ΜΕΡΟΣ Α΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο
Ανισώσεις

4.1 Ανισώσεις 1ου Βαθμού

4.2 Ανισώσεις 2ου Βαθμού

Η εξεταστέα ύλη για το κεφάλαιο αυτό είναι:

Παράγραφος 4.1

Παράγραφος 4.2

ΘΕΜΑ Α

Θέμα Α.1-Ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου

Α.1.1. Ερωτήσεις Σωστού–Λάθους

Στις επόμενες προτάσεις, να γράψετε δίπλα στην κάθε πρόταση το γράμμα Σ, αν η πρόταση είναι σωστή, ή το γράμμα Λ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Η ανίσωση $\alpha x+\beta>0$, όταν $\alpha>0$ έχει λύσεις όλα τα x με $x>-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

2. Η ανίσωση $\alpha x+\beta<0$, όταν $\alpha<0$ έχει λύσεις όλα τα x με $x<-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

3. Η ανίσωση $\alpha x+\beta<0$, όταν $\alpha=0$ είναι πάντα αδύνατη .

4. Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ με $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma>0$ γράφεται ως:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=(x-x_1)(x-x_2)$$

όπου x_1 και x_2 οι ρίζες του.

5. Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ με $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma<0$ δεν παραγοντοποιείται.

6. Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ με $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=0$ γράφεται ως:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

7. Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ γίνεται ετερόσημο του α, μόνο όταν είναι $\Delta>0$ και για τις τιμές του x που βρίσκονται μεταξύ των ριζών.

8. Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ γίνεται ομόσημο του α, για όλες τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, μόνο όταν $\Delta<0$.

9. Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ γίνεται ομόσημο του α, όταν $\Delta>0$ και για τις τιμές του x που βρίσκονται μεταξύ των ριζών.

10. Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ γίνεται μηδέν, όταν η τιμή του x είναι κάποια από τις ρίζες του.

11. Η ανίσωση $|\alpha|\cdot x>\beta,\ \alpha\neq 0$ έχει λύσεις όλα τα x, με $x>\dfrac{\beta}{|\alpha|}$.

12. Η ανίσωση $\alpha^2x^2-\alpha x+2>0,\ \alpha\neq 0,$ αληθεύει για όλες τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$.

13. Το τριώνυμο $x^2-\alpha^2x-2\alpha^4,\ \alpha\neq 0$ έχει θετικό πρόσημο για τις τιμές του $x\in(-\alpha^2,\ 2\alpha^2)$.

14. Το τριώνυμο $x^2-\alpha^2x-2\alpha^4,\ \alpha\neq 0$ γράφεται:

$$x^2-\alpha^2x-2\alpha^4=(x-\alpha^2)(x+2\alpha^2)$$

15. Το τριώνυμο $|\alpha|x^2-\alpha x-3,\ \alpha\neq 0$ γίνεται θετικό για όλες τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$.

Α.1.2. Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

*Στις επόμενες προτάσεις η σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση είναι **μόνο μία**. Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση της κάθε ερώτησης.*

1. Η ανίσωση $\alpha x+\beta<0$, όταν $\alpha<0$ έχει λύσεις όλα τα x με:

Α. $x>\dfrac{\beta}{\alpha}$ ***Β.*** $x<\dfrac{\beta}{\alpha}$ ***Γ.*** $x<-\dfrac{\beta}{\alpha}$ ***Δ.*** $x>-\dfrac{\beta}{\alpha}$

2. Η ανίσωση $\alpha x+\beta<0$, όταν $\alpha=0$ αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αν είναι:

Α. $\beta<0$ ***Β.*** $\beta>0$ ***Γ.*** $\beta=0$ ***Δ.*** τίποτα από τα προηγούμενα

3. Αν $x_1,\ x_2$ οι ρίζες του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ με $\Delta>0$, τότε το τριώνυμο γράφεται:

Α. $\alpha(x_1-x)(x_2-x)$ ***Β.*** $\alpha x^2+\beta x+\gamma=-\alpha(x-x_1)(x-x_2)$

Γ. $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x+x_1)(x+x_2)$ ***Δ.*** τίποτα από τα προηγούμενα.

4. Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ με $\Delta=0$ γράφεται ως:

Α. $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x-\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ ***Β.*** $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x-\frac{\alpha}{2\beta}\right)^2$

Γ. $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ ***Δ.*** τίποτα από τα προηγούμενα

5. Η ανίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0,\ \alpha<0$ με $\Delta<0$ αληθεύει για:

Α. μόνο για όλα τα $x>0$ ***Β.*** μόνο για όλα τα $x<0$

Γ. όλα τα $x\in\mathbb{R}$ ***Δ.*** τίποτα από τα προηγούμενα.

6. Η ανίσωση $x^2+\alpha x+\alpha^2<0,\ \alpha\neq 0$ αληθεύει για:

Α. όλα τα $x>0$ ***Β.*** όλα τα $x<0$

Γ. για καμία τιμή του $x\in\mathbb{R}$ ***Δ.*** τίποτα από τα προηγούμενα

Α.1.3. Ερωτήσεις Αντιστοίχισης

*Στις επόμενες ερωτήσεις να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α **με ένα μόνο** στοιχείο της στήλης Β, ώστε να προκύπτουν ισότητες, και ισοδύναμες ή αληθείς σχέσεις ή προτάσεις. Στη στήλη Β υπάρχει ένα επιπλέον στοιχείο.*

1. Έστω η ανίσωση $\alpha x+\beta<0,\ \alpha\neq 0$.

ΣΤΗΛΗ Α (συνθήκη)	***ΣΤΗΛΗ Β (λύσεις)***
1. όταν $\alpha<0$	α. $x>\frac{\beta}{\alpha}$
2. όταν $\alpha>0$	β. $x<-\frac{\beta}{\alpha}$
3. όταν $\alpha=0$ και $\beta<0$	γ. $x>-\frac{\beta}{\alpha}$
	δ. όλα τα $x\in\mathbb{R}$

2. Το τριώνυμο $αx^2+βx+γ=0,\ α\neq 0$ γράφεται:

ΣΤΗΛΗ Α (Αν...)	***ΣΤΗΛΗ Β (τότε...)***
1. $Δ<0$	α. $αx^2+βx+γ=α\left(x+\dfrac{β}{2α}\right)^2$
2. $Δ>0$	β. $αx^2+βx+γ=α(x_1-x)(x_2-x)$
3. $Δ=0$	γ. $αx^2+βx+γ=α\left[\left(x+\dfrac{β}{2α}\right)^2+\dfrac{\lvert Δ\rvert}{4α^2}\right]$
	δ. $αx^2+βx+γ=(αx+γ)^2$

3. Έστω το τριώνυμο $x^2+αx-2α^2,\ α>0$.

ΣΤΗΛΗ Α (Για...)	***ΣΤΗΛΗ Β (το τριώνυμο...)***
1. $x\in(-2α,\ α)$	α. έχει πρόσημο αρνητικό
2. $x\in(-\infty,\ -2α)\cup(α,\ +\infty)$	β. έχει πρόσημο θετικό
3. $x=-2α$ ή $x=α$	γ. μηδενίζεται
	δ. εναλλάσει πρόσημο

Θέμα Α.2-Αποδείξεις προτάσεων και ιδιοτήτων

Στα επόμενα παρατίθενται όλες οι αποδείξεις των προτάσεων και των ιδιοτήτων του 4ου Κεφαλαίου που περιέχονται στην εξεταστέα ύλη του μαθήματος: «Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων» της Α΄Λυκείου και θα αποτελέσουν το 2ο μέρος του 1ου θέματος (το Α.2) στις γραπτές προαγωγικές εξετάσεις. Οι αποδείξεις έγιναν σύμφωνα με το περιεχόμενο του σχολικού βιβλίου.

1. Αν $\alpha > 0$, να αποδείξετε ότι η ανίσωση $\alpha x + \beta > 0$ έχει λύσεις όλα τα x με $x > -\frac{\beta}{\alpha}$.

Απόδειξη

Έχουμε:

$$\alpha x + \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha x + \beta - \beta > -\beta \Leftrightarrow \alpha x > -\beta$$

Αν $\alpha > 0$, τότε:

$$\alpha x > -\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha x}{\alpha} > \frac{-\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x > \frac{-\beta}{\alpha}$$

2. Αν $\alpha < 0$, να αποδείξετε ότι η ανίσωση $\alpha x + \beta > 0$ έχει λύσεις όλα τα x με $x < \frac{\beta}{\alpha}$.

Απόδειξη

Έχουμε:

$$\alpha x + \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha x + \beta - \beta > -\beta \Leftrightarrow \alpha x > -\beta$$

Αν $\alpha < 0$, τότε:

$$\alpha x > -\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha x}{\alpha} < \frac{-\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x < \frac{-\beta}{\alpha}$$

3. Αν $\alpha = 0$, να αποδείξετε ότι η ανίσωση $\alpha x + \beta > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν είναι $\beta > 0$, ενώ είναι αδύνατη, αν είναι $\beta \le 0$.

Απόδειξη

Αν $\alpha = 0$, τότε η ανίσωση γίνεται $0x > -\beta$, η οποία

- αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν είναι $\beta > 0$, ενώ
- είναι αδύνατη, αν είναι $\beta \le 0$.

4. Έστω το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \ne 0$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$. Αν $\Delta > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$$

όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου.

Απόδειξη

Το τριώνυμο μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}\right) = \alpha\left[x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{\beta}{2\alpha} + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha}\right] =$$

$$= \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2}\right]$$

Επομένως:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[(x + \frac{\beta}{2\alpha})^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2}\right]$$

Αν $\Delta > 0$, τότε ισχύει $\Delta = \left(\sqrt{\Delta}\right)^2$, οπότε έχουμε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right] = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right) =$$

$$= \alpha\left[x - \left(\frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\right]\left[x - \left(\frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\right]$$

Επομένως:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$$

όπου $x_1,\ x_2$ οι ρίζες του τριωνύμου .

5. Έστω το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$. Αν $\Delta=0$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

Απόδειξη

Το τριώνυμο μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=\alpha\left[x^2+2\cdot x\cdot\frac{\beta}{2\alpha}+\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{\gamma}{\alpha}\right]=$$

$$=\alpha\left[(x+\frac{\beta}{2\alpha})^2+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}\right]$$

Επομένως:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}\right]$$

Αν $\Delta=0$, τότε από την παραπάνω ισότητα έχουμε:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

6. Έστω το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$. Αν $\Delta<0$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$$

Απόδειξη

Το τριώνυμο μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=\alpha\left[x^2+2\cdot x\cdot\frac{\beta}{2\alpha}+\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{\gamma}{\alpha}\right]=$$

$$=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}\right]$$

Επομένως:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}\right]$$

Αν $\Delta<0$, τότε ισχύει $|\Delta|=-\Delta$, οπότε έχουμε:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$$

Σχόλιο: Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι θετική, το τριώνυμο δεν αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων.

7. Έστω το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$. Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο γίνεται ετερόσημο του α, μόνο όταν είναι $\Delta>0$ και για τις τιμές του x, που βρίσκονται μεταξύ των ριζών .

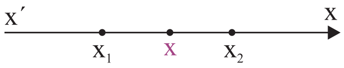
Απόδειξη

Αν $\Delta>0$, τότε, όπως ξέρουμε, ισχύει :

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)\ (1)$$

Υποθέτουμε ότι $x_1<x_2$ και τοποθετούμε τις ρίζες σε έναν άξονα.

Αν $x_1<x<x_2$ (Σχήμα 1), τότε $x-x_1>0$ και $x-x_2<0$, οπότε $(x-x_1)(x-x_2)<0$. Επομένως, λόγω της (1), το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α.



(Σχήμα 1)

8. Έστω το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha \neq 0$ και. $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο γίνεται μηδέν , όταν η τιμή του x είναι κάποια από τις ρίζες του τριωνύμου.

Απόδειξη

Αν $\Delta=0$, τότε ισχύει:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

Επομένως, το τριώνυμο είναι ομόσημο του α για κάθε πραγματικό αριθμό $x \neq -\frac{\beta}{2\alpha}$, ενώ μηδενίζεται για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$.

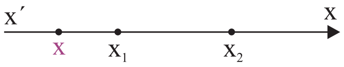
9. Έστω το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha \neq 0$ και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$. Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο γίνεται ομόσημο του α, για τις τιμές του x που δεν βρίσκονται μεταξύ των ριζών του και δεν είναι κάποια από τις ρίζες του .

Απόδειξη

Αν $\Delta>0$, τότε, όπως ξέρουμε, ισχύει :

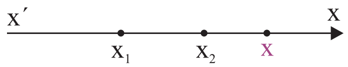
$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2) \quad (1)$$

- Αν $x<x_1<x_2$ (Σχήμα 2), τότε $x-x_1<0$ και $x-x_2<0$, οπότε $(x-x_1)(x-x_2)>0$. Επομένως, λόγω της (1), το τριώνυμο είναι ομόσημο του α.



(Σχήμα 2)

- Αν $x_1 < x_2 < x$ (Σχήμα 3), τότε $x - x_1 > 0$ και $x - x_2 > 0$. Επομένως, λόγω της (1), το τριώνυμο ειναι ομόσημο του α.



(Σχήμα 3)

10. Έστω το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$. Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο γίνεται ομόσημο τουα, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Απόδειξη

Αν $\Delta < 0$, τότε ισχύει:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$$

Όμως η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι θετική για κάθε πραγματικό αριθμό x. Επομένως το τριώνυμο είναι ομόσημο του α σε όλο το $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Β

Από την Τράπεζα Θεμάτων του Υπουργείου ΠΑΙ.Θ.(Ι.Ε.Π.). Περιλαμβάνονται 25 θέματα αυτής της κατηγορίας .

ΘΕΜΑ Β1

α) Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - x - 2 = 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να λυθεί η ανίσωση $x^2 - x - 2 > 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 12)

γ) Να τοποθετήσετε το $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Β2

Δίνονται οι ανισώσεις $-x^2 + 5x - 6 < 0$ (1) και $x^2 - 16 \leq 0$ (2).

α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1), (2).

(Μονάδες 12)

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β3

Δίνεται πραγματικός αριθμός x, για τον οποίο ισχύει $d(x,-2)<1$.
Να δείξετε ότι:

α) $-3<x<-1$.

(Μονάδες 10)

β) $x^2+4x+3<0$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Β4

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $3x^2-2x-1$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες έχει νόημα η παράσταση:

$$A(x)=\frac{x-1}{3x^2-2x-1}$$

και στη συνέχεια να την απλοποιήσετε.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $|A(x)|=1$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Β5

Δίνεται η εξίσωση $x^2-\lambda x+(\lambda^2+\lambda-1)=0$ (1), με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση $S^2-P-2\geq 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1).

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β6

α) Να λύσετε τις ανισώσεις $|2x-5|\leq 3$ και $2x^2-x-1\geq 0$.

(Μονάδες 16)

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος (α).

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Β7

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-5|<2$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|2-3x|>5$.

(Μονάδες 8)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δύο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Β8

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2-3x+1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες $2x^2-3x+1<0$.

(Μονάδες 5)

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης $2x^2-3x+1<0$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β9

Δίνονται οι ανισώσεις $3x-1<x+9$ και $2-\frac{x}{2}\leq x+\frac{1}{2}$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β10

α) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{|x+1|}{3}-\frac{|x+1|+4}{5}=\frac{2}{3}$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση $-x^2+2x+3\leq 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Β11

α) Να λύσετε την ανίσωση $\left|x-\frac{1}{2}\right|<4$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|x+5|\geq 3$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις γράψετε με τη μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Β12

α) Να αποδείξετε ότι $x^2+4x+5>0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

(Μονάδες 10)

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$$B=|x^2+4x+5|-|x^2+4x+4|$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Β13

α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|2x-3|\le 5$

(Μονάδες 9)

ii) $|2x-3|\ge 1$

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Β14

α) Να λύσετε την εξίσωση $2x^2-x-6=0$ (1).

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|x-1|<2$ (2).

(Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Β15

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x-1|<1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0<x<1$.

(Μονάδες 15)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$1,\ x,\ x^2$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β16

Δίνεται το τριώνυμο $-x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$.

(Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β17

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2-10x+21<0$.

(Μονάδες 12)

β) Δίνεται η παράσταση:

$$A=|x-3|+|x^2-10x+21|$$

i) Για $3<x<7$, να δείξετε ότι $A=-x^2+11x-24$.

(Μονάδες 8)

ii) Να βρείτε τις τιμές του $x\in(3,7)$, για τις οποίες ισχύει $A=6$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Β18

α) Να λύσετε την ανίσωση $3x^2 - 4x + 1 \leq 0$.

(Μονάδες 12)

β) Αν α, β δύο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\dfrac{3\alpha + 6\beta}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β19

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x+4| \geq 3$.

(Μονάδες 12)

β) Αν $\alpha \geq -1$, να γράψετε την παράσταση $A = ||\alpha + 4| - 3|$ χωρίς απόλυτες τιμές. Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β20

α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|1-2x| < 5$ και

(Μονάδες 9)

ii) $|1-2x| \geq 1$

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Β21

Δίνεται η παράσταση $K = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2}$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$.

(Μονάδες 10)

β) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση K.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Β22

α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 4| = 3|x - 1|$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|3x - 5| > 1$.

(Μονάδες 9)

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Β23

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| \geq 5$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3 .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β).

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Β24

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + \lambda x - 5$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν μια ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός $x_0 = 1$, να προσδιορίσετε την τιμή του λ .

(Μονάδες 12)

β) Για $\lambda = 3$, να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β25

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + 9x - 12,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 13)

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Γ

Με την εισήγηση των διδασκόντων. Περιλαμβάνονται 15 θέματα αυτής της κατηγορίας .

ΘΕΜΑ Γ1

Δίνεται το τριώνυμο $A(x) = (\lambda - 2)x^2 + 2(2\lambda - 3)x + 5\lambda - 6,\ \lambda \neq 2$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $A(x) = 0$ να έχει δύο άνισες και πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 7)

β) Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η ανίσωση $A(x) > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$;

(Μονάδες 8)

γ) Αν η εξίσωση $A(x) = 0$ έχει δύο άνισες ρίζες x_1 και x_2, να βρείτε τις τιμές του $\lambda > 2$, ώστε να ισχύει η σχέση:

$$x_1 + x_2 - x_1 \cdot x_2 \geq 2$$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Γ2

Έστω Α και Β τα σημεία που παριστάνουν σ΄έναν άξονα τους αριθμούς -3 και 5 αντίστοιχα και Μ ένα σημείο στο εσωτερικό του τμήματος ΑΒ, τέτοιο ώστε $(MA) < 2(MB)$ (1).

α) Να διατυπώσετε αλγεβρικά τη σχέση (1).

(Μονάδες 8)

β) Ποιοι αριθμοί αντιστοιχούν στο σημείο Μ;

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τα σημεία Ν του άξονα των ακεραίων αριθμών, που ικανοποιούν την σχέση (1), στο εσωτερικό του τμήματος ΑΒ, ώστε να ισχύει $|(NA) - 2(NB)| < 3$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Γ3

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2-3\alpha\beta+5\beta^2>0,\ \left(\alpha,\beta\in\mathbb{R}-\{0\}\right)$.

(Μονάδες 12)

β) Να καθορίσετε το πρόσημο της παράστασης $A=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{5\beta}{\alpha}-3$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Γ4

Αν οι ρίζες $x_1,\ x_2$ της εξίσωσης $x^2-\lambda x+6=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$ (1) ικανοποιούν την ισότητα:

$$9{x_1}^2x_2+3{x_1}^3+9x_1{x_2}^2+3{x_2}^3=1029\ (2)$$

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda=7$.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|x-\lambda|+x_1x_2>x_1+x_2+4$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Γ5

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου t^2-3t+2.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $|x-5|^2-3|x-5|+2>0$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Γ6

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+(\lambda-1)=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 9)

β) Αν S και P το άθροισμα και το γινόμενο αντίστοιχα των ριζών της εξίσωσης (1), να αποδείξετε ότι η ανίσωση $S^2 - P > 0$ αληθεύει για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

γ) Αν Δ είναι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1), να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\sqrt{\Delta} > \sqrt{3}$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ7

Δίνεται το τριώνυμο $A(x) = (2-\lambda)x^2 - 2(2\lambda - 3)x + 5\lambda - 6,\ \lambda \neq 2$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ανίσωση $A(x) > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ανίσωση $A(x) < 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Γ8

Δίνεται το τριώνυμο $K(x) = (P(A)-1)x^2 - 2P(A)x + (P(A)+1)$ (1), όπου $P(A)$ είναι η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A του δειγματικού χώρου Ω με $A \neq \Omega$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $K(x) = 0$ έχει δύο άνισες και πραγματικές ρίζες τις οποίες να προσδιορίσετε ως συνάρτηση του $P(A)$.

(Μονάδες 9)

β) Αφού διατάξετε τις ρίζες του τριωνύμου με αύξουσα σειρά σε ένα άξονα, να βρείτε το πρόσημο του για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες του τριωνύμου (1) είναι ετερόσημες. Υπάρχει ενδεχόμενο A του δειγματικού χώρου Ω τέτοιο ώστε οι ρίζες του τριωνύμου να είναι αντίθετες; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ9

Δίνεται το τριώνυμο $K(x)=P(A)x^2-P(A\cup B)x+\frac{1}{2}P(B)$ (1), όπου $P(A)$ και $P(B)$ οι πιθανότητες δύο μη κενών και ασυμβίβαστων ενδεχομένων A και B του δειγματικού χώρου Ω.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $K(x)=0$ έχει δύο άνισες και πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 9)

β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου $K(x)$, να αποδείξετε ότι οι ρίζες αυτές είναι θετικές και ότι:

$$x_1+x_2>1$$

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x<0$ το τριώνυμο $K(x)$ έχει θετικό πρόσημο.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ10

Δίνονται οι ανισώσεις $|x-P(A)|<2$ (1) και $x^2-\left(P(A')\right)^2\geq 0$ (2).

α) Να λύσετε τις ανισώσεις (1) και (2).

(Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια ενός άξονα να βρείτε τις κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Γ11

Δίνεται το τριώνυμο $A(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ και η παράσταση:

$$B(x)=A(x)+\lambda(x^2+1),\ \lambda\in\mathbb{R}$$

α) Να γράψετε την παράσταση $B(x)$ σε μορφή τριωνύμου και να βρείτε τη διακρίνουσά του.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει πάντα πραγματικός αριθμός λ τέτοιος, ώστε το τριώνυμο $B(x)$ να είναι τέλειο τετράγωνο πρωτοβάθμιου πολυωνύμου.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Γ12

Δίνεται η εξίσωση $|x-1| = \alpha^2 - 3\alpha - 4,\ \alpha \in \mathbb{R}$ (1) και η ανίσωση:

$$\frac{1}{4}x^2 - 5x + \alpha^2 > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}\ (2)$$

α) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει πραγματικές λύσεις ως προς x.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η ανίσωση (2) να αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει πραγματικές λύσεις ως προς x και η ανίσωση (2) να αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ13

Δίνεται η ανίσωση $(\alpha^2 - 1)x^2 - 5x + (3 + \alpha^2) < 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$ (1) και η εξίσωση:

$$|x-3| = \alpha^2 - \frac{1}{4},\ \alpha \in \mathbb{R}\ (2)$$

α) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η ανίσωση (1) να αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση (2) να έχει πραγματικές λύσεις ως προς x.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η ανίσωση (1) να αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η εξίσωση (2) να έχει πραγματικές λύσεις ως προς x.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ14

Δίνεται το τριώνυμο:

$$K(x) = \left(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}\right)x^2 - \left(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}\right)x + \frac{1}{4}\left(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}\right),\ \alpha \neq \beta \text{ και } \alpha, \beta > 0 \ (1)$$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για $\alpha > \beta$.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών του τριωνύμου για $\alpha < \beta$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Γ15

Δίνονται οι εξισώσεις:

$$\left|x^2 - 3x + 2\right| = -\left[P(A)\right]^2 + 3P(A) - 2 \ (1) \text{ και } \left|x - 2\right| = P(B) - 1 \ (2)$$

όπου P(A) και P(B) είναι δύο ενδεχομένα *A* και *B* ενός δειγματικού χώρου Ω.

α) Για ποιες τιμές της P(A) η εξίσωση (1) έχει λύσεις ως προς $x \in \mathbb{R}$;

(Μονάδες 5)

β) Για ποιες τιμές της P(B) η εξίσωση (2) έχει λύσεις ως προς $x \in \mathbb{R}$;

(Μονάδες 5)

γ) Τι συμβαίνει όταν το ενδεχόμενο A είναι αδύνατο ή βέβαιο;

(Μονάδες 5)

δ) Τι συμβαίνει όταν το ενδεχόμενο Β είναι αδύνατο ή βέβαιο;

(Μονάδες 5)

ε) Αν $P(A')=\frac{1}{3}$, να λύσετε την εξίσωση (1)

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Από την Τράπεζα Θεμάτων του Υπουργείου ΠΑΙ.Θ.(Ι.Ε.Π.). Περιλαμβάνονται 34 θέματα αυτής της κατηγορίας .

ΘΕΜΑ Δ1

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x)=3x^2+\kappa x-4$, με παράμετρο $\kappa\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ, το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και α, β δύο πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει $\alpha<x_1<x_2<\beta$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου:

$$\alpha\cdot f(\alpha)\cdot\beta\cdot f(\beta)$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ2

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου x^2-5x+6 για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Δίνεται η εξίσωση $\frac{1}{4}x^2+(2-\lambda)x+\lambda-2=0$ (1) με παράμετρο λ.

i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

(Μονάδες 10)

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ3

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(Μονάδες 9)

β) Για ποιες τιμές του $\lambda \neq 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες;

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε $f(x) \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ4

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 3| \leq 5$:

(Μονάδες 7)

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x - 3|$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x - 3| \leq 5$:

(Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε το πλήθος των ακέραιων αριθμών x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x|-3|\le 5$.

Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ5

α) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$ με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$ έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες,

(Μονάδες 6)

ii) Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 6)

β) Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2+2x+3$, $x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)\ge 2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)-2}\le 2$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ6

α) i) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2+9x+18$.

(Μονάδες 4)

ii) Να λύσετε την εξίσωση $|x+3|+|x^2+9x+18|=0$.

(Μονάδες 7)

β) i) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2+9x+18$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x.

(Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$|x^2+9x+18| = -x^2-9x-18$$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ7

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 > x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha > 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς $0,\ 1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \sqrt{\alpha}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος (α).

(Μονάδες 10)

ii) Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς $\alpha,\ \alpha^2,\ \dfrac{\alpha+\alpha^2}{2}$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ8

Δίνεται το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha \neq 0$ με ρίζες τους αριθμούς 1 και 2.

α) Χρησιμοποιώντας τους τύπους για το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών του τριωνύμου, να αποδείξετε ότι $\gamma = 2\alpha$ και $\beta = -3\alpha$.

(Μονάδες 9)

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x \in (1,2)$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $\alpha < 0$,

(Μονάδες 9)

ii) να λύσετε την ανίσωση $\gamma x^2+\beta x+\alpha < 0$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ9

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

(Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1x_2$ των ριζών .

(Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda>0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

δ) Αν $0<\lambda\neq 1$ και $x_1,\ x_2$ είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $f(0)\cdot f(\kappa)\cdot f(\mu)$, όπου κ, μ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$x_1<\kappa<x_2<\mu$$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ10

Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=-x^2+2x+3$.

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)$ για τις διάφορες τιμές του x.

(Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου:

$$f(2,999)\cdot f(-1,002)$$

(Μονάδες 7)

γ) Αν $-3<\alpha<3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $-\alpha^2+2|\alpha|+3$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ11

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x + (\lambda^2 - \lambda) = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = \dfrac{1}{\sqrt{S-P}}$, όπου S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) αντίστοιχα, έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Δ12

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $3 < \lambda < 12$, τότε:

i) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες,

(Μονάδες 6)

ii) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ13

Δίνεται το τριώνυμο $x^2+\beta x+\beta^2$, όπου $\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

(Μονάδες 4)

β) **i)** Αν $\beta\neq 0$ τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου;

(Μονάδες 7)

ii) Πώς αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν $\beta=0$;

(Μονάδες 6)

γ) Με τη βοήθεια της απάντησής στο ερώτημα (β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\ \beta$ που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ14

Δίνεται το τριώνυμο x^2-2x-8.

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x.

(Μονάδες 10)

β) Αν $\kappa=-\dfrac{8889}{4444}$, είναι η τιμή της παράστασης $\kappa^2-2\kappa-8$ μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

γ) Αν ισχύει $-4<\mu<4$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης $\mu^2-2|\mu|-8$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ15

Δίνεται πραγματικός αριθμός α, που ικανοποιεί τη σχέση $|\alpha-2|<1$.

α) Να γράψετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του α.

(Μονάδες 8)

β) Θεωρούμε στη συνέχεια το τριώνυμο $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}$.

i) Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να προσδιορίσετε το πρόσημό του,

(Μονάδες 10)

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}>0$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ16

Δίνονται οι ανισώσεις $|x-2|<3$ και $x^2-2x-8\leq 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-1,4]$.

(Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ17

Δίνονται οι ανισώσεις $2\leq |x|\leq 3$ και $x^2-4x<0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2,3]$.

(Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ18

Δίνονται οι ανισώσεις $|x+1| \leq 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.

α) Να λύσετε τις ανισώσεις.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3,-1)$.

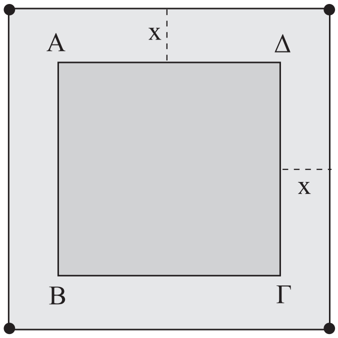
(Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι $\rho_1 - \rho_2 \in (-2,2)$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ19

Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις 15m και 25m. Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος x m (x > 0), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση:

$$E(x) = 4x^2 + 80x,\ x > 0$$

(Μονάδες 9)

β) Να βρεθεί το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό $E = 500\ m^2$.

(Μονάδες 7)

γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από $500\ m^2$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Δ20

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες;

(Μονάδες 6)

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και $x_1,\ x_2$ είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε :

i) να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$.

(Μονάδες 4)

ii) να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς

$$f(x_2),\ f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right),\ f(x_2 + 1)$$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ21

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 < x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0 < \alpha < 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς $0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος (α),

(Μονάδες 10)

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\sqrt{1+\alpha} < 1+\sqrt{\alpha}$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ22

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 5x - 6 < 0$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5\cdot\frac{46}{47} - 6$ και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $\alpha \in (-6, 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης:

$$\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ23

α) Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.

β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α, β διαφορετικούς από το 0 με $\alpha<\beta$ για τους οποίους ισχύει $(\alpha^2-3\alpha+2)(\beta^2-3\beta+2)<0$.

Να αποδείξετε ότι ισχύει $|(\alpha-1)(\beta-2)|=(\alpha-1)(\beta-2)$.

(Μονάδες15)

ΘΕΜΑ Δ24

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2(\lambda-1)x+\lambda+5=0$ (1), με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι:

$$\Delta=4\lambda^2-12\lambda-16$$

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ) Αν η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1,\ x_2$ και $d(x_1,\ x_2)$ είναι η απόσταση των $x_1,\ x_2$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$d(x_1,\ x_2)=\sqrt{24}$$

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ25

Δίνεται η εξίσωση $(x-2)^2=\lambda(4x-3)$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιές τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ) Αν $x_1,\ x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης, στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες,

i) να υπολογίσετε τα $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$.

ii να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3)$ είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ26

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 2x + \lambda(2 - \lambda) = 0, \text{ με } \lambda \in (0,\ 2)$$

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου.

(Μονάδες 6)

ii) το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου συναρτήσει του λ .

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $E \le 1$, για κάθε $\lambda \in (0,\ 2)$.

(Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ27

Δίνεται η ανίσωση $|x + 1| < 4$ (1).

α) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).

(Μονάδες 3)

γ) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2+\beta x+\gamma$ το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x \le 0$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Δ28

Δίνεται η ανίσωση $|x-1| \le 3$ (1).

α) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).

(Μονάδες 3)

γ) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2+\beta x+\gamma$ το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x \ge 0$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Δ29

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2+1 \ge \frac{5}{2}x$ (1).

(Μονάδες 10)

β) Δίνονται δύο αριθμοί κ, λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1)και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση $(\lambda-1)(\kappa-1)<0$.

i) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των κ, λ.

(Μονάδες 8)

ii) Να δείξετε ότι:

$$|\kappa-\lambda| \ge \frac{3}{2}$$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ30

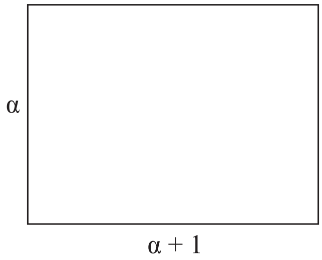
α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2+x-6<0$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $\left|x-\frac{1}{2}\right|>1$.

(Μονάδες 5)

γ) Δίνεται το παρακάτω παραλληλόγραμμο με πλευρές α και α + 1,



όπου ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $\left|\alpha-\frac{1}{2}\right|>1$. Αν για το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου ισχύει $E<6$, τότε:

i) Να δείξετε ότι $\frac{3}{2}<\alpha<2$.

(Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ31

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+4\lambda+5=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $\lambda=5$ η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα.

(Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει και άλλη τιμή του λ, ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες.

(Μονάδες 10)

δ) Αν $\left|\lambda^2-4\lambda-5\right|=4\lambda-\lambda^2+5,\ \lambda\in\mathbb{R}-\{-1,\ 5\}$ να δείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζες.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ32

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2-\left(\lambda^2+1\right)x+\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

(Μονάδες 9)

β) Για ποιες τιμές του λ το παραπάνω τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες;

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε $\lambda x^2-\left(\lambda^2+1\right)x+\lambda\le 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ33

Δίνεται το τριώνυμο $x^2-(\alpha+1)x+4+\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta=(\alpha-1)^2-16$$

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ) Αν το τριώνυμο έχει ρίζες $x_1,\ x_2$, τότε:

i) Να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του α και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1\cdot x_2$ ριζών του.

(Μονάδες 2)

ii) Να αποδείξετε ότι: $d(x_1,\ 1)\cdot d(x_2,\ 1)=4$

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ34

Δίνεται η εξίσωση $(8-\lambda)x^2-2(\lambda-2)x+1=0$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η εξίσωση να είναι $1^{ου}$ βαθμού.

(Μονάδες 5)

β) Αν η εξίσωση είναι $2^{ου}$ βαθμού, να βρείτε τις τιμές του λ ώστε αυτή να έχει μια διπλή ρίζα. Για τις τιμές του λ που βρήκατε, να προσδιορίσετε τη διπλή ρίζα της εξίσωσης.

(Μονάδες 10)

γ) Για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β), να δείξετε ότι το τριώνυμο $(8-\lambda)x^2-2(\lambda-2)x+1$ είναι μη αρνητικό, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

(Μονάδες 10)

Ακολουθούν προσομοιωμένα ανακεφαλαιωτικά Διαγωνίσματα στο 4ο Κεφάλαιο, σύμφωνα με τις οδηγίες του Ι.Ε.Π. και την σχετική νομοθεσία για τη δομή, επιλογή και διάρθρωση των θεμάτων .

Διαγώνισμα 1

ΘΕΜΑ Α

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η ανίσωση $\alpha x+\beta<0$, όταν $\alpha<0$ έχει λύσεις όλα τα x με $x<-\frac{\beta}{\alpha}$.

Μονάδες 2

β) Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ γίνεται ετερόσημο του α, μόνο όταν είναι $\Delta>0$ και για τις τιμές του x που βρίσκονται μεταξύ των ριζών

Μονάδες 2

γ) Η ανίσωση $\alpha^2x^2-\alpha x+2>0$, $\alpha\neq 0$, αληθεύει για όλες τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 2

δ) Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ με $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma>0$ γράφεται ως

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=(x-x_1)(x-x_2)$$

όπου x_1 και x_2 οι ρίζες του .

Μονάδες 2

ε) Το τριώνυμο $|\alpha|x^2-\alpha x-3$, $\alpha\neq 0$ γίνεται θετικό για όλες τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 2

Α2. Έστω το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$. Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο γίνεται ετερόσημο του α, μόνο όταν είναι $\Delta>0$ και για τις τιμές του x, που βρίσκονται μεταξύ των ριζών.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $x^2-\lambda x+(\lambda^2+\lambda-1)=0$ (1), με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές.

Μονάδες 12

β) Να λύσετε την ανίσωση $S^2-P-2\geq 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1).

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ Γ

Έστω Α και Β τα σημεία που παριστάνουν σ΄έναν άξονα τους αριθμούς -3 και 5 αντίστοιχα και Μ ένα σημείο στο εσωτερικό του τμήματος ΑΒ, τέτοιο ώστε $(\text{MA})<2(\text{MB})$ (1).

α) Να διατυπώσετε αλγεβρικά τη σχέση (1).

Μονάδες 8

β) Ποιοι αριθμοί αντιστοιχούν στο σημείο Μ;

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε το σημείο Ν του άξονα των ακεραίων αριθμών, στο εσωτερικό του τμήματος ΑΒ, ώστε να ισχύει $\left|(\text{NA})-2(\text{NB})\right|<3$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Μονάδες 8

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών .

Μονάδες 5

γ) Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 6

δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και $x_1, \ x_2$ είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $f(0) \cdot f(\kappa) \cdot f(\mu)$, όπου $\kappa, \ \mu$ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε $x_1 < \kappa < x_2 < \mu$.

Μονάδες 6

Διαγώνισμα 2

Συνδυαστικό

ΘΕΜΑ Α

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν (α, β, γ) γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ γίνεται μηδέν, όταν η τιμή του x είναι κάποια από τις ρίζες του.

Μονάδες 2

β) Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ με $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ γράφεται και:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = (x - x_1)(x - x_2).$$

Μονάδες 2

γ) Η ανίσωση $\alpha x + \beta < 0$, όταν $\alpha = 0$ είναι πάντα αδύνατη.

