdot 3=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}=0$

Άρα είναι $f\left(A_2\right)=\left[1-\ln 3,+\infty\right)$.

x	0		x_1		1		x_2		$+\infty$
f''(x)		+		+		+		+	
f'(x)		−		−	0	+		+	
f(x)	$+\infty$	+	0	−	1-ln3	−	0	+	$+\infty$
					min				

Το $0\in f\left(A_1\right)=\left[1-\ln 3,+\infty\right)$ αφού είναι $1-\ln 3=\ln e-\ln 3<0$. Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο A_1, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα, έστω τη x_1 στο $A_1=\left(0,1\right]$.

Το $0\in f\left(A_2\right)=\left[1-\ln 3,+\infty\right)$ αφού είναι $1-\ln 3=\ln e-\ln 3<0$. Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο A_2, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα, έστω τη x_2 στο $A_2=\left[1,+\infty\right)$.

Τελικά η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες , τις x_1 , x_2 με $x_1<1<x_2$

ii. Είναι $f''(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{1}{x^2}$ και είναι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\left(0,+\infty\right)$. Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή.

Δ2. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ μόνο στα σημεία $A\left(x_1,0\right)$ και $B\left(x_2,0\right)$ με $x_1<1<x_2$. Επίσης η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[x_1,x_2\right]$ οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι το $E\left(\Omega\right)=\int_{x_1}^{x_2}\left|f(x)\right|dx$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left(x_1,x_2\right)$ και δεν έχει ρίζα σε αυτό. Από το σχόλιο του θεωρήματος Bolzano, η f θα διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα αυτό. Ακόμα είναι $f(1)=1-\ln(3\cdot 1)=1-\ln 3<0$, οπότε θα είναι $f(x)\le 0$ στο διάστημα $\left[x_1,x_2\right]$, άρα

$$E\left(\Omega\right)=\int_{x_1}^{x_2}\left|f(x)\right|dx=-\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx=-\int_{x_1}^{x_2}\left(x-\ln(3x)\right)dx=\int_{x_1}^{x_2}\left(\ln(3x)-x\right)dx$$

Για το ολοκλήρωμα $\int_{x_1}^{x_2}\ln(3x)dx$ θέτουμε $u=3x$, οπότε $du=\left(3x\right)'dx=3dx$

Τα νέα όρια ολοκλήρωσης είναι $u_1=3x_1$ και $u_2=3x_2$. Έτσι

$$\int_{x_1}^{x_2}\ln(3x)dx=\frac{1}{3}\int_{x_1}^{x_2}\ln(3x)3dx=\frac{1}{3}\int_{3x_1}^{3x_2}\ln u du=\frac{1}{3}\int_{3x_1}^{3x_2}u'\cdot\ln u du=\frac{1}{3}\left(\left[u\cdot\ln u\right]_{3x_1}^{3x_2}-\int_{3x_1}^{3x_2}u\cdot\left(\ln u\right)'du\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(3x_2\ln\left(3x_2\right)-3x_1\ln\left(3x_1\right)-\int_{3x_1}^{3x_2}u\cdot\frac{1}{u}du\right)=\frac{1}{3}\left(3x_2\ln\left(3x_2\right)-3x_1\ln\left(3x_1\right)-\int_{3x_1}^{3x_2}du\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(3x_2\ln\left(3x_2\right)-3x_1\ln\left(3x_1\right)-\left[u\right]_{3x_1}^{3x_2}\right)=\frac{1}{3}\left(3x_2\ln\left(3x_2\right)-3x_1\ln\left(3x_1\right)-\left(3x_2-3x_1\right)\right)=$$

$$=x_2\ln\left(3x_2\right)-x_1\ln\left(3x_1\right)-x_2+x_1$$

Είναι

- $f(x_1)=0\Leftrightarrow x_1-\ln\left(3x_1\right)=0\Leftrightarrow\ln\left(3x_1\right)=x_1$
- $f(x_2)=0\Leftrightarrow x_2-\ln\left(3x_2\right)=0\Leftrightarrow\ln\left(3x_2\right)=x_2$