Μονάδες 2

Στις επόμενες προτάσεις (δ και ε) η σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση είναι ***μόνο μία****. Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση της κάθε ερώτησης.*

δ) Η ανίσωση $\alpha x + \beta < 0$, όταν $\alpha = 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν είναι:

Α. $\beta < 0$ ***Β.*** $\beta > 0$ ***Γ.*** $\beta = 0$ ***Δ.*** τίποτα από τα προηγούμενα

Μονάδες 2

ε) Η ανίσωση $x^2 + \alpha x + \alpha^2 < 0$, $\alpha \neq 0$ αληθεύει για:

Α. όλα τα $x > 0$ ***Β.*** όλα τα $x < 0$

Γ. για καμία τιμή του $x \in \mathbb{R}$ ***Δ.*** τίποτα από τα προηγούμενα

Μονάδες 2

Α2. Έστω το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$. Αν $\Delta<0$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι ανισώσεις $-x^2+5x-6<0$ (1) και $x^2-16\leq 0$ (2).

α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1), (2).

Μονάδες 12

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1)και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το τριώνυμο $K(x)=P(A)x^2-P(A\cup B)x+\frac{1}{2}P(B)$ (1), όπου $P(A)$ και $P(B)$ οι πιθανότητες δύο μη κενών και ασυμβίβαστων ενδεχομένων Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $K(x)=0$ έχει δύο άνισες και πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 9

β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου $K(x)$, να αποδείξετε ότι οι ρίζες αυτές είναι θετικές και ότι $x_1+x_2>1$.

Μονάδες 9

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x<0$ το τριώνυμο $K(x)$ έχει θετικό πρόσημο.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι ανισώσεις:

$$2 \le |x| \le 3 \text{ και } x^2 - 4x < 0$$

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

Μονάδες 10

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2,3]$.

Μονάδες 5

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

Μονάδες 10

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

Πρόοδοι

5.1 Ακολουθίες

5.2 Αριθμητική πρόοδος

5.3 Γεωμετρική πρόοδος

Η εξεταστέα ύλη για το κεφάλαιο αυτό είναι:

Παράγραφος 5.1

Παράγραφος 5.2 (εκτός της απόδειξης για το $S_ν$)

Παράγραφος 5.3 (εκτός της απόδειξης για το $S_ν$)

ΘΕΜΑ Α

Θέμα Α.1-Ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου

Α.1.1. Ερωτήσεις Σωστού–Λάθους

Στις επόμενες προτάσεις, να γράψετε δίπλα στην κάθε πρόταση το γράμμα Σ, αν η πρόταση είναι σωστή, ή το γράμμα Λ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Μία ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος όταν η διαφορά δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων της είναι σταθερός αριθμός.

2. Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύει $\alpha_6 - \alpha_4 = 2\omega$, όπου ω η διαφορά της προόδου αυτής.

3. Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι οποιοιδήποτε όροι αριθμητικής προόδου όταν $\beta = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$.

4. Οι αριθμοί $-3,\ 6,\ -12,\ 24$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με διαφορά $\omega = -2$.

5. Οι αριθμοί $-1,\ 3,\ 7,\ 11$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με διαφορά $\omega = 4$.

6. Οι αριθμοί $-5,\ -2\ ,1,\ 4,...,\ 22$ έχουν άθροισμα 85.

7. Η ακολουθία (α_ν) με αναδρομικό τύπο $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - 7$ και $\alpha_1 = 2$ είναι αριθμητική πρόοδος.

8. Αν σε μία αριθμητική πρόοδο η διαφορά ω είναι αρνητικός αριθμός, τότε κάθε όρος της είναι μικρότερος από τον προηγούμενο του.

9. Αν (α_ν) είναι μία αριθμητική πρόοδος, τότε ισχύει:

$$\alpha_\nu + \alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+3}$$

10. Αν οι αριθμοί $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ \alpha_6,...$ είναι όροι γεωμετρικής προόδου, τότε και οι αριθμοί $\alpha_2,\ \alpha_4,\ \alpha_6,...$ είναι επίσης όροι γεωμετρικής προόδου.

11. Οι αριθμοί $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda = -\frac{1}{2}$.
12. Οι αριθμοί $-3, -6, -12, ..., -384$ έχουν άθροισμα 1032.
13. Οι αριθμοί $-3, -5, -7, ..., -17$ έχουν άθροισμα -80.
14. Ο ένατος όρος της γεωμετρικής προόδου $5, 10, 20, ...$ είναι ίσος με 256.
15. Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) για τους όρους $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5$ ισχύει η σχέση:

$$\alpha_3^{\,2} = \alpha_1 \cdot \alpha_5$$

16. Το άθροισμα $\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8$ των όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν) είναι $S_8 - S_5$, όπου S_8 και S_5 το άθροισμα των πρώτων 8 και 5 όρων αντίστοιχα.

Για τις ερωτήσεις 17 έως 20 έχουμε:

Ένα κερί καίγεται με σταθερό ρυθμό. Στο τέλος της 1ης ώρας είχε ύψος 36 cm, στο τέλος της 2ης ώρας είχε ύψος 33cm, στο τέλος της 3ης ώρας είχε ύψος 30 cm κ.ο.κ.

17. Οι τιμές του ύψους του κεριού στο τέλος κάθε ώρας αποτελούν αριθμητική πρόοδο με διαφορά $\omega = 3$.
18. Το ύψος του κεριού στο τέλος κάθε ώρας θα είναι πολλαπλάσιο του 3.
19. Στο τέλος της 5ης ώρας το ύψος του κεριού θα είναι μικρότερο από 20cm.
20. Μετά από 15 ώρες το κερί δεν θα έχει λιώσει τελείως.

Α.1.2. Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

*Στις επόμενες προτάσεις η σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση είναι **μόνο μία**. Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση της κάθε ερώτησης.*

1. Από τις παρακάτω ακολουθίες αριθμητική πρόοδος είναι η

Α. $3,\ 6,\ 8,\ldots$ ***Β.*** $2,\ 4,\ 8,\ldots$ ***Γ.*** $-3,\ 1,\ 5,\ldots$ ***Δ.*** $-3,\ 0,\ \sqrt{3},\ldots$

2. Σε μία αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 11$ και $\omega = -3$. Τότε οι θετικοί της όροι είναι:

Α. 2 ***Β.*** 3 ***Γ.*** 4 ***Δ.*** 5

3. Ο αριθμός 15 είναι ο αριθμητικός μέσος των αριθμών

Α. 5 και 20 ***Β.*** –5 και –25 ***Γ.*** –9 και –21 ***Δ.*** 9 και 21

4. Αν οι αριθμοί $\alpha-1,\ \alpha+1,\ \alpha$, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους μίας αριθμητικής προόδου, τότε:

Α. $\alpha = -\frac{1}{3}$ ***Β.*** $\alpha = \frac{1}{3}$ ***Γ.*** $\alpha = 0$ ***Δ.*** τίποτα από τα προηγούμενα

5. Ένας μαθητής ύψους 1,7 m στέκεται μπροστά σε μία σκάλα, κάθε σκαλοπάτι της οποίας έχει ύψος 18 cm. Το πρώτο σκαλοπάτι της σκάλας που βρίσκεται σε μεγαλύτερο ύψος από το μαθητή είναι το:

Α. όγδοο ***Β.*** δέκατο ***Γ.*** *εντέκατο* ***Δ***. εικοστό

6. Από τις παρακάτω ακολουθίες γεωμετρική πρόοδος είναι η

Α. $1,\ 3,\ 5,\ldots$ ***Β.*** $-2,\ -4,\ -6,\ldots$ ***Γ.*** $-2,\ -4,\ -8,\ldots$ ***Δ.*** $7,\ 10,\ 12,\ldots$

7. Σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_1 = -3$ και $\lambda = -2$. Ο τέταρτος όρος της προόδου αυτής είναι:

Α. –24 ***Β.*** –9 ***Γ.*** 9 ***Δ.*** 24

8. Ο αριθμός 6 είναι ο γεωμετρικός μέσος των αριθμών:

Α. 2, 10 ***Β.*** 3, 12 ***Γ.*** –3, 12 ***Δ.*** 3, –12

9. Αν α, β, γ > 0 και οι αριθμοί $\frac{\alpha}{\beta}$, γ, $\alpha \cdot \beta$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε:

Α. $\gamma = \beta^2$ ***Β.*** $\gamma = |\beta|$ ***Γ.*** $\gamma = \alpha$ ***Δ.*** $\gamma = \alpha \cdot \beta$

10. Σε οποιαδήποτε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) ισχύει:

Α. Το άθροισμα των όρων που ισαπέχουν από τους άκρους όρους είναι ίσο με το άθροισμα των άκρων όρων.

Β. Το γινόμενο των όρων που ισαπέχουν από τους άκρους όρους είναι σταθερό και ίσο με το γινόμενο των άκρων όρων.

Γ. Το πηλίκο δύο οποιωνδήποτε όρων της είναι ίσο με $\frac{\alpha_\nu}{\alpha_1}$.

Δ. $\alpha_1 \cdot \alpha_\nu = \lambda^\nu$.

11. Αν $x > 0$ και οι αριθμοί $x - 1$, $\sqrt{99}$, $x + 1$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε ο x είναι ίσος με:

Α. $-\sqrt{99}$ ***Β.*** $\sqrt{99}$ ***Γ.*** 10 ***Δ.*** -10

12. Για να είναι μία ακολουθία α_1, α_2, $\alpha_3, \ldots$ γεωμετρική πρόοδος πρέπει:

Α. η διαφορά δύο διαδοχικών όρων να είναι σταθερή.

Β. το πηλίκο δύο οποιονδήποτε όρων να είναι σταθερό και ίσο με $\lambda \neq 0$.

Γ. το πηλίκο των διαδοχικών όρων της να είναι σταθερό και ίσο με $\lambda \neq 0$.

Δ. να είναι $\alpha_\nu{}^2 = \alpha_1 \cdot \lambda$.

Α.1.3. Ερωτήσεις Αντιστοίχισης

Στις επόμενες ερωτήσεις να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α ***με ένα μόνο*** *στοιχείο της στήλης Β, ώστε να προκύπτουν ισότητες, ισοδύναμες ή αληθείς σχέσεις ή προτάσεις. Στη στήλη Β υπάρχει ένα επιπλέον στοιχείο.*

1. Σε κάθε αριθμητική πρόοδο της στήλης Α, να αντιστοιχίσετε την διαφορά ω της στήλης Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1. $..., \ -8, \ -3, \ 2, ...$	α. $\omega = 6$
2. $..., 1, \ 7, \ 13, ...$	β. $\omega = 5$
3. $..., \frac{1}{3}, \ \frac{5}{6}, \ \frac{4}{3}, ...$	γ. $\omega = -5$
	δ. $\omega = \frac{1}{2}$

2. Σε κάθε αριθμητική πρόοδο της στήλης Α, να αντιστοιχίσετε τους νιοστούς όρους της στήλης Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1. $2, \ 4, \ 6, ...$	α. $\alpha_\nu = \nu - \frac{1}{2}$
2. $-3, \ -6, \ -9, ...$	β. $\alpha_\nu = 2\nu + 1$
3. $\frac{1}{2}, \ \frac{3}{2}, \ \frac{5}{2}, ...$	γ. $\alpha_\nu = -3\nu$
	δ. $\alpha_\nu = 2\nu$

3. Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο της στήλης Α, να αντιστοιχίσετε το λόγο λ της προόδου αυτής της στήλης Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1. $..., 6, \ -3, \ \frac{3}{2}, ...$	α. $\lambda = 2$
2. $..., 7, \ 14, \ 28, ...$	β. $\lambda = -1$
3. $..., -2, \ 2, \ -2, \ 2, ...$	γ. $\lambda = -\frac{1}{2}$
	δ. $\lambda = \frac{1}{2}$

4. Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο της στήλης Α, να αντιστοιχίσετε τους νιοστούς όρους της στήλης Β.

ΣΤΗΛΗ Α	***ΣΤΗΛΗ Β***
1. $3,\ 12,\ 48,\ldots$	α. $\alpha_\nu = 24\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\nu}$
2. $-10,\ -5,\ -\frac{5}{2},\ldots$	β. $\alpha_\nu = 3\cdot 4^{\nu-1}$
3. $24,\ 8,\ \frac{8}{3},\ldots$	γ. $\alpha_\nu = -10\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}$
	δ. $\alpha_\nu = 3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\nu-1}$

Θέμα Α.2-Αποδείξεις προτάσεων και ιδιοτήτων

Στα επόμενα παρατίθενται όλες οι αποδείξεις των προτάσεων και των ιδιοτήτων του 5ου Κεφαλαίου που περιέχονται στην εξεταστέα ύλη του μαθήματος: «Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων» της Α΄Λυκείου και θα αποτελέσουν το 2ο μέρος του 1ου θέματος (το Α2) στις γραπτές προαγωγικές εξετάσεις. Οι αποδείξεις έγιναν σύμφωνα με το περιεχόμενο του σχολικού βιβλίου.

1. Να αποδείξετε ότι ο $\nu^{ος}$ όρος μίας αριθμητικής προόδου (α_ν), $\nu \in \mathbb{N}$, με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$$

Απόδειξη

Από τον ορισμό της αριθμητικής προόδου έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = \alpha_1\\
&\alpha_2 = \alpha_1 + \omega\\
&\alpha_3 = \alpha_2 + \omega\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\alpha_{\nu-1} = \alpha_{\nu-2} + \omega\\
&\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \omega
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ν αυτές ισότητες και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαγραφής, βρίσκουμε $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$

2. Να αποδείξετε ότι τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

Απόδειξη

Αν πάρουμε τρεις διαδοχικούς όρους $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ μιας αριθμητικής προόδου με διαφορά ω, τότε ισχύει:

$$\beta-\alpha=\omega \text{ και } \gamma-\beta=\omega, \text{ επομένως } \beta-\alpha=\gamma-\beta \text{ ή } \beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

Αλλά και αντιστρόφως, αν για τρεις αριθμούς $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ ισχύει $\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$, τότε έχουμε:

$$2\beta=\alpha+\gamma \text{ ή } \beta-\alpha=\gamma-\beta,$$

που σημαίνει ότι οι $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Ο β λέγεται αριθμητικός μέσος των α και γ .

3. Να αποδείξετε ότι ο $\nu^{ος}$ όρος μίας γεωμετρικής προόδου (α_ν), $\nu\in\mathbb{N}$, με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ είναι:

$$\alpha_\nu=\alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1}$$

Απόδειξη

Από τον ορισμό της γεωμετρικής προόδου έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1=\alpha_1\\
&\alpha_2=\alpha_1\lambda\\
&\alpha_3=\alpha_2\lambda\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\alpha_{\nu-1}=\alpha_{\nu-2}\lambda\\
&\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}\lambda
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ν αυτές ισότητες και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαγραφής, βρίσκουμε $\alpha_\nu=\alpha_1\lambda^{\nu-1}$

4. Να αποδείξετε ότι τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\beta^2 = \alpha\gamma$$

Απόδειξη

Αν πάρουμε τρεις διαδοχικούς όρους α, β, γ μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ, τότε ισχύει:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \lambda \text{ και } \frac{\gamma}{\beta} = \lambda, \text{ επομένως } \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} \text{ ή } \beta^2 = \alpha\gamma$$

Αλλά και αντιστρόφως, αν για τρεις αριθμούς $\alpha,\ \beta,\ \gamma \neq 0$ ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$, τότε έχουμε $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$, που σημαίνει ότι οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου. Ο θετικός αριθμός $\sqrt{\alpha\gamma}$ λέγεται γεωμετρικός μέσος των α και γ.

ΘΕΜΑ Β

Από την Τράπεζα Θεμάτων του Υπουργείου ΠΑΙ.Θ. (Ι.Ε.Π.). Περιλαμβάνονται 24 θέματα αυτής της κατηγορίας.

ΘΕΜΑ Β1

Θεωρούμε την ακολουθία (α_ν) των θετικών περιττών αριθμών: 1, 3, 5, 7, ...

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον εκατοστό όρο της.

(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ν πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_1 = 1,\ \alpha_3 = 9$

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο ν, ώστε να ισχύει $\alpha_\nu > 30$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β3

Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει α καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7^{η} σειρά έχει 36 καθίσματα και το πλήθος των καθισμάτων του σταδίου είναι 300.

α) Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 12)

β) Πόσα καθίσματα έχει κάθε σειρά;

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β4

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$.

(Μονάδες 12)

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β5

α) Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων 1, 2, 3,...ν

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β6

Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ποιός όρος της προόδου είναι ίσος με 152.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β7

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α) Να δείξετε ότι $\dfrac{\alpha_{15}-\alpha_9}{\alpha_{10}-\alpha_7}=2$.

(Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha_{15}-\alpha_9=18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β8

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) με διαφορά $\omega=4$, ισχύει $\alpha_6+\alpha_{11}=40$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

(Μονάδες 12)

β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β9

Οι αριθμοί $x+6,\ 5x+2,\ 11x-6$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω.

α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega=4$.

(Μονάδες 12)

β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1=0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β10

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) είναι $\alpha_1=2$ και $\alpha_5=14$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77.

(Μονάδες 13)

(Δίνεται: $\sqrt{1849} = 43$)

ΘΕΜΑ Β11

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με όρους $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_\nu = 2\nu - 4$ και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Β12

Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστήςσειράς.

(Μονάδες 9)

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;

(Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Β13

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει ότι:

$$\alpha_1 = 19 \text{ και } \alpha_{10} - \alpha_6 = 24$$

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τον α_{20}.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Β14

Οι αριθμοί $A = 1$, $B = x + 4$, $\Gamma = x + 8$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου .

α) Να βρείτε τη τιμή του x .

(Μονάδες 10)

β) Αν $x = 1$ και ο αριθμός Α είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου

i) να υπολογίσετε τη διαφορά ω,

(Μονάδες 7)

ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Β15

α) Αν οι αριθμοί $4 - x,\ x,\ 2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x.

(Μονάδες 9)

β) Αν οι αριθμοί $4 - x,\ x,\ 2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4-x,\ x,\ 2$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Β16

Οι αριθμοί $\kappa-2,\ 2\kappa$, και $7\kappa+4,\ \kappa\in\mathbb{N}$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν) .

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa=4$ και να βρείτε το λόγο λ της προόδου.

(Μονάδες 12)

β) **i)** Να εκφράσετε το $2^{\text{ο}}$ όρο, τον $5^{\text{ο}}$ και τον $4^{\text{ο}}$ όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1.

(Μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha_2+\alpha_5=4(\alpha_1+\alpha_4)$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Β17

Σε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με θετικό λόγο λ, ισχύει $\alpha_3=1$ και $\alpha_5=4$.

α) Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι $\alpha_\nu=2^{\nu-3}$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β18

α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x, οι αριθμοί $x+4,\ 2-x,\ 6-x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Αν $x=5$ και ο $6-x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρική προόδου, να βρείτε

i) το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου,

(Μονάδες 6)

ii) τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Β19

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν), για την οποία ισχύει $\dfrac{\alpha_5}{\alpha_2}=27$.

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda=3$.

(Μονάδες 10)

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Β20

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί $x,\ 2x+1,\ 5x+4$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i) $x=1$

ii) $x=-1$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β21

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\beta x+(\beta^2-4)=0$ (1), με παράμετρο $\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις $x_1=\beta-2$ και $x_2=\beta+2$.

(Μονάδες 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β22

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί $x+2,\ (x+1)^2,\ 3x+2$ με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου, όταν:

i) $x=1$

ii) $x=-1$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β23

Δίνεται η εξίσωση $2x^2-5\beta x+2\beta^2=0$ (1), με παράμετρο $\beta>0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις $x_1=2\beta$ και $x_2=\dfrac{\beta}{2}$.

(Μονάδες 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, \beta\ ,\ x_2$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β24

Σε αριθμητική πρόοδος (α_ν) ισχύουν $\alpha_4-\alpha_9=15$ και $\alpha_1=41$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με 3.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο ν, ώστε $\alpha_\nu=\nu$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Γ

Με την εισήγηση των διδασκόντων. Περιλαμβάνονται 18 θέματα αυτής της κατηγορία .

ΘΕΜΑ Γ1

Δίνεται η ακολουθία (α_ν) για την οποία είναι $\alpha_1 = 0$ και $\alpha_{\nu+1} = 1 + 2\alpha_\nu$, για κάθε $\nu \geq 1$.

Θεωρούμε την ακολουθία (β_ν) με $\beta_\nu = 1 + \alpha_\nu$.

α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος,

(Μονάδες 13)

β) να υπολογίσετε τους γενικούς όρους α_ν και β_ν συναρτήσει του ν.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Γ2

Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $(x+2)+(x+5)+(x+8)+...+(x+29)=165$

(Μονάδες 12)

β) $(x+2)^2+2(x+2)^2+4(x+2)^2+8(x+2)^2+16(x+2)^2+32(x+2)^2=63$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Γ3

Μια γεωμετρική πρόοδος (α_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$ έχει 1000 όρους. Το άθροισμα των όρων που κατέχουν τις περιττές θέσεις είναι S_1 και το άθροισμα των όρων που κατέχουν τις άρτιες θέσεις είναι S_2.

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι όροι που κατέχουν περιττές θέσεις αποτελούν γεωμετρική πρόοδο. Ποιος είναι ο λόγος της προόδου αυτής;

(Μονάδες 5)

β) Οι όροι που κατέχουν άρτιες θέσεις αποτελούν γεωμετρική πρόοδο. Ποιος είναι ο λόγος της προόδου αυτής;

(Μονάδες 5)

γ) Ο λόγος της προόδου αυτής είναι $\lambda = \frac{S_2}{S_1}$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ4

Αν τοποθετήσουμε 1 ευρώ στο 1^{ο} τετράγωνο μιας σκακιέρας, 2 ευρώ στο 2^{ο} τετράγωνο, 4 ευρώ στο 3^{ο} τετράγωνο και συνεχίζεται μεέχι και τα 64 τετράγωνα να καλυφθούν τελείως.

α) Πόσα ευρώ θα υπάρχουν στο 64^{ο} τετράγωνο;

(Μονάδες 13)

β) Πόσα ευρώ θα υπάρχουν σε όλη τη σκακιέρα;

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Γ5

Σε έναν ουρανοξύστη 17 ορόφων τα γραφεία του ίδιου ορόφου έχουν το ίδιο ενοίκιο. Κάθε γραφείο του πρώτου ορόφου ενοικιάζεται 400 ευρώ το μήνα. Κάθε γραφείο ενός ορόφου ενοικιάζεται 100 ευρώ το μήνα ακριβότερα από το γραφείο του προηγούμενου ορόφου.

α) Πόσο είναι το μηνιαίο ενοίκιο ενός γραφείου του πέμπτου ορόφου;

(Μονάδες 7)

β) Πόσο ακριβότερο είναι το γραφείο του 10^{ου} ορόφου από ένα γραφείο του 7^{ο} ορόφου;

(Μονάδες 6)

γ) Σε πόσους ορόφους το ενοίκιο ξεπερνά τα 700 ευρώ;

(Μονάδες 6)

δ) Αν το πλήθος των γραφείων ενός ορόφου είναι μικρότερο κατά 2 από το πλήθος των γραφείων του αμέσως προηγούμενου ορόφου και ο 17^{ος} όροφος έχει 12 γραφεία, πόσα γραφεία έχει ο πρώτος όροφος;

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ6

Ο ν-οστός όρος μίας ακολουθίας (α_ν) είναι $\alpha_\nu = 3\nu + 2$.

α) Να βρείτε τον επόμενο όρο $\alpha_{\nu+1}$,

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος,

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της,

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε την τάξη του όρου της που είναι ίσος με 62.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ7

Σε μία γεωμετρική πρόοδο (α_ν) δίνονται:

$$\alpha_4 = 13,\ \alpha_6 = 117,\ \alpha_\nu = 9477 \text{ και } \lambda > 0 \text{ ο λόγος της } (\alpha_\nu)$$

α) Να βρείτε το λόγο λ της προόδου αυτής,

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου αυτής,

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε το πλήθος των όρων της προόδου αυτής.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Γ8

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 8x + 7 = 0$ (1).

α) Να βρείτε τις ρίζες $x_1,\ x_2$ $(x_1 < x_2)$της εξίσωσης (1)

(Μονάδες 4)

β) Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο (α_ν) που έχει ως πρώτο όρο α_1 τη μικρότερη από τις ρίζες της (1) και διαφορά ω τη μεγαλύτερη από αυτές. Να βρείτε το άθροισμα:

$$K = \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \ldots + \alpha_{1002}$$

(Μονάδες 7)

γ) Να εξετάσετε αν οι όροι x_1, x_2, 13 αποτελούν διαδοχικούς όρους κάποιας προόδου.

(Μονάδες 6)

δ) Θεωρούμε μία γεωμετρική πρόοδο (β_ν) με $\beta_1 = x_1 + x_2$ και $\lambda = x_1 \cdot x_2$, όπου β_1 και λ ο πρώτος όρος και ο λόγος της (β_ν) αντίστοιχα, καθώς και x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1). Να βρείτε το άθροισμα:

$$\Lambda = \beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + \ldots + \beta_{2\nu-1} \ (\nu \geq 2)$$

ως συνάρτηση του ν.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Γ9

α) Να βρείτε τρείς αριθμούς x, y, z $(x \neq y \neq z)$ τέτοιους ώστε, να είναι:

$$x + y + z = xy + yz + zx$$

αν είναι γνωστό ότι οι αριθμοί x, y, z, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, ενώ οι αριθμοί xy, yz, zx, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Έστω μία γεωμετρική πρόοδος (β_ν) με πρώτο όρο $\beta_1 = x$ και τρίτο όρο $\beta_3 = y > 0$, όπου x, y οι αριθμοί του (α) ερωτήματος. Να βρείτε το άθροισμα:

$$A = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{11}$$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Γ10

Σε ένα κλειστό γήπεδο χωρητικότητας 6960 θεατών υπάρχουν 29 σειρές καθισμάτων. Η πρώτη σειρά έχει 100 καθίσματα και το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς σχηματίζει αριθμητική πρόοδο.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα διαφέρουν δύο διαδοχικές σειρές.

(Μονάδες 3)

β) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία σειρά και πόσα η τελευταία σειρά,

(Μονάδες 5)

γ) Αν στη πρώτη σειρά δεν υπάρχει κενό κάθισμα, στην δεύτερη σειρά υπάρχουν 20 κενά καθίσματα, στην τρίτη σειρά 40 κενά καθίσματα κ.λ.π., να βρείτε πόσοι καθήμενοι υπάρχουν από την $5^{η}$ έως την $12^{η}$ σειρά.

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε πόσοι θεατές κάθονται στην $1^{η}$, $2^{η}$ και $3^{η}$ σειρά.

(Μονάδες 4)

ε) Να βρείτε μέχρι ποια σειρά κάθονται θεατές,

(Μονάδες 4)

ζ) Να βρείτε πόσοι θεατές κάθονται στην εξέδρα.

(Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ Γ11

Έστω μία αριθμητική πρόοδος (α_ν) με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω. Αν ισχύει ότι $\alpha_{73} = 7\alpha_9$, όπου α_{73} και α_9 ο $73^{ος}$ και ο $9^{ος}$ όρος αντίστοιχα της αριθμητικής προόδου (α_ν).

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_{17} = 4\alpha_3$.

(Μονάδες 10)

β) Αν $\alpha_1 + \omega = \dfrac{22}{3}$, να βρεθούν οι α_1, ω, α_{21}, S_{10}, όπου S_{10} το άθροισμα των 10 πρώτων όρων αυτής της αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Γ12

α) Να βρείτε πέντε αριθμούς που είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν) όταν $\alpha_1+\alpha_3=4$ (1) και $\alpha_2+\alpha_4=-2$ (2).

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τους τέσσερις πρώτους όρους μίας γεωμετρικής προόδου (β_ν) όταν:

$$\beta_1+\beta_4=27 \;(3) \text{ και } \beta_2+\beta_4=18 \;(4)$$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Γ13

Οι αριθμοί $x,\ y,\ z$ $(x \neq y \neq z)$, με τη σειρά που δίνονται είναι τρεις πρώτοι διαδοχικοί όροι μίας γεωμετρικής προόδου (α_ν), $\nu \in \mathbb{N}$. Εξάλλου ο αριθμός x είναι ο πρώτος όρος, ο αριθμός y είναι ο δεύτερος όρος και ο αριθμός z είναι ο $7^{ος}$ όρος μίας αριθμητικής προόδου (β_ν), $\nu \in \mathbb{N}$.

Να βρείτε σε συνάρτηση με το x.

α) τους αριθμούς $x,\ y,\ z$.

(Μονάδες 10)

β) τον $50^ο$ όρο α_{50} της γεωμετρικής προόδου,

(Μονάδες 8)

γ) τον $20^ο$ όρο β_{20} της αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ14

Η τιμή της αγοράς ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή είναι μεγαλύτερη από 820 ευρώ και μικρότερη από 840 ευρώ. Κατά την αγορά του συμφωνήθηκαν τα εξής:

- Να δοθεί προκαταβολή 50 ευρώ.
- Η εξόφληση του υπόλοιπου ποσού να γίνει σε 10 μηνιαίες δόσεις.

- Κάθε δόση να είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη κατά ω ευρώ,όπου ω θετικός ακέραιος.
- Η τέταρτη δόση να είναι 65 ευρώ.

α) να εκράσετε το ποσό της πρώτης δόσης ως συνάρτηση του ω,

(Μονάδες 5)

β) να εκφράσετε την τιμή αγοράς ως συνάρτηση του ω,

(Μονάδες 5)

γ) να βρείτε την τιμή του ω,

(Μονάδες 5)

δ) να βρείτε το ποσό της τελευταίας δόσης,

(Μονάδες 5)

ε) να βρείτε την τιμή αγοράς του ηλεκτρονικού υπολογιστή.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ15

Σε ένα θέατρο, η πρώτη σειρά έχει 70 καθίσματα και η τελευταία 250 καθίσματα. Το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς σχηματίζει αριθμητική πρόοδο. Η προτελευταία σειρά έχει 140 καθίσματα περισσότερα από τη δεύτερη σειρά.

α) να αποδείξετε ότι κάθε σειρά καθισμάτων του θεάτρου έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά,

(Μονάδες 5)

β) να υπολογίσετε το πλήθος των καθισμάτων του θεάτρου.

(Μονάδες 10)

γ) Την πρώτη παράσταση ενός θεατρικού έργου παρακολούθησαν 100 θεατές, ενώ σε κάθε επόμενη παράσταση ο αριθμός των θεατών διπλασιαζόταν. Ποια είναι η παράσταση στην οποία για πρώτη φορά θα γεμίσει το θέατρο;

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Γ16

Κατανέμονται 400 αριθμοί όπως φαίνεται παρακάτω (σε μορφή «δέντρου»):

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & 3 & 4 & & \\ & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ & & & \vdots & & & \end{array}$$

α) Να βρείτε πόσους αριθμούς έχεις η $8^η$ γραμμή.

β) Να βρείτε το πλήθος όλων των αριθμών των 8 πρώτων γραμμών.

γ) Πόσες γραμμές αριθμών συνολικά υπάρχουν στην κατανομή αυτή των αριθμών; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών της $10^{ης}$ γραμμής.

ε) Να βρείτε τον γενικό όρο της ακολουθίας 1, 3, 7, 13, …

ΘΕΜΑ Γ17

Κατά τη διάρκεια έργων συντήρησης στην εθνική οδό, είχαν τοποθετηθεί ειδικοί φωτεινοί σηματοδότες που εμποδίζουν την κυκλοφορία στο τμήμα του δρόμου που γίνονται τα έργα. Οι σηματοδότες αυτοί ήταν τοποθετημένοι ανά 10 m. Μόλις τελείωσαν τα έργα, ένας εργάτης που βρισκόταν στο πρώτο σηματοδότη, πήρε εντολή να μεταφέρει όλους τους σηματοδότες δίπλα στον τελευταίο. Όμως λόγω του βάρους κάθε σηματοδότη, ο εργάτης μπορούσε να μεταφέρει μόνο έναν κάθε φορά. Όταν τελείωσε την μεταφορά είχε καλύψει συνολικά 1,44 Km.

α) Πόσες φορές, έκανε τη διαδρομή από τον πρώτο έως τον τελευταίο σηματοδότη;

β) Πόσες φορές, έκανε τη διαδρομή από τον δεύτερο έως τον τελευταίο σηματοδότη;

γ) Πόσοι ήταν οι σηματοδότες;

ΘΕΜΑ Γ18

Έστω ότι οι αριθμοί α, β , γ και δ είναι διαδοχικοί όροι μίας αριθμητικής προόδου

α) να αποδείξετε ότι ισχύει:

i) $\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}=\frac{2}{\alpha\gamma}$

ii) $\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\delta}=\frac{3}{\alpha\delta}$

β) **i)** Να διατυπώσετε γενικό τύπο για τους ν διαδοχικούς όρους α_1, α_2, α_3, …, α_ν,… μίας αριθμητικής προόδου, ως γενίκευση του ερωτήματος (αii).

ii) Να αποδείξετε τον παραπάνω ισχυρισμό σας.

γ) Να υπολογίστε το άθροισμα $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{9900}$.

ΘΕΜΑ Δ

Από την Τράπεζα Θεμάτων του Υπουργείου ΠΑΙ.Θ.(Ι.Ε.Π.). Περιλαμβάνονται 16 θέματα αυτής της κατηγορίας .

ΘΕΜΑ Δ1

Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η 1η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7η σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το γενικό όρο της προόδου.

(Μονάδες 4)

γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;

(Μονάδες 5)

δ) Αν στην 1η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3η υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη 2η και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i) Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα.

(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ2

Σε αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_2 = \kappa^2$, $\alpha_3 = (\kappa+1)^2$ και κ ακέραιος με $\kappa > 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι αριθμός περιττός.

(Μονάδες 8)

β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1 = 2$, τότε:

i) Να βρείτε τον αριθμό κ και να αποδείξετε ότι $\omega = 7$.

(Μονάδες 8)

ii) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Δ3

Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από τηναποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε τον όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της;

(Μονάδες 6)

β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20η κυψέλη;

(Μονάδες 6)

γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη Α συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη Α.

i) Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3η κυψέλη;

(Μονάδες 6)

ii) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες;

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ4

Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:
Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 1ευρώ, το 2ο μήνα 2ευρώ, τον 3ο μήνα 4ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.
Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον 1ομήνα 100 ευρώ, το 2ο μήνα 110 ευρώ, τον 3ο μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενομήνα.

α) **i)** Να βρείτε το ποσό α_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το ν-στο μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.

(Μονάδες 4)

ii) Να βρείτε το ποσό β_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το νομήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

(Μονάδες 4)

iii) Να βρείτε το ποσό A_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.

(Μονάδες 5)

iv) Να βρείτε το ποσό B_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

(Μονάδες 5)

β) **i)** Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα;

(Μονάδες 3)

ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο;

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Δ5

Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών.

(Μονάδες 7)

γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ6

Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου.

(Μονάδες 5)

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7ημέχρι και την 14η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ7

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 10\omega$.

(Μονάδες 6)

β) Αν $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 30$ και $\alpha_1 = 1$, να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu = 3\nu - 2$.

(Μονάδες 6)

γ) Ποιος είναι ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνάει το 30;

(Μονάδες 7)

δ) Πόσοι όροι της παραπάνω προόδου είναι μικρότεροι του 60;

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ8

Δίνονται οι αριθμοί $2,\ x,\ 8$ με $x > 0$.

α) Να βρείτε την τιμή του x ώστε οι αριθμοί $2,\ x,\ 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου;

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τώρα την τιμή του x ώστε οι αριθμοί $2,\ x,\ 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου;

(Μονάδες 5)

γ) Αν (α_ν) είναι η αριθμητική πρόοδος 2, 5, 8, 11, ... και (β_ν) είναι η γεωμετρική πρόοδος 2, 4, 8, 16, ... τότε:

i) Να βρείτε το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν),

(Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε την τιμή του ν ώστε, για το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν) να ισχύει:

$$2(S_\nu + 24) = \beta_7$$

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ9

Οι αριθμοί x^2+5, x^2+x, $2x+4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x.

(Μονάδες 6)

β) Αν $x=3$ και ο αριθμός x^2+5 είναι ο 4ος όρος της προόδου, να βρείτε:

i) Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου,

(Μονάδες 5)

ii) Τον πρώτο όρο της προόδου,

(Μονάδες 6)

iii) Το άθροισμα $S = \alpha_{15}+\alpha_{16}+\alpha_{17}+...\alpha_{24}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ10

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν), ο 3ος όρος είναι $\alpha_3 = 8$ και ο 8ος όρος είναι $\alpha_8 = 23$.

α) Να αποδείξετε ότι ο 1ος όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1 = 2$ και η διαφορά της $\omega = 3$.

(Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τον 31ο όρο της.

(Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$S=(\alpha_1+1)+(\alpha_2+1)+(\alpha_3+1)+...+(\alpha_{31}+1)$$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ11

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_3=10$ και $\alpha_{20}=61$.

α) Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της προόδου.

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου.

(Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι xκαι yτης παραπάνω προόδου (a_ν), τέτοιοι ώστε να ισχύει $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Δ12

Στην Α΄ τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται το Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα: «Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x-1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x+3$ σειρές με $x-3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α) Να βρείτε την τιμή του x.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε η Α΄ τάξη έχει 90 μαθητές.

(Μονάδες 6)

γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω 90 μαθητές σε ν ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του ν, δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Δ13

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\alpha_3 = 4,\ \alpha_5 = 16 \text{ και } \lambda > 0$$

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και το λόγο λ της προόδου.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν), με $\beta_\nu = \dfrac{1}{\alpha_\nu}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν).

(Μονάδες 9)

γ) Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση $S'_{10} = \dfrac{1}{2^9} S_{10}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ14

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α, β και εμβαδόν Ε, τέτοια ώστε οι αριθμοί α, Ε, β, με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

α) Να αποδείξετε ότι $E = 1$.

(Μονάδες 10)

β) Αν $\alpha+\beta=10$ τότε:

i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τα μήκη $\alpha,\ \beta$.

(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τα μήκη $\alpha,\ \beta$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ15

Ένα μυρμήγκι περπατάει πάνω σε ένα ευθύγραμμο κλαδί μήκους 1 m, με τονακόλουθο τρόπο: Ξεκινάει από το ένα άκρο του κλαδιού και το 1ο λεπτό προχωράει 1 cm, το 2ο λεπτό προχωράει 3 cm και γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση κατά 2 cm μεγαλύτερη από αυτήν που διήνυσε το προηγούμενο λεπτό.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει το μυρμήγκι κάθε λεπτό της κίνησής του, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τον ν-οστό όρο α_ν αυτής της προόδου.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τη συνολική απόσταση που κάλυψε το μυρμήγκι τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του.

(Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι θα φτάσει στο άλλο άκρο του κλαδιού.

(Μονάδες 4)

δ) Υποθέτουμε τώρα ότι, την ίδια στιγμή που το μυρμήγκι ξεκινάει την πορείατου, από το άλλο άκρο του κλαδιού μία αράχνη ξεκινάει και αυτή προς τηναντίθετη κατεύθυνση και με τον ακόλουθο τρόπο: Το 1ο λεπτό προχωράει 1 cm, το 2ο λεπτό προχωράει 2 cm, το 3ο λεπτό προχωράει 4 cm και,γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση διπλάσια από αυτήν που διήνυσε τοπροηγούμενο λεπτό.

i) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει η αράχνη κάθε λεπτό της κίνησής της, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να βρείτε τον ν –οστό όρο β_ν αυτής της προόδου.

(Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι και η αράχνη θα βρεθούν αντιμέτωπα σε απόσταση 1 cm.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ16

Μία περιβαλλοντολογική οργάνωση ξεκινά να καταγράφει τον πληθυσμό των ελαφιών σε μια δασική περιοχή από το 2000 όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Έτος	2000	2001	2002	2003	2004
Αριθμός ελαφιών	1300	1360	1420	1480	1540

Αν ο πληθυσμός των ελαφιών συνεχίζει να αυξάνεται με τον ίδιο σταθερό ρυθμό και μετά το 2004 :

α) Να βρείτε μια σχέση που να επιτρέπει τον υπολογισμό του πληθυσμού των ελαφιών στο τέλος κάθε έτους από το 2000 και μετά.

(Μονάδες 6)

β) Με τη βοήθεια της σχέσης αυτής:

i) Να προσδιορίσετε τον πληθυσμό των ελαφιών στο τέλος του 2012 .

(Μονάδες 6)

ii) Να προβλέψετε το έτος στο τέλος του οποίου ο αρχικός πληθυσμός των 1300 ελαφιών θα αυξηθεί κατά 60%.

(Μονάδες 6)

iii) Να προβλέψετε το έτος που ο πληθυσμός των ελαφιών δεν θα υπερβεί τα 2600 ελάφια.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ17

Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος (α_ν), όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$. Αν οι τρεις πρώτοι όροι της προόδου είναι:

$$\alpha_1 = x \quad \alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4, \ \alpha_3 = x^2 - 2, \text{ όπου } x \in \mathbb{Z}$$

τότε,

α) να αποδειχθεί ότι $x = 3$.

(Μονάδες 10)

β) να βρεθεί ο ν-οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014.

(Μονάδες 8)

γ) να υπολογιστεί το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{15}$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ18

Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμήτων 21 € ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51 θέσεις.

Θέλοντας να αυξήσει τη πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5€ περισσότερο από τον προηγούμενο.

α) Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης.

(Μονάδες 4)

β) Αν, για κάθε $\nu \leq 51$ ο αριθμός ανεκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο ν-οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου.

(Μονάδες 6)

γ) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο $51^{ος}$ επιβάτης.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των 21 € ανά εισιτήριο.

(Δίνεται ότι: $\sqrt{10201}=101$)

(Μονάδες8)

ΘΕΜΑ Δ19

Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες;

(Μονάδες 6)

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_ν το πλήθοςτων βακτηρίων ν ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($\nu\leq 5$).

i) Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος, και ναβρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.

(Μονάδες 6)

ii) Να εκφράσετε το πλήθος β_ν των βακτηρίων συναρτήσει του ν.

(Μονάδες 6)

iii) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης;

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ20

Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου,διαρρέει στην θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της $1^{ης}$ ημέρας καλύπτει 3τετραγωνικά μίλια (τ.μ), στο τέλος της $2^{ης}$ ημέρας καλύπτει 6 τ.μ, στο τέλος της $3^{ης}$ ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της $5^{ης}$ ημέρας μετά το ατύχημα.

(Μονάδες 7)

β) Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768τ.μ.;

(Μονάδες 9)

γ) Στο τέλος της $9^{ης}$ ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

(Μονάδες 9)

Ακολουθούν προσομοιωμένα ανακεφαλαιωτικά Διαγωνίσματα στο 5ο Κεφάλαιο, σύμφωνα με τις οδηγίες του Ι.Ε.Π. και την σχετική νομοθεσία για τη δομή, επιλογή και διάρθρωση των θεμάτων .

Διαγώνισμα 1

ΘΕΜΑ Α

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι οποιοδήποτε όροι αριθμητικής προόδου όταν $\beta=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$.

Μονάδες 2

β) Οι αριθμοί $-5,\ -2\ ,1,\ 4,...,\ 22$ έχουν άθροισμα 85.

Μονάδες 2

γ) Αν οι αριθμοί $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ \alpha_6,...$ είναι όροι γεωμετρικής προόδου, τότε και οι αριθμοί $\alpha_2,\ \alpha_4,\ \alpha_6,...$ είναι επίσης όροι γεωμετρικής προόδου.

Μονάδες 2

δ) Το άθροισμα $\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7+\alpha_8$ των όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν) είναι S_8-S_5, όπου S_8 και S_5 το άθροισμα των πρώτων 8 και 5 όρων αντίστοιχα.

Μονάδες 2

ε) Αν σε μία αριθμητική πρόοδο η διαφορά ω είναι αρνητικός αριθμός, τότε κάθε όρος της είναι μικρότερος από τον προηγούμενο του.

Μονάδες 2

Α2. Να αποδείξετε ότι ο $\nu^{ος}$ όρος μίας γεωμετρικής προόδου (α_ν), $\nu \in \mathbb{N}$, με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ είναι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει ότι:

$$\alpha_1 = 19 \text{ και } \alpha_{10} - \alpha_6 = 24$$

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$.

Μονάδες 9

β) Να βρείτε τον α_{20}.

Μονάδες 8

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Ο νιοστός όρος μίας ακολουθίας (α_ν), $\nu \in \mathbb{N}$ είναι $\alpha_\nu = 3\nu + 2$.

α) Να βρείτε τον επόμενο όρο $\alpha_{\nu+1}$,

Μονάδες 7

β) να αποδείξετε ότι η ακολουθία (α_ν), $\nu \in \mathbb{N}$ είναι αριθμητική πρόοδος,

Μονάδες 6

γ) να βρείτε το άθροισμα των $3^{ο}$ πρώτων όρων της,

Μονάδες 6

δ) να βρείτε την τάξη του όρου της που είναι ίσος με 62.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\alpha_3 = 4,\ \alpha_5 = 16 \text{ και } \lambda > 0$$

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και το λόγο λ της προόδου.

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν), με $\beta_\nu = \dfrac{1}{\alpha_\nu}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν).

Μονάδες 9

γ) Αν S_{10} και $S\ _{10}$ είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση $S'_{10} = \dfrac{1}{2^9} S_{10}$.

Μονάδες 8

Διαγώνισμα 2

ΘΕΜΑ Α

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν (α, β, γ) γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Οι αριθμοί $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Μονάδες 2

β) Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) για τους όρους $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5$ ισχύει η σχέση $\alpha_3{}^2 = \alpha_1 \cdot \alpha_5$.

Μονάδες 2

γ) Αν (α_ν), $\nu \in \mathbb{N}$ είναι μία αριθμητική πρόοδος, τότε ισχύει:

$$\alpha_\nu + \alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+3}$$

Μονάδες 2

Στις επόμενες προτάσεις (δ και ε) η σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση είναι ***μόνο μία****. Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση της κάθε ερώτησης*

δ) Ένας μαθητής ύψους 1,7 m στέκεται μπροστά σε μία σκάλα, κάθε σκαλοπάτι της οποίας έχει ύψος 18 cm. Το πρώτο σκαλοπάτι της σκάλας που βρίσκεται σε μεγαλύτερο ύψος από το μαθητή είναι το

Α. όγδοο ***Β.*** δέκατο ***Γ.*** *εντέκατο* ***Δ.*** εικοστό

Μονάδες 2

ε) Σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_1 = -3$ και $\lambda = -2$. Ο τέταρτος όρος της προόδου αυτής είναι:

Α. -24 ***Β.*** -9 ***Γ.*** 9 ***Δ.*** 24

Μονάδες 2

Α2. Να αποδείξετε ότι τρεις αριθμοί $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x, οι αριθμοί $x+4,\ 2-x,\ 6-x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Μονάδες 13

β) Αν $x=5$ και ο $6-x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρική προόδου, να βρείτε

i) το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου,

Μονάδες 6

ii) τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Σε έναν ουρανοξύστη 17 ορόφων τα γραφεία του ίδιου ορόφου έχουν το ίδιο ενοίκιο. Κάθε γραφείο του πρώτου ορόφου ενοικιάζεται 400 ευρώ το μήνα. Κάθε γραφείο ενός ορόφου ενοικιάζεται 100 ευρώ το μήνα ακριβότερα από το γραφείο του προηγούμενου ορόφου.

α) Πόσο είναι το μηνιαίο ενοίκιο ενός γραφείου του πέμπτου ορόφου;

Μονάδες 7

β) Πόσο ακριβότερο είναι το γραφείο του $10^{ου}$ ορόφου από ένα γραφείο του $7^{ο}$ ορόφου;

Μονάδες 6

γ) Σε πόσους ορόφους το ενοίκιο ξεπερνα τα 700 ευρώ;

Μονάδες 6

δ) Αν το πλήθος των γραφείων ενός ορόφου είναι μικρότερο κατά 2 από το πλήθος των γραφείων του αμέσως προηγούμενου ορόφου και ο $17^{ος}$ όροφος έχει 12 γραφεία, πόσα γραφεία έχει ο πρώτος όροφος;

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:
Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 1 ευρώ, το 2ο μήνα 2 ευρώ, τον 3ο μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.
Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 100 ευρώ, το 2ο μήνα 110 ευρώ, τον 3ο μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενομήνα.

α) i) Να βρείτε το ποσό $α_ν$ που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το ν-στο μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.

Μονάδες 4

ii) Να βρείτε το ποσό $β_ν$ που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το νομήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

Μονάδες 4

iii) Να βρείτε το ποσό $Α_ν$ που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.

Μονάδες 5

iv) Να βρείτε το ποσό $B_ν$ που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

Μονάδες 5

β) **i)** Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα;

Μονάδες 3

ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο;

Μονάδες 4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο

Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων

6.1 Η Έννοια της Συνάρτησης

6.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

6.3 Η συνάρτηση $f(x) = αx + β$

Η εξεταστέα ύλη για το κεφάλαιο αυτό είναι:

Παράγραφος 6.1

Παράγραφος 6.2 (εκτός της υποπαραγράφου «Απόσταση σημείων»)

Παράγραφος 6.3 (εκτός της κλίσης ευθείας ως λόγος μεταβολής)

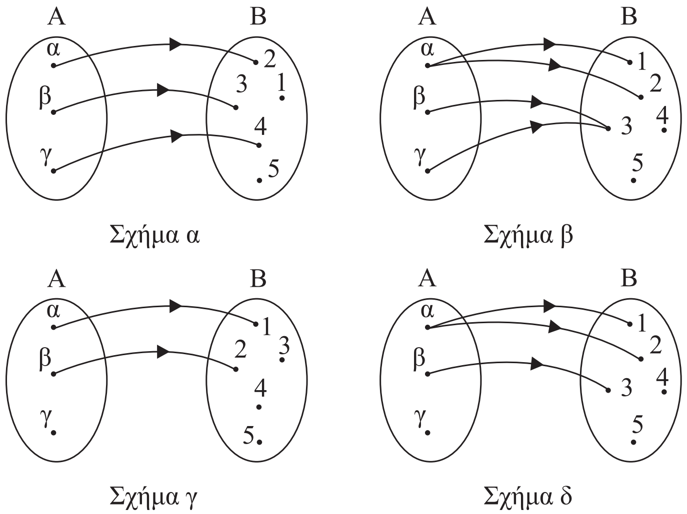
ΘΕΜΑ Α

Θέμα Α.1-Ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου

Α.1.1. Ερωτήσεις Σωστού–Λάθους

Στις επόμενες προτάσεις, να γράψετε δίπλα στην κάθε πρόταση το γράμμα Σ, αν η πρόταση είναι σωστή, ή το γράμμα Λ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

Θεωρούμε τα σύνολα $A=\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ και $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, καθώς επίσης και τα επόμενα σχήματα (βελοδιαγράμματα).



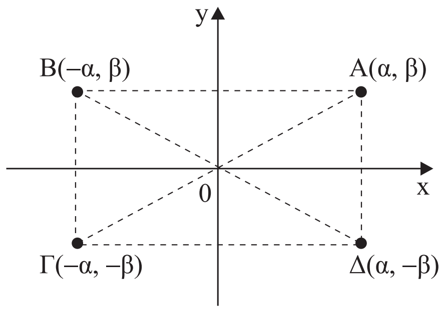
1. Το σχήμα (α) παριστάνει συνάρτηση.

2. Το σχήμα (β) παριστάνει συνάρτηση.

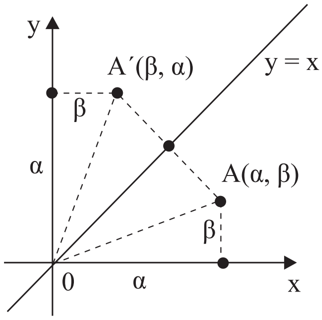
3. Το σχήμα (γ) δεν παριστάνει συνάρτηση.

4. Το σχήμα (δ) δεν παριστάνει συνάρτηση.

Τα επόμενα σχήματα (α΄) και (β΄) αφορούν στις ερωτήσεις 5, 6 και 7:



Σχήμα α΄



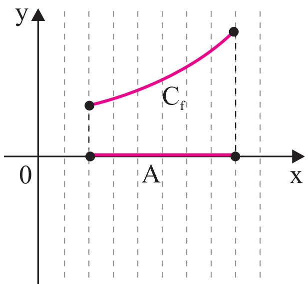
Σχήμα β΄

5. Το συμμετρικό του σημείου Α(α, β) στο σχήμα (α΄), ως προς τον άξονα x΄x είναι το σημείο Δ(α, −β).

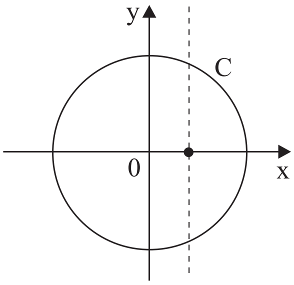
6. Το συμμετρικό του σημείου Α(α, β) στο σχήμα (α΄), ως προς τον άξονα y΄y είναι το Γ(−α, −β).

7. Το συμμετρικό του σημείου Α(α, β) στο σχήμα (β΄), ως προς τη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων είναι το σημείο Α΄(β, α).

Θεωρούμε τα επόμενα σχήματα (α΄) και (β΄) για τις ερωτήσεις 8 και 9:



Σχήμα α΄



Σχήμα β΄

8. Στο σχήμα (α΄) η γραφική παράσταση C_f παριστάνει τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f.

9. Στο σχήμα (β΄) η γραφική παράσταση C παριστάνει τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f.

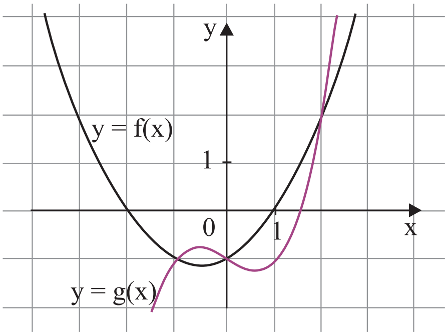
10. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ είναι το διάστημα $\Delta=(1,\infty)$.

11. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ είναι το διάστημα $\Delta=(2,\infty)$.

12. Τα σημεία τομής της συνάρτησης $f(x)=(x-1)(x+4)$ με τον άξονα $x'x$ είναι Α $(1,\ 0)$ και Β $(-4,\ 0)$.

13. Το σημείο τομής της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ με τον άξονα $y'y$ είναι μόνο το $K(0,-1)$.

14. Στο επόμενο σχήμα τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι τα $A(-1,\ -1)$, $B(0,\ -1)$ και $\Gamma(2,\ 2)$.



15. Οι ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $y=-3x+1$ και $y=-3x-\dfrac{1}{3}$ αντιστοίχως είναι παράλληλες.

16. Οι ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $y=-2x+1$ και $y=-3x-\dfrac{1}{2}$ αντιστοίχως τέμνονται σε ένα σημείο.

Α.1.2. Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

Στις επόμενες προτάσεις η σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση είναι ***μόνο μία****.* *Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση της κάθε ερώτησης.*

1. Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται λέγεται μία διαδικασία με την οποία:

Α. κάθε στοιχείο του συνόλου Β αντίστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Α.

Β. κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντίστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.

Γ. κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντίστοιχίζεται σε ένα το πολύ στοιχείο του συνόλου Β.

Δ. κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντίστοιχίζεται σε ένα τουλάχιστον στοιχείο του συνόλου Β.

2. Για κάθε συνάρτηση $f: A \to B$ ισχύει:

Α. Κάθε στοιχείο του Α αντιστοιχίζεται σε ένα τουλάχιστον στοιχείο του Β.

Β. Κάθε στοιχείο του Α αντιστοιχίζεται ένα ακριβώς στοιχείο του Β .

Γ. Κάθε στοιχείο του Α αντιστοιχίζεται ένα το πολύ στοιχείο του Β .

Δ. Κάθε στοιχείο του Β αντιστοιχίζεται ένα ακριβώς στοιχείο του Α .

3. Για κάθε συνάρτηση $f: A \to B$ ισχύει:

Α. δύο ή περισσότερα στοιχεία του Α μπορεί να αντιστοιχίζονται στο ίδιο στοιχείο του Β.

Β. μπορεί κάποιο στοιχείο του Α να μην αντιστοιχίζεται σε στοιχείο του Β.

Γ. μπορεί κάποιο στοιχείο του Α να αντιστοιχίζεται σε δύο ή περισσότερα στοιχεία του Β.

Δ. τίποτα από τα προηγούμενα.

4. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[4]{3x-2}$ έχει πεδίο ορισμού το

Α. $\mathbb{R}$ ***Β.*** $x > \frac{3}{2}$ ***Γ.*** $x \geq \frac{2}{3}$ ***Δ.*** $x > 0$

5. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ έχει πεδίο ορισμού το

Α. $\mathbb{R}$ ***Β.*** $(0,\ +\infty)$ ***Γ.*** $[1,\ +\infty)$ ***Δ.*** $(1,\ +\infty)$

6. Έστω μία συνάρτηση $f: A \to B$ και C_f η γραφική της παράσταση. Τότε η εξίσωση $y=f(x)$ επαληθεύεται:

Α. από όλα τα σημεία του συστήματος συντεταγμένων Oxy.

Β. από τα σημεία της C_f και μόνο από αυτά.

Γ. από από τα σημεία του $1^{ου}$ και του $3^{ου}$ τεταρτημορίου του συστήματος συντεταγμένων Oxy.

Δ. από από τα σημεία του $2^{ου}$ και του $4^{ου}$ τεταρτημορίου του συστήματος συντεταγμένων Oxy.

7. Έστω μία συνάρτηση $f: A \to B$ και C_f η γραφική της παράσταση. Τότε ισχύει:

Α. δεν υπάρχουν σημεία της C_f με την ίδια τετμημένη.

Β. δεν υπάρχουν σημεία της C_f με την ίδια τεταγμένη.

Γ. υπάρχουν σημεία της C_f με την ίδια τετμημένη .

Δ. τίποτα από τα προηγούμενα.

8. Αν δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) με εξισώσεις $y=\alpha_1 x+\beta_1$ και $y=\alpha_2 x+\beta_2$ αντιστοίχως είναι παράλληλες, τότε ισχύει:

Α. $\alpha_1=-\alpha_2$.

Β. $\beta_1=\beta_2$.

Γ. $\alpha_1=0$

Δ. τίποτα από τα προηγούμενα.

Α.1.3. Ερωτήσεις Αντιστοίχισης

*Στις επόμενες ερωτήσεις να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α **με ένα μόνο** στοιχείο της στήλης Β, ώστε να προκύπτουν ισότητες, ισοδύναμες ή αληθείς σχέσεις ή προτάσεις. Στη στήλη Β υπάρχει ένα επιπλέον στοιχείο.*

1.

***ΣΤΗΛΗ Α* (Συνάρτηση)**	***ΣΤΗΛΗ Β (πεδίο ορισμού)***
1. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2}$	α. $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},\ \infty\right)$
2. $g(x)=\sqrt{x^2-2}$	β. $\mathbb{R}-\left\{-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right\}$
3. $h(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}}$	γ. $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2},\ \infty\right)$
	δ. $\left(-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$

2. Έστω η ευθεία (ε), με εξίσωση $y=\alpha x+\beta$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0,\beta)$ και έχει κλίση $\lambda=\alpha$ σχηματίζει δε με τον άξονα $x'x$ γωνία ω.

ΣΤΗΛΗ Α (αν...)	***ΣΤΗΛΗ Β (τότε...)***
1. $\alpha>0$	α. $90^0<\omega<180^0$
2. $\alpha<0$	β. $\omega=0^0$
3. $\alpha=0$	γ. $\omega=90^0$
	δ. $0^0<\omega<90^0$

Θέμα Α.2-Αποδείξεις προτάσεων και ιδιοτήτων

Στα επόμενα παρατίθενται όλες οι αποδείξεις των προτάσεων και των ιδιοτήτων του 6ου Κεφαλαίου που περιέχονται στην εξεταστέα ύλη του μαθήματος: «Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων» της Α΄Λυκείου και θα αποτελέσουν το 2ο μέρος του 1ου θέματος (το Α2) στις γραπτές προαγωγικές εξετάσεις. Οι αποδείξεις έγιναν σύμφωνα με το περιεχόμενο του σχολικού βιβλίου.

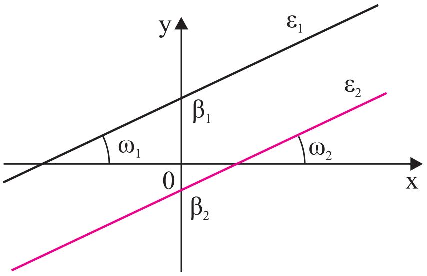
1. Έστω δύο ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $y=\alpha_1 x+\beta_1$ και $y=\alpha_2 x+\beta_2$ αντιστοίχως και ω_1 και ω_2 οι γωνίες που σχηματίζουν αυτές με τον άξονα x΄x γωνίες αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι:

- αν $\alpha_1=\alpha_2$, τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες ή συμπίπτουν.
- αν $\alpha_1\neq\alpha_2$, τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται.

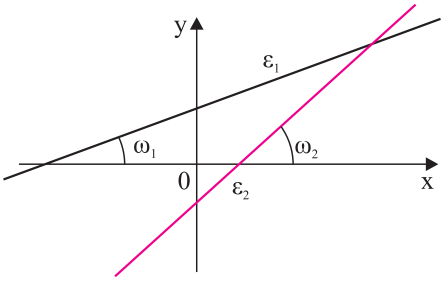
Απόδειξη

Αν $\alpha_1=\alpha_2$, τότε $\varepsilon\varphi\omega_1=\varepsilon\varphi\omega_2$, οπότε $\omega_1=\omega_2$ και άρα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες ή συμπίπτουν. Ειδικότερα:

- Αν $\alpha_1=\alpha_2$ και $\beta_1=\beta_2$, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες (Σχήμα α΄), ενώ
- Αν $\alpha_1=\alpha_2$, και $\beta_1\neq\beta_2$, τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2 ταυτίζονται.
- Αν $\alpha_1\neq\alpha_2$, τότε $\varepsilon\varphi\omega_1\neq\varepsilon\varphi\omega_2$, οπότε $\omega_1\neq\omega_2$ και άρα οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται (Σχήμα β΄).



Σχήμα α



Σχήμα β

ΘΕΜΑ Β

Από την Τράπεζα Θεμάτων του Υπουργείου ΠΑΙ.Θ.(Ι.Ε.Π.). Περιλαμβάνονται 21 θέματα αυτής της κατηγορίας .

ΘΕΜΑ Β1

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2+2x-3.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$ και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τον τύπο της.

(Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την παραπάνω συνάρτηση.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Β2

Δίνεται η συνάρτηση f, με:

$$f(x)=\begin{cases}8-x, \text{αν } x<0\\ 2x+5, \text{αν } x\geq 0\end{cases}$$

α) Να δείξετε ότι $f(-5)=f(4)$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, ώστε $f(x)=9$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β3

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Α.

(Μονάδες 5)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-5x+3$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2x-15,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-1)+f(0)+f(1)$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Β5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(0)=5 \text{ και } f(1)=3$$

α) Να δείξετε ότι $\alpha=-2$ και $\beta=5$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y.

(Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Β6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3-16x}{x-4}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει $f(x)=x^2+4x$.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)=32$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β7

Δίνεται η συνάρτηση f, με:

$$f(x)=\begin{cases}2x-5, & x\le 3\\ x^2, & 3<x<10\end{cases}$$

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1),\ f(3)$ και $f(5)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=25$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Β8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\dfrac{1}{x}, x\neq 0$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f(1)-f(2)$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\dfrac{5}{2}$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Β9

α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $A = x^3 - x^2 + 3x - 3$.

(Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{3}{x}$ και $g(x) = x^2 - x + 3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1,\ 3)$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β10

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^3 \text{ και } g(x) = x,\ \ x \in \mathbb{R}$$

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g τέμνονται σε τρία σημεία τα οποία και να βρείτε.

(Μονάδες 13)

β) Αν Α, Ο, Β είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, όπου $O(0,\ 0)$, να αποδείξτε ότι Α, Β είναι συμμετρικά ως προς το Ο.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β11

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{2x^2 - 6|x|}{2|x| - 6}$.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = |x|$, για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 10)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Β12

Η θερμοκρασία Τ σε βαθμούς Κελσίου (°C), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση:

$$T = 15 + 25 \cdot x$$

όταν $0 < x < 200$.

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290 °C. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440 °C; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Β13

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$.

(Μονάδες 12)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2 - 5x + 6}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης.

(Μονάδες 5)

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Β14

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,\ 6), B(-1,4)$ να βρείτε τις τιμές των α, β .

(Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha=1$ και $\beta=5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες xx΄ και yy΄.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β15

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}2x+4, & x<0\\ x-1, & x\geq 0\end{cases}$$

α) Να δείξετε ότι $f(-1)=f(3)$.

(Μονάδες 13)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του x, ώστε $f(x)=0$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β16

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι $f(2)+f(4)=0$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β17

Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το σημείο $M\left(\alpha, \dfrac{1}{8}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β18

Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη Α, μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση $y = 35 + 0,8 \cdot x$.

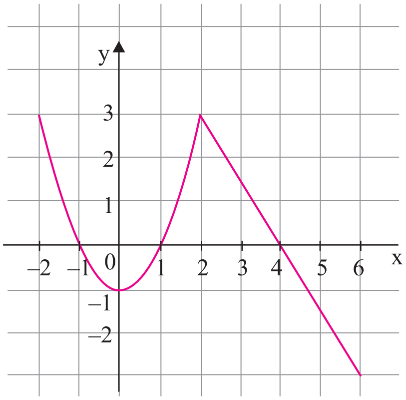
α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά;

(Μονάδες 12)

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α;

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β19



Στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 6)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	**-2**	**-1**		**1**	**2**	
y			**-1**			**-3**

(Μονάδες 6)

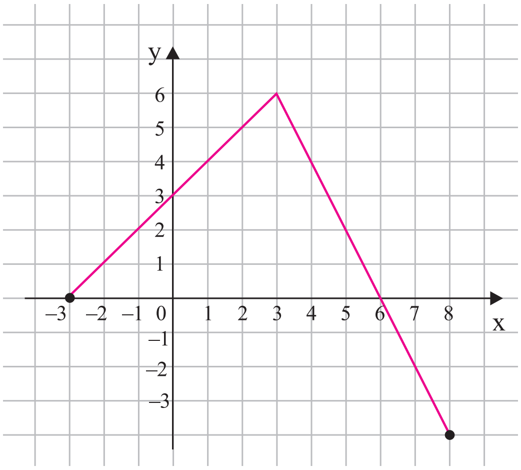
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.

(Μονάδες 6)

δ) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Β20



Στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 6)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	**-3**	**-1**	**0**	**3**		
y					**-2**	**-4**

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.

(Μονάδες 6)

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

ΘΕΜΑ Β21

Δίνεται η συνάρτηση g, με $g(x)=\dfrac{2x^2-4x+\mu}{x+1}$, $\mu \in \mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο $A(1,-4)$,

α) να δείξετε ότι $\mu=-6$.

(Μονάδες 9)

β) να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 9)

γ) για $\mu=-6$ να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Με την εισήγηση των διδασκόντων. Περιλαμβάνονται 15 θέματα αυτής της κατηγορίας.

ΘΕΜΑ Γ1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(-1),\ f(1),\ f(0)$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες x΄x και y΄y.

(Μονάδες 9)

γ) Τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Γ2

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=2x^2-3x+1 \text{ και } g(x)=x^2-x$$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g.

(Μονάδες 9)

γ) Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Γ3

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2-4}, \text{αν} \ \ x\neq 2,\ x\neq -2\\ -1, \text{αν} \ \ x=2,\ x=-2\end{cases}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$K=\sqrt[3]{|f(2)|}-3f\left(\sqrt{2}\right)+3f\left(-\sqrt{2}\right)$$

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)=\dfrac{1}{3}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Γ4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-\kappa x+\kappa^2,\ \kappa\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει $\kappa\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε το σημείο $M(\sqrt{2},\ 0)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa\in\mathbb{R}$, ώστε το σημείο $N(\sqrt{2},\ 2)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 9)

γ) Για ποιες τιμές του $\kappa\in\mathbb{R}^*$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$;

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Γ5

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}2x-1, \text{αν} \ \ x<0\\ x^2, \text{αν} \ \ 0\leq x<1\\ x+2, \text{αν} \ \ x\geq 1\end{cases}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 6)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 3$.

(Μονάδες 10)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Γ6

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία:

α) Έχει κλίση $\alpha = \frac{1}{2}$ και τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $K(0,\ 3)$.

(Μονάδες 8)

β) Σχηματίζει με τον άξονα γωνία $\omega = 135^{o}$ και τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $\Lambda(0,\ -3)$.

(Μονάδες 9)

γ) Είναι παράλληλη με την ευθεία $y = -2x + 7$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,\ -2)$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Γ7

α) Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = -|x| \text{ και } g(x) = -1$$

και με τη βοήθεια αυτών να λύσετε τις ανισώσεις $|x| \geq 1$ και $|x| < 1$.

(Μονάδες 15)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Γ8

Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1):\ y=\left(P(A)+\frac{1}{2}\right)x+1 \text{ και } (\varepsilon_2): y=P(A\cup B)x-2$$

όπου A και B δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω.

α) Αν οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι μεταξύ τους παράλληλες και η γραφική παράσταση της (ε_2) διέρχεται από το σημείο $K(2,\ 0)$, να βρείτε τις πιθανότητες:

$$P(A),\ P(B) \text{ και } P(A\cup B).$$

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις συνθήκες για τις P(A) και P(B) ώστε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται και κατόπιν να προσδιορίσετε το σημείο τομής τους.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Γ9

Δίνονται η συνάρτηση $f(x)=x^2$ και η ευθεία (ε) $y=x-1$.

α) Να λύσετε γραφικά

i) τις εξισώσεις $f(x)=x-1$ και $f(x)=-1$

ii) τις ανισώσεις $f(x)\geq x-1$ και $f(x)<-1$

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της συνάρτησης f και της ευθείας (ε).

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα x που η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από την ευθεία (ε).

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ10

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2-7x+6}-\frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε τα σημεία $A\left(1,\ f(6)\right)$ και $B\left(-1,\ -f(6)\right)$ και να βρείτε τα συμμετρικά τους σημεία ως προς:

i) τον άξονα $x'x$,

ii) την διχοτόμο της $1^{ης}$ και $3^{ης}$ γωνίας των αξόνων.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Γ11

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\begin{cases}|\alpha-1|x-2, & \text{αν } x>0\\ -|\alpha^2-2|x+3, & \text{αν } x\le 0\end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases}-|2\alpha+1|x+1, & \text{αν } x\ge 0\\ 3|\alpha+1|x-1, & \text{αν } x<0\end{cases}$$

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$ για όλες τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le g(x)$ για $x<0$ και για όλες τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g για $x>0$ να είναι ευθείες παράλληλες.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Γ12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2P(A)x+P(A))^2+1}}$, όπου $P(A)$ η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α ενός δειγματικού χώρου.

α) Να δείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι το σημείο $K\left(P(A),\, f\left(P(A)\right)\right)$ ανήκει στη διχοτόμο της $1^{ης}$ και $3^{ης}$ γωνίας των αξόνων.

(Μονάδες 10)

γ) Να δείξετε ότι το σημείο $B(1,\, f(1))$ ανήκει στο $1^{ο}$ τεταρτημόριο των αξόνων.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ13

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού D_f της συνάρτησης f.

(Μονάδες 10)

β) Αν $\alpha\in D_f$, να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{1}{f(\alpha+1)}-\dfrac{1}{f(\alpha)}+1=2\alpha$,

(Μονάδες 8)

ii) $\dfrac{f(\alpha+2)-f(\alpha+1)}{2\alpha+1}=2\alpha$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ14

Δίνεται η ευθεία (ε_1) με εξίσωση $y=(\mu^2-4\mu)x+2$, $\mu\in\mathbb{R}$, που διέρχεται από το σημείο Α(1, −1) και η ευθεία (ε_2) με εξίσωση $y=-|\kappa-2015|x$, $\kappa\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το μ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε_1) είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=-3x+2015$.

(Μονάδες 13)

β) Για ποιες τιμές της παραμέτρου $\kappa\in\mathbb{R}$ η ευθεία (ε_2) είναι παράλληλη με την ευθεία (ε_1).

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Γ15

Στα φαρμακευτικά προϊόντα πρέπει να καθορίζεται η προτεινόμενη δοσολογίαγιαενηλίκους και μικρά παιδιά. Δύο τύποι που χρησιμοποιούνται για τη μετατροπή των επιπέδων δοσολογίας ενηλίκων ώστε να είναι κατάλληλα για μικρά παιδιά είναι:

Κανόνας του Cowling: $y=\frac{1}{24}(t+1)\alpha$ (1)

Κανόνας του Fried: $y=\frac{2}{25}t\alpha$ (2)

Όπου το α δηλώνει τη δοσολογία ενηλίκων και το t την ηλικία των παιδιών σε έτη.

α) Αν $\alpha=100$, να χαράξετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων (1) και (2) στους ίδιους άξονες για $0\le t\le 12$.

(Μονάδες 15)

β) Για ποια ηλικία καθορίζουν την ίδια δοσολογία οι δύο τύποι;

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ

Από την Τράπεζα Θεμάτων του Υπουργείου ΠΑΙ.Θ.(Ι.Ε.Π.). Περιλαμβάνονται 36 θέματα αυτής της κατηγορίας.

ΘΕΜΑ Δ1

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \alpha x - \alpha + 2 \text{ και } g(x) = x^2 - \alpha + 3$$

και με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο (1,2) για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α.

(Μονάδες 7)

β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

i) Να βρείτε την τιμή του α.

(Μονάδες 4)

ii) Για την τιμή του α που βρήκατε υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν δύο σημεία τομής.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ2

Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ και } g(x) = x + \alpha$$

με $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Για α=1, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δυο σημεία.

(Μονάδες 10)

γ) Για $\alpha > 1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ3

Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά,πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες.

(Μονάδες 5)

β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

i) Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι:

$$f(x) = 30 - \frac{3}{4}x$$

(Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος (β) (i), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.

(Μονάδες 4)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Δ4

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = (x-1)^2 - 4 \text{ και } g(x) = |x-1| + 2 \text{ με } x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

(Μονάδες 9)

β) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

(Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Δ5

Μία υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x, να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda = (2x+5)^2 - 8x \quad (1)$$

α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το −5, ποιος είναι ο εξαγόμενος;

(Μονάδες 6)

β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20, ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος;

(Μονάδες 6)

γ) Να γράψετε τη σχέση (1) στη μορφή $4x^2+12x+(25-\lambda)=0$ και στη συνέχεια:

i) να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x, ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5.

(Μονάδες 6)

ii) να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ .

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ6

Αν ένας κάτοικος μιας πόλης Α καταναλώσει x κυβικά νερού σε ένα χρόνο, το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει δίνεται (σε ευρώ) από τη συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}12+0,5x & \text{αν } 0\le x\le 30\\ 0,7x+6 & \text{αν } x>30\end{cases}$$

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:

i) έλειπε από το σπίτι του και δεν είχε καταναλώσει νερό,

(Μονάδες 2)

ii) έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού,

(Μονάδες 3)

iii) έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού.

(Μονάδες 5)

β) Σε μια άλλη πόλη Β το ποσό (σε ευρώ) που αντιστο ιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο:

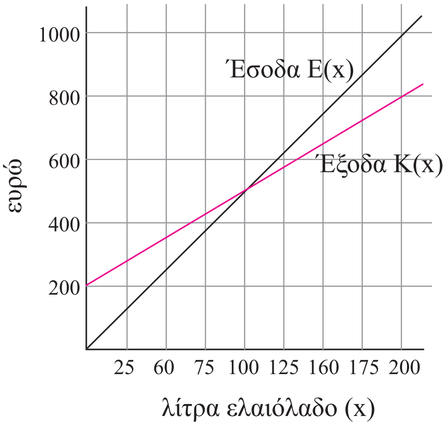
$$g(x)=12+0,6x,\ \text{για } x>0$$

Ένας κάτοικος της πόλης Α και ένας κάτοικος της πόλης Β κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά νερού, για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλη Β, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Δ7

Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο. Στο παραπάνω σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα $K(x)$ και τα έσοδα $E(x)$ από την πώληση x λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.



α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του.

(Μονάδες 6)

β) Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας;

(Μονάδες 5)

γ) Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων $K(x)$ και $E(x)$ και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος (γ).

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

(Μονάδες 7)

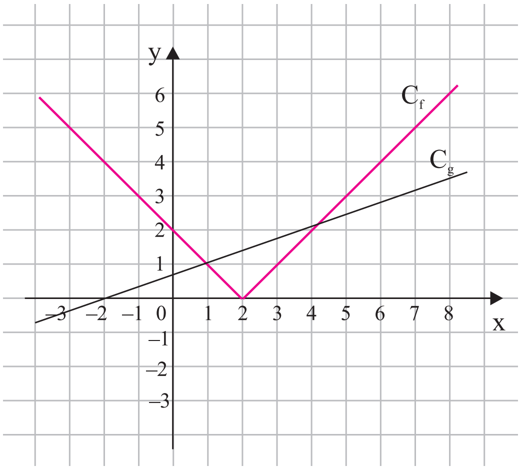
γ) Αν Α και Β είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα Α και Β .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ9

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με:

$$f(x) = |x-2| \text{ και } g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3},\ x \in \mathbb{R}.$$



α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g.

(Μονάδες 6)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

(Μονάδες 8)

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε για ποιεςτιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g.

(Μονάδες 6)

δ) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση:

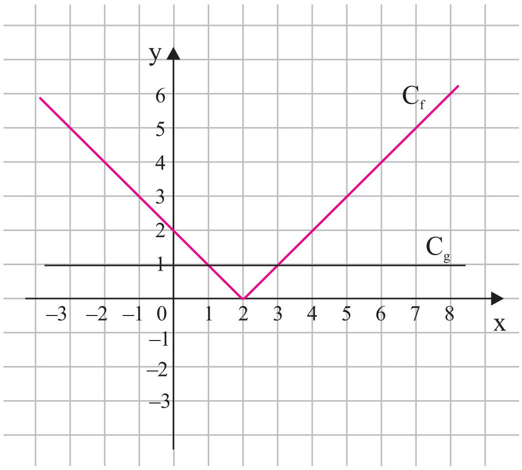
$$K=\sqrt{3|2-x|-(x+2)}$$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ10

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων και g αντίστοιχα, με:

$$f(x)=|x-2| \text{ και } g(x)=1,\ x\in\mathbb{R}$$



α) i) Να εκτιμήσετε τα σημεία τομής των C_f και C_g.

ii) Να εκτιμήσετε τις τιμές του x, για τις οποίες η C_f είναι κάτω από τη C_g.

(Μονάδες 10)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση:

$$A=\frac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}$$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ11

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5|x|+6}{|x|-3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε ισχύει $f(x)=|x|-2$.

(Μονάδες 9)

γ) Για $x\in A$ να λύσετε την εξίσωση $\left(f(x)+2\right)^2-4f(x)-5=0$.

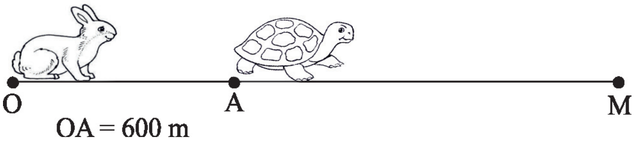
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ12

Ο αγώνας δρόμου ανάμεσα στη χελώνα και το λαγό γίνεται σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες:

- Η διαδρομή είναι τμήμα ενός ευθύγραμμου δρόμου.
- Ο λαγός ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t=0$ από ένα σημείο Ο.
- Το τέρμα βρίσκεται σε σημείο Μ με $OM>600$ μέτρα.
- Η χελώνα ξεκινάει τη στιγμή $t=0$ με προβάδισμα, δηλαδή από ένα σημείο Α που βρίσκεται μεταξύ του Ο και του Μ, με $OA=600$ μέτρα.

Υποθέτουμε ότι, για $t\geq 0$, η απόσταση του λαγού από το Ο τη χρονική στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_{\Lambda}(t)=10t^2$ μέτρα, ενώ η απόσταση της χελώνας από το Ο τη στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_x(t)=600+40t$ μέτρα.



α) Να βρείτε σε πόση απόσταση από το Ο θα πρέπει ναβρίσκεται το τέρμα Μ, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα.

(Μονάδες 10)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι η απόσταση του τέρματος Μ από το Ο είναι ΟΜ = 2250 μέτρα. Να βρείτε:

i) Ποια χρονική στιγμή ο λαγός φτάνει τη χελώνα.

(Μονάδες 5)

ii) Ποιος από τους δύο δρομείς προηγείται τη χρονική στιγμή $t=12$min και ποια είναι τότε η μεταξύ τους απόσταση.

(Μονάδες 5)

iii) Ποια χρονική στιγμή τερματίζει ο νικητής του αγώνα.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ13

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=x^2-4x+\alpha \text{ και } g(x)=\alpha x-5, \text{ με } \alpha\in\mathbb{R}$$

α) Αν ισχύει $f(2)=g(2)$, να βρείτε την τιμή του α.

(Μονάδες 7)

β) Για $\alpha=1$,

i) να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

(Μονάδες 8)

ii) να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$.

(Μονάδες 5+5=10)

ΘΕΜΑ Δ14

Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο $y = 60 + 0,20x$, όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μία ημέρα ταξίδεψε 400 Km ;

(Μονάδες 5)

β) Πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ένας πελάτης ο οποίος, για μία ημέρα, πλήρωσε 150 ευρώ;

(Μονάδες 5)

γ) Μία άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο $y = 80 + 0,10x$ όπου, όπως προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε.

(Μονάδες 10)

δ) Αν $f(x) = 60 + 0,20 \cdot x$ και $g(x) = 80 + 0,10 \cdot x$ είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή καθεμιάς από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος (γ).

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ15

Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f με:

$$f(x)=(\lambda+1)x^2-(\lambda+1)x+2,\ x\in\mathbb{R}$$

α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0,\ 2)$.

(Μονάδες 3)

β) Για $\lambda=-1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 4)

γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $B(2,\ 0)$, να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x΄x και σε άλλο σημείο.

(Μονάδες 8)

δ) Για $\lambda=1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x΄x.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ16

Δίνονται η συνάρτηση $f(x)=x^2+x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα x΄x.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

(Μονάδες 10)

γ) Έστω $M(x,y)$ σημείο της C_f. Αν για την τετμημένη x του σημείου Μ ισχύει $|2x-1|<3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ17

Δίνεται η συνάρτηση f, με:

$$f(x)=\begin{cases}-x+2, \text{αν } x<0\\ x+2, \text{αν } x\geq 0\end{cases}$$

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τονάξονα y΄y.

(Μονάδες 3)

β) **i)** Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y=3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.

(Μονάδες 5)

ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τονάξονα y΄y. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ) **i)** Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η ευθεία $y=\alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=\alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ18

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, με:

$$f(x)=x^2-2x \text{ και } g(x)=3x-4,\ x\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g .

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y=\alpha$, $\alpha<-1$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ19

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-x+\frac{\alpha}{4}}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f να είναι το σύνολο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας.

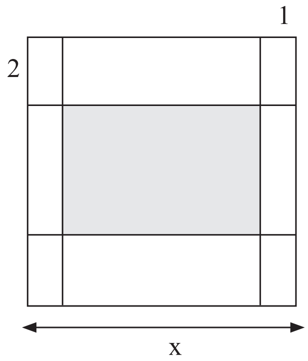
(Μονάδες 7)

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ20

Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm $(5\le x\le 10)$ στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x) = (x-2)(x-4)$$

(Μονάδες 8)

β) Να βρεθεί η τιμή του x έτσι ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι $35\ cm^2$.

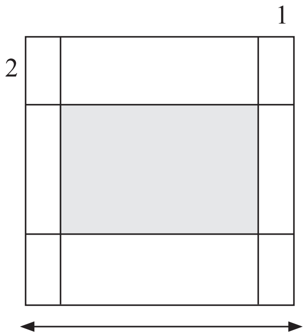
(Μονάδες 7)

γ) Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον $24\ cm^2$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ21

Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm ($5 \le x \le 10$) στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x) = x^2 - 6x + 8$$

(Μονάδες 8)

β) Να βρεθεί η τιμή του x έτσι ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 24 cm^2.

(Μονάδες 7)

γ) Αν το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων είναι το πολύ 35 cm^2, να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ22

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 \text{ και } g(x) = \lambda x + (1-\lambda),\ x \in \mathbb{R}$$

και λ παράμετρος με $\lambda \neq 0$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

(Μονάδες 8)

β) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό;

(Μονάδες 8)

γ) Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g, να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει $(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Δ23

Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε m) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση $y = 60t - 5t^2$.

α) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;

(Μονάδες 8)

β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος $y = 175$ m;

(Μονάδες 8)

γ) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Δ24

Δυο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα. Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους κ.α). Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε 25ευρώ.

α) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος $K(\nu)$ της επιχείρησης, αν γεμίζει ν τόνερ το μήνα.

(Μονάδες 5)

β) Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει τα μηνιαία έσοδα Ε(ν) της επιχείρησης από την πώληση ν αριθμού τόνερ το μήνα.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση:

i) να μην έχει ζημιά.

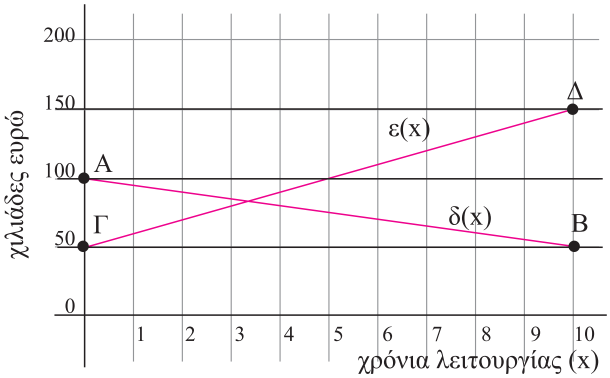
(Μονάδες 7)

ii) να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ25

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με Α(0, 100) και Β(10, 50) παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης δ(x) των ετήσιων δαπανών μιας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ με Γ(0, 50) και Δ(10, 150) παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων ε(x) της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.



α) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τα έξοδα τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας.

(Μονάδες 4)

β) **i)** Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων δ(x), ε(x) και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο (α) ερώτημα ήταν σωστές.

(Μονάδες 15)

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ26

Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία ΤΑΧΙ με το όνομα ‘RED’ χρεώνει 1 ευρώ με την είσοδο στο ΤΑΧΙκαι 0,6 ευρώγια κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης. Μια άλλη εταιρεία ΤΑΧΙμε τοόνομα ‘YELLOW’χρεώνει 2 ευρώ με την είσοδο στο ΤΑΧΙ και 0,4 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης. Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερεςαπό 15 χιλιόμετρα.

α) **i)** Αν είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία ‘RED’για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (Km)	0	2	8
f(x) (ευρώ)			

(Μονάδες 3)

ii) Αν είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία ‘YELLOW’για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (Km)			
g(x) (ευρώ)	2	3,2	4,8

(Μονάδες 3)

β) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g και τους τύπους τους.

(Μονάδες 8)

03.indd 155 4/12/2014 12:47:00

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας ‘RED’ είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

δ) Αν δυο πελάτες Α και Β μετακινηθούν με την εταιρεία ‘RED’και ο πελάτης Α διανύσει 3χιλιόμετρα παραπάνω από τον Β, να βρείτε πόσο παραπάνω θα πληρώσει ο Α σε σχέση με τον Β.

(Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ Δ27

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{|2-x|}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδειχθεί ότι:

$$f(x)=\begin{cases} x-3, x>2 \\ -x+3, x<2 \end{cases}$$

(Μονάδες 7)

γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της f και να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες xx' και yy'.

(Μονάδες 8)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\leq 0$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ28

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha}{2x-3}$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=2x-\alpha$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρεθεί η τιμή του α αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(-1,\ 1)$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ29

Για τους πραγματικούς αριθμούς, ισχύει ότι:

- $|1-3\alpha|<2$
- Η απόσταση του αριθμού β από τον αριθμό 2 είναι μικρότερη του 1

α) Να αποδειχθεί ότι $-\frac{1}{3}<\alpha<1$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδειχθεί ότι $|\beta-3\alpha-1|<3$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x^2-4(\beta-2)x+\beta^2}$ έχει πεδίο ορισμού όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ30

Δίνεται η εξίσωση $x^2-x+\lambda-\lambda^2=0$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$ (1).

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το λ, ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

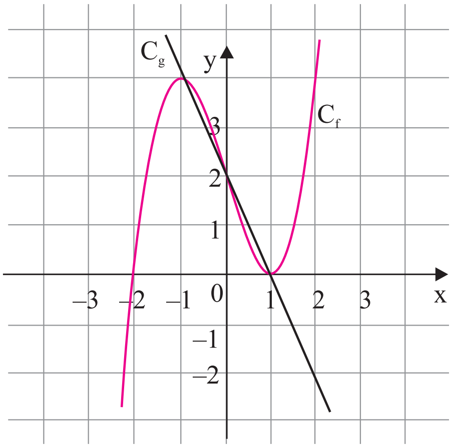
$$f(x)=\sqrt{x^2-x+\lambda-\lambda^2}$$

να είναι το σύνολο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Δ31

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x)=-2x+2$.



Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:

α) Τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)=-2x+2$.

(Μονάδες 6)

β) Τις τιμές $f(-1),\ f(0),\ f(1)$

(Μονάδες 6)

γ) Τις τιμές του x, για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g .

(Μονάδες 6)

δ) Τις τιμές του x, για τις οποίες η παράσταση $A=\sqrt{f(x)+2x-2}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ32

Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Σε διάστημα ενός μηνός τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x)=12,5x+120$ και τα έσοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ) από τη συνάρτηση $E(x)=15,5x$.

α) Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος;

(Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση)

(Μονάδες 6)

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Δ33

Δίνεται συνάρτηση $g(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-2,\ 1\}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των κ και λ

(Μονάδες 9)

β) Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -2$,

i) Να απλοποιήσετε τον τύπο της g.

(Μονάδες 9)

ii) Να δείξετε ότι $g(\alpha)\cdot g(\beta) > 0$, όταν $\alpha,\ \beta \in (-1,\ 1)\cup(1,\ 2)$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ34

Δίνεται συνάρτηση $g(x) = \dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-2,\ 1\}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των κ και λ

(Μονάδες 9)

β) Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -2$,

i) Να απλοποιήσετε τον τύπο της g.

(Μονάδες 9)

ii) Να δείξετε ότι: $g(\alpha+3) > g(\alpha)$, όταν $\alpha \in (-1,\ 1)\cup(1,\ 2)$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ35

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x+2$ και $g(x) = x^2-9$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3,\ 0)$ και $(-3,\ 0)$.

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το Α(0, 3) και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Ox.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ36

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 3x + 2$ και $g(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

β) Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x + \alpha$. Να δείξετε ότι:

i) αν $\alpha > 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h έχουν δύο κοινά σημεία.

ii) αν $\alpha < 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h δεν έχουν κοινά σημεία.

(Μονάδες 15)

Ακολουθούν προσομοιωμένα ανακεφαλαιωτικά Διαγωνίσματα στο 6ο Κεφάλαιο, σύμφωνα με τις οδηγίες του Ι.Ε.Π. και την σχετική νομοθεσία για τη δομή, επιλογή και διάρθρωση των θεμάτων.

Διαγώνισμα 1

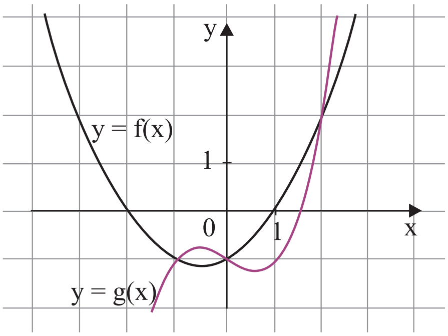
ΘΕΜΑ Α

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ είναι το διάστημα $\Delta=(2,\infty)$.

Μονάδες 2

β) Στο επόμενο σχήμα τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και g είναι τα A(−1, −1), B(0, −1) και Γ(2, 2).



Μονάδες 2

γ) Το σημείο τομής της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ με τον άξονα y′y είναι μόνο το $K(0,-1)$.

Μονάδες 2

δ) Οι ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $y=-2x+1$ και $y=-3x-\frac{1}{2}$ τέμνονται σε ένα σημείο.

Μονάδες 2

ε) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ είναι το διάστημα $\Delta=(1,\infty)$.

Μονάδες 2

Α2. Έστω δύο ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $y=\alpha_1 x+\beta_1$ και $y=\alpha_2 x+\beta_2$ αντιστοίχως και ω_1 και ω_2 οι γωνίες που σχηματίζουν αυτές με τον άξονα $x'x$ γωνίες αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha_1=\alpha_2$, τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες ή συμπίπτουν.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $A=x^3-x^2+3x-3$.

Μονάδες 13

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\frac{3}{x}$ και $g(x)=x^2-x+3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το Α(1, 3).

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1, \text{αν } x<0 \\ x^2, \text{αν } 0\le x<1 \\ x+2, \text{αν } x\ge 1 \end{cases}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=3$.

Μονάδες 10

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x)=12,5x+120$ και τα έσοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ), σε διάστημα ενός μηνός, από τη συνάρτηση $E(x)=15,5x$.

α) Ποια είναι τα πάγια έξοδα της επιχείρησης;

Μονάδες 6

β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος;

Μονάδες 4

γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση)

Μονάδες 6

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Διαγώνισμα 2

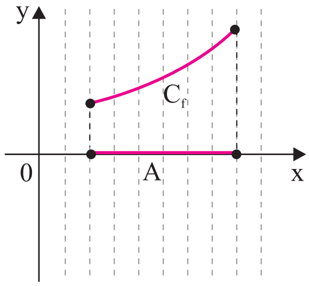
ΘΕΜΑ Α

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν (α,β, γ) γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

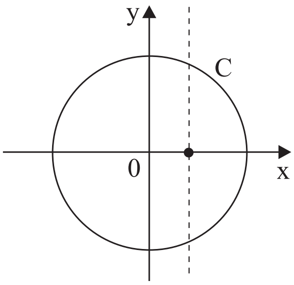
α) Το σημείο τομής της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ με τον άξονα y΄y είναι μόνο το $K(0,-1)$.

Μονάδες 2

Θεωρούμε τα επόμενα σχήματα (α΄) και (β΄) για τις ερωτήσεις (β) και (γ):



Σχήμα α΄



Σχήμα β΄

β) Στο σχήμα (α΄) η γραφική παράσταση C_f παριστάνει τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f.

Μονάδες 2

γ) Στο σχήμα (β΄) η γραφική παράσταση C παριστάνει τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f.

Μονάδες 2

Α2. *Στις επόμενες ερωτήσεις να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α* ***με ένα μόνο*** *στοιχείο της στήλης Β, ώστε να προκύπτουν ισότητες, ισοδύναμες ή αληθείς σχέσεις ή προτάσεις. Στη στήλη Β υπάρχει ένα επιπλέον στοιχείο.*

δ)

***ΣΤΗΛΗ Α* (Συνάρτηση)**	***ΣΤΗΛΗ Β (πεδίο ορισμού)***
1. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2}$	α. $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},\ \infty\right)$
2. $g(x)=\sqrt{x^2-2}$	β. $\mathbb{R}-\left\{-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right\}$
3. $h(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}}$	γ. $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2},\ \infty\right)$
	δ. $\left(-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$

Μονάδες 2

ε) Έστω η ευθεία (ε), με εξίσωση $y=\alpha x+\beta$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0,\beta)$ και έχει κλίση $\lambda=\alpha$ σχηματίζει δε με τον άξονα $x'x$ γωνία ω.

ΣΤΗΛΗ Α (αν...)	***ΣΤΗΛΗ Β (τότε...)***
1. $\alpha>0$	α. $90^0<\omega<180^0$
2. $\alpha<0$	β. $\omega=0^0$
3. $\alpha=0$	γ. $\omega=90^0$
	δ. $0^0<\omega<90^0$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη Α, μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση $y=35=0,8\cdot x$.

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά;

Μονάδες 12

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α;

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1):\ y=\left(P(A)+\frac{1}{2}\right)x+1 \text{ και } (\varepsilon_2): y=P(A\cup B)x-2$$

όπου Α και Β δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω.

α) Αν οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι μεταξύ τους παράλληλες και η γραφική παράσταση της (ε_2) διέρχεται από το σημείο $K(2,\ 0)$, να βρείτε τις πιθανότητες:

$$P(A),\ P(B) \text{ και } P(A\cup B).$$

Μονάδες 13

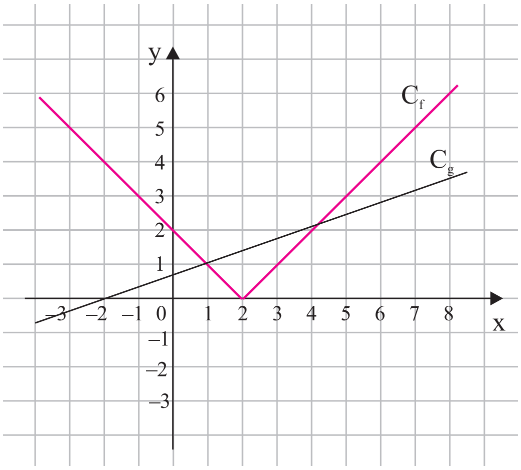
β) Να βρείτε τις συνθήκες για τις P(A) και P(B) ώστε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται και κατόπιν να πρσδιορίσετε το σημείο τομής τους.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Δ

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με:

$$f(x)=|x-2| \text{ και } g(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$$



α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g

Μονάδες 6

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

Μονάδες 8

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε για ποιεςτιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g.

Μονάδες 6

δ) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση:

$$K = \sqrt{3|2-x|-(x+2)}$$

Μονάδες 5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο

Μελέτη Βασικών Συναρτήσεων

7.1 Μελέτη της Συνάρτησης $f(x) = αx^2$

7.2 Μελέτη της Συνάρτησης $f(x) = \frac{α}{x}$

7.3 Μελέτη της Συνάρτησης $f(x) = αx^2 + βx + γ$

Η εξεταστέα ύλη για το κεφάλαιο αυτό είναι:

Παράγραφος 7.1

Παράγραφος 7.3

ΘΕΜΑ Α

Θέμα Α.1-Ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου

Α.1.1. Ερωτήσεις Σωστού–Λάθους

Στις επόμενες προτάσεις, να γράψετε δίπλα στην κάθε πρόταση το γράμμα Σ, αν η πρόταση είναι σωστή, ή το γράμμα Λ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2$, με $\alpha>0$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty]$.

2. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2$, με $\alpha<0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty]$.

3. Η συνάρτηση $f(x)=-2x^2$ έχει ελάχιστο στο 0, το $f(0)=0$.

4. Η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ έχει ελάχιστο στο 0, το $f(0)=0$.

5. Η γραφική παράσταση της συνάτησης $f(x)=\alpha x^2$, με $\alpha\neq 0$, είναι μία καμπύλη που λέγεται παραβολή με κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

6. Στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2$, με $\alpha\neq 0$, καθώς το $|\alpha|$ μικραίνει, η παραβολή γίνεται όλο και πιο «κλειστή», δηλαδή «πλησιάζει» τον άξονα $y'y$.

7. Το σημείο $A(-1,\ -5)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της παραβολής $f(x)=-5x^2$.

8. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha\neq 0$, προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της παραβολής $y=\alpha x^2$, μίας οριζόντιας και μιας κατακόρυφης, έτσι ώστε η κορυφή της να συμπέσει με το σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha},\ -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$.

9. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha>0$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,\ -\dfrac{\beta}{2\alpha}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[-\infty,\ -\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)$.

10. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha<0$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,\ -\dfrac{\beta}{2\alpha}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[-\infty,\ -\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)$.

11. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha<0$, παρουσιάζει μέγιστο στο $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$, το $f\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)=-\dfrac{\Delta}{4\alpha}$.

12. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha\neq 0$, είναι μία παραβολή που τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Γ(0, γ), διότι $f(0)=\gamma$.

13. Η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+4$ εφάπτεται του άξονα x΄x στο σημείο Α(2, 0).

14. Η παραβολή $y=2x^2-5x+2$ δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα x΄x.

15. Η παραβολή $y=-3x^2+2x-7$ τέμνει τον άξονα x΄x σε δύο σημεία.

Α.1.2. Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

*Στις επόμενες προτάσεις η σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση είναι **μόνο μία**. Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση της κάθε ερώτησης.*

1. Η συνάρτηση $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^2$ είναι:

Α. Γνησίως αύξουσα στο $[0,\ +\infty)$ ***Β.*** Γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\ 0]$

Γ. Γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\ 0]$ ***Δ.*** Γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

2. Η συνάρτηση $f(x)=4x^2$ έχει:

Α. ελάχιστο στο $x_0=1$ ***Β.*** μέγιστο στο $x_1=-1$

Γ. ελάχιστο στο $x_2=0$ ***Δ.*** μέγιστο στο $x_3=0$

3. Η παραβολή $y = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$, καθώς η $|\alpha|$ μεγαλώνει:

Α. γίνεται όλο και πιο «κλειστή» ***Β.*** δεν μεταβάλεται

Γ. γίνεται όλο και πιο «ανοικτή» ***Δ.***τίποτα από τα προηγούμενα

4. Η συνάρτηση $f(x) = 7 - 2x - 3x^2$ είναι:

Α. Γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty,\ -\frac{1}{3}\right]$

Β. Γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty,\ -\frac{1}{3}\right]$

Γ. Γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

Δ. Γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

5. Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 7$ έχει:

Α. ελάχιστο στο $x_0 = -\frac{3}{2}$ ***Β.*** μέγιστο στο $x_0 = \frac{3}{2}$

Γ. ελάχιστο στο $x_0 = \frac{3}{2}$ ***Δ.*** μέγιστο στο $x_0 = -\frac{3}{2}$

6. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^2 - x + 10$ τέμνει τον άξονα x΄x**:**

Α.σε ένα σημείο ***Β.*** σε δύο σημεία.

Γ. σε κανένα σημείο ***Δ.*** τίποτα από τα προηγούμενα

Α.1.3. Ερωτήσεις Αντιστοίχισης

Στις επόμενες ερωτήσεις να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α ***με ένα μόνο*** *στοιχείο της στήλης Β, ώστε να προκύπτουν ισότητες, ισοδύναμες ή αληθείς σχέσεις ή προτάσεις. Στη στήλη Β υπάρχει ένα επιπλέον στοιχείο.*

1.

ΣΤΗΛΗ Α (Συνάρτηση)	*ΣΤΗΛΗ Β (Μονοτονία)*
1. $f(x) = -7x^2$	α. γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2}, \ +\infty\right)$
2. $g(x) = 2x^2 + x - 3$	β. γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right]$
3. $h(x) = x^2 - x + 1$	γ. γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right]$
	δ. γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty]$

2.

ΣΤΗΛΗ Α(Συνάρτηση)	*ΣΤΗΛΗ Β (Ακρότατα)*
1. $f(x) = 2x^2$	α. ελάχιστο στο 0, το $f(0) = 0$
2. $g(x) = -4x^2 + x - 1$	β. ελάχιστο στο 5, το $f(5) = -4$
3. $h(x) = \frac{1}{5}x^2 - 2x + 1$	γ. μέγιστο στο, το $f\left(\frac{1}{8}\right) = -\frac{15}{16}$
	δ. μέγιστο στο 0, το $f(0) = 0$

3.

ΣΤΗΛΗ Α (Συνάρτηση)	*ΣΤΗΛΗ Β (πλήθος σημείων τομής με τον άξονα x΄x)*
1. $f(x) = 2x^2 - x + 3$	α. δύο
2. $g(x) = x^2 + 2x - 3$	β. τρία
3. $h(x) = x^2 - 2x + 1$	γ. κανένα
	δ. ένα

Θέμα Α.2-Αποδείξεις προτάσεων και ιδιοτήτων

Στα επόμενα παρατίθενται όλες οι αποδείξεις[2] των προτάσεων και των ιδιοτήτων του 7ου Κεφαλαίου που περιέχονται στην εξεταστέα ύλη του μαθήματος: «Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων» της Α΄Λυκείου και θα αποτελέσουν το 2ο μέρος του 1ου θέματος (το Α2) στις γραπτές προαγωγικές εξετάσεις. Οι αποδείξεις έγιναν σύμφωνα με το περιεχόμενο του σχολικού βιβλίου.

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2,\ \alpha>0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$, παρουσιάζει δε ελάχιστο στο $x=0$, το $f(0)=0$.

Απόδειξη

- Έστω τυχαία $x_1,\ x_2\in(-\infty,0]$ με $x_1<x_2$.

  Τότε θα είναι $x_1<x_2 \Leftrightarrow -x_1>-x_2$. Έχουμε διαδοχικά:

  $$(-x_1)^2>(-x_2)^2 \Leftrightarrow x_1^2>x_2^2 \Leftrightarrow \alpha x_1^2>\alpha x_2^2 \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$$
  $$(\text{αφού } \alpha>0)$$

  Συνεπώς η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$.

- Έστω τυχαία $x_1,\ x_2\in[0,\ +\infty)$ με $x_1<x_2$. Τότε θα είναι

  $$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^2<x_2^2 \Leftrightarrow \alpha x_1^2<\alpha x_2^2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\ (\text{αφού } \alpha>0)$$

  Συνεπώς η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,\ +\infty)$.

- Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

  $$f(x)=\alpha x^2\geq 0=f(0)\ (\text{αφού } \alpha>0).$$

  Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=0$, το $f(0)=0$.

2. Οι αποδείξεις στο κεφάλαιο αυτό δεν υπάρχουν αυτούσιες στο σχολικό βιβλίο. Αναφέρεται όμως, ότι γίνονται σύμφωνα με τα παραδείγματα που προηγήθηκαν των προτάσεων.

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2$, $\alpha<0$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$, παρουσιάζει δε μέγιστο $x=0$ στο, το $f(0)=0$.

Απόδειξη

- Έστω τυχαία $x_1,\ x_2\in[0,\ +\infty)$ με $x_1<x_2$. Τότε θα είναι:

  $x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^{\ 2}<x_2^{\ 2} \Leftrightarrow \alpha x_1^{\ 2}>\alpha x_2^{\ 2} \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$ (αφού $\alpha<0$)

  Συνεπώς η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,\ +\infty)$.

- Έστω τυχαία $x_1,\ x_2\in(-\infty,0]$ με $x_1<x_2$. Τότε θα είναι:

  $$x_1<x_2 \Leftrightarrow -x_1>-x_2$$

  Έχουμε διαδοχικά:

  $$x_1<x_2 \Leftrightarrow -x_1>-x_2 \Leftrightarrow (-x_1)^2>(-x_2)^2 \Leftrightarrow$$
  $$x_1^{\ 2}>x_2^{\ 2} \Leftrightarrow \alpha x_1^{\ 2}<\alpha x_2^{\ 2} \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2) \text{ (αφού } \alpha<0)$$

  Συνεπώς η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$.

- Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

  $$f(x)=\alpha x^2\le 0=f(0) \text{ (αφού } \alpha<0)$$

  Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο $x=0$, το $f(0)=0$.

3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha>0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\dfrac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$, παρουσιάζει δε ελάχιστο στο $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$, το $f\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)=-\dfrac{\Delta}{4\alpha}$.

Απόδειξη

Όπως γνωρίζουμε η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha\neq 0$ παίρνει τη μορφή:

$$f(x)=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha}$$

Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha\neq 0$, προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της παραβολής $y=\alpha x^2$, μίας οριζόντιας και μιας κατακόρυφης, έτσι ώστε η κορυφή της να συμπέσει με το σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha},\ -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$. Συνεπώς είναι και αυτή μία παραβολή, που έχει κορυφή το σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha},\ -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$.

Άρα, η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha>0$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,\ -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha},\ +\infty\right)$. Παρουσιάζει δε ελάχιστο στο $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$, το $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)=-\frac{\Delta}{4\alpha}$.

4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha<0$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$, παρουσιάζει δε ελάχιστο στο $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$, το $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)=-\frac{\Delta}{4\alpha}$.

Απόδειξη

Όπως γνωρίζουμε η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha\neq 0$ παίρνει τη μορφή:

$$f(x)=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha}.$$

Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha\neq 0$, προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της παραβολής $y=\alpha x^2$, μίας οριζόντιας και μιας κατακόρυφη, έτσι ώστε η κορυφή της να συμπέσει με το σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha},\ -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$. Συνεπώς είναι και αυτή μία παραβολή, που έχει κορυφή το σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha},\ -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$.

Άρα, η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha<0$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$. Παρουσιάζει δε ελάχιστο στο $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$, το $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)=-\frac{\Delta}{4\alpha}$.

ΘΕΜΑ Γ

Με την εισήγηση των διδασκόντων. Περιλαμβάνονται 10 θέματα αυτής της κατηγορίας.

ΘΕΜΑ Γ1

α) Να βρείτε με ποια οριζόντια και ποια κατακόρυφη μετατόπιση η γραφική παράσταση τηςσυνάρτησης $g(x)=3x^2$ θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x)=3x^2+5x-2.$$

(Μονάδες 13)

β) Να κάνετε το ίδιο και για η συνάρτηση:

$$\varphi(x)=3x^2-7x+4$$

θεωρώντας την $h(x)=3x^2$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Γ2

Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α) $f(x)=-2x^2$

(Μονάδες 7)

β) $g(x)=x^2-4x+4$

(Μονάδες 9)

γ) $h(x)=-2x^2+8x-9$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Γ3

Δίνεται η παραβολή $y=-x^2+|\kappa-1|x+\kappa$, $\kappa\in(0,+\infty)$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa > 0$ ώστε η παραβολή να διέρχεται από το σημείο $A(\sqrt{\kappa},\ 0)$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι η παραβολή τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο διαφορετικά σημεία και τον άξονα $y'y$ στο σημείο $K(0, \kappa)$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa > 0$, ώστε η τετμημένη της κορυφής της παραβολής να είναι 1. Για αυτή τη τιμή του κ, να βρείτε την τεταγμένη της κορυφής.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Γ4

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 = 3x + 4$.

(Μονάδες 7)

β) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαραξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = x^2 \text{ και } g(x) = 3x + 4$$

Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων των παραπάνω συναρτήσεων να λύσετε την ανίσωση $x^2 > 3x + 4$ (1).

(Μονάδες 10)

γ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις λύσεις της ανίσωσης (1)

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Γ5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

α) Να γράψετε τη συνάρτηση f στη μορφή $f(x) = \alpha(x - p)^2 + q$.

(Μονάδες 7)

β) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 10)

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, να συμπεράνετε το είδος της μονοτονίας και τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Γ6

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, \text{αν} \ \ x\geq 0 \\ 2x^2-1, \text{αν} \ \ x<0 \end{cases}$$

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, με τους άξονες x΄x και y΄y.

(Μονάδες 7)

β) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 10)

γ) Ποια συνάρτηση προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση της συνάρτησης f κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά;

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Γ7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\left|2\sqrt[3]{\alpha}-3\right|-1\right)x^2$.

α) Να βρείτε τις τιμές του α, ώστε η συνάρτηση f να είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, \ +\infty)$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις τιμές του α, ώστε η συνάρτηση f να έχει ελάχιστο.

(Μονάδες 9)

γ) Για $\alpha=8$, $\alpha=\dfrac{1}{8}$ και $\alpha=\dfrac{729}{64}$ να χαράξετε σε ένα σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της καθώς και τα ακρότατά της.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3|x| + 1$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, με τους άξονες x΄x και y΄y.

(Μονάδες 8)

β) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 10)

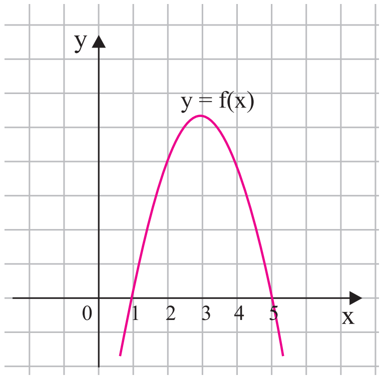
γ) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f καθώς και τα ακρότατά της.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ9

Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση ενός τριωνύμου:

$$f(x) = -2x^2 + \beta x + \gamma,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$$



Να βρείτε:

α) Το πρόσημο της διακρίνουσας Δ

(Μονάδες 8)

β) Τα β και γ

(Μονάδες 10)

γ) Τις διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = -2x^2$, ώστε να συμπέσει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ10

Οι διαστάσεις x, y των κάθετων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα 12 cm μεταβάλλονται, έτσι ώστε η περίμετρος του να παραμένει σταθερή και ίση με 22 cm.

α) Να εκφράσετε το y συναρτήσει του x και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο $E = f(x)$ που δίνει το εμβαδόν Ε του τριγώνου συναρτήσει του x.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές των $x,\ y$ το εμβαδόν Ε μεγιστοποιείται και να βρείτε τη μέγιστη τιμή του.

(Μονάδες 15)

Ακολουθούν προσομοιωμένα ανακεφαλαιωτικά Διαγωνίσματα στο 7ο Κεφάλαιο, σύμφωνα με τις οδηγίες του Ι.Ε.Π. και την σχετική νομοθεσία για τη δομή, επιλογή και διάρθρωση των θεμάτων

Διαγώνισμα 1

ΘΕΜΑ Α

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η συνάρτηση $f(x) = -2x^2$ έχει ελάχιστο στο 0, το $f(0) = 0$.

Μονάδες 2

β) Στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2$, με $\alpha \neq 0$, καθώς το $|\alpha|$ μικραίνει, η παραβολή γίνεται όλο και πιο «κλειστή», δηλαδή «πλησιάζει» τον άξονα y΄y.

Μονάδες 2

γ) Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με $\alpha > 0$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,\ -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[-\infty,\ -\frac{\beta}{2\alpha}\right)$.

Μονάδες 2

δ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με $\alpha \neq 0$, είναι μία παραβολή που τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Γ(0, γ), διότι $f(0) = \gamma$.

Μονάδες 2

ε) Η παραβολή $y = -3x^2 + 2x - 7$ τέμνει τον άξονα x΄x σε δύο σημεία.

Μονάδες 2

Α2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2,\ \alpha<0$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$, παρουσιάζει δε μέγιστο $x=0$ στο, το $f(0)=0$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\left|2\sqrt[3]{\alpha}-6\right|\right)x^2$.

α) Να βρείτε τις τιμές του α, ώστε η συνάρτηση f να είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,\ +\infty)$.

Μονάδες 9

β) Να βρείτε τις τιμές του α, ώστε η συνάρτηση f να έχει ελάχιστο.