οπότε έχουμε

$$\int_{x_1}^{x_2} \ln(3x)dx = x_2 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_1 - x_2 + x_1 = x_2^2 - x_1^2 - x_2 + x_1$$

Ακόμα είναι

$$\int_{x_1}^{x_2} x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2}$$

Τελικά είναι

$$E(\Omega) = x_2^2 - x_1^2 - x_2 + x_1 - \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{2} = \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} - x_2 + x_1 = \frac{1}{2}\left(x_2^2 - x_1^2 - 2x_2 + 2x_1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_2^2 - x_1^2 - 2x_2 + 2x_1\right) = \frac{1}{2}\left[\left(x_2 - x_1\right)\left(x_2 + x_1\right) - 2\left(x_2 - x_1\right)\right] = \frac{1}{2}\left(x_2 - x_1\right)\left(x_2 + x_1 - 2\right)$$

Δ3. Είναι $0 < x_1 < 1 \Leftrightarrow -1 < -x_1 < 0 \Leftrightarrow 1 < 2 - x_1 < 2$ και (λόγω του Δ2)

$$E > 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2 > 0 \Rightarrow 2 - x_1 < x_2,$$

οπότε $1 < 2 - x_1 < x_2$.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, θα είναι $f(2 - x_1) < f(x_2) = 0$ και το ζητούμενο αποδείχθηκε.

Δ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A\left(x_2, f(x_2)\right)$ είναι:

$$(\epsilon): y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = f'(x_2)(x - x_2).$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι κυρτή, η C_f είναι πάνω από την ϵ, με εξαίρεση το σημείο επαφής, δηλαδή: $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2)$, με το ίσον μόνο αν $x = x_2$.

Επειδή η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στο $x = 1$, ισχύει

$$f(x) \geq f(1) = 1 - \ln 3 \Rightarrow f(x) + \ln 3 \geq 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με το ίσον μόνο αν $x = 1$.

Με πρόσθεση των δύο παραπάνω ανισοτήτων κατά μέλη, έχουμε ότι

$$2f(x) + \ln 3 > 1 + f'(x_2)(x - x_2)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ώστε, η δοσμένη εξίσωση είναι αδύνατη.

ΑΛΛΕΣ ΛΥΣΕΙΣ:

Β2. Έστω $x_1, x_2 \in D_h = [0,1]$ με

$$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow (x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2 \Rightarrow |x_1 - 1| = |x_2 - 1|$$
$$\Rightarrow (x_1 - 1) = -(x_2 - 1) \Rightarrow x_1 = x_2,$$

οπότε η h είναι 1-1.

Επίσης για $x \in [0,1]$, έχουμε:

$$\begin{cases} y = h(x) \\ x \in [0,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (x-1)^2 \\ x \in [0,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = |x-1| \\ x \in [0,1] \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = -(x-1) \\ x \in [0,1] \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{y} \\ x \in [0,1] \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{y} \\ 1 - \sqrt{y} \in [0,1] \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{y} \\ 0 \leq 1 - \sqrt{y} \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{y} \\ -1 \leq -\sqrt{y} \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{y} \\ 0 \leq \sqrt{y} \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{y} \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}.$$

Συνεπώς $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}, x \in D_{h^{-1}} = [0,1]$.

Β3ii. Η συνάρτηση ημx είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$, οπότε

$$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \eta\mu\frac{\pi}{6} < \eta\mu\alpha < \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu\alpha < 1.$$

Θεωρούμε συνάρτηση g με $g(x) = \phi(x) - \eta\mu\alpha,\ x \in D_g = [0,1]$,

η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$, με $g(0)g(1) = (1 - \eta\mu\alpha)\left(\frac{1}{2} - \eta\mu\alpha\right) < 0$.

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (0,1)$ της εξίσωσης $g(x) = 0$, δηλαδή

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow \phi(x_0) = \eta\mu\alpha, \quad x_0 \in (0,1).$$

Γ3. Αφού το σημείο Κ είναι η προβολή του $M(x,y)$ με $x > 2$ στον άξονα x'x, ισχύει $K(x,0)$ και κατά συνέπεια για $t \geq 0$ έχουμε $M(x(t), y(t))$, με $x(t) > 2$, $y(t) = 2x(t) - 2$ και $K(x(t), 0)$.