Μονάδες 9

γ) Για $\alpha=8$, να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της καθώς και τα ακρότατά της.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραβολή $y=-x^2+|\kappa-1|x+\kappa,\ \kappa\in(0,\ +\infty)$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa>0$ ώστε η παραβολή να διέρχεται από το σημείο $A(\sqrt{\kappa},\ 0)$.

Μονάδες 7

β) Να αποδείξετε ότι η παραβολή τέμνει τον άξονα x΄x σε δύο διαφορετικά σημεία και τον άξονα y΄y στο σημείο $K(0,\kappa)$.

Μονάδες 9

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa>0$, ώστε η τετμημένη της κορυφής της παραβολής να είναι 1. Για αυτή τη τιμή του κ, να βρείτε την τεταγμένη της κορυφής.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-3|x|+1$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, με τους άξονες x΄x και y΄y.

Μονάδες 8

β) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Μονάδες 10

γ) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f καθώς και τα ακρότατά της.

Μονάδες 7

Διαγώνισμα 2

ΘΕΜΑ Α

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν (α, β και γ) γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η γραφική παράσταση της συνάτησης $f(x)=\alpha x^2$, με $\alpha \neq 0$, είναι μία καμπύλη που λέγεται παραβολή με κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον y΄y.

Μονάδες 2

β) Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha<0$, παρουσιάζει μέγιστο στο $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$, το $f\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)=-\dfrac{\Delta}{4\alpha}$.

Μονάδες 2

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha \neq 0$, προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της παραβολής $y=\alpha x^2$, μίας οριζόντιας και μιας κατακόρυφης, έτσι ώστε η κορυφή της να συμπέσει με το σημείο $K\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha},\ -\dfrac{\Delta}{4\alpha}\right)$.

Μονάδες 2

Στις επόμενες ερωτήσεις (δ και ε) να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α ***με ένα μόνο*** *στοιχείο της στήλης Β, ώστε να προκύπτουν ισότητες, ισοδύναμες ή αληθείς σχέσεις ή προτάσεις. Στη στήλη Β υπάρχει ένα επιπλέον στοιχείο.*

δ)

ΣΤΗΛΗ Α(Συνάρτηση)	*ΣΤΗΛΗ Β (Ακρότατα)*
1. $f(x)=2x^2$	α. ελάχιστο στο 0, το $f(0)=0$
2. $g(x)=-4x^2+x-1$	β. ελάχιστο στο 5, το $f(5)=-4$
3. $h(x)=\frac{1}{5}x^2-2x+1$	γ. μέγιστο στο, το $f\left(\frac{1}{8}\right)=-\frac{15}{16}$
	δ. μέγιστο στο 0, το $f(0)=0$

Μονάδες 2

ε)

ΣΤΗΛΗ Α (Συνάρτηση)	*ΣΤΗΛΗ Β (πλήθος σημείων τομής με τον άξονα x΄x)*
1. $f(x)=2x^2-x+3$	α. δύο
2. $g(x)=x^2+2x-3$	β. τρία
3. $h(x)=x^2-2x+1$	γ. κανένα
	δ. ένα

Μονάδες 2

Α2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha<0$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$, παρουσιάζει δε ελάχιστο στο $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$, το $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)=-\frac{\Delta}{4\alpha}$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

α) $f(x)=-2x^2$

Μονάδες 10

β) $g(x)=x^2-4x+4$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, \text{αν} \ \ x\geq 0 \\ 2x^2-1, \text{αν} \ \ x<0 \end{cases}$$

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 7

β) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Μονάδες 10

γ) Ποια συνάρτηση προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση της συνάρτησης f κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά;

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2=3x+4$.

Μονάδες 7

β) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαραξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x)=x^2 \text{ και } g(x)=3x+4$$

Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων των παραπάνω συναρτήσεων να λύσετε την ανίσωση $x^2>3x+4$ (1).

Μονάδες 10

γ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις λύσεις της ανίσωσης (1)

Μονάδες 8

Ακολουθούν γενικά επαναληπτικά προσομοιωμένα Διαγωνίσματα στο πρότυπο των προαγωγικών εξετάσεω, σύμφωνα με το νέο σύστημα αξιολόγησης, τις οδηγίες του Ι.Ε.Π. και την σχετική νομοθεσία για τη δομή, επιλογή και διάρθρωση των θεμάτων

Διαγώνισμα 1

Επαναληπτικό

ΘΕΜΑ Α

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν Α και Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε η σχέση $A \subseteq B$ σημαίνει στην κοινή γλώσσα: «Η πραγματοποίηση του Α συνεπάγεται την πραγματοποίηση του Β».

Μονάδες 2

β) Για όλους τους αριθμούς $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \in \mathbb{R}$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$$

Μονάδες 2

γ) Η ανίσωση $|\alpha| \cdot x > \beta,\ \alpha \neq 0$ έχει λύσεις όλα τα x, με $x > \dfrac{\beta}{|\alpha|}$.

Μονάδες 2

δ) Αν οι οι αριθμοί $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ \alpha_6,\ldots$ είναι όροι γεωμετρικής προόδου, τότε και οι οι αριθμοί$\alpha_2,\ \alpha_4,\ \alpha_6,\ldots$ είναι επίσης όροι γεωμετρικής προόδου.

Μονάδες 2

ε) Το συμμετρικό του σημείου Α(α, β), ως προς τον άξονα y΄y είναι το Γ(−α, −β).

Μονάδες 2

Α2. Έστω το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$. Αν Δ=0, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2-3x+1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες $2x^2-3x+1<0$.

Μονάδες 5

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης:

$$2x^2-3x+1<0$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Ο νιοστός όρος μίας ακολουθίας (α_ν) είναι $\alpha_\nu=3\nu+2$.

α) Να βρείτε τον επόμενο όρο $\alpha_{\nu+1}$,

Μονάδες 7

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (α_ν), $\nu\in\mathbb{N}$ είναι αριθμητική πρόοδος,

Μονάδες 6

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της,

Μονάδες 6

δ) Να βρείτε την τάξη του όρου της που είναι ίσος με 62.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά.

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου.

Μονάδες 5

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7η μέχρι και την 14η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.

Μονάδες 10

Διαγώνισμα 2

Επαναληπτικό

ΘΕΜΑ Α

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε $\alpha, \beta > 0$, ισχύει $\sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$.

Μονάδες 2

β) Αν ο ν είναι άρτιος φυσικός αριθμός, τότε η εξίσωση $x^{\nu} = \alpha^{\nu}$ έχει δύο λύσεις, τις $x_1 = \alpha$ και $x_2 = -\alpha$

Μονάδες 2

γ) Ένα κερί καίγεται με σταθερό ρυθμό. Στο τέλος της $1^{\eta\varsigma}$ ώρας είχε ύψος 36 cm, στο τέλος της $2^{\eta\varsigma}$ ώρας είχε ύψος 33cm, στο τέλος της $3^{\eta\varsigma}$ ώρας είχε ύψος 30 cm κ.ο.κ. Οι τιμές του ύψους του κεριού στο τέλος κάθε ώρας αποτελούν αριθμητική πρόοδο με διαφορά $\omega = 3$.

Μονάδες 2

δ) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ είναι το διάστημα $\Delta = (2, \infty)$

Μονάδες 2

ε) Η παραβολή $y = 2x^2 - 5x + 2$ δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 2

Α2. Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος, με απλά ενδεχόμενα ισοπίθανα. Αν τα Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα του Ω, να αποδείξετε ότι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Το 70% των κατοίκων μιας πόλης έχει αυτοκίνητο, το 40% έχει μηχανάκι και το 20% έχει και αυτοκίνητο και μηχανάκι. Επιλέγουμε τυχαία έναν κάτοικο αυτής της πόλης. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο κάτοικος να έχει αυτοκίνητο

Μ: ο κάτοικος να έχει μηχανάκι.

α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

i) $A \cup M$ **ii)** $M - A$ **iii)** M

Μονάδες 9

β) Να βρείτε την πιθανότητα ο κάτοικος που επιλέχθηκε :

i) Να μην έχει μηχανάκι.

Μονάδες 7

ii) Να μην έχει ούτε μηχανάκι ούτε αυτοκίνητο.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

α) Να βρείτε με ποια οριζόντια και ποια κατακόρυφη μετατόπιση η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 3x^2$ θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$.

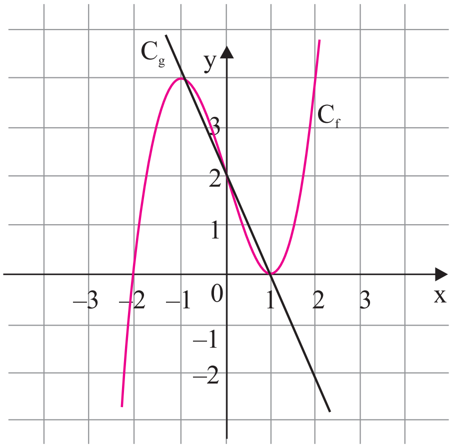
Μονάδες 13

β) Να κάνετε τι ίδιο και για η συνάρτηση $\varphi(x) = 3x^2 - 7x + 4$, θεωρώντας την $h(x) = 3x^2$.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Δ

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x) = -2x + 2$.



Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:

α) Τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = -2x + 2$.

Μονάδες 6

β) Τις τιμές $f(-1),\ f(0),\ f(1)$

Μονάδες 6

γ) Τις τιμές του x, για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g .

Μονάδες 6

δ) Τις τιμές του x, για τις οποίες η παράσταση $A = \sqrt{f(x) + 2x - 2}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

Μονάδες 7

Διαγώνισμα 3

Επαναληπτικό

ΘΕΜΑ Α

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν (α, β, γ) γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 4$ εφάπτεται του άξονα $x'x$ στο σημείο $A(2,\ 0)$.

Μονάδες 2

β) Οι ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $y = -3x + 1$ και $y = -3x - \frac{1}{3}$ αντιστοίχως είναι παράλληλες

Μονάδες 2

Στις παρακάτω προτάσεις (γ, δ, ε) η σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση είναι ***μόνο μία****. Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση της κάθε ερώτησης.*

γ) Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$, τότε:

Α. $\alpha\gamma > \beta\gamma$ ***Β***. $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$

Γ. $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$ ***Δ***. Τίποτα από τα προηγούμενα

Μονάδες 2

δ) Η εξίσωση $(x-1)(x+2) = 0$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:

Α. $x^2 + x - 2 = 0$ ***Β.*** $x^2 - x + 2 = 0$

Γ. $x^2 - x - 2 = 0$ ***Δ.*** $x^2 + x + 2 = 0$

Μονάδες 2

ε) Αν Α και Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $B \subseteq A$, τότε:

Α. $P(A) = P(B)$ ***Β***. $P(A) \geq P(B)$

Γ. $P(B) \geq P(A)$ ***Δ***. Τίποτα από τα προηγούμενα

Μονάδες 2

Α2. Να αποδείξετε ότι ο $\nu^{\text{ος}}$ όρος μίας αριθμητικής προόδου (α_ν), $\nu \in \mathbb{N}$, με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση g, με $g(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + \mu}{x+1}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$,

α) να δείξετε ότι $\mu = -6$.

Μονάδες 9

β) να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Μονάδες 9

γ) για $\mu = -6$ να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι αριθμοί:

$$\kappa = P(A) + \frac{1}{2},\ \lambda = P(B) + \frac{1}{2} \text{ και } \mu = P(A \cup B) - \frac{1}{2} \text{ με}$$

$$\kappa^2 + \lambda^2 - \mu = [P(A)]^2 + [P(B)]^2 + \frac{14}{13}\ (1)$$

και

$$\left|\kappa+\lambda-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{3} \quad (2)$$

όπου P(A) και P(B) οι πιθανότητες δύο ενδεχομένων A και B, αντίστοιχα, ενός δειγματικού χώρου Ω .

Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

i) $A \cap B$

Μονάδες 15

ii) $A' \cap B'$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Ένα μυρμήγκι περπατάει πάνω σε ένα ευθύγραμμο κλαδί μήκους 1 m, με τονακόλουθο τρόπο: Ξεκινάει από το ένα άκρο του κλαδιού και το 1ο λεπτό προχωράει 1 cm, το 2ο λεπτό προχωράει 3 cm και γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση κατά 2 cm μεγαλύτερη από αυτήν που διήνυσε το προηγούμενο λεπτό.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει το μυρμήγκι κάθε λεπτό της κίνησής του, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τον ν-οστό όρο **ν α** αυτής της προόδου.

Μονάδες 5

β) Να βρείτε τη συνολική απόσταση που κάλυψε το μυρμήγκι τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του.

Μονάδες 4

γ) Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι θα φτάσει στο άλλο άκρο του κλαδιού.

Μονάδες 4

δ) Υποθέτουμε τώρα ότι, την ίδια στιγμή που το μυρμήγκι ξεκινάει την πορείατου, από το άλλο άκρο του κλαδιού μία αράχνη ξεκινάει και αυτή προς τηναντίθετη κατεύθυνση και με τον ακόλουθο τρόπο: Το 1ο λεπτό προχωράει 1 cm, το 2ο λεπτό προχωράει 2 cm, το 3ο λεπτό προχωράει

4 cm και,γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση διπλάσια από αυτήν που διήνυσε τοπροηγούμενο λεπτό.

i) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει η αράχνη κάθε λεπτό της κίνησής της, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να βρείτε τον ν –οστό όρο **ν β** αυτής της προόδου.

Μονάδες 7

ii) Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι και η αράχνη θα βρεθούν αντιμέτωπα σε απόσταση 1 cm.

Μονάδες 5

Διαγώνισμα 3

Επαναληπτικό

ΘΕΜΑ Α

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν (α,β,γ) γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η γραφική παράσταση της συνάτησης $f(x)=\alpha x^2$, με $\alpha \neq 0$, είναι μία καμπύλη που λέγεται παραβολή με κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

Μονάδες 2

β) Οι αριθμοί $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda=-\frac{1}{2}$

Μονάδες 2

γ) Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma>\beta+\gamma$

Μονάδες 2

*Στις παρακάτω ερωτήσεις (δ και ε) να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α **με ένα μόνο** στοιχείο της στήλης Β, ώστε να προκύπτουν ισότητες, ισοδύναμες ή αληθείς σχέσεις ή προτάσεις. Στη στήλη Β υπάρχει ένα επιπλέον στοιχείο.* Τα Α και Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω .

δ)

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1. $P(A')$	α. $P(B)-P(A\cap B)$
2. $P(B-A)$	β. 0
3. $P(\Omega)$	γ. $1-P(A)$
	δ. 1

Μονάδες 2

ε) Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$ γράφεται:

ΣΤΗΛΗ Α (Αν...)	ΣΤΗΛΗ Β (τότε...)
1. $\Delta<0$	α. $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$
2. $\Delta>0$	β. $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x_1-x)(x_2-x)$
3. $\Delta=0$	γ. $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{\lvert\Delta\rvert}{4\alpha^2}\right]$
	δ. $\alpha x^2+\beta x+\gamma=(\alpha x+\gamma)^2$

Μονάδες 2

Α2. Έστω δύο ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $y=\alpha_1x+\beta_1$ και $y=\alpha_2x+\beta_2$ αντιστοίχως και ω_1 και ω_2 οι γωνίες που σχηματίζουν αυτές με τον άξονα x΄x γωνίες αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha_1\neq\alpha_2$, τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α) Να δείξετε ότι $\frac{\alpha_{15}-\alpha_9}{\alpha_{10}-\alpha_7}=2$.

Μονάδες 13

β) Αν $\alpha_{15}-\alpha_9=18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $x^2-\lvert\kappa-1\rvert x+\kappa^2=0,\ \kappa\in\mathbb{R}$ (1).

α) Για ποιες τιμές του κ η εξίσωση έχει διπλή ρίζα ;

Μονάδες 6

β) Αν $|\kappa-1|=2$, να λύσετε την εξίσωση (1)

Μονάδες 5

γ) Αν $-1<\kappa<\frac{1}{3}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες .

Μονάδες 6

δ) Για $-1<\kappa<\frac{1}{3}$, να κατασκευάστε την εξίσωση που έχει ως ρίζες τις ρίζες της εξίσωσης (1) αυξημένες κατά 3 .

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε m) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση $y=60t-5t^2$.

α) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;

Μονάδες 8

β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος $y=175$ m;

Μονάδες 8

γ) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m.

Μονάδες 9

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο
Ανισώσεις

- ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
- ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ
- ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις
στις ερωτήσεις του σχολικού βιβλίου

I.

Αριθμός ερώτησης	**Απάντηση**	**Σχόλιο**
1	Γ	Πρέπει $\Delta < 0 \Leftrightarrow 4+4\gamma < 0 \Leftrightarrow \gamma < -1$.
2	Γ	Πρέπει $\Delta < 0 \Leftrightarrow 4-4\gamma < 0 \Leftrightarrow \gamma > 1$.
3	Δ	Πρέπει $\Delta \le 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \le 0$, που ισχύει μόνο για $\lambda = 0$. Πράγματικά, για $\lambda = 0$ η ανίσωση γίνεται $-2x^2 \le 0$, που είναι αληθής.
4	Γ	Πρέπει $\left(x-1 \ge 0 \text{ και } x-5 \le 0\right) \Leftrightarrow \left(1 \le x \le 5\right)$. Άρα έχουμε: $\lvert x-1\rvert + \lvert x-5\rvert = x-1-x+5 = 4$.
5	Γ	Αληθεύει όταν $x-1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$. Άρα αληθεύει για όλα τα $x \in [1, +\infty)$.

II.

Αριθμός ερώτησης[1]	**Απάντηση**	**Σχόλιο**
1	Α	Είναι $\Delta = -3\lambda^2 < 0$. Επομένως είναι ομόσημο του $\alpha = 1$.
2	Ψ	Είναι $\Delta = -4\lambda^2 < 0$. Επομένως είναι ομόσημο του $\alpha = \lambda^2 > 0$.
3	Ψ	Η ανίσωση $x^2(x-1) \ge 0$ έχει λύση και το $x = 0$.
4	Α	Οι λύσεις και των δύο ανισώσεων είναι όλα τα x με $x \le 1$.
5	Ψ	Η ανίσωση $\frac{2x-1}{x+1} > 1$ έχει λύσεις όλα τα $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$, ενώ η ανίσωση $2x-1 > x+1$ έχει λύσεις όλα τα $x \in (2, +\infty)$.

1. Οι ερωτήσεις 5, 6, 7, 8, 9 και 10 ανήκουν στην παράγραφο 4.3 που είναι εκτός της εξεταστέας ύλης.

6	Ψ	Η ανίσωση $\frac{x-1}{(x-2)^2} \geq 0$ έχει λύσεις όλα τα $x \in [1,\ 2) \cup (2,\ +\infty)$, ενώ η ανίσωση $x-1 \geq 0$ όλα τα $x \in [1, +\infty)$.
7	Ψ	Η ανίσωση $\frac{x-1}{(x-2)^2} \geq 0$ έχει λύσεις όλα τα $x \in [1,\ 2) \cup (2,\ +\infty)$, ενώ η ανίσωση $(x-1)(x-2)^2 \geq 0$ όλα τα $x \in [1, +\infty)$.
8	Ψ	Η ανίσωση $\frac{x-2}{x-1} \geq 0$ έχει λύσεις όλα τα $x \in (-\infty,\ 1) \cup [2,\ +\infty)$, ενώ η $(x-2)(x-1) \geq 0$ όλα τα $x \in (-\infty,\ 1] \cup [2,\ +\infty)$.
9	Α	Έχουν και οι δύο λύσεις όλα τα $x \in (1,\ 2)$.
10	Ψ	Προκύπτουν διαφορετικές λύσεις με βάση τον πίνακα προσήμου.

III.

1	2	3	4
Δ	Α	Β	Γ

IV.

Αριθμός ερώτησης	Απάντηση
1	Δεν ισχύει η ισοδυναμία: $(2x-6)(x-1) > 0 \Leftrightarrow (2x-6>0 \text{ και } x-1>0) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x>3 \text{ και } x>1) \Leftrightarrow x>3$ αφού μπορεί να είναι και $(2x-6<0 \text{ και } x-1<0) \Leftrightarrow (x<3 \text{ και } x<1) \Leftrightarrow x<1$.

2	Η ισοδυναμία $x < \frac{4}{x} \Leftrightarrow x^2 < 4$ ισχύει μόνο όταν $x > 0$ (Πολλαπλασιάσαμε με $x > 0$). Αν όμως $x < 0$ έχουμε $x < \frac{4}{x} \Leftrightarrow x^2 > 4$.
3	Η ισοδυναμία $(x+2)^2(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 0$ δεν ισχύει, αφού μπορεί να έχουμε και $(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Απαντήσεις
στις ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου

Α.1.1. Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Σ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Λ	Λ

Α.1.2. Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

1	2	3	4	5	6
Δ	Α	Α	Γ	Γ	Γ

Α.1.3. Ερωτήσεις Αντιστοίχισης

1.

1	2	3
γ	β	δ

2.

1	2	3
γ	β	α

3.

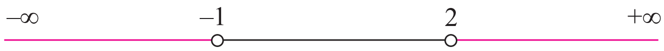
1	2	3
α	β	γ

Λύσεις ασκήσεων
της Τράπεζας Θεμάτων

ΘΕΜΑ Β

Β1. **α)** Η εξίσωση $x^2 - x - 2 = 0$ έχει $\Delta = 9$ και λύσεις τις $x_1 = 2$ και $x_2 = -1$

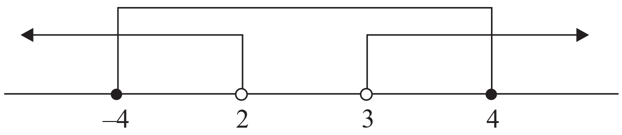
β) Η ανίσωση $x^2 - x - 2 > 0$ έχει λύσεις όλα τα $x \in (-\infty, \ -1) \cup (2, \ \infty)$. Η παράσταση του συνόλου των λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



γ) Το $-\dfrac{4}{3}$ βρίσκεται μέσα στο σύνολο των λύσεων της ανίσωσης, αφού $-\dfrac{4}{3} \in (-\infty, \ -1)$.

Β2. **α)** Το τριώνυμο $-x^2 + 5x - 6$ έχει ρίζες τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 3$. Συνεπώς η ανίσωση $-x^2 + 5x - 6 < 0$ έχει λύσεις όλα τα $x \in (-\infty, \ 2) \cup (3, \ \infty)$.
Το $x^2 - 16$ έχει ρίζες τις $x_1 = 4$ και $x_2 = -4$. Συνεπώς η ανίσωση $x^2 - 16 \le 0$ έχει λύσεις όλα τα $x \in [-4, \ 4]$.

β) Η παράσταση των λύσεων των παραπάνω ανισώσεων στον άξονα των πραγματικών αριθμών φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Οι κοινές τους λύσεις είναι όλα τα $x \in [-4, \ 2) \cup (3, 4]$.

Β3. **α)** Έχουμε διαδοχικά:

$$d(x,-2) < 1 \Leftrightarrow |x+2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x+2 < 1 \Leftrightarrow -3 < x < -1 \text{ ή}$$

$$x \in (-3, \ -1)$$

β) Για κάθε $x \in (-3,\ -1)$ αληθεύει η ανίσωση $x^2+4x+3<0$, όπως προκύπτει και από τον επόμενο πίνακα προσήμου του τριωνύμου $x^2+4x+3<0$

x	$-\infty$ -3	-1	$+\infty$
x^2+4x+3	$+$	$-$	$+$

B4. α) Οι ρίζες του τριωνύμου $3x^2-2x-1$ είναι $x_1=1$ και $x_2=-\frac{1}{3}$. Άρα έχουμε:

$$3x^2-2x-1=3(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right)=(x-1)(3x+1)$$

β) Η παράσταση $A(x)=\dfrac{x-1}{3x^2-2x-1}$ έχει νόημα για όλα τα x με:

$$3x^2-2x-1\neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x+1)\neq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1\neq 0 \text{ και } 3x+1\neq 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x\neq 1 \text{ και } x\neq -\frac{1}{3}\right)$$

Άρα η παράσταση $A(x)=\dfrac{x-1}{3x^2-2x-1}$ έχει νόημα για όλα τα $x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3},\ 1\right\}$.

Για την απλοποίηση της παράστασης έχουμε:

$$A(x)=\frac{x-1}{3x^2-2x-1}=\frac{x-1}{(x-1)(3x+1)}=\frac{1}{3x+1}$$

γ) Έχουμε διαδοχικά:

$$|A(x)|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{3x+1}\right|=1 \Leftrightarrow |3x+1|=1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (3x+1=1 \text{ ή } 3x+1=-1) \Leftrightarrow \left(x=0 \text{ ή } x=-\frac{2}{3}\right)$$

Β5. **α)** Για να έχει η εξίσωση $x^2-\lambda x+(\lambda^2+\lambda-1)=0$ (1) $(\lambda\in\mathbb{R})$ πραγματικές ρίζες πρέπει $\Delta\ge 0$ με $\Delta=\lambda^2-4(\lambda^2+\lambda-1)=-3\lambda^2-4\lambda+4$
Συνεπώς, πρέπει $-3\lambda^2-4\lambda+4\ge 0$.
Από τον επόμενο πίνακα προσήμου του τριωνύμου $-3\lambda^2-4\lambda+4$ προκύπτει ότι $\lambda\in\left[-2,\ \frac{2}{3}\right]$.

λ	$-\infty$	-2	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$-3\lambda^2-4\lambda+4$	$-$	$+$	$-$	

β) Από τους τύπους του Vietta έχουμε $S=\lambda$ και $P=\lambda^2+\lambda-1$, όπου S και P το άθροισμα και το γινόμενο αντίστοιχα των ριζών της εξίσωσης (1).
Συνεπώς η ανίσωση $S^2-P-2\ge 0$ γίνεται ισοδύναμα:

$$\lambda^2-(\lambda^2+\lambda-1)-2\ge 0 \Leftrightarrow -\lambda-1\ge 0 \Leftrightarrow \lambda+1\le 0 \Leftrightarrow \lambda\le -1$$

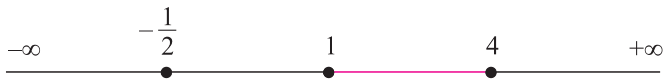
Όμως από τα ερώτημα (α) έχουμε $\lambda\in\left[-2,\ \frac{2}{3}\right]$, οπότε $\lambda\in[-2,\ -1]$.

Β6. **α)** Έχουμε διαδοχικά:

$$|2x-5|\le 3 \Leftrightarrow -3\le 2x-5\le 3 \Leftrightarrow 2\le 2x\le 8 \Leftrightarrow 1\le x\le 4$$

Οι ρίζες του τριωνύμου $2x^2-x-1$ είναι $x_1=-\frac{1}{2}$ και $x_2=1$ και από τον πίνακα προσήμου του προκύπτει ότι η ανισότητα $2x^2-x-1\ge 0$ αληθεύει για κάθε $x\in\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right]\cup[1,\ +\infty)$.

β) Οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων είναι όλα τα $x\in[1,\ 4]$ και απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα:

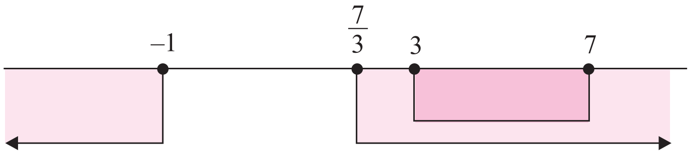


Β7. **α)** Έχουμε $|x-5|<2 \Leftrightarrow -2<x-5<2 \Leftrightarrow 3<x<7$.

β) Έχουμε:

$$|2-3x|>5 \Leftrightarrow (2-3x>5 \ \text{ή} \ 2-3x<-5) \Leftrightarrow \left(x<-1 \ \text{ή} \ x>\frac{7}{3}\right)$$

γ) Οι λύσεις των δύο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα, απ' όπου προκύπτει ότι το σύνολο των κοινών λύσεών τους είναι $3<x<7$.



Η αναπαράσταση του συνόλου των κοινών τους λύσεων σε μορφή διαστήματος είναι $x \in (3,\ 7)$.

Β8. **α)** Το τριώνυμο $2x^2-3x+1$ έχει διακρίνουσα $\Delta=1$ και ρίζες τις $x_1=\frac{1}{2}$ και $x_2=1$.

β) Από τον πίνακα προσήμου του τριωνύμου $2x^2-3x+1$, προκύπτει ότι η ανίσωση $2x^2-3x+1<0$ αληθεύει για κάθε $x \in \left(\frac{1}{2},\ 1\right)$.

γ) Ο αριθμός $\frac{\sqrt{3}}{2} \in \left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ και άρα αποτελεί λύση[2] της ανισώσης $2x^2-3x+1<0$.

Ο αριθμός $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \in \left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ και άρα αποτελεί λύση[3] της ανισώσης $2x^2-3x+1<0$.

2. Μπορούμε να το αποδείξουμε ως εξής: $\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}<1 \Leftrightarrow 1<\sqrt{3}<2$, που είναι αληθής.

3. Μπορούμε να το αποδείξουμε ως εξής: $\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}<1 \Leftrightarrow 1<\sqrt{2}<2$, που είναι αληθής.

Β9. α) Έχουμε $3x-1<x+9 \Leftrightarrow 2x<10 \Leftrightarrow x<5$

Επίσης έχουμε:

$$2-\frac{x}{2}\leq x+\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{x}{2}-x\leq \frac{1}{2}-2 \Leftrightarrow -\frac{3x}{2}\leq -\frac{3}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3x\leq -3 \Leftrightarrow x\geq 1$$

β) Οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων είναι όλα τα x με $1\leq x<5$, δηλαδή όλα τα $x\in[1,\ 5)$.

Β10. α) Έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{|x+1|}{3}-\frac{|x+1|+4}{5}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow 5|x+1|-3|x+1|-12=10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2|x+1|=22 \Leftrightarrow |x+1|=11 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+1=11 \text{ ή } x+1=-11) \Leftrightarrow (x=10 \text{ ή } x=-12)$$

β) Το τριώνυμο $-x^2+2x+3$ έχει ρίζες τις $x_1=-1$ και $x_2=3$. Από τον επόμενο πίνακα προσήμου του τριωνύμου, προκύπτει ότι η ανίσωση $-x^2+2x+3\leq 0$ αληθεύει για κάθε $x\in(-\infty,\ -1]\cup[3,\ \infty)$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2+2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

γ) Για τις λύσεις του ερωτήματος (α) έχουμε ότι:

$$10\in[3,\ \infty) \text{ και } -12\in(-\infty,\ -1]$$

Επομένως και οι δύο λύσεις της εξίσωσης του ερωτήματος (α) αποτελούν και λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος (β).

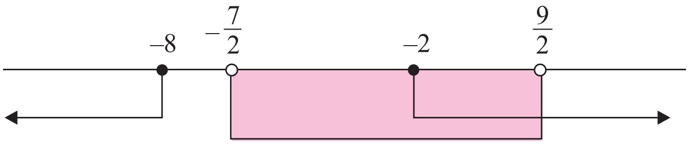
Β11. α) Έχουμε διαδοχικά:

$$\left|x-\frac{1}{2}\right|<4 \Leftrightarrow -4<x-\frac{1}{2}<4 \Leftrightarrow -\frac{7}{2}<x<\frac{9}{2} \text{ ή } x\in\left(-\frac{7}{2},\ \frac{9}{2}\right)$$

β) Έχουμε διαδοχικά:

$$|x+5|\geq 3 \Leftrightarrow (x+5\geq 3 \text{ ή } x+5\leq -3) \Leftrightarrow (x\geq -2 \text{ ή } x\leq -8)$$

γ) Οι κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) με τη χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών φαίνονται στο επόμενο σχήμα.



Οι κοινές λύσεις τους σε μορφή διαστήματος είναι $x \in \left[-2,\ \frac{9}{2}\right)$.

B12. α) Το τριώνυμο x^2+4x+5 έχει διακρίνουσα $\Delta=-4<0$ και άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο (ομόσημο του $\alpha=1>0$) για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως έχουμε $x^2+4x+5>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Για την παράσταση $B=\left|x^2+4x+5\right|-\left|x^2+4x+4\right|$ έχουμε:

$$x^2+4x+5>0 \text{ και } x^2+4x+4=(x+2)^2\geq 0$$

Συνεπώς η παράσταση Β, χωρίς τις απόλυτες τιμές, γράφεται:

$$B=(x^2+4x+5)-(x^2+4x+4)=x^2+4x+5-x^2-4x-4=1$$

B13. α) i) Έχουμε διαδοχικά:

$$\left|2x-3\right|\leq 5 \Leftrightarrow -5\leq 2x-3\leq 5 \Leftrightarrow -2\leq 2x\leq 8 \Leftrightarrow -1\leq x\leq 4 \text{ ή}$$

$$x\in[-1,\ 4]$$

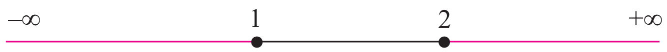
Η παράσταση των λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών φαίνεται στο επόμενο σχήμα:

ii) Έχουμε διαδοχικά:

$$\left|2x-3\right|\geq 1 \Leftrightarrow \left(2x-3\geq 1 \text{ ή } 2x-3\leq -1\right) \Leftrightarrow \left(x\geq 2 \text{ ή } x\leq 1\right) \text{ ή}$$

$$x\in(-\infty,\ 1]\cup[2,\ +\infty)$$

Η παράσταση των λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



β) Οι τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις είναι όλα τα $x \in [-1,\ 1] \cup [2,\ 4]$ όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα:

B14. α) Η εξίσωση $2x^2 - x - 6 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 49$ και ρίζες τις $x_1 = -\dfrac{3}{2}$ και $x_2 = 2$.

β) Έχουμε:

$$|x-1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3 \text{ ή } x \in (-1,\ 3)$$

γ) Για τις λύσεις της εξίσωσης (1) έχουμε $x_1 = -\dfrac{3}{2} \notin (-1,\ 3)$ και $x_2 = 2 \in (-1,\ 3)$.

Συνεπώς, ο αριθμός $x = 2$ ικανοποιεί ταυτόχρονα τις σχέσεις των ερωτημάτων (α) και (β).

B15. α) Έχουμε:

$$|2x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < 2x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < 2x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \text{ ή } x \in (0,\ 1)$$

β) Είναι $0 < x < 1 \Leftrightarrow x^2 < x$. Άρα η διάταξη των αριθμών $1,\ x,\ x^2$, από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο, είναι:

$$x^2 < x < 1$$

B16. α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου $-x^2 + (\sqrt{3}-1)x + \sqrt{3}$ είναι:

$$\Delta = \left(\sqrt{3}-1\right)^2 + 4\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{3} + 1 + 4\sqrt{3} =$$
$$= \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3} + 1 = \left(\sqrt{3}+1\right)^2$$

β) Οι ρίζες του τριωνύμου $-x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{3}$ είναι:

$$x_{1,2}=\frac{-\left(\sqrt{3}-1\right)\pm\left(\sqrt{3}+1\right)}{-2}=\begin{cases}x_1=-1\\ x_2=\sqrt{3}\end{cases}$$

Άρα το τριώνυμο $-x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{3}$ παραγοντοποιείται:

$$-x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{3}=-(x+1)\left(x-\sqrt{3}\right)$$

B17. α) Το τριώνυμο $x^2-10x+21$ έχει $\Delta=16>0$ και ρίζες τις $x_1=3$ και $x_2=7$. Η ανίσωση $x^2-10x+21<0$ αληθεύει[4] για κάθε $3<x<7$ ή $x\in(3,\ 7)$.

β) i) Από το ερώτημα (α) έχουμε $3<x<7 \Leftrightarrow x^2-10x+21<0$.
Επίσης έχουμε $x>3 \Leftrightarrow x-3>0$.
Συνεπώς, η παράσταση Α γράφεται:

$$A=|x-3|+|x^2-10x+21|=(x-3)-\left(x^2-10x+21\right)=$$
$$=x-3-x^2+10x-21=-x^2+11x-24$$

ii) Για $3<x<7$ έχουμε διαδοχικά:

$$A=|x-3|+|x^2-10x+21|=(x-3)-\left(x^2-10x+21\right)=$$
$$=x-3-x^2+10x-21=-x^2+11x-24$$

και άρα:

$$A=6 \Leftrightarrow -x^2+11x-24=6 \Leftrightarrow -x^2+11x-30=0$$

η οποία έχει ρίζες τις $x_1=5$ και $x_2=6$.

B18. α) Το τριώνυμο $3x^2-4x+1$ έχει διακρίνουσα $\Delta=4>0$ και ρίζες τις $x_1=1$ και $x_2=\frac{1}{3}$.

Άρα έχουμε:

4. Προκύπτει εύκολα από τον πίνακα προσήμου του τριωνύμου.

$$3x^2-4x+1\le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\le x\le 1 \text{ ή } x\in\left[\frac{1}{3},\ 1\right]$$

β) Αφού οι αριθμοί α, β είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης έχουμε:

$$\frac{1}{3}\le \alpha\le 1 \Leftrightarrow 1\le 3\alpha\le 3 \ (1) \text{ και } \frac{1}{3}\le \beta\le 1 \Leftrightarrow 2\le 6\beta\le 6 \ (2)$$

Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) κατά μέλη έχουμε:

$$3\le 3\alpha+6\beta\le 9 \Leftrightarrow \frac{3}{9}\le\frac{3\alpha+6\beta}{9}\le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\le\frac{3\alpha+6\beta}{9}\le 1$$

οπότε ο αριθμός $\frac{3\alpha+6\beta}{9}$ ανήκει στο σύνολο των λύσεων της ανίσωσης του ερωτήματος (α).

B19. α) Έχουμε διαδοχικά:

$$|x+4|\ge 3 \Leftrightarrow (x+4\ge 3 \text{ ή } x+4\le -3) \Leftrightarrow (x\ge -1 \text{ ή } x\le -7) \text{ ή}$$
$$x\in(-\infty,\ -7]\cup[-1,\ +\infty)$$

β) Αφού $\alpha\ge -1 \Leftrightarrow \alpha+4\ge 3>0$ η παράσταση Α γράφεται:

$$A=\big||\alpha+4|-3\big|=|\alpha+4-3|=|\alpha+1|=\alpha+1 \ (\text{αφού } \alpha+1\ge 0)$$

B20. α) i) Έχουμε διαδοχικά:

$$|1-2x|<5 \Leftrightarrow -5<1-2x<5 \Leftrightarrow -6<-2x<4 \Leftrightarrow -2<x<3 \text{ ή}$$
$$x\in(-2,\ 3).$$

Η παράσταση των λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών φαίνεται στο επόμενο σχήμα:

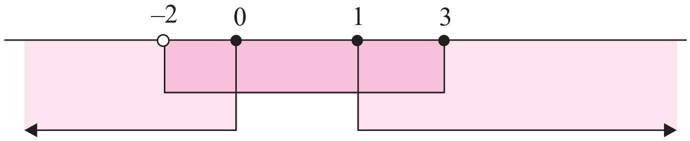
ii) Έχουμε διαδοχικά:

$$|1-2x|\geq 1 \Leftrightarrow (1-2x\geq 1 \text{ ή } 1-2x\leq -1)\Leftrightarrow (x\leq 0 \text{ ή } x\geq 1) \text{ ή}$$

$$x\in(-\infty,\ 0]\cup[1,\ +\infty)$$

Η παράσταση των λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών φαίνεται στο επόμενο σχήμα:

β) Οι ανισώσεις του ερωτήματος (α) συναληθεύουν για όλα τα $x\in(-2,\ 0]\cup[1,\ 3]$, όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα:



Οι ακέραιες τιμές του x που ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των παραπάνω ανισώσεων είναι $x\in\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$.

B21. α) Οι ρίζες του τριωνύμου $2x^2-3x-2$ είναι $x_1=2$ και $x_2=-\frac{1}{2}$ και άρα το τριώνυμο παραγοντοποιείται:

$$2x^2-3x-2=2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)=(2x+1)(x-2)$$

β) Η παράσταση Κ ορίζεται όταν:

$$2x^2-3x-2\neq 0\Leftrightarrow (2x+1)(x-2)\neq 0\Leftrightarrow \left(x\neq -\frac{1}{2} \text{ και } x\neq 2\right)$$

δηλαδή για όλα τα $x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2},\ 2\right\}$.

γ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2},\ 2\right\}$ έχουμε:

$$K=\frac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}=\frac{(x-2)^2}{(2x+1)(x-2)}=\frac{x-2}{2x+1}$$

B22. α) Έχουμε διαδοχικά:

$$|2x-4|=3|x-1|\Leftrightarrow|2x-4|=|3x-3|\Leftrightarrow$$
$$(2x-4=3x-3 \text{ ή } 2x-4=-3x+3)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(x=-1 \text{ ή } x=\frac{7}{5}\right)$$

β) Έχουμε διαδοχικά:

$$|3x-5|>1\Leftrightarrow(3x-5>1 \text{ ή } 3x-5<-1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(x>2 \text{ ή } x<\frac{4}{3}\right) \text{ ή } x\in\left(-\infty,\ \frac{4}{3}\right)\cup(2,\ +\infty)$$

γ) Για τις λύσεις της εξίσωσης του ερωτήματος (α) έχουμε:

$$x_1=-1\in\left(-\infty,\ \frac{4}{3}\right)$$

και άρα ο αριθμός -1 αποτελεί λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β), ενώ $x_2=\frac{7}{5}\notin\left(-\infty,\ \frac{4}{3}\right)\cup(2,\ +\infty)$ και άρα ο αριθμός $\frac{7}{5}$ δεν αποτελεί λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β).

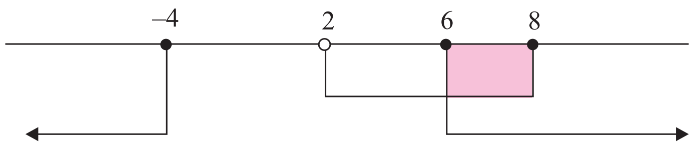
B23. α) Έχουμε διαδοχικά:

$$|x-1|\geq 5\Leftrightarrow(x-1\geq 5 \text{ ή } x-1\leq -5)\Leftrightarrow(x\geq 6 \text{ ή } x\leq -4) \text{ ή}$$
$$x\in(-\infty,\ -4]\cup[6,\ +\infty).$$

β) Έχουμε διαδοχικά:

$$d(x,\ 5)<3\Leftrightarrow|x-5|<3\Leftrightarrow -3<x-5<3\Leftrightarrow 2<x<8$$

γ) Οι κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) είναι όλα τα x με $6\leq x<8$ ή $x\in[6,\ 8)$ όπως φαίνεται και στην γραφική επίλυσή τους στο επόμενο σχήμα.



B24. α) Αφού ο αριθμός $x_0 = 1$ είναι ρίζα του τριωνύμου $2x^2 + \lambda x - 5$ έχουμε:

$$2 \cdot 1^2 + \lambda \cdot 1 - 5 = 0 \Leftrightarrow 2 + \lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$$

β) Για $\lambda = 3$ το τριώνυμο γίνεται $2x^2 + 3x - 5$, του οποίου η διακρίνουσα είναι $\Delta = 49$ και οι ρίζες του $x_1 = 1$ και $x_2 = -\frac{5}{2}$. Άρα το τριώνυμο παραγοντοποιείται:

$$2x^2 + 3x - 5 = 2\left(x + \frac{5}{2}\right)(x - 1) = (2x + 5)(x - 1)$$

ΘΕΜΑ Γ

(Δίνονται οι αναλυτικές λύσεις των θεμάτων με ζυγή αρίθμηση και οι απαντήσεις-υποδείξεις των θεμάτων με μονή αρίθμηση).

Γ1. Έχουμε $\Delta = -4\left(\lambda^2 - 4\lambda + 3\right)$.

α) $\lambda \in (1,\ 2) \cup (2,\ 3)$

β) $\lambda > 3$

γ) Δεν υπάρχουν

Γ2. α) Έστω ότι το σημείο Μ του άξονα παριστάνει τον αριθμό $x \in \mathbb{R}$. Αφού το Μ βρίσκεται στο εσωτερικό του τμήματος ΑΒ έχουμε $-3 < x < 5$. Η σχέση $(MA) < 2(MB)$ (1) διατυπώνεται αλγεβρικά ως εξής:

$$(MA) < 2(MB) \Leftrightarrow d(x,-3) < 2d(x,5) \Leftrightarrow |x+3| < 2|x-5|$$

β) Έχουμε $-3 < x < 5 \Leftrightarrow \left(x + 3 > 0 \text{ και } x - 5 < 0\right)$.

Άρα έχουμε:

$$|x+3| < 2|x-5| \Leftrightarrow x+3 < -2(x-5) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x+3 < -2x+10 \Leftrightarrow 3x < 7 \Leftrightarrow x < \frac{7}{3}$$

Επομένως οι ζητούμενοι αριθμοί $x \in \mathbb{R}$ είναι $-3 < x < \frac{7}{3}$.

γ) Έστω ότι το σημείο Ν του άξονα παριστάνει τον αριθμό $y \in \mathbb{Z}$. Αφού τα σημεία Ν ικανοποιούν τη σχέση (1) ισχύει:

$$(NA) < 2(NB) \Leftrightarrow (NA) - 2(NB) < 0$$

και άρα έχουμε διαδοχικά:

$$|(NA)-2(NB)|<3 \Leftrightarrow 2(NB)-(NA)<3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2|y-5|-|y+3|<3 \Leftrightarrow -2(y-5)-(y+3)<3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2y+10-y-3<3 \Leftrightarrow -3y<-4 \Leftrightarrow y>\frac{4}{3}$$

Επομένως οι πραγματικοί αριθμοί που ικανοποιούν τη σχέση $(NA)<2(NB)$ είναι $\frac{4}{3}<y<5$.

Οι ζητούμενοι ακέραιοι αριθμοί που ικανοποιούν τη σχέση $(NA)<2(NB)$ είναι $y \in \{2,\ 3,\ 4\}$.

Γ3. **α)** Θεωρούμε το τριώνυμο $x^2-3\beta x+5\beta^2$ και μελετάμε το πρόσημό του.

β)
- αν α, β ομόσημοι, τότε $A>0$ ενώ,
- αν α, β ετερόσημοι, τότε $A<0$.

Γ4. **α)** Έχουμε διαδοχικά:

$$9x_1^2x_2+3x_1^3+9x_1x_2^2+3x_2^3=1029 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\left(x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3\right)=1029 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\left(x_1+x_2\right)^3=1029 \Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)^3=343 \text{ (I)}$$

Από τους τύπους του Vietta για την εξίσωση $x^2-\lambda x+6=0$ έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} S=x_1+x_2=\lambda \\ P=x_1x_2=6 \end{array}\right. \text{(II)}$$

Επομένως η σχέση (I) λόγω της (II) γίνεται:

$$\left(x_1+x_2\right)^3=343 \Leftrightarrow \lambda^3=343 \Leftrightarrow \lambda=\sqrt[3]{343} \Leftrightarrow \lambda=7$$

β) Η ανίσωση που έχουμε να λύσουμε γίνεται:

$$|x-\lambda|+x_1x_2>x_1+x_2+4 \Leftrightarrow |x-\lambda|+P>S+4 \Leftrightarrow |x-\lambda|+6>\lambda+4$$

Για $\lambda=7$ έχουμε:

$$|x-7|+6>7+4 \Leftrightarrow |x-7|>5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-7>5 \text{ ή } x-7<-5) \Leftrightarrow (x>12 \text{ ή } x<2)$$

Γ5. **α)**
- για $t \in (1,\ 2)$ είναι αρνητικό, ενώ
- για $t \in (-\infty,\ 1) \cup (2,\ +\infty)$ είναι θετικό.

β) $x \in (-\infty,\ 3) \cup (4,\ 6) \cup (7,\ \infty)$

Γ6. **α)** Η εξίσωση $x^2-2\lambda x+(\lambda-1)=0,\ \lambda \in \mathbb{R}$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = 4\lambda^2-4(\lambda-1)=4\lambda^2-4\lambda+4=(2\lambda-1)^2+3>0$$

και άρα έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Από τους τύπους του Vietta για την εξίσωση:

$$x^2-2\lambda x+(\lambda-1)=0,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

έχουμε:

$$S=2\lambda$$
$$P=\lambda-1$$

Άρα έχουμε:

$$S^2-P>0 \Leftrightarrow 4\lambda^2-(\lambda-1)>0 \Leftrightarrow 4\lambda^2-\lambda+1>0 \text{ (I)}$$

που αποτελεί τριώνυμο ως προς λ. Η διακρίνουσά του τριωνύμου (Ι) είναι $\Delta'=1-16=-15<0$ και επομένως το τριώνυμο γίνεται ομόσημο του $\alpha=4>0$ για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ) Έχουμε διαδοχικά:

$$\sqrt{\Delta}>\sqrt{3} \Leftrightarrow \Delta>3 \Leftrightarrow 4\lambda^2-4\lambda+4>3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\lambda^2-4\lambda+1>0 \Leftrightarrow (2\lambda-1)^2>0$$

που αληθεύει για κάθε τιμή του $\lambda \neq \dfrac{1}{2}$.

Γ7. Η διακρίνουσα του τριωνύμου $A(x)$ είναι $\Delta = 4\left(9\lambda^2 - 28\lambda + 21\right)$

α) Για $\lambda \in \left(\dfrac{14-\sqrt{7}}{9}, \dfrac{14+\sqrt{7}}{9}\right)$ έχουμε $A(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Για καμία τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ δεν είναι $A(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ8. α) Η εξίσωση $K(x) = \left(P(A)-1\right)x^2 - 2P(A)x + \left(P(A)+1\right)$ (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού, αφού $P(A) - 1 \neq 0 \Leftrightarrow P(A) \neq 1$, που αληθεύει διότι $A \neq \Omega$. Η διακρίνουσά της είναι:

$$\Delta = 4\left(P(A)\right)^2 - 4\left(P(A)-1\right)\left(P(A)+1\right) =$$
$$= 4\left(P(A)\right)^2 - 4\left(P(A)\right)^2 + 4 = 4 > 0$$

και οι ρίζες της είναι:

$$x_{1,2} = \frac{2P(A) \pm 2}{2\left(P(A)-1\right)} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{2\left(P(A)-1\right)}{2\left(P(A)-1\right)} = 1 \\ x_2 = \dfrac{2\left(P(A)+1\right)}{2\left(P(A)-1\right)} = \dfrac{P(A)+1}{P(A)-1} \end{cases}$$

β) Έχουμε $\dfrac{P(A)+1}{P(A)-1} < 0$, διότι $P(A) - 1 < 0$ και $P(A) + 1 > 0$. Επομένως η διάταξη των ριζών σε αύξουσα σειρά είναι:

$$x_2 = \frac{P(A)+1}{P(A)-1} < 1 = x_1$$

Το πρόσημο του τριωνύμου (1) φαίνεται στον επόμενο πίνακα $\left(P(A) - 1 < 0\right)$:

x	$-\infty$	x_2	x_1	$+\infty$
$K(x)$	$-$	$+$	$-$	

Δηλαδή το τριώνυμο (1) γίνεται:

- Θετικό για όλα τα $x \in \left(\dfrac{P(A)+1}{P(A)-1}, 1\right)$

- Αρνητικό για όλα τα $x \in \left(-\infty, \dfrac{P(A)+1}{P(A)-1}\right) \cup (1, +\infty)$ και
- μηδενίζεται για $x_1 = 1$ και για $x_2 = \dfrac{P(A)+1}{P(A)-1}$

γ) Αν P το γινόμενο των ριζών του τριωνύμου (1), τότε από τον τύπο του Vietta έχουμε:

$$P = \frac{P(A)+1}{P(A)-1} < 0$$

που σημαίνει ότι οι ρίζες του τριωνύμου είναι ετερόσημες.
Για να είναι οι ρίζες του τριωνύμου αντίθετες πρέπει να ισχύει:

$$S = \frac{2P(A)}{P(A)-1} = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0$$

που σημαίνει ότι $A = \varnothing$.
Πράγματικά, τότε το τριώνυμο γίνεται:

$$K(x) = -x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \;\text{ ή }\; x = -1$$

Γ9. **α)** $\Delta = [P(A)]^2 + [P(B)]^2 > 0 \; (A, B \neq \varnothing)$

β) $S = 1 + \dfrac{P(B)}{P(A)} > 1$ και $P > 0$

γ) Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου του τριωνύμου.

Γ10. **α)** Έχουμε:

$$|x - P(A)| < 2 \Leftrightarrow -2 < x - P(A) < 2 \Leftrightarrow P(A) - 2 < x < P(A) + 2$$

Επίσης έχουμε:

$$x^2 - (P(A'))^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - (1 - P(A))^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 \geq (1 - P(A))^2 \Leftrightarrow |x| \geq 1 - P(A) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \geq 1 - P(A) \;\text{ ή }\; x \leq P(A) - 1)$$

β) Οι κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος (α) είναι:

$$x \in \left(P(A)-2,\ P(A)-1\right) \cup \left(1-P(A),\ P(A)+2\right)$$

Γ11. α) $\left(\alpha+\lambda\right)x^2+\beta x+\gamma+\lambda$

β) $\Delta=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 4\lambda^2+4(\alpha+\gamma)\lambda-(\beta^2-4\alpha\gamma)=0$ (Ι) και μετά για την (Ι) πρέπει να ισχύει $\Delta_\lambda \geq 0$

Γ12. α) Για να έχει η εξίσωση $\left|x-1\right|=\alpha^2-3\alpha-4,\ \alpha \in \mathbb{R}$ (1) πραγματικές ρίζες ως προς x πρέπει να ισχύει $\alpha^2-3\alpha-4 \geq 0$ (Ι). Το α΄ μέλος της σχέσης (Ι) είναι τριώνυμο ως προς α με ρίζες $\alpha_1=-1$ και $\alpha_2=4$. Επομένως η (1) αληθεύει για όλα τα $\alpha \in \left(-\infty,\ -1\right] \cup \left[4,\ +\infty\right)$.

β) Για να αληθεύει η ανίσωση $\frac{1}{4}x^2-5x+\alpha^2>0,\ \alpha \in \mathbb{R}$ (2) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ πρέπει:

$$\Delta=25-\alpha^2<0 \Leftrightarrow \alpha^2>25 \Leftrightarrow \left|\alpha\right|>5 \Leftrightarrow \left(\alpha>5 \text{ ή } \alpha<-5\right)$$

γ) Οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει πραγματικές λύσεις ως προς x και η ανίσωση (2) να αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, προκύπτουν από τις κοινές λύσεις (ως προς α) των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β). Δηλαδή για όλα τα $\alpha \in \left(-\infty,\ -5\right) \cup \left(5,\ +\infty\right)$.

Γ13. Όπως η Γ12.

Γ14. Η διακρίνουσα του τριωνύμου:

$$K(x)=\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)x^2-\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)x+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right),$$
$$\alpha \neq \beta \text{ και } \alpha,\beta>0 \quad (1)$$

είναι:

$$\Delta=\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2-4\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)=\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2-(\alpha-\beta)=$$
$$=\alpha-2\sqrt{\alpha\beta}+\beta-\alpha+\beta=2\beta-2\sqrt{\alpha\beta}=2\left(\beta-\sqrt{\alpha\beta}\right)$$

α) Έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha>\beta>0\Leftrightarrow\alpha\beta>\beta^2\Leftrightarrow\sqrt{\alpha\beta}>\beta\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\beta-\sqrt{\alpha\beta}<0\Leftrightarrow 2\left(\beta-\sqrt{\alpha\beta}\right)<0\Leftrightarrow\Delta<0$$

Άρα το τριώνυμο (1) γίνεται ομόσημο του $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}>0$ (αφού $\alpha>\beta>0$) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Έχουμε διαδοχικά:

$$0<\alpha<\beta\Leftrightarrow\alpha\beta<\beta^2\Leftrightarrow\sqrt{\alpha\beta}<\beta\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\beta-\sqrt{\alpha\beta}>0\Leftrightarrow 2\left(\beta-\sqrt{\alpha\beta}\right)>0\Leftrightarrow\Delta>0$$

Άρα το τριώνυμο (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

Γ15. α) $P(A)=1$.

β) $P(B)=1$.

γ) Η (1) είναι αδύνατη, αν το ενδεχόμενο Α είναι αδύνατο, ενώ αν το ενδεχόμενο Α είναι βέβαιο έχει ρίζες τις $x_1=1$ και $x_2=2$.

δ) Η (2) είναι αδύνατη, αν το ενδεχόμενο Β είναι αδύνατο, ενώ αν το ενδεχόμενο Β είναι βέβαιο έχει λύση την $x=2$.

ε) Είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. **α)** Η διακρίνουσα του τριωνύμου $f(x)=3x^2+\kappa x-4$, $\kappa\in\mathbb{R}$ είναι $\Delta=\kappa^2+48>0$, για κάθε τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$.

β) Από τον τύπο του Vietta έχουμε $P=-\frac{4}{3}<0$, όπου P το γινόμενο των ριζών του τριωνύμου. Άρα οι ρίζες του τριωνύμου είναι ετερόσημες.

γ) Επειδή $\alpha<x_1<x_2<\beta$ και οι ρίζες του τριωνύμου είναι ετερόσημες θα έχουμε ότι:

$$\alpha<x_1<0<x_2<\beta$$

Το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)=3x^2+\kappa x-4$ φαίνεται στον επόμενο πίνακα:

x	$-\infty$ x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	+	−	+

Από τον προηγούμενο πίνακα προκύπτει ότι:

$$f(\alpha)>0,\ f(\beta)>0,\ \alpha<0,\ \beta>0$$

Επομένως είναι $f(\alpha)\cdot f(\beta)\cdot\alpha\cdot\beta<0$.

Δ2. **α)** Το τριώνυμο x^2-5x+6 έχει διακρίνουσα $\Delta=1$ και ρίζες τις $x_1=2$ και $x_2=3$.
Επομένως το πρόσημό του είναι:

- $x^2-5x+6>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,\ 2)\cup(3,\ +\infty)$
- $x^2-5x+6<0 \Leftrightarrow x\in(2,\ 3)$

β) **i)** Το τριώνυμο $\frac{1}{4}x^2+(2-\lambda)x+\lambda-2=0$ (1) έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=(2-\lambda)^2-(\lambda-2)=4-4\lambda+\lambda^2-\lambda+2=\lambda^2-5\lambda+6$$

Για να έχει δύο ρίζες άνισες πρέπει $\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6$ (I). Η ανίσωση (I), σύμφωνα με το ερώτημα (α), αληθεύει για κάθε $\lambda \in (-\infty,\ 2) \cup (3,\ +\infty)$.

ii) Για να είναι οι ρίζες του τριωνύμου (1) ομόσημες πρέπει:

$$P = \frac{\lambda - 2}{\frac{1}{4}} = 4(\lambda - 2) > 0 \Leftrightarrow \lambda - 2 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 2$$

όπου P το γινόμενο των ριζών του τριωνύμου. Άρα για να είναι ομόσημες οι ρίζες του τριωνύμου (1) πρέπει $\lambda > 2$.

Δ3. α) Το τριώνυμο $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = (\lambda^2 + 1)^2 - 4\lambda^2 = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0$$

Άρα έχει δύο πραγματικές ρίζες, για κάθε $\lambda \neq 0$.

β) Για να έχει το παραπάνω τριώνυμο δύο ρίζες ίσες πρέπει:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1)$$

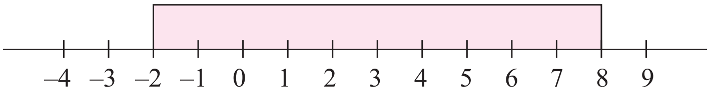
γ) Για να είναι $f(x) \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, πρέπει $\Delta \leq 0$ και $\lambda < 0$. Έχουμε διαδοχικά:

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1)$$

και αφού $\lambda < 0$ θα είναι $\lambda = -1$.

Δ4. α) Έχουμε $|x - 3| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x - 3 \leq 5 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 8$ ή $x \in [-2,\ 8]$.

β) Η απεικόνιση του συνόλου των λύσεων της ανίσωσης αυτής φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Αφού $|x-3|=d(x,\ 3)$ η γεωμετρική ερμηνεία της παράστασης $|x-3|$ είναι: «η απόσταση του πραγματικού αριθμού x από το 3».

γ) Οι ακέραιοι αριθμοί x που βρίσκονται στο διάστημα $[-2,\ 8]$ είναι:

$$x \in \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$$

δ) Έχουμε:

$$\big||x|-3\big| \le 5 \Leftrightarrow -5 \le |x|-3 \le 5 \Leftrightarrow -2 \le |x| \le 8$$

Η σχέση $|x| \ge -2$ ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x. Άρα έχουμε:

$$|x| \le 8 \Leftrightarrow -8 \le x \le 8$$

Άρα το πλήθος των ακέραιων αριθμών x με $x \in [-8,\ 8]$ είναι 17.

Δ5. **α)** **i)** Έχουμε ισοδύναμα:

$$x^2+2x+3=\alpha \Leftrightarrow x^2+2x+3-\alpha=0 \ (\text{I})$$

Για να έχει η εξίσωση (Ι) δύο πραγματικές και άνισες ρίζες πρέπει:

$$\Delta>0 \Leftrightarrow 4-4(3-\alpha)>0 \Leftrightarrow 4\alpha-8>0 \Leftrightarrow \alpha>2$$

ii) Για να έχει η εξίσωση (Ι) διπλή ρίζα πρέπει:

$$\Delta=0 \Leftrightarrow 4-4(3-\alpha)=0 \Leftrightarrow 4\alpha-8=0 \Leftrightarrow \alpha=2$$

Πράγματι, για $\alpha=2$ έχουμε $x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ (διπλή ρίζα).

β) **i)** Έχουμε ισοδύναμα:

$$f(x)\ge 2 \Leftrightarrow x^2+2x+3\ge 2 \Leftrightarrow x^2+2x+1\ge 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \ge 0$$

ii) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\sqrt{f(x)-2} \le 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{f(x)-2}\right)^2 \le 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x)-2 \le 4 \Leftrightarrow f(x)-6 \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+2x+3-6 \le 0 \Leftrightarrow x^2+2x-3 \le 0$$

Η τελευταία ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in [-3,\ 1]$.

Δ6. α) i) Το τριώνυμο $x^2+9x+18$ έχει διακρίνουσα $\Delta=9$ και ρίζες τις $x_1=-6$ και $x_2=-3$.

ii) Έχουμε:

$$|x+3|+|x^2+9x+18|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x+3|=0 \\ \text{και} \\ |x^2+9x+18|=0 \end{cases}$$

(αφού η δοθείσα εξίσωση αποτελείται από δύο μη αρνητικούς όρους με άθροισμα μηδέν).

Άρα έχουμε:

- $|x+3|=0 \Leftrightarrow x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$ και
- $|x^2+9x+18|=0 \Leftrightarrow x^2+9x+18=0 \Leftrightarrow (x_1=-6 \text{ και } x_2=-3)$

Επομένως η μοναδική λύση της δοθείσας εξίσωσης είναι η $x=-3$.

β) i) Το πρόσημο του τριωνύμου $x^2+9x+18$ φαίνεται στον επόμενο πίνακα:

x	$-\infty$		-6		-3		$+\infty$
$x^2+9x+18$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα έχουμε:

- $x^2+9x+18>0 \Leftrightarrow x<-6$ ή $x>-3$
- $x^2+9x+18<0 \Leftrightarrow -6<x<-3$

ii) Έχουμε ισοδύναμα:

$$|x^2+9x+18|=-x^2-9x-18 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x^2+9x+18|=-(x^2+9x+18) \quad (\mathrm{I})$$

Από τον ορισμό της απόλυτης τιμής, η σχέση (Ι) ισχύει όταν $x^2+9x+18\le 0$, η οποία αληθεύει όταν $-6<x<-3$, όπως προκύπτει από το ερώτημα (βi).

Δ7. **α)** Έχουμε $x^2 > x \Leftrightarrow x^2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ ή $x > 1$.

β) **i)** Έχουμε:

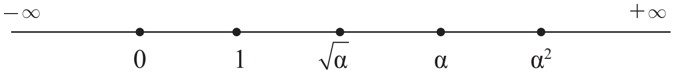
$$\alpha > 1 \Rightarrow \alpha^2 > \alpha \ (1) \text{ και}$$

$$\alpha > 1 \Rightarrow \sqrt{\alpha} > 1 \Rightarrow \left(\sqrt{\alpha}\right)^2 > \sqrt{\alpha} \Rightarrow \alpha > \sqrt{\alpha} \ (2).$$

Επομένως η σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, είναι:

$$0 < 1 < \sqrt{\alpha} < \alpha < \alpha^2$$

Η τοποθέτηση των αριθμών αυτών πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



ii) Είναι $\alpha < \dfrac{\alpha + \alpha^2}{2} < \alpha^2$ (αφού ο αριθμός $\dfrac{\alpha + \alpha^2}{2}$ είναι το ημιάθροισμα των αριθμών α και α^2, με $\alpha > 1$).

Δ8. **α)** Από τους τύπους του Vietta έχουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow 3 = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \beta = -3\alpha$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow 2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \gamma = 2\alpha$$

β) **i)** Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ γίνεται ετερόσημο του α όταν το x βρίσκεται εντός των ριζών του, δηλαδή όταν $x \in (1,\ 2)$. Άρα για να είναι $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$, για κάθε $x \in (1,\ 2)$ θα πρέπει $\alpha < 0$.

ii) Έχουμε:

$$\gamma x^2 + \beta x + \alpha < 0 \Leftrightarrow 2\alpha x^2 - 3\alpha x + \alpha < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha(2x^2 - 3x + 1) < 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 > 0 \ (\text{αφού } \alpha < 0).$$

Δ9. **α)** Το τριώνυμο $\lambda x^2 - \left(\lambda^2 + 1\right)x + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \left[-\left(\lambda^2+1\right)\right]^2 - 4\lambda^2 = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 =$$
$$= \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = \left(\lambda^2-1\right)^2 \geq 0$$

Επομένως το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Αν $x_1,\ x_2$ οι ρίζες του τριωνύμου, τότε από τους τύπους του Vietta έχουμε:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{\left(\lambda^2+1\right)}{\lambda},\ \lambda \neq 0 \text{ και } P = x_1 \cdot x_2 = 1$$

γ) Αν $\lambda > 0$ έχουμε $S = \dfrac{\left(\lambda^2+1\right)}{\lambda} > 0$ και $P = 1 > 0$. Άρα οι ρίζες $x_1,\ x_2$ του τριωνύμου είναι θετικές.

δ) Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να δεχθούμε ότι $x_1 < x_2$. Τότε το πρόσημο του τριωνύμου για $0 < \lambda \neq 1$ είναι:

- $\lambda x^2 - \left(\lambda^2+1\right)x + \lambda > 0$, για κάθε $x \in \left(x_1,\ x_2\right)$
- $\lambda x^2 - \left(\lambda^2+1\right)x + \lambda < 0$, για κάθε $x \in \left(-\infty,\ x_1\right) \cup \left(x_2,\ \infty\right)$

Αφού $x_1 < \kappa < x_2 < \mu$ και $x_1,\ x_2$ θετικές, έχουμε:

$$\left\{\begin{array}{l} f(\kappa) < 0 \\ f(\mu) > 0 \\ f(0) > 0 \end{array}\right\}$$

Επομένως έχουμε $f(\kappa) \cdot f(\mu) \cdot f(0) < 0$.

Δ10. α) Το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 16 > 0$ και ρίζες τις $x_1 = -1$ και $x_2 = 3$. Έτσι το πρόσημο του τρωνύμου είναι:

- $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 3$
- $f(x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$

β) Επειδή $-1 < 2{,}999 < 3$ θα είναι $f(2{,}999) > 0$. Ακόμα επειδή είναι $-1{,}002 < -1$ θα έχουμε $f(-1{,}002) < 0$.

Επομένως έχουμε:

$$f(2{,}999) \cdot f(-1{,}002) < 0$$

γ) Είναι $-3<\alpha<3 \Leftrightarrow 0\le|\alpha|<3$ και άρα $|\alpha|\in[0,\ 3)\subseteq(-1,\ 3)$
Επομένως έχουμε:

$$-\alpha^2+2|\alpha|+3=-|\alpha|^2+2|\alpha|+3=f(|\alpha|)>0$$

Δ11. α) Η διακρίνουσα της εξίσωσης $x^2-x+(\lambda-\lambda^2)=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$ (1) είναι:

$$\Delta=1+4(\lambda^2-\lambda)=1+4\lambda^2-4\lambda=(2\lambda-1)^2\ge 0,\ \text{για κάθε } \lambda\in\mathbb{R}$$

και άρα έχει πραγματικές ρίζες.

β) Για να έχει η εξίσωση $x^2-x+(\lambda-\lambda^2)=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$ δύο ρίζες ίσες πρέπει:

$$\Delta=0\Leftrightarrow(2\lambda-1)^2=0\Leftrightarrow 2\lambda-1=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{2}$$

γ) Αν S και P το άθροισμα και των γινόμενο αντίστοιχα των ριζών x_1 και x_2 της εξίσωσης (1), έχουμε:

$$S=x_1+x_2=1 \text{ και } P=x_1x_2=-(\lambda^2-\lambda).$$

Άρα έχουμε:

$$A=\frac{1}{\sqrt{S-P}}=\frac{1}{\sqrt{1+(\lambda^2-\lambda)}}=\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-\lambda+1}}$$

Το τριωνυμο $\lambda^2-\lambda+1>0$, διότι η διακρίνουσα του είναι $\Delta'=-3<0$. Συνεπώς η παράσταση Α θα έχει νόημα για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Δ12. α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου $f(x)=x^2-6x+\lambda-3,\ \lambda\in\mathbb{R}$ είναι:

$$\Delta=36-4(\lambda-3)=36-4\lambda+12=48-4\lambda$$

β) Για να έχει το τριώνυμο $f(x)$ δύο άνισες πραγματικές ρίζες πρέπει:

$$\Delta>0\Leftrightarrow 48-4\lambda>0\Leftrightarrow\lambda<12$$

γ) i) Αφού $3<\lambda<12$ το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες. Έστω S και P το άθροισμα και το γινόμενο αντίστοιχα των ριζών του τριωνύμου. Από τους τύπους του Vietta έχουμε:

$$S = \frac{6}{1} = 6 > 0$$
$$P = \lambda - 3$$

Επειδή $\lambda > 3 \Leftrightarrow \lambda - 3 \Leftrightarrow P > 0$, το τριώνυμο έχει ομόσημες ρίζες και, αφού επιπλέον $S > 0$, οι ρίζες του είναι θετικές.

ii) Έστω x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ οι ρίζες του τριωνύμου $f(x)$. Το πρόσημο του $f(x)$ φαίνεται στον επόμενο πίνακα:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επειδή $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$ έχουμε τη διάταξη $\kappa < 0 < x_1 < \mu < x_2$. Επομένως, σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα προσήμου του $f(x)$, θα είναι $f(\kappa) > 0$ και $f(\mu) < 0$.

Άρα θα έχουμε:

$$\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu) > 0$$

Δ13. α) Το τριώνυμο $x^2 + \beta x + \beta^2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\beta^2 = -3\beta^2 \leq 0$ (η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\beta = 0$).

β) i) Αν $\beta \neq 0$ έχουμε $\Delta = -3\beta < 0$ και άρα το τριώνυμο γίνεται θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Αν $\beta = 0$, τότε $\Delta = 0$ και το τριώνυμο γίνεται θετικό[5] για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ και μηδενίζεται στο $x = 0$ (διπλή ρίζα).

γ) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\beta \neq 0$, τότε σύμφωνα με το ερώτημα (βi) έχουμε $x^2 + \beta \cdot x + \beta^2 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα και για $x = \alpha$ θα είναι $\alpha^2 + \beta \cdot \alpha + \beta^2 > 0$
- Αν $\beta = 0$, τότε έχουμε

$$\alpha^2 + \beta \cdot \alpha + \beta^2 = \alpha^2 + 0 \cdot \alpha + 0^2 = \alpha^2 > 0 \ (\alpha \neq 0)$$

5. Για $\beta = 0$ το τριώνυμο γίνεται $x^2 + 0 \cdot x + 0 = x^2$, που είναι θετικό για κάθε $x \neq 0$, ενώ μηδενίζεται όταν $x = 0$.

05.indd 237 4/12/2014 12:48:48

αφού, σύμφωνα με την εκφώνηση, δεν μπορεί οι α, β να είναι και οι δύο ταυτόχρονα μηδέν.

Δ14. α) Το τριώνυμο x^2-2x-8 έχει διακρίνουσα $\Delta=36>0$ και ρίζες τις $x_1=-2$ και $x_2=4$. Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον επόμενο πίνακα:

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$
x^2-2x+8	$+$	$-$	$+$	

Άρα έχουμε:

- $x^2-2x-8<0 \Leftrightarrow x\in(-2,\ 4)$
- $x^2-2x-8>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,\ -2)\cup(4,\ \infty)$

β) Είναι $\kappa=-\dfrac{8889}{4444}<-\dfrac{8888}{4444}=-2$. Επομένως, σύμφωνα με το ερώτημα (α), έχουμε $\kappa^2-2\kappa-8>0$.

γ) Έχουμε $-4<\mu<4 \Leftrightarrow 0\le|\mu|<4$ και άρα $\mu\in[0,\ 2)\subseteq(-2,\ 4)$. Επομένως, σύμφωνα με το ερώτημα (α), έχουμε:

$$\mu^2-2|\mu|-8=|\mu|^2-2|\mu|-8<0$$

Δ15. α) Έχουμε $|\alpha-2|<1 \Leftrightarrow -1<\alpha-2<1 \Leftrightarrow 1<\alpha<3$ ή $\alpha\in(1,\ 3)$

β) i) Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2-(\alpha-2)x+\dfrac{1}{4}$ είναι

$\Delta=(\alpha-2)^2-1<0$ διότι:

$$|\alpha-2|<1 \Leftrightarrow |\alpha-2|^2<1 \Leftrightarrow |\alpha-2|^2-1<0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha-2)^2-1<0 \Leftrightarrow \Delta<0$$

ii) Αφού $\Delta<0$, το τριώνυμο γίνεται θετικό για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή

$x^2-(\alpha-2)x+\dfrac{1}{4}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ16. α) Έχουμε $|x-2|<3 \Leftrightarrow -3<x-2<3 \Leftrightarrow -1<x<5$ ή $x\in(-1,\ 5)$
Το τριώνυμο x^2-2x-8 έχει διακρίνουσα $\Delta=36>0$ και ρίζες τις $x_1=-2$ και $x_2=4$. Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον επόμενο πίνακα:

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$
x^2-2x+8	$+$	$-$	$+$	

Άρα έχουμε $x^2-2x-8\le 0 \Leftrightarrow x\in[-2,\ 4]$

β) Οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων είναι όλα τα $x\in(-1,\ 5)$ και τα $x\in[-2,\ 4]$, δηλαδή όλα τα $x\in(-1,\ 4]$.

γ) Αφού $\rho_1,\ \rho_2\in(-1,\ 4]$ έχουμε $\left\{\begin{matrix}-1<\rho_1\le 4\\ -1<\rho_2\le 4\end{matrix}\right\}$. Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες αυτές έχουμε:

$$-2<\rho_1+\rho_2\le 8 \Leftrightarrow -1<\frac{\rho_1+\rho_2}{2}\le 4$$

δηλαδή $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}\in(-1,\ 4]$ και άρα αποτελεί κοινή λύση των ανισώσεων του ερωτήματος (α).

Δ17. α) Για την ανίσωση $2\le|x|\le 3$ έχουμε διαδοχικά:

$$2\le|x|\le 3 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}|x|\le 3\\ 2\le|x|\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}-3\le x\le 3\\ (x\ge 2\ \text{ ή }\ x\le -2)\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\in[-3,\ 2]\cup[2,\ 3]$$

Για την ανίσωση $x^2-4x<0$ έχουμε:

$$x^2-4x<0 \Leftrightarrow 0<x<4\ \text{ ή }\ x\in(0,\ 4)$$

β) Οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων είναι όλα τα $x\in[-3,\ 2]\cup[2,\ 3]$ και τα $x\in(0,\ 4)$, δηλαδή όλα τα $x\in[2,\ 3]$.

γ) Αφού $\rho_1,\ \rho_2 \in [2,\ 3]$ έχουμε:

$$\begin{Bmatrix} 2 \le \rho_1 \le 3 \\ 2 \le \rho_2 \le 3 \end{Bmatrix}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες αυτές έχουμε:

$$4 \le \rho_1 + \rho_2 \le 6 \Leftrightarrow 2 \le \frac{\rho_1+\rho_2}{2} \le 3 \Leftrightarrow \frac{\rho_1+\rho_2}{2} \in [2,\ 3]$$

Επομένως ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή λύση των παραπάνω ανισώσεων.

Δ18. α) Έχουμε διαδοχικά:

$$|x+1| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le x+1 \le 2 \Leftrightarrow -3 \le x \le 1 \text{ ή } x \in [-3,\ 1]$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - x - 2$ είναι $\Delta = 9$ και οι ρίζες του $x_1 = -1$ και $x_2 = 2$.
Άρα έχουμε:

$$x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,\ -1) \cup (2,\ \infty)$$

β) Οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων είναι όλα τα $x \in [-3,\ 1]$ και $x \in (-\infty,\ -1) \cup (2,\ \infty)$. Άρα οι κοινές λύσεις είναι όλα τα $x \in [-3,\ -1)$.

γ) Αφού $\rho_1,\ \rho_2 \in [-3,\ -1)$ έχουμε:

$$\begin{Bmatrix} -3 \le \rho_1 \le -1 \\ -3 \le \rho_2 \le -1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -3 \le \rho_1 \le 1 \\ 1 \le -\rho_2 \le 3 \end{Bmatrix}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες αυτές έχουμε:

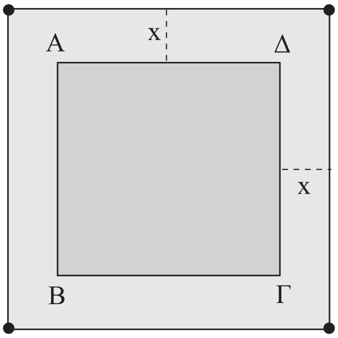
$$-2 < \rho_1 - \rho_2 < 2 \Leftrightarrow \rho_1 - \rho_2 \in (-2,\ 2)$$

Δ19. α) Το εξωτερικό ορθογώνιο έχει διαστάσεις $(2x+15)$ m και $(2x+25)$ m. Συνεπώς το εμβαδόν του E_1 είναι:

$$E_1 = (2x+15)\cdot(2x+25)\ m^2$$

Άρα το εμβαδόν της ζώνης E(x) είναι:

$$E(x) = E_1 - (ΑΒΓΔ) = (2x+15)\cdot(2x+25) - (ΑΒΓΔ) =$$
$$= (2x+15)\cdot(2x+25) - 15\cdot 25 = 4x^2 80x,\ x>0$$



β) Έχουμε:

$$E = 500 \Leftrightarrow 4x^2 + 80x = 500 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 80x - 500 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 20x - 125 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = 900$ και ρίζες τις $x_1 = 5$ και $x_2 = -25$(που απορρίπτεται αφού πρέπει $x > 0$).

Επομένως για να έχει η ζώνη εμβαδόν 500 m πρέπει να έχει πλάτος $x = 5$m.

γ) Έχουμε:

$$E(x) < 500 \Leftrightarrow 4x^2 + 80x < 500 \Leftrightarrow 4x^2 + 80x - 500 < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 20x - 125 < 0 \Leftrightarrow x \in (-25,\ 5)$$

και επειδή $x > 0$ έχουμε $x \in (0,\ 5)$, δηλαδή το πλάτος της ζώνης κυμαίνεται μεταξύ 0 έως 5 m.

Δ20. α) Το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = 1 - 4(\lambda - \lambda^2) = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0$$

Άρα το τριώνυμο $f(x)$ έχει δύο πραγματικές ρίζες.

β) Για να έχει το τριώνυμο $f(x)$ ίσες ρίζες πρέπει:

$$\Delta=0 \Leftrightarrow (2\lambda-1)^2=0 \Leftrightarrow 2\lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{2}$$

γ) i) Έχουμε διαδοχικά:

$$x_1<\frac{x_1+x_2}{2}<x_2 \Leftrightarrow 2x_1<x_1+x_2<2x_2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1<x_1+x_2 \Leftrightarrow x_1<x_2 \ (\text{αληθής}) \\ x_1+x_2<2x_2 \Leftrightarrow x_2<x_1 \ (\text{αληθής}) \end{cases}$$

ii) Αφού $\lambda \neq \frac{1}{2}$ οι ρίζες x_1 και x_2 του τριωνύμου $f(x)$ είναι άνισες, με $x_1<x_2$

Για το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)$ έχουμε:

- $f(x)<0 \Leftrightarrow x \in (x_1,\ x_2)$
- $f(x)>0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,\ x_1) \cup (x_2,\ \infty)$

Επομένως, αφού $x_1<\frac{x_1+x_2}{2}<x_2$, θα είναι $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<0$

Ακόμα έχουμε $x_2+1>x_2 \Leftrightarrow x_2+1 \in (x_2,\ \infty)$ και άρα $f(x_2+1)>0$. Τέλος είναι $f(x_2)=0$.

Επομένως η διάταξη, από το μικρότερο στο μεγαλύτερο, είναι:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<f(x_2)<f(x_2+1)$$

Δ21. α) Έχουμε:

$$x^2<x \Leftrightarrow x^2-x<0 \Leftrightarrow x<0 \ \text{ ή } \ x>1$$

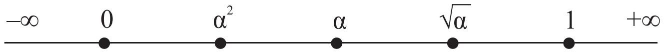
Το πρόσημο του τριωνύμου x^2-x φαίνεται στον επόμενο πίνακα:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$-$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2-x		$+$	0	$-$	0	$+$	

β) i) Έχουμε:

- $0<\alpha<1 \Leftrightarrow \alpha^2<\alpha$
- $0<\alpha<1 \Leftrightarrow \alpha^2<\alpha \Leftrightarrow \sqrt{^2\alpha}<\sqrt{\alpha} \Leftrightarrow |\alpha|<\sqrt{\alpha}$
- $0<\alpha<1 \Leftrightarrow\Leftrightarrow \sqrt{\alpha}<1$

Επομένως η σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, είναι $0<\alpha^2<\alpha<\sqrt{\alpha}<1$. Η τοποθετήση των παραπάνω αριθμών πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



ii) Αφού $\sqrt{1+\alpha}$ και $1+\sqrt{\alpha}$ είναι θετικοί αριθμοί έχουμε:

$$\sqrt{1+\alpha}<1+\sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \left(\sqrt{1+\alpha}\right)^2<\left(1+\sqrt{\alpha}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+\alpha<1+2\sqrt{\alpha}+\alpha \Leftrightarrow 2\sqrt{\alpha}>0$$

που είναι αληθής.

Δ22. α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=49$ και ρίζες τις $x_1=-1$ και $x_2=6$. Άρα:

$$x^2-5x-6<0 \Leftrightarrow -1<x<6 \text{ ή } x\in(-1,\ 6)$$

β) Ο αριθμός Κ γράφεται:

$$K=\left(-\frac{46}{47}\right)^2+5\cdot\frac{46}{47}-6=\left(-\frac{46}{47}\right)^2-5\cdot\left(-\frac{46}{47}\right)-6$$

και αποτελεί την τιμή του τριωνύμου για $x=-\frac{46}{47}\in(-1,\ 6)$. Επομένως, σύμφωνα με το ερώτημα (α) έχουμε $K<0$.

γ) Έχουμε:

$$\alpha\in(-6,\ 6)\Leftrightarrow -6<\alpha<6 \Leftrightarrow 0\le|\alpha|<6 \Leftrightarrow |\alpha|\in[0,6)\subset(-1,\ 6)$$

Η παράσταση $\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6$ αποτελεί την τιμή του τριωνύμου για $x = |\alpha|$, με $|\alpha| \in (-1,\ 6)$ και άρα:

$$\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6 = |\alpha|^2 - 5|\alpha| - 6 < 0$$

Επομένως $\Lambda < 0$.

Δ23. α) Το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2,\ x \in \mathbb{R}$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 1$ και ρίζες τις $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$.
Για το πρόσημο του τριωνύμου έχουμε:

- $x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (1,\ 2)$
- $x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,\ 1) \cup (2,\ \infty)$

β) Αφού $(\alpha^2 - 3\alpha + 2)(\beta^2 - 3\beta + 2) < 0$, οι αριθμοί $\alpha^2 - 3\alpha + 2$ και $\beta^2 - 3\beta + 2$ είναι ετερόσημοι.
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\alpha^2 - 3\alpha + 2 < 0$ και $\beta^2 - 3\beta + 2 > 0$. Σύμφωνα με το ερώτημα (α), έχουμε:

$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 < 0 \Leftrightarrow \alpha \in (1,\ 2) \text{ και}$$
$$\beta^2 - 3\beta + 2 > 0 \Leftrightarrow \beta \in (-\infty,\ 1) \cup (2,\ \infty)$$

Επειδή $\alpha < \beta$ θα είναι $\beta \in (2,\ \infty)$
Άρα έχουμε:

$$\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha - 1 > 0 \text{ και } \beta > 2 \Leftrightarrow \beta - 2 > 0.$$

Επομένως έχουμε:

$$(\alpha - 1)\cdot(\beta - 2) > 0 \Leftrightarrow |(\alpha - 1)\cdot(\beta - 2)| = (\alpha - 1)\cdot(\beta - 2)$$

- $\alpha^2 - 3\alpha + 2 > 0$ και $\beta^2 - 3\beta + 2 < 0$. Σύμφωνα με το ερώτημα (α) έχουμε:

$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \in (-\infty,\ 1) \cup (2,\ \infty) \text{ και}$$
$$\beta^2 - 3\beta + 2 < 0 \Leftrightarrow \beta \in (1,\ 2).$$

Επειδή $\alpha<\beta$ θα είναι $\alpha \in (-\infty,\ 1)$

Επομένως έχουμε:

$$\alpha<1 \Leftrightarrow \alpha-1<0 \text{ και } \beta<2 \Leftrightarrow \beta-2<0$$

Άρα είναι:

$$(\alpha-1)\cdot(\beta-2)>0 \Leftrightarrow |(\alpha-1)\cdot(\beta-2)|=(\alpha-1)\cdot(\beta-2)$$

Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση έχουμε:

$$(\alpha-1)\cdot(\beta-2)>0 \Leftrightarrow |(\alpha-1)\cdot(\beta-2)|=(\alpha-1)\cdot(\beta-2)$$

Δ24. α) Η διακρίνουσα της εξίσωσης $x^2-2(\lambda-1)x+\lambda+5=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$ είναι:

$$\Delta=[2(\lambda-1)]^2-4(\lambda+5)=4(\lambda-1)^2-4\lambda-20=$$
$$=4(\lambda^2-2\lambda+1)-4\lambda-20=$$
$$=4\lambda^2-8\lambda+4-4\lambda-20=4\lambda^2-12\lambda-16$$

β) Για να έχει η εξίσωση $x^2-2(\lambda-1)x+\lambda+5=0$ δύο πραγματικές και άνισες ρίζες πρέπει:

$$\Delta>0 \Leftrightarrow 4\lambda^2-12\lambda-16>0 \Leftrightarrow 4(\lambda^2-3\lambda-4)>0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda-4>0 \Leftrightarrow (\lambda<-1 \text{ ή } \lambda>4)$$

όπως προκύπτει και από τον επόμενο πίνακα προσήμου του τριωνύμου $\lambda^2-3\lambda-4$

λ	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$\lambda^2-3\lambda-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

γ) Αφού η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες θα είναι:

$$\lambda<-1 \text{ ή } \lambda>4$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$d(x_1,\ x_2)=\sqrt{24} \Leftrightarrow |x_1-x_2|=\sqrt{24} \Leftrightarrow |x_1-x_2|^2=24 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2=24 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=24 \ \text{(I)}$$

Από τους τύπους του Vietta για την εξίσωση $x^2-2(\lambda-1)x+\lambda+5=0$ έχουμε $S=2(\lambda-1)$ και $P=\lambda+5$. Άρα η σχέση (I) γίνεται ισοδύναμα:

$$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=24 \Leftrightarrow S^2-4P=24 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[2(\lambda-1)\right]^2-4(\lambda+5)=4(\lambda^2-2\lambda+1)-4(\lambda+5)=$$
$$=4\lambda^2-12\lambda-40=0 \Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda-10=0 \Leftrightarrow (\lambda=-2 \ \text{ ή } \ \lambda=5)$$

Οι τιμές του λ είναι δεκτές, αφού ικανοποιούν τον περιορισμό:

$$\lambda<-1 \ \text{ ή } \ \lambda>4$$

Δ25. α) Έχουμε διαδοχικά:

$$(x-2)^2=\lambda(4x-3) \Leftrightarrow x^2-4x+4=4\lambda x-3\lambda \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+4-4\lambda x+3\lambda=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-4(1+\lambda)x+4+3\lambda=0 \ \text{(I)}$$

Η εξίσωση (I) είναι της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, με $\alpha \neq 0$

$$\alpha=1,\ \beta=-4(1+\lambda),\ \gamma=4+3\lambda$$

β) Η διακρίνουσα της εξίσωσης (I) είναι:

$$\Delta=\left[4(1+\lambda)\right]^2-4(4+3\lambda)=16(1+\lambda)^2-4(4+3\lambda)=$$
$$=4\left[4(\lambda^2+2\lambda+1)-4-3\lambda\right]=$$
$$=4(4\lambda^2+8\lambda+4-4-3\lambda)=4(4\lambda^2+5\lambda)$$

Για να έχει η εξίσωση (I) πραγματικές και άνισες ρίζες πρέπει:

$$\Delta>0 \Leftrightarrow 4(4\lambda^2+5\lambda)>0 \Leftrightarrow 4\lambda^2+5\lambda>0 \Leftrightarrow \lambda<-\frac{5}{4} \ \text{ ή } \ \lambda>0$$

όπως φαίνεται και στον επόμενο πίνακα προσήμου του τριωνύμου $4\left(4\lambda^2+5\lambda\right)$.

λ	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		0		$+\infty$
$4(4\lambda^2+5\lambda)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα, για $\lambda \in \left(-\infty,\ -\frac{5}{4}\right) \cup \left(0,\ +\infty\right)$, η εξίσωση (Ι) έχει πραγματικές και άνισες ρίζες.

γ) Αν $x_1,\ x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης, τότε:

i) Από τους τύπους του Vietta για την εξίσωση (Ι) έχουμε:

$$S = x_1 + x_2 = 4\left(1+\lambda\right)$$
$$P = x_1 \cdot x_2 = 4 + 3\lambda$$

ii) Έχουμε διαδοχικά:

$$A = \left(4x_1-3\right)\left(4x_2-3\right) = 16x_1x_2 - 12x_1 - 12x_2 + 9 =$$
$$= 16x_1x_2 - 12\left(x_1+x_2\right) + 9 = 16P - 12S + 9 =$$
$$= 16\left(4+3\lambda\right) - 12\cdot 4\left(1+\lambda\right) + 9 = 64 + 48\lambda - 48 - 48\lambda + 9 = 25$$

που είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

Δ26. α) Η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda\left(2-\lambda\right) = 0,\ \lambda \in \left(0,\ 2\right)$ (Ι) έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = 4 - 4\lambda\left(2-\lambda\right) = 4 - 8\lambda + 4\lambda^2 = \left(2\lambda-1\right)^2 \geq 0$$

για κάθε $\lambda \in \left(0,\ 2\right)$.

Άρα έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1 και x_2 που παριστάνουν τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου[6].

i) Η περίμετρος Π του ορθογωνίου είναι:

6. Θα πρέπει βέβαια οι ρίζες του τριωνύμου να είναι θετικές, αφού εκφράζουν μήκη πλευρών ορθογωνίου. Αυτό εξασφαλίζεται από τη σχέση $P = x_1 \cdot x_2 = \lambda\left(2-\lambda\right) > 0$, για κάθε $\lambda \in \left(0,\ 2\right)$ και από τη σχέση $S = x_1 + x_2 = 2 > 0$. Θεωρείται όμως σιωπηρά ως δεδομένο για να έχει νόημα το θέμα και δεν χρειάζεται να διερευνηθεί στην συγκεκριμένη περίπτωση.

$$\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2S = 4$$

αφού από τον τύπο του Vietta για την εξίσωση (Ι) έχουμε $S = x_1 + x_2 = 2$

ii) Το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου[7] είναι $E = x_1 \cdot x_2 = P = \lambda(2-\lambda)$ τ.μ., αφού από τον τύπο του Vietta για την εξίσωση (Ι) έχουμε $P = x_1 \cdot x_2 = \lambda(2-\lambda)$

β) Έχουμε διαδοχικά:

$$E \le 1 \Leftrightarrow \lambda(2-\lambda) < 1 \Leftrightarrow -\lambda^2 + 2\lambda - 1 < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 > 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 > 0$$

που είναι αληθής για κάθε $\lambda \in (0,\ 2)$

γ) Έχουμε διαδοχικά:

$$E = 1 \Leftrightarrow \lambda(2-\lambda) = 1 \Leftrightarrow -\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Για $\lambda = 1$ η εξίσωση (Ι) γίνεται:

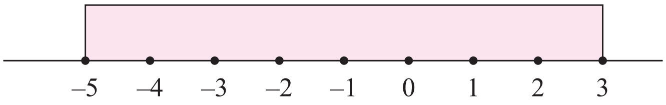
$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (διπλή ρίζα)}$$

Επομένως οι πλευρές του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι $x_1 = x_2 = 1$ και άρα πρόκειται για τετράγωνο.

Δ27. α) Έχουμε:

$$|x+1| < 4 \Leftrightarrow -4 < x + 1 < 4 \Leftrightarrow -5 < x + 1 < 3 \text{ ή } x \in (-5,\ 3)$$

Το σύνολο των λύσεων της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



7. $E = \lambda(2-\lambda) > 0$, για κάθε $\lambda \in (0,\ 2)$.

β) Οι ακέραιοι αριθμοί x με $x \in (-5,\ 3)$ είναι οι αριθμοί του συνόλου:

$$\{-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$$

γ) Αναζητούμε ένα τριώνυμο της μορφής $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \le 0$, που να έχει ρίζες δύο αριθμούς του συνόλου $\{-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν το τριώνυμο έχει δύο άνισες ρίζες, τότε υποχρεωτικά θα είναι θετικές για να εξασφαλίζεται η συνθήκη $x^2 + \beta x + \gamma > 0$ για κάθε $x \le 0$ (δηλαδή να είναι θετικό εκτός των ριζών). Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί θα είναι οι 1 και 2. Τότε από τους τύπους του Vietta έχουμε:

$$S = 1 + 2 = 3 = \beta$$
$$P = 1 \cdot 2 = 2 = \gamma$$

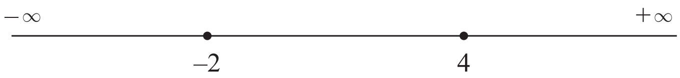
  Επομένως το ζητούμενο τριώνυμο είναι το $x^2 - 3x + 2$.

- Αν το τριώνυμο έχει διπλή ρίζα, αυτή αποκλείεται να είναι αρνητική, αφού τότε δεν θα είχαμε $x^2 + \beta x + \gamma > 0$ για κάθε $x \le 0$ (θα μηδενιζόταν στην ρίζα του). Άρα η ρίζα θα είναι θετικός αριθμός και θα είναι είτε το 1 είτε το 2.
  Επομένως το ζητούμενο τριώνυμο είναι είτε το $x^2 - 2x + 1$ είτε το $x^2 - 4x + 4$.

Δ28. α) Έχουμε:

$$|x-1| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le x - 1 \le 3 \Leftrightarrow -2 \le x \le 4 \text{ ή } x \in [-2,\ 4]$$

Η παράσταση του συνόλου των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



β) Οι ακέραιοι αριθμοί x με $x \in [-2,\ 4]$ είναι οι αριθμοί του συνόλου

$$\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$$

γ) Αναζητούμε ένα τριώνυμο της μορφής $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$ που να έχει ρίζες δύο αριθμούς του συνόλου $\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, με $f(x) > 0$ για κάθε $x \leq 0$, δηλαδή για κάθε $x \leq 0$ να γίνεται ομόσημο του $\alpha = 1 > 0$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν το τριώνυμο έχει δύο άνισες ρίζες, τότε υποχρεωτικά θα είναι αρνητικές για να εξασφαλίζεται η συνθήκη $x^2 + \beta x + \gamma > 0$ για κάθε $x \geq 0$ (δηλαδή να είναι θετικό εκτός των ριζών). Άρα οι ρίζες του θα είναι οι αριθμοί -2 και -1. Επομένως το ζητούμενο τριώνυμο είναι το $x^2 + 3x + 2 = 0$.
- Αν το τριώνυμο έχει διπλή ρίζα, αυτή αποκλείεται να είναι θετική, αφού τότε δεν θα είχαμε $x^2 + \beta x + \gamma > 0$ για κάθε $x \geq 0$(θα μηδενιζόταν στην ρίζα του). Άρα η ρίζα του θα είναι αρνητικός αριθμός και θα είναι είτε το -1 είτε το -2. Επομένως το ζητούμενο τριώνυμο είναι είτε το $x^2 + 2x + 1 = 0$ είτε το $x^2 + 4x + 4 = 0$.

Δ29. α) Για την ανίσωση $x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x$ (1) έχουμε διαδοχικά:

$$x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x \Leftrightarrow 2x^2 + 2 \geq 5x \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$x \leq \frac{1}{2} \text{ ή } x \geq 2 \text{ ή } x \in \left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right] \cup [2,\ +\infty)$$

(Οι ρίζες του τριωνύμου $2x^2 - 5x + 2$ είναι $x_1 = \frac{1}{2}$ και $x_2 = 2$)

β) i) Αφού $(\lambda - 1)(\kappa - 1) < 0$ οι αριθμοί $(\lambda - 1)$ και $(\kappa - 1)$ είναι ετερόσημοι. Επομένως έχουμε:

- $\lambda - 1 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 1$ και $\kappa - 1 < 0 \Leftrightarrow \kappa < 1$. Άρα $\kappa < 1 < \lambda$, δηλαδή το 1 είναι μεταξύ των κ και λ.

- $\lambda - 1 < 0 \Leftrightarrow \lambda < 1$ και $\kappa - 1 > 0 \Leftrightarrow \kappa > 1$. Άρα $\lambda < 1 < \kappa$, δηλαδή το 1 είναι μεταξύ των κ και λ.

  Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση ο αριθμός 1 είναι μεταξύ των κ και λ.

ii) Αφού οι αριθμοί κ, λ είναι λύσεις της ανίσωσης (1) έχουμε:

$$\kappa,\ \lambda \in \left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right] \cup [2,\ +\infty)$$

- Αν $\kappa < 1 < \lambda$, τότε είναι $\lambda \in [2,\ +\infty)$ και $\kappa \in \left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right]$

  Οπότε:

$$d(\kappa,\ \lambda) \geq d\left(2, \frac{1}{2}\right) = \left|2 - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2}$$

- Αν $\lambda < 1 < \kappa$, τότε είναι $\kappa \in [2,\ +\infty)$ και $\lambda \in \left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right]$.

  Οπότε:

$$d(\kappa,\ \lambda) \geq d\left(2, \frac{1}{2}\right) = \left|2 - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2}$$

Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση έχουμε:

$$d(\kappa,\ \lambda) \geq d\left(2, \frac{1}{2}\right) = \left|2 - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2}$$

Δ30. α) Το τριώνυμο $x^2 + x - 6$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 25 > 0$ και ρίζες τις $x_1 = -3$ και $x_2 = 2$.

Άρα έχουμε:

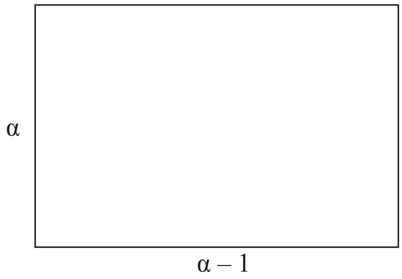
$$x^2 + x - 6 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 2 \text{ ή } x \in (-3,\ 2)$$

β) Έχουμε:

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| > 1 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2} > 1 \text{ ή } x - \frac{1}{2} < -1\right) \Leftrightarrow \left(x > \frac{3}{2} \text{ ή } x < -\frac{1}{2}\right)$$

γ) Από το ερώτημα (β) έχουμε:

$$\left|\alpha-\frac{1}{2}\right|>1 \Leftrightarrow \left(\alpha>\frac{3}{2} \text{ ή } \alpha<-\frac{1}{2}\right)$$



Όμως το α εκφράζει την πλευρά του ορθογωνίου, οπότε είναι $\alpha > 0$, δηλαδή πρέπει $\alpha > \frac{3}{2}$ (I).

Ακόμα ισχύει:

$$E<6 \Leftrightarrow \alpha(\alpha+1)<6 \Leftrightarrow \alpha^2+\alpha-6<0 \Leftrightarrow -3<\alpha<2 \text{ (II)}$$

(από το ερώτημα (α)).

i) Από τις σχέσεις (I) και (II) έχουμε $\frac{3}{2}<\alpha<2$

ii) Η περίμετρος Π του ορθογωνίου είναι:

$$\Pi = 2\alpha+2(\alpha+1)=4\alpha+2$$

Από το ερώτημα (γi) έχουμε ότι $\frac{3}{2}<\alpha<2$
Επομένως έχουμε:

$$\frac{3}{2}<\alpha<2 \Leftrightarrow 6<4\alpha<8 \Leftrightarrow 8<4\alpha+2<10 \Leftrightarrow 8<\Pi<10$$

Άρα η περίμετρος του ορθογωνίου κυμαίνεται μεταξύ των αριθμών 8 και 10.

Δ31. α) Για $\lambda = 5$ η εξίσωση γίνεται:

$$x^2-10x+25=0 \Leftrightarrow (x-5)^2=0 \Leftrightarrow x=5$$

Άρα η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα, την $x = 5$.

β) Για να έχει η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$ (1) διπλή ρίζα πρέπει:

$$\Delta = 4\lambda^2 - 4(4\lambda + 5) = 4\lambda^2 - 16\lambda - 20 =$$
$$= 4(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 5 \text{ ή } \lambda = -1)$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει διπλή ρίζα και για $\lambda = -1$

γ) Για να έχει η εξίσωση (1) δύο ρίζες άνισες πρέπει:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4(\lambda^2 - 4\lambda - 5) > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, -1) \cup (5, \infty)$$

δ) Έχουμε:

$$|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5 \Leftrightarrow |\lambda^2 - 4\lambda - 5| = -(\lambda^2 - 4\lambda - 5)$$

Από τον ορισμό της απόλυτης τιμής θα είναι $\lambda^2 - 4\lambda - 5 \le 0$. Όμως $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\}$ και άρα $\lambda^2 - 4\lambda - 5 < 0$

Άρα έχουμε:

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 < 0 \Leftrightarrow 4(\lambda^2 - 4\lambda - 5) \Leftrightarrow \Delta < 0$$

Επομένως η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Δ32. α) Το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \left[-(\lambda^2 + 1)\right]^2 - 4\lambda^2 = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 =$$
$$= \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2 \ge 0$$

Άρα το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

β) Για να έχει το τριώνυμο δύο ρίζες ίσες πρέπει:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1$$

γ) Για να έχουμε $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda \le 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ πρέπει:

$\lambda < 0$ και $\Delta \le 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)^2 \le 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1$

05.indd 253 4/12/2014 12:48:55

Επομένως $\lambda=-1$. Πράγματι για $\lambda=-1$ το τριώνυμο γίνεται:

$$-x^2-2x-1=-\left(x^2+2x+1\right)=-\left(x+1\right)^2\le 0, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Δ33. α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2-(\alpha+1)x+4+\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$ είναι:

$$\Delta=\left[-\left(\alpha+1\right)\right]^2-4\left(4+\alpha\right)=\alpha^2+2\alpha+1-16-4\alpha=$$
$$=\alpha^2-2\alpha-15=\alpha^2-2\alpha+1-16=$$
$$=\left(\alpha-1\right)^2-16$$

β) Για να έχει το τριώνυμο $x^2-(\alpha+1)x+4+\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$ πραγματικές και άνισες ρίζες πρέπει:

$$\Delta>0\Leftrightarrow\left(\alpha-1\right)^2-16>0\Leftrightarrow\left(\alpha-1\right)^2>16\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left|\alpha-1\right|>4\Leftrightarrow\left(\alpha-1>4 \text{ ή } \alpha-1<-4\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\alpha>5 \text{ ή } \alpha<-3\right)$$

Άρα το τριώνυμο $x^2-(\alpha+1)x+4+\alpha$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες όταν:

$$\alpha\in\left(-\infty,\ -3\right)\cup\left(5,\ \infty\right)$$

γ) i) Αν S και P το άθροισμα και το γινόμενο αντίστοιχα των ριζών $x_1,\ x_2$ του τριωνύμου, τότε από τους τύπους του Vietta έχουμε:

$$S=x_1+x_2=\alpha+1$$
$$P=x_1\cdot x_2=4+\alpha$$

ii) Έχουμε διαδοχικά:

$$d\left(x_1,1\right)\cdot d\left(x_2,1\right)=\left|x_1-1\right|\left|x_2-1\right|=\left|\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)\right|=$$
$$=\left|x_1x_2-x_1-x_2+1\right|=\left|x_1x_2-\left(x_1+x_2\right)+1\right|=$$
$$=\left|P-S+1\right|=\left|\left(4+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)+1\right|=\left|4\right|=4$$

Δ34. α) Για να είναι η $\left(8-\lambda\right)x^2-2\left(\lambda-2\right)x+1=0$ (1) εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού πρέπει:

$$8-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=8$$

β) Για να είναι η $(8-\lambda)x^2-2(\lambda-2)x+1=0$ (1) εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού πρέπει $\lambda \neq 8$

Όταν $\lambda \neq 8$, η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι:

$$\Delta=\left[2(\lambda-2)\right]^2-4(8-\lambda)=4(\lambda-2)^2-4(8-\lambda)=$$
$$=4(\lambda^2-4\lambda+4-8+\lambda)=4(\lambda^2-3\lambda-4)$$

Για να έχει η εξίσωση (1) μία διπλή ρίζα πρέπει:

$$\Delta=0 \Leftrightarrow 4(\lambda^2-3\lambda-4)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda-4=0 \Leftrightarrow (\lambda=-1 \text{ ή } \lambda=4)$$

- Για $\lambda=-1$ η εξίσωση (1) γίνεται:

  $$9x^2+6x+1=0 \Leftrightarrow (3x+1)^2=0 \Leftrightarrow 3x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$$

  με διπλή ρίζα τον αριθμό $x=-\frac{1}{3}$.

- Για $\lambda=4$ η εξίσωση (1) γίνεται:

  $$4x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow (2x-1)^2=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

  με διπλή ρίζα τον αριθμό $x=\frac{1}{2}$.

γ) Το τριώνυμο $(8-\lambda)x^2-2(\lambda-2)x+1$:

- Για $\lambda=-1$ γίνεται $9x^2+6x+1=(3x+1)^2 \geq 0$, δηλαδή μη αρνητικό για κάθε πραγματικό αριθμό x

- Για $\lambda=4$ γίνεται $4x^2-4x+1=(2x-1)^2 \geq 0$, δηλαδή μη αρνητικό για κάθε πραγματικό αριθμό x

Επομένως και για τις δύο τιμές του λ που βρήκαμε στο ερώτημα (β) το τριώνυμο γίνεται μη αρνητικό, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Απαντήσεις και λύσεις
Διαγωνισμάτων

Διαγώνισμα 1

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α) Λάθος. **β)** Σωστό. **γ)** Σωστό.

δ) Λάθος. **ε)** Λάθος.

Α2. Απόδειξη της πρότασης 7.

ΘΕΜΑ Β

Δες τη λύση στο θέμα Β5.

ΘΕΜΑ Γ

Δες τη λύση στο θέμα Γ2.

ΘΕΜΑ Δ

Δες τη λύση στο θέμα Δ9.

Διαγώνισμα 2

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α) Σωστό. **β)** Σωστό. **γ)** Λάθος.

δ) το Α. **ε)** το Γ.

Α2. Απόδειξη της πρότασης 6.

ΘΕΜΑ Β

Δες τη λύση στο θέμα Β2.

ΘΕΜΑ Γ

Δες τη λύση στο θέμα Γ9.

ΘΕΜΑ Δ

Δες τη λύση στο θέμα Δ17.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο
Πρόοδοι

- ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ
- ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις

στις ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου

Α.1.1. Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Σ	Σ	Λ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Λ	Σ	Λ	Σ	Λ	Λ	Σ	Λ	Λ

Α.1.2. Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Γ	Γ	Δ	Δ	Β	Γ	Δ	Β	Γ	Β	Γ	Γ

Α.1.3. Ερωτήσεις Αντιστοίχισης

1.

1	2	3
β	α	δ

2.

1	2	3
δ	γ	α

3.

1	2	3
γ	α	β

4.

1	2	3
β	γ	α

Λύσεις ασκήσεων
της Τράπεζας Θεμάτων

ΘΕΜΑ Β

Β1. **α)** Η ακολουθία (α_ν) των θετικών περιττών αριθμών 1, 3, 5, 7, ...αποτελεί μία αριθμητική πρόοδο αφού, σύμφωνα με τον ορισμό της αριθμητικής προόδου, κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού, που αποτελεί και την διαφορά $\omega = 2$ της προόδου. Ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1 = 1$. Ο $\nu^{ος}$ όρος μίας αριθμητικής πρόοδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$$

Άρα ο εκατοστός όρος α_{100} της αριθμητικής προόδου (α_ν) είναι:

$$\alpha_{100} = \alpha_1 + 99\omega \Leftrightarrow \alpha_{100} = 1 + 99 \cdot 2 \Leftrightarrow \alpha_{100} = 199$$

β) Το άθροισμα των πρώτων ν όρων της αριθμητικής προόδου α_ν είναι:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega\right] = \frac{\nu}{2}\left[2 \cdot 1 + 2(\nu - 1)\right] = \frac{\nu}{2} \cdot 2\nu = \nu^2$$

Επομένως το το άθροισμα των ν πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους.

Β2. **α)** Ο $\nu^{ος}$ όρος μίας αριθμητικής πρόοδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$$

Άρα έχουμε:

$$\alpha_3 = \alpha_1 + 2\omega \Leftrightarrow 9 = 1 + 2\omega \Leftrightarrow 2\omega = 8 \Leftrightarrow \omega = 4$$

Επομένως η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 4$.

β) Έχουμε:

$$\alpha_\nu > 30 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega > 30 \Leftrightarrow 1 + 4(\nu - 1) > 30 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\nu - 3 > 30 \Leftrightarrow 4\nu > 33 \Leftrightarrow \nu > \frac{33}{4}$$

Επειδή ο ζητούμενος αριθμός ν είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος έχουμε $\nu = 9$.

Β3. α) Οι σειρές των καθισμάτων του γηπέδου μπάσκετ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου $(\alpha_\nu), \nu \in \mathbb{N}$ αφού, σύμφωνα με τον ορισμό της αριθμητικής προόδου, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς προκύπτει από το πλήθος των καθισμάτων της προηγούμενής της με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού, που αποτελεί και την διαφορά $\omega = \kappa$ της προόδου.

β) Από τα δεδομένα προκύπτει ότι $\alpha_7 = 36$ και $S_{10} = 300$, όπου α_7 το πλήθος των καθισμάτων της $7^{ης}$ σειράς και S_{10} το πλήθος όλων των καθισμάτων του γηπέδου.
Άρα έχουμε:

$$\alpha_7 = \alpha_1 + 6\omega \Leftrightarrow \alpha_7 = \alpha_1 + 6\kappa \Leftrightarrow 36 = \alpha_1 + 6\kappa \ (1)$$

Επίσης έχουμε[8]:

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2\alpha_1 + 9\omega) \Leftrightarrow 300 = 5(2\alpha_1 + 9\omega) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 300 = 10\alpha_1 + 45\kappa \ (2)$$

Οι σχέσεις (1) και (2) αποτελούν σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Από τη σχέση (1) έχουμε $\alpha_1 = 36 - 6\kappa$ και επομένως η σχέση (2) γίνεται ισοδύναμα:

$$300 = 10\alpha_1 + 45\kappa \Leftrightarrow 10(36 - 6\kappa) + 45\kappa = 300 \Leftrightarrow 15\kappa = 60 \Leftrightarrow \kappa = 4$$

8. Για κάθε αριθμητική πρόοδο (α_ν), με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω ισχύει:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega\right]$$

όπου S_ν το άθροισμα των ν πρώτων όρων της προόδου.

Από την (1) παίρνουμε $\alpha_1 = 36 - 24 \Leftrightarrow \alpha_1 = 12$

Άρα το πλήθος των καθισμάτων που έχει κάθε σειρά είναι:

$$\alpha_1 = 12,\ \alpha_2 = 16,\ \alpha_3 = 20,\ \alpha_4 = 24,\ \alpha_5 = 28,\ \alpha_6 = 32,\ \alpha_7 = 36,$$
$$\alpha_8 = 40,\ \alpha_9 = 44,\ \alpha_{10} = 48$$

Β4. **α)** Ο τύπος του ν-οστού όρου μίας αριθμητικής προόδου (α_ν), με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$.

Άρα έχουμε ισοδύναμα:

$$\alpha_4 - \alpha_2 = 10 \Leftrightarrow (\alpha_1 + 3\omega) - (\alpha_1 + \omega) = 10 \Leftrightarrow 2\omega = 10 \Leftrightarrow \omega = 5$$

Επομένως η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$.

β) Έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 33 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\alpha_1 + \omega) + (\alpha_1 + 2\omega) = 33 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\alpha_1 + 3\omega = 33 \Leftrightarrow 3\alpha_1 + 15 = 33 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\alpha_1 = 18 \Leftrightarrow \alpha_1 = 6$$

Επομένως ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 6$.

Β5. **α)** Οι διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι 1, 2, 3, ...ν αποτελούν αριθμητική πρόοδο (α_ν) με πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$ και διαφορά $\omega = 1$.

Για το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων 1, 2, 3, ...ν έχουμε:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega\right] \Leftrightarrow S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2 \cdot 1 + (\nu - 1) \cdot 1\right] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow S_\nu = \frac{\nu}{2}(\nu + 1)$$

β) Έστω ν το πλήθος από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45. Έχουμε:

$$S_\nu = 45 \Leftrightarrow \frac{\nu(\nu + 1)}{2} = 45 \Leftrightarrow \nu(\nu + 1) = 90 \Leftrightarrow \nu^2 + \nu - 90 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τις $\nu = -10$ (απορρίπτεται αφού ο ν είναι θετικός ακέραιος) ή $\nu = 9$.
Επομένως πρέπει να χρησιμοποιήσουμε 9 πρώτους όρους της αριθμητικής προόδου για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45.

Β6. **α)** Έχουμε:

$$\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39 \Leftrightarrow \alpha_1 + 24\omega = \alpha_1 + 11\omega + 39 \Leftrightarrow 13\omega = 39 \Leftrightarrow \omega = 3$$

Άρα η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι $\omega = 3$.

β) Έχουμε:

$$\alpha_\nu = 152 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 152 \Leftrightarrow 2 + 3(\nu - 1) = 152 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\nu - 1 = 152 \Leftrightarrow 3\nu = 153 \Leftrightarrow \nu = 51$$

Άρα ο $51^{ος}$ όρος της αριθμητικής προόδου είναι ίσος με 152.

Β7. Ο τύπος του ν-οστού όρου μίας αριθμητικής προόδου (α_ν), με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$.

α) Έχουμε:

$$\frac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = \frac{(\alpha_1 + 14\omega) - (\alpha_1 + 8\omega)}{(\alpha_1 + 9\omega) - (\alpha_1 + 6\omega)} = \frac{6\omega}{3\omega} = 2$$

β) Έχουμε:

$$\alpha_{15} - \alpha_9 = 18 \Leftrightarrow (\alpha_1 + 14\omega) - (\alpha_1 + 8\omega) = 18 \Leftrightarrow 6\omega = 18 \Leftrightarrow \omega = 3$$

Άρα η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι $\omega = 3$.

Β8. Ο τύπος του ν-στού όρου μίας αριθμητικής προόδου (α_ν), με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$.

α) Έχουμε:

$$\alpha_6 + \alpha_{11} = 40 \Leftrightarrow (\alpha_1 + 5\omega) + (\alpha_1 + 10\omega) = 40 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\alpha_1 + 15\omega = 40 \Leftrightarrow 2\alpha_1 + 60 = 40 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\alpha_1 = -20 \Leftrightarrow \alpha_1 = -10$$

Άρα ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου είναι ο $\alpha_1 = -10$.

β) Έστω ν οι πρώτοι όροι της αριθμητικής προόδου που πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν. Έχουμε:

$$S_\nu = 0 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\left[2\cdot(-10) + 4(\nu-1)\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}(-20 + 4\nu - 4) = 0 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}(4\nu - 24) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\nu - 24 = 0 \Leftrightarrow \nu = 6$$

Άρα πρέπει να προσθέσουμε 6 πρώτους όρους της προόδου, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν.

B9. **α)** Αφού οι αριθμοί $x+6$, $5x+2$, $11x-6$, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου έχουμε:

$$5x + 2 = \frac{(x+6)+(11x-6)}{2} \Leftrightarrow 5x + 2 = 6x \Leftrightarrow x = 2$$

Η διαφορά ω της προόδου είναι:

$$\omega = (5x+2)-(x+6) \Leftrightarrow \omega = 4x - 4 \Leftrightarrow \omega = 4\cdot 2 - 4 \Leftrightarrow \omega = 4$$

β) Το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων της προόδου είναι:

$$S_8 = \frac{8}{2}\left[2\cdot 0 + 4\cdot(8-1)\right] = 112$$

B10. Ο τύπος του ν-οστού όρου μίας αριθμητικής προόδου (α_ν), με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$.

α) Έχουμε:

$$\alpha_5 = \alpha_1 + 4\omega \Leftrightarrow 14 = 2 + 4\omega \Rightarrow 4\omega = 12 \Leftrightarrow \omega = 3$$

Άρα η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$.

β) Έστω ότι πρέπει να προσθέσουμε ν πρώτους όρους, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77. Έχουμε:

$$S_\nu = 77 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right] = 77 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\left[2\cdot 2 + 3(\nu-1)\right] = 77 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}(4+3\nu-3) = 77 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}(3\nu+1) = 77 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \nu(3\nu+1) = 154 \Leftrightarrow 3\nu^2 + \nu - 154 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τις $\nu = -\frac{22}{3}$ (απορρίπτεται) και $\nu = 8$.

Άρα πρέπει να προσθέσουμε 8 πρώτους όρους της προόδου, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77.

Β11. Ο τύπος του ν-οστού όρου μίας αριθμητικής προόδου (α_ν), με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$.

α) Έχουμε:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega \Leftrightarrow 0 = \alpha_1 + \omega \;(1) \text{ και } \alpha_4 = \alpha_1 + 3\omega \Leftrightarrow 4 = \alpha_1 + 3\omega \;(2)$$

Οι σχέσεις (1) και (2) αποτελούν σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, τους α_1 και ω. Από την σχέση (1) παίρνουμε $\alpha_1 = -\omega$ και η σχέση (2) γίνεται:

$$\alpha_1 + 3\omega = 4 \Leftrightarrow -\omega + 3\omega = 4 \Leftrightarrow 2\omega = 4 \Leftrightarrow \omega = 2$$

Άρα $\alpha_1 = -2$ και $\omega = 2$.

β) Ο ν-οστός όρος της προόδου είναι ίσος με:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\cdot\omega \Leftrightarrow \alpha_\nu = -2 + 2(\nu-1) \Leftrightarrow \alpha_\nu = 2\nu - 4$$

Τέλος έχουμε $\alpha_\nu = 98 \Leftrightarrow 2\nu - 4 = 98 \Leftrightarrow 2\nu = 102 \Leftrightarrow \nu = 51$.

Επομένως ο 51ος όρος της αριθμητικής προόδου είναι ίσος με 98.

Β12. α) Το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς του γυμναστηρίου αποτελεί διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου (α_ν) με πρώτο όρο

$\alpha_1 = 120$ και διαφορά $\omega = 20$. Ο τύπος του ν-οστού όρου μίας αριθμητικής προόδου (α_ν), με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$. Άρα έχουμε:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\cdot\omega \Leftrightarrow \alpha_\nu = 120 + 20\cdot(\nu-1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = 120 + 20\nu - 20 \Leftrightarrow \alpha_\nu = 100 + 20\nu$$

Επομένως το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς είναι:

$$\alpha_\nu = 100 + 20\nu$$

β) Το πλήθος των καθισμάτων της τελευταίας σειράς είναι ο $10^{ος}$ όρος α_{10} της αριθμητικής προόδου (α_ν). Σύμφωνα με το ερώτημα (α) έχουμε:

$$\alpha_{10} = \alpha_1 + 9\omega \Leftrightarrow \alpha_{10} = 100 + 20\cdot 10 \Leftrightarrow \alpha_{10} = 300$$

Επομένως η τελευταία σειρά έχει 300 καθίσματα.

γ) Το γυμναστήριο έχει τόσα καθίσματα όσο είναι το άθροισμα των καθισμάτων των 10 σειρών του, δηλαδή :

$$S_{10} = \frac{10}{2}\left[2\cdot 120 + 9\cdot 20\right] = 2100$$

Επομένως το γυμναστήριο έχει 2100 καθίσματα.

Β13. Ο τύπος του ν-οστού όρου μίας αριθμητικής προόδου (α_ν), με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$.

α) Έχουμε:

$$\alpha_{10} - \alpha_6 = 24 \Leftrightarrow (\alpha_1 + 9\omega) - (\alpha_1 + 5\omega) = 24 \Leftrightarrow 4\omega = 24 \Leftrightarrow \omega = 6$$

Επομένως η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$.

β) Έχουμε:

$$\alpha_{20} = \alpha_1 + 19\omega \Leftrightarrow \alpha_{20} = 19 + 19\cdot 6 \Leftrightarrow \alpha_{20} = 133$$

Επομένως ο $20^{ος}$ όρος της προόδου είναι 133.

γ) Έχουμε:

$$S_{20}=\frac{20}{2}[2\cdot 19+19\cdot 6]=1520$$

Επομένως το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου είναι 1520.

Β14. α) Για να είναι οι αριθμοί[9] $A=1$, $B=x+4$, $\Gamma=x+8$, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου πρέπει:

$$x+4=\frac{1+(x+8)}{2}\Leftrightarrow 2x+8=x+9\Leftrightarrow x=1$$

Επομένως η τιμή του x είναι $x=1$.

β) i) Για $x=1$ οι παραπάνω αριθμοί είναι $A=1$, $B=5$, $\Gamma=9$. Αφού $\alpha_1=A$ είναι $\alpha_2=B=5$ και $\alpha_3=\Gamma=9$.

Άρα $\omega=\alpha_2-\alpha_1=\alpha_3-\alpha_2=4$.

Επομένως η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι $\omega=4$.

ii) Ο τύπος του ν-οστού όρου μίας αριθμητικής προόδου (α_ν), με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$. Άρα έχουμε:

$$\alpha_{20}=\alpha_1+19\omega\Leftrightarrow\alpha_{20}=1+19\cdot 4\Leftrightarrow\alpha_{20}=77$$

Επομένως ο 20^{ος} όρος της προόδου είναι 77.

Β15. α) Αφού οι αριθμοί $4-x,\ x,\ 2$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου έχουμε:

$$x=\frac{(4-x+2)}{2}\Leftrightarrow 2x=6-x\Leftrightarrow 3x=6\Leftrightarrow x=2$$

Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι $x=2$.

9. Οι αριθμοί α, β, γ με τη σειρά αυτή αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου όταν ισχύει $\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$.

β) Αφού οι αριθμοί $4-x,\ x,\ 2$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου έχουμε[10]:

$$x^2 = 2(4-x) \Leftrightarrow x^2 = 8-2x \Leftrightarrow x^2+2x-8=0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τις $x=-4$ ή $x=2$.

γ) Για να είναι οι αριθμοί $4-x,\ x,\ 2$, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου πρέπει $x=2$, που αποτελεί την κοινή τιμή του x των ερωτημάτων (α) και (β).

Β16. α) Για να είναι οι αριθμοί $\kappa-2,\ 2\kappa,\ 7\kappa+4$, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου πρέπει:

$$(2\kappa)^2 = (\kappa-2)\cdot(7\kappa+4) \Leftrightarrow 4\kappa^2 = 7\kappa^2+4\kappa-14\kappa-8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\kappa^2-10\kappa-8=0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τις $\kappa=-\frac{2}{3}$ (απορρίπτεται αφού $\kappa\in\mathbb{N}$) ή $\kappa=4$.

Επομένως για να είναι οι αριθμοί $\kappa-2,\ 2\kappa,\ 7\kappa+4$, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου πρέπει $\kappa=4$.

Για $\kappa=4$ οι παραπάνω αριθμοί είναι $2,\ 8,\ 32$. Ο λόγος λ της προόδου είναι $\lambda=\frac{8}{2}=\frac{32}{8}=4$.

β) i) Ο $2^{ος}$, ο $4^{ος}$ και ο $5^{ος}$ όρος αντίστοιχα της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, ως συνάρτηση του α_1, είναι:

$$\alpha_2 = \alpha_1\cdot\lambda = 4\alpha_1$$
$$\alpha_4 = \alpha_1\cdot\lambda^3 = 64\alpha_1$$
$$\alpha_5 = \alpha_1\cdot\lambda^4 = 256\alpha_1$$

ii) Έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha_2+\alpha_5 = 4\alpha_1+256\alpha_1 = 4(\alpha_1+64\alpha_1) = 4(\alpha_1+\alpha_4)$$

10. Οι αριθμοί α, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου όταν ισχύει $\beta^2=\alpha\cdot\gamma$.

B17. Ο τύπος του ν-οστού όρου μίας γεωμετρικής προόδου (α_ν), με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$.

α) Έχουμε:

$$\alpha_3 = \alpha_1 \cdot \lambda^2 \Leftrightarrow 1 = \alpha_1 \cdot \lambda^2 \ (1) \text{ και } \alpha_5 = \alpha_1 \cdot \lambda^4 \Leftrightarrow 4 = \alpha_1 \cdot \lambda^4 \ (2)$$

Διαιρώντας τις σχέσεις (2) και (1) κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{\alpha_5}{\alpha_3} = \frac{4}{1} = \frac{\alpha_1 \cdot \lambda^4}{\alpha_1 \cdot \lambda^2} \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow (\lambda = 2 \ \text{ ή } \ \lambda = -2)$$

Επειδή ο λ είναι θετικός αριθμός έχουμε $\lambda = 2$. Για τον πρώτο όρο α_1 της γεωμετρικής προόδου έχουμε:

$$1 = \alpha_1 \cdot \lambda^2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{1}{4}$$

β) Για το ν-οστό όρο α_ν της γεωμετρικής προόδου έχουμε:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow \alpha_\nu = \frac{1}{4} \cdot 2^{\nu-1} \Leftrightarrow \alpha_\nu = 2^{\nu-3}$$

B18. α) Για να είναι οι αριθμοί $x+4,\ 2-x,\ 6-x$, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου πρέπει:

$$(2-x)^2 = (x+4)(6-x) \Leftrightarrow 4 - 4x + x^2 = 6x - x^2 + 24 - 4x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τις $x = -2$ και $x = 5$.

β) Για $x = 5$ οι διαδοχικοί όροι της παραπάνω γεωμετρικής προόδου είναι $9,\ -3,\ 1$. Ο τέταρτος όρος της προόδου είναι:

$$\alpha_4 = 6 - x \Leftrightarrow \alpha_4 = 1$$

i) Για το λόγο λ της προόδου έχουμε $\lambda = \frac{-3}{9} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$.

ii) Για τον πρώτο όρο της προόδου έχουμε:

$$\alpha_4 = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \lambda^3 = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 = -27$$

Επομένως ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = -27$.

B19. α) Ο τύπος του ν-οστού όρου μίας γεωμετρικής προόδου (α_ν), με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$. Άρα έχουμε:

$$\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27 \Leftrightarrow \frac{\alpha_1 \cdot \lambda^4}{\alpha_1 \cdot \lambda} = 27 \Leftrightarrow \lambda^3 = 27 \Leftrightarrow \lambda = 3$$

Επομένως ο λόγος λ της προόδου είναι $\lambda = 3$.

β) Ο τύπος του αθροίσματος των πρώτων ν-όρων μίας γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda \neq 1$ είναι $S_\nu = \alpha_1 \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$. Άρα έχουμε:

$$S_4 = \alpha_1 \frac{3^4 - 1}{3 - 1} \Leftrightarrow 200 = 40\alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{200}{40} \Leftrightarrow \alpha_1 = 5$$

Επομένως ο πρώτος όρος της προόδου (α_ν) είναι $\alpha_1 = 5$.

B20. α) Για να είναι οι αριθμοί $x,\ 2x+1,\ 5x+4$, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου πρέπει:

$$(2x+1)^2 = x(5x+4) \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 5x^2 + 4x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ή } x = -1)$$

Επομένως οι τιμές του πραγματικού αριθμού x είναι $x = 1$ ή $x = -1$.

β) i) Για $x = 1$ οι διαδοχικοί όροι της προόδου είναι $1,\ 3,\ 9$. Ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = \frac{3}{1} = \frac{9}{3} = 3$.

ii) Για $x = -1$ οι διαδοχικοί όροι της προόδου είναι $-1,\ -1,\ -1$. Ο λόγος λ της προόδου είναι $\lambda = 1$.

B21. α) Η διακρίνουσα της εξίσωσης $x^2 - 2\beta x + (\beta^2 - 4) = 0$ (1) είναι:

$$\Delta = 4\beta^2 - 4(\beta^2 - 4) = 4\beta^2 - 4\beta^2 + 16 = 16$$

και οι ρίζες της είναι $x_1 = \dfrac{2\beta - 4}{2} = \beta - 2$ και $x_2 = \dfrac{2\beta + 4}{2} = \beta + 2$.

β) Για τους αριθμούς x_1, β, x_2, με τη σειρά αυτή, έχουμε:

$$\beta=\frac{x_1+x_2}{2}\Leftrightarrow\frac{\beta-2+\beta+2}{2}=\beta\Leftrightarrow\beta=\beta,\text{ που είναι αληθής}$$

Άρα οι αριθμοί x_1, β , x_2, με τη σειρά αυτή, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

B22. α) Για να είναι οι αριθμοί $x+2$, $(x+1)^2$, $3x+2$, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου πρέπει:

$$(x+1)^2=\frac{x+2+3x+2}{2}\Leftrightarrow(x+1)^2=\frac{4x+4}{2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x+1)^2=2x+2\Leftrightarrow x^2+2x+1=2x+2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow\left(x=1\ \text{ ή }\ x=-1\right)$$

Άρα οι τιμές του x, ώστε να είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου είναι $x=1$ ή $x=-1$.

β) i) Για $x=1$ οι παραπάνω διαδοχικοί όροι της προόδου είναι 3, 4, 5. Η διαφορά της προόδου είναι $\omega=4-3=5-4=1$.

ii) Για $x=-1$ οι παραπάνω διαδοχικοί όροι της προόδου είναι 1, 0, -1. Η διαφορά ω της προόδου είναι $\omega=0-1=-1-0=-1$.

B23. α) Η διακρίνουσα της εξίσωσης $2x^2-5\beta x+2\beta^2=0$ (1) είναι

$$\Delta=25\beta^2-16\beta^2=9\beta^2>0\ (\text{αφού }\beta\neq 0,\text{ διότι }\beta>0)$$

Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι:

$$x_1=\frac{5\beta+3\beta}{4}=2\beta\ \text{ και }\ x_2=\frac{5\beta-3\beta}{4}=\frac{\beta}{2}$$

β) Για να είναι οι αριθμοί x_1, β , x_2, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου πρέπει:

$$\beta^2=x_1\cdot x_2\Leftrightarrow\beta^2=2\beta\cdot\frac{\beta}{2}\Leftrightarrow\beta^2=\beta^2,\text{ που είναι αληθής}$$

Άρα οι αριθμοί x_1, β , x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

B24. Ο τύπος του ν-οστού όρου μίας αριθμητικής προόδου (α_ν), με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$.

α) Έχουμε:

$$\alpha_4 - \alpha_9 = 15 \Leftrightarrow (\alpha_1 + 3\omega) - (\alpha_1 + 8\omega) = 15 \Leftrightarrow -5\omega = 15 \Leftrightarrow \omega = -3$$

Άρα η διαφορά της προόδου είναι $\omega = -3$.

β) Έχουμε:

$$\alpha_\nu = \nu \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\cdot\omega = \nu \Leftrightarrow 41 - 3(\nu - 1) = \nu \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 41 - 3\nu + 3 = \nu \Leftrightarrow 4\nu = 44 \Leftrightarrow \nu = 11$$

Άρα για $\nu = 11$ έχουμε $\alpha_{11} = 11$.

ΘΕΜΑ Γ

(Δίνονται οι αναλυτικές λύσεις των θεμάτων με μονή αρίθμηση και οι απαντήσεις-υποδείξεις των θεμάτων με ζυγή αρίθμηση).

Γ1. α) Για να είναι η ακολουθία $(\beta_\nu), \nu \in \mathbb{N}^*$ γεωμετρική πρόοδος θα πρέπει κάθε όρος της να προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό. Έχουμε[11]:

$$\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu}=\frac{1+\alpha_{\nu+1}}{1+\alpha_\nu}=\frac{1+(1+2\alpha_\nu)}{1+\alpha_\nu}=\frac{2+2\alpha_\nu}{1+\alpha_\nu}=\frac{2(1+\alpha_\nu)}{1+\alpha_\nu}=2$$

Άρα $\beta_{\nu+1}=2\beta_\nu,\ \nu\in\mathbb{N}^*$ και επομένως η ακολουθία $(\beta_\nu),\ \nu\in\mathbb{N}^*$ είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda=2$. Ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\beta_1=1+\alpha_1 \Leftrightarrow \beta_1=1+0 \Leftrightarrow \beta_1=1$.

β) Αφού η (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος ο ν-οστός όρος της (γενικός τύπος) είναι:

$$\beta_\nu=\beta_1\cdot\lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow \beta_\nu=2^{\nu-1}$$

Επίσης έχουμε:

$$\beta_\nu=1+\alpha_\nu \Leftrightarrow \alpha_\nu=\beta_\nu-1 \Leftrightarrow \alpha_\nu=2^{\nu-1}-1,\ \nu\in\mathbb{N}^*$$

Επομένως ο γενικός τύπος της ακολουθίας (α_ν) είναι:

$$\alpha_\nu=2^{\nu-1}-1,\ \nu\in\mathbb{N}^*$$

Γ2. α) Άθροισμα όρων αριθμητικής προόδου (α_ν) με $\alpha_1=x+2$ και $\omega=x+3$. Η λύση είναι $x=1$.

---

11. Ένας τρόπος για να αποδείξουμε ότι μία ακολουθία (α_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος, είναι να αποδείξουμε ότι ο λόγος $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$ είναι σταθερός αριθμός. Ο σταθερός αυτός αριθμός αποτελεί και τον λόγο λ της προόδου.

β) Άθροισμα όρων γεωμετρικής πρόοδου. Οι λύσεις είναι $x=-1$ και $x=-3$.

Γ3. **α)** Οι όροι περιττής τάξης είναι $\alpha_1,\ \alpha_3,\ \alpha_5\ ,...,\ \alpha_{999}$ και αποτελούν γεωμετρική πρόοδο, αφού ο κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό λ^2, όπου λ ο λόγος της γεωμετρικής προόδου (α_ν).

β) Οι όροι άρτιας τάξης είναι $\alpha_2,\ \alpha_4,\ \alpha_6\ ,...,\ \alpha_{1000}$ και αποτελούν γεωμετρική πρόοδο, αφού ο κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό λ^2, όπου λ ο λόγος της γεωμετρικής προόδου (α_ν).

γ) Έχουμε:

$$S_1=\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+...+\alpha_{999}\ (1)\text{ και } S_2=\alpha_2+\alpha_4+\alpha_6...+\alpha_{1000}\ (2)$$

Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (1) με λ και, χρησιμοποιώντας την σχέση (2), έχουμε διαδοχικά:

$$\lambda S_1=\lambda\alpha_1+\lambda\alpha_3+...+\lambda\alpha_{999}\Leftrightarrow\lambda S_1=\alpha_2+\alpha_4+\alpha_6...+\alpha_{1000}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\lambda S_1=S_2\Leftrightarrow\frac{S_2}{S_1}=\lambda$$

Γ4. **α)** 2^{63}

β) $2^{64}-1$

Γ5. Τα ποσά των μηνιαίων ενοικίων σε ευρώ των γραφείων των 17 ορόφων αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου (α_ν) με πρώτο όρο $\alpha_1=400$ και διαφορά $\omega=100$.

α) Ζητάμε τον $5^{\text{ο}}$ όρο της προόδου (α_ν), δηλαδή τον α_5. Έχουμε:

$$\alpha_5=\alpha_1+4\omega\Leftrightarrow\alpha_5=400+4\cdot100\Leftrightarrow\alpha_5=800$$

Επομένως το μηνιαίο ενοίκιο ενός γραφείου του πέμπτου ορόφου είναι 800 ευρώ.

β) Θα συγκρίνουμε τους όρους α_7 και α_{10}. Έχουμε:

$$\alpha_{10}-\alpha_7=\left(\alpha_1+9\omega\right)-\left(\alpha_1+6\omega\right)=3\omega=3\cdot 100=300$$

Άρα $\alpha_{10}=\alpha_7+300$. Επομένως το ενοίκιο του $10^{ου}$ ορόφου είναι κατά 300 ευρώ ακριβότερο από το ενοίκιο ενός γραφείου του $7^{ου}$ ορόφου.

γ) Έστω ότι σε ν ορόφους το εννοίκιο των γραφείων ξεπερνά τα 700 ευρώ. Έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha_\nu>700\Leftrightarrow \alpha_1+\left(\nu-1\right)\omega>700\Leftrightarrow 400+100\left(\nu-1\right)>700\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 300+100\nu>700\Leftrightarrow 100\nu>400\Leftrightarrow \nu>4$$

Επομένως από τον 5^o μέχρι τον 17^o όροφο το μηνιαίο ενοίκιο των γραφείων ξεπερνά τα 700 ευρώ. Δηλαδή σε 13 ορόφους το μηνιαίο ενοίκιο των γραφείων ξεπερνά τα 700 ευρώ.

δ) Το πλήθος των γραφείων των 17 ορόφων αποτελεί διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου $\left(\beta_\nu\right)$, $\nu=1,\ 2,\ \ldots 17$ με διαφορά $\omega'=-2$. Έχουμε:

$$\beta_{17}=\beta_1+16\omega'\Leftrightarrow 12=\beta_1+16\cdot\left(-2\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 12=\beta_1-32\Leftrightarrow \beta_1=44$$

Επομένως ο πρώτος όροφος έχει 44 γραφεία.

Γ6. **α)** $\alpha_{\nu+1}=3\nu+5$

β) Αριθμητική πρόοδος με $\omega=\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=3$

γ) $S_{30}=1455$

δ) $\alpha_{20}=62$

Γ7. Ο τύπος του ν-οστού όρου μίας γεωμετρικής προόδου $\left(\alpha_\nu\right)$, με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ είναι $\alpha_\nu=\alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1}$.

α) Έχουμε:

$$\alpha_4=13\Leftrightarrow \alpha_1\cdot\lambda^3=13\ (1)\ \text{και}\ \alpha_6=117\Leftrightarrow \alpha_1\cdot\lambda^5=117\ (2)$$

Διαιρώντας τις σχέσεις (2) και (1) κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{\alpha_1 \cdot \lambda^5}{\alpha_1 \cdot \lambda^3} = \frac{117}{13} \Leftrightarrow \lambda^2 = 9 \Leftrightarrow \left(\lambda = 3 \text{ ή } \lambda = -3\right)$$

Αφού $\lambda > 0$ έχουμε $\lambda = 3$.

β) Έχουμε:

$$\alpha_1 \cdot \lambda^3 = 13 \Leftrightarrow 27\alpha_1 = 13 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{13}{27}$$

γ) Έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha_\nu = 9477 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1} = 9477 \Leftrightarrow \frac{13}{27} \cdot 3^{\nu-1} = 9477 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 13 \cdot 3^{\nu-4} = 9477 \Leftrightarrow 3^{\nu-4} = 729 \Leftrightarrow 3^{\nu-4} = 3^6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \nu - 4 = 6 \Leftrightarrow \nu = 10$$

Επομένως το πλήθος των όρων της προόδου αυτής είναι $\nu = 10$.

Γ8. **α)** $x_1 = 1,\ x_2 = 7$

β) $K = \frac{501}{2}\left(8 + 7008\right) = 1.757.508$

γ) Αριθμητικής με $\omega = 6$

δ) $\Lambda = \frac{49^\nu - 1}{6}$

Γ9. **α)** Έστω $x = \alpha - \omega,\ y = \alpha,\ z = \alpha + \omega$ οι διαδοχικοί όροι της αριμητικής προόδου, όπου $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $\omega \neq 0$ η διαφορά της[12]. Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$x + y + z = xy + yz + zx \Leftrightarrow \left(\alpha - \omega\right) + \alpha + \left(\alpha + \omega\right) =$$
$$= \alpha\left(\alpha - \omega\right) + \alpha\left(\alpha + \omega\right) + \left(\alpha + \omega\right)\left(\alpha - \omega\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\alpha = \alpha^2 - \alpha\omega + \alpha^2 + \alpha\omega + \alpha^2 - \omega^2 \Leftrightarrow 3\alpha = 3\alpha^2 - \omega^2 \quad (1)$$

12. Έχουμε $x \neq y \neq z \Leftrightarrow \left(\alpha - \omega \neq \alpha \text{ και } \alpha \neq \alpha + \omega\right) \Leftrightarrow \omega \neq 0$.

Ακόμα επειδή οι αριθμοί xy, yz, zx, δηλαδή οι αριθμοί $\alpha(\alpha-\omega)$, $\alpha(\alpha+\omega)$, $(\alpha+\omega)(\alpha-\omega)$, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου έχουμε:

$$\left[\alpha(\alpha+\omega)\right]^2=\alpha(\alpha-\omega)(\alpha+\omega)(\alpha-\omega)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2(\alpha+\omega)^2=\alpha(\alpha-\omega)^2(\alpha+\omega)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2(\alpha+\omega)^2-\alpha(\alpha-\omega)^2(\alpha+\omega)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha(\alpha+\omega)\left[\alpha(\alpha+\omega)-(\alpha-\omega)^2\right]=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha(\alpha+\omega)(3\alpha\omega-\omega^2)=0\Leftrightarrow \alpha(\alpha+\omega)\omega(3\alpha-\omega)=0$$

Επειδή[13] $\alpha\neq 0$ και $\omega\neq 0$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\alpha+\omega=0\Leftrightarrow\omega=-\alpha$, τότε από τη σχέση (1) έχουμε:

$$3\alpha=3\alpha^2-\alpha^2\Leftrightarrow 3\alpha=2\alpha^2\Leftrightarrow\alpha=\frac{3}{2}\ (\alpha\neq 0)$$

οπότε $\omega=-\frac{3}{2}$ και επομένως οι ζητούμενοι αριθμοί είναι:

$$x=3,\ y=\frac{3}{2},\ z=0$$

- Αν $3\alpha-\omega=0\Leftrightarrow\omega=3\alpha$, τότε από τη σχέση (1) έχουμε:

$$3\alpha=3\alpha^2-9\alpha^2\Leftrightarrow 3\alpha=-6\alpha^2\Leftrightarrow\alpha=-\frac{1}{2}\ (\alpha\neq 0)$$

οπότε $\omega=-\frac{3}{2}$ και επομένως οι ζητούμενοι αριθμοί είναι:

$$x=1,\ y=-\frac{1}{2},\ z=-2$$

β) Αφού $\beta_3=y>0$ οι αριθμοί x, y, z είναι $x=3,\ y=\frac{3}{2},\ z=0$

13. Αν $\alpha=0$, τότε $x=-\omega$, $y=0$, $z=\omega$. Όμως έτσι οι αριθμοί xy, yz, zx είναι οι $0, 0, -\omega^2$ οι οποίοι δεν αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου .

Άρα $\beta_3 = \frac{3}{2}$ και $\beta_1 = 3$. Η (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος και αν $\lambda \neq 0$ είναι ο λόγος της έχουμε:

$$\beta_3 = \beta_1 \cdot \lambda^2 \Leftrightarrow \frac{3}{2} = 3 \cdot \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } \lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Το άθροισμα $A = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_{11}$ είναι το άθροισμα των 11 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου (β_ν), με πρώτο όρο $\beta_1 = 3$ και λόγο $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Επομένως έχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\beta_1 = 3$ και $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$ έχουμε $A = 3\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{11} - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1} = \frac{3}{32}\frac{\sqrt{2} - 2^6}{\sqrt{2} - 2}$.

- Αν $\beta_1 = 3$ και $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ έχουμε $A = 3\frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{11} - 1}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1} = \frac{3}{32}\frac{\sqrt{2} + 2^6}{\sqrt{2} + 2}$.

Γ10. α) $\omega = 10$. Άρα διαφέρουν κατά 10 καθίσματα.

β) $\alpha_{15} = 240$ καθίσματα και $\alpha_{29} = 380$ καθίσματα.

γ) 5702.

δ) Στην 1^η σειρά υπάρχουν 100 θεατές, στην 2^η σειρά 90 και στην 3^η σειρά 80.

ε) Μέχρι και την 11^η σειρά.

ζ) 550 θεατές.

Γ11. Ο τύπος του ν-οστού όρου μίας αριθμητικής προόδου (α_ν), με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$.

α) Έχουμε:

$$\alpha_{73} = 7\alpha_9 \Leftrightarrow \alpha_1 + 72\omega = 7(\alpha_1 + 8\omega) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 + 72\omega = 7\alpha_1 + 56\omega \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{8}{3}\omega \ (1)$$

Άρα έχουμε:

$$\frac{\alpha_{17}}{\alpha_3} = \frac{\alpha_1 + 16\omega}{\alpha_1 + 2\omega} = \frac{\frac{8}{3}\omega + 16\omega}{\frac{8}{3}\omega + 2\omega} = \frac{56\omega}{14\omega} = 4$$

Επομένως $\frac{\alpha_{17}}{\alpha_3} = 4 \Leftrightarrow \alpha_{17} = 4\alpha_3$.

β) Η σχέση $\alpha_1 + \omega = \frac{22}{3}$ λόγω της σχέσης (1) γίνεται:

$$\alpha_1 + \omega = \frac{22}{3} \Leftrightarrow \frac{8}{3}\omega + \omega = \frac{22}{3} \Leftrightarrow \frac{11}{3}\omega = \frac{22}{3} \Leftrightarrow \omega = 2$$

οπότε $\alpha_1 = \frac{8}{3}\omega \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{16}{3}$.

Ακόμα έχουμε:

$$\alpha_{21} = \alpha_1 + 20\omega \Leftrightarrow \alpha_{21} = \frac{136}{3} \text{ και}$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}[2\alpha_1 + 9\omega] = 5\left[2 \cdot \frac{16}{3} + 9 \cdot 2\right] = \frac{430}{3}$$

Επομένως:

$$\alpha_1 = \frac{16}{3}, \ \omega = 2, \ \alpha_{21} = \frac{136}{3}, \ S_{10} = \frac{430}{3}$$

Γ12. α) $4, \ 2, \ 0, \ -2, \ -4$

β) $24, \ 12, \ 6, \ 3$

Γ13. Οι αριθμοί $x, \ y, \ z$ είναι οι τρεις πρώτοι όροι της γεωμετρικής προόδου (α_ν) και άρα γράφονται $x, \ y = x \cdot \lambda, \ z = x \cdot \lambda^2$ (1), όπου $\lambda \neq 1$ ο λόγος της προόδου (α_ν). Εξάλλου από τα δεδομένα έχουμε $\beta_1 = x$, $\beta_2 = y$, $\beta_7 = z$, όπου β_1, β_2, β_7 ο $1^{ος}$, ο $2^{ος}$ και ο $7^{ος}$ όρος αντίστοιχα της αριθμητικής προόδου (β_ν) με διαφορά ω.

α) Έχουμε:

$$\beta_7 = \beta_1 + 6\omega \Leftrightarrow z = x + 6\omega \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z = x + 6(y - x) \Leftrightarrow z = 6y - 5x \quad (2)$$

Η σχέση (2) λόγω της σχέσης (1) γίνεται:

$$x \cdot \lambda^2 = 6x \cdot \lambda - 5x \Leftrightarrow \lambda^2 x - 6\lambda x + 5x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(\lambda^2 - 6\lambda + 5) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ή } \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0)$$

Αν όμως $x = 0$, τότε είναι $x = y = z = 0$, που είναι άτοπο, αφού από την υπόθεση είναι $x \neq y \neq z$. Επομένως έχουμε $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ οι ρίζες της οποίας είναι $\lambda = 1$ (απορρίπτεται αφού $\lambda \neq 1$) ή $\lambda = 5$, η οποία είναι δεκτή.

Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί ως συνάρτηση του x είναι $x,\ 5x,\ 25x$ με $x \neq 0$.

β) Η (α_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο $\alpha_1 = x$ και λόγο $\lambda = 5$. Έχουμε:

$$\alpha_{50} = \alpha_1 \cdot \lambda^{49} \Leftrightarrow \alpha_{50} = 5^{49} x, \text{ με } x \neq 0$$

Επομένως ο $50^{ος}$ όρος της προόδου είναι $\alpha_{50} = 5^{49} x$.

γ) Η (β_ν) είναι αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο $\beta_1 = x \neq 0$ και διαφορά:

$$\omega = y - x \Leftrightarrow \omega = 5x - x \Leftrightarrow \omega = 4x$$

Άρα:

$$\beta_{20} = \beta_1 + 19\omega \Leftrightarrow \beta_{20} = x + 19 \cdot 4x \Leftrightarrow \beta_{20} = 77x, \text{ με } x \neq 0$$

Επομένως ο $20^{ος}$ όρος της προόδου είναι $\beta_{20} = 77x$.

Γ14. α) $\alpha_1 = 65 - 3\omega$ σε ευρώ.

β) $x = 700 + 15\omega$ ευρώ.

γ) $\omega = 9$.

δ) 119 ευρώ.

ε) 835 ευρώ

Γ15. α) Από τα δεδομένα προκύπτει ότι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν), που εκφράζει το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς, είναι $\alpha_1 = 70$. Αν ν είναι ο αριθμός της τελευταίας σειράς, τότε το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς είναι $\alpha_\nu = 250$ και για την προτελευταία σειρά έχουμε $\alpha_{\nu-1} = 140 + \alpha_2$. Έστω ω η διαφορά της προόδου (α_ν), δηλαδή ο αριθμός των καθισμάτων που διαφέρουν δύο διαδοχικές σειρές. Έχουμε:

$$\alpha_\nu = 250 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 250 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 70 + (\nu - 1)\omega = 250 \Leftrightarrow (\nu - 1)\omega = 180 \ (1)$$

$$\alpha_{\nu-1} = 140 + \alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 2)\omega = 140 + \alpha_1 + \omega \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\nu - 3)\omega = 140 \ (2)$$

Διαιρώντας τις σχέσεις (1) και(2) κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{180}{140} = \frac{(\nu-1)\omega}{(\nu-3)\omega} \Leftrightarrow \frac{9}{7} = \frac{\nu-1}{\nu-3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9\nu - 27 = 7\nu - 7 \Leftrightarrow 2\nu = 20 \Leftrightarrow \nu = 10$$

Η σχέση (1) γίνεται $9\omega = 180 \Leftrightarrow \omega = 20$.

Επομένως κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

β) Έχουμε 10 σειρές καθισμάτων και άρα ζητάμε το άθροισμα των καθισμάτων και των 10 σειρών, δηλαδή το S_{10}. Έχουμε:

$$S_{10} = \frac{10}{2}\left[2\alpha_1 + 9\omega\right] \Leftrightarrow S_{20} = 5(2\cdot 70 + 9\cdot 20) = 1600$$

Επομένως το θέατρο έχει συνολικά 1600 καθίσματα.

γ) Αν $\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \ldots,\beta_\mu$ ο αριθμός των θεατών στην 1^{η}, 2^{η}, ...μ^{η} παράσταση του θεατρικού έργου, τότε έχουμε μία γεωμετρική πρόοδο

(β_μ) με πρώτο όρο $\beta_1 = 100$ και λόγο $\lambda = 2$. Το θέατρο θα γεμίσει σε εκείνη τη θεατρική παράσταση που θα ισχύει $\beta_\mu = 1600$. Έχουμε:

$$\beta_\mu = 1600 \Leftrightarrow \beta_1 \cdot