Το τρίγωνο ΚΜΓ είναι ορθογώνιο με $\widehat{MK\Gamma} = 90^\circ$, οπότε

$$(KM\Gamma)=\frac{1}{2}KM\cdot K\Gamma=\frac{1}{2}|x(t)-2||y(t)|=\frac{1}{2}(x(t)-2)y(t),$$

αφού $x(t)>2>0$ και $y(t)=2x(t)-2>0$.

Από τα δεδομένα έχουμε ότι τη χρονική στιγμή t_0 ισχύουν $x(t_0)=3,\ y(t_0)=4,\ x'(t_0)=2,$

και αφού $y(t)=2x(t),$ ισχύει $y(t_0)=2x(t_0)=4.$

Συνεπώς

$$E(t)=\frac{1}{2}(x(t)-2)y(t),t\geq 0$$

και

$$E'(t)=\frac{1}{2}\left[x'(t)y(t)+(x(t)-2)y'(t)\right],\ t\geq 0$$

Άρα

$$E(t_0)=\frac{1}{2}\left[x'(t_0)y(t_0)+(x(t_0)-2)y'(t_{(0)})\right]=\frac{2\cdot 4+(3-2)\cdot 4}{2}=6 \text{ τετραγωνικές μονάδες/δευτερόλεπτο.}$$

Δ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\frac{1}{3},1\right]$ και $\left[1,2\right]$ και

$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}>0$, $f\left(1\right)=1-\ln 3=\ln e-\ln 3<0$ και $f\left(2\right)=2-\ln 6=\ln e^2-\ln 6>0$.

Άρα η f ικανοποιεί το Θ. Bolzano σε καθένα από αυτά, οπότε υπάρχουν $x_1\in\left(\frac{1}{3},1\right)$ και

$x_2\in\left(1,2\right)$ τέτοια ώστε $f\left(x_1\right)=0$ και $f\left(x_2\right)=0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ με $f'\left(x\right)=\frac{x-1}{x}$.

Για $x<1$ έχουμε $f'\left(x\right)<0$ και για $x>1$ $f'\left(x\right)>0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Έτσι η $f\left(x\right)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1<1<x_2$ καθώς είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα $(0,1]$ και $[1,+\infty)$.

Δ2. Το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με: $E=\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|\,dx$.

Επειδή $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$, η συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο στο (x_1,x_2), κι αφού $f(1)<0$, θα ισχύει $f(x)<0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$, άρα $f(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[x_1,x_2]$.

Επομένως:

$$E=\int_{x_1}^{x_2}|(\ln(3x)-x)dx=\int_{x_1}^{x_2}|(x'\cdot\ln(3x)-x)dx=[x'\cdot\ln(3x)]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}|\left(x\cdot\frac{3}{3x}\right)dx-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2}=$$

$$=x_2\ln(3x_2)-x_1\ln(3x_1)-x_2+x_1-\frac{x_2^2-x_1^2}{2}=x_2^2-x_1^2-x_2+x_1-\frac{x_2^2-x_1^2}{2}=$$

$$=\frac{x_2^2-x_1^2-2(x_2-x_1)}{2}=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2),$$

διότι $f(x_1)=0\Leftrightarrow x_1=\ln(3x_1)$ και $f(x_2)=0\Leftrightarrow x_2=\ln(3x_2)$.

Δ3. Έχουμε ότι $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}=\ln e^{\frac{1}{2}}-\ln\frac{3}{2}>0$, αφού ισχύει $e^{\frac{1}{2}}>\frac{3}{2}\Leftrightarrow e>\frac{9}{4}$.

Επίσης $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}-\ln\frac{9}{2}=\ln e^{\frac{3}{2}}-\ln\frac{9}{2}<0$, αφού ισχύει $e^{\frac{3}{2}}<\frac{9}{2}\Leftrightarrow e^3<\frac{81}{4}$.

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ (ερώτημα Δ1) και $f\left(\frac{3}{2}\right)<0=f(x_2)$, ισχύει $\frac{3}{2}<x_2$.

Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ (ερώτημα Δ1) και $f\left(\frac{1}{2}\right)>0=f(x_1)$ ισχύει $\frac{1}{2}<x_1$. Συνεπώς

$$\frac{1}{2}<x_1<1<\frac{3}{2}<x_2\Rightarrow x_1+x_2>2\Rightarrow x_2>2-x_1.$$

Όμως $x_2, 2-x_1\in(1,+\infty)$ και δεδομένου ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ ισχύει

$$x_2>2-x_1\Rightarrow f(x_2)>f(2-x_1)\Rightarrow f(2-x_1)<0.$$

Δ3. Πρέπει και αρκεί να δείξουμε ότι $2-x_1<x_2$ ή ισοδύναμα $\frac{x_1+x_2}{2}>1$.

Εναλλακτικά, μια "γνωστή" ανισότητα είναι ότι για $0<a<b$

$$\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}\ (*)$$

Από αυτή με $a=x_1$ και $b=x_2$ παίρνουμε $a-b=\ln(3a)-\ln(3b)=\ln a-\ln b$,

οπότε $1<\frac{x_1+x_2}{2}$ και άρα $2-x_1<x_2$ κτλ.

* Ισοδύναμα για τη συνάρτηση $g(x)=\ln x-2\frac{x-1}{x+1}$ είναι $g(b/a)>0$.

Απόδειξη: Πράγματι, η $g(x)$ έχει $g(1)=0$ και $g'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$ για $0<x\neq 1$.

Αφού $b/a>1$, έπεται ότι $g(b/a)>g(1)=0$.

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=2f(x)+\ln 3-1-f'(x_2)(x-x_2),$$

με $x>0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με

$$g'(x)=2f'(x)-f'(x_2)=2\left(1-\frac{1}{x}\right)-\left(1-\frac{1}{x_2}\right)=1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x_2}$$

για κάθε $x>0$.

Είναι:

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x_2}=0\Leftrightarrow \frac{2}{x}=\frac{x_2+1}{x_2}\Leftrightarrow x=x_0:=\frac{2x_2}{x_2+1}$$

και

$$g'(x)>0\Leftrightarrow 1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x_2}>0\Leftrightarrow \frac{2}{x}<\frac{x_2+1}{x_2}\Leftrightarrow x>x_0.$$

Επομένως, η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0. Θα αποδείξουμε ότι $g(x_0)>0$, οπότε θα είναι $g(x)>0$ για κάθε $x>0$ και η δοσμένη εξίσωση είναι αδύνατη. Πράγματι, είναι:

$$g(x_0)=2f(x_0)+\ln 3-1-f'(x_2)(x_0-x_2)=2x_0-2\ln(3x_0)+\ln 3-1-\left(1-\frac{1}{x_2}\right)(x_0-x_2)=$$

$$=2x_0-2\ln\left(\frac{6x_2}{x_2+1}\right)+\ln 3-1-x_0+x_2+\frac{x_0}{x_2}-1=x_0-2\ln\left(\frac{6x_2}{x_2+1}\right)+\ln 3-2+x_2+\frac{2}{x_2+1}=$$

$$=\frac{2x_2}{x_2+1}-2\ln\left(\frac{6x_2}{x_2+1}\right)+\ln 3-2+x_2+\frac{2}{x_2+1}=\frac{2(x_2+1)}{x_2+1}-2\ln\left(\frac{6x_2}{x_2+1}\right)+\ln 3-2+x_2=$$

$$=x_2+\ln 3-2\ln\left(\frac{6x_2}{x_2+1}\right)=\ln(3x_2)+\ln 3-2\ln\left(\frac{6x_2}{x_2+1}\right)=\ln\left[\frac{9x_2}{\dfrac{36x_2^2}{(x_2+1)^2}}\right]=\ln\left[\frac{(x_2+1)^2}{4x_2}\right]>\ln 1=0,$$

αφού $\dfrac{(x_2+1)^2}{4x_2}>1\Leftrightarrow x_2^2+2x_2+1>4x_2\Leftrightarrow (x_2-1)^2>0$, που ισχύει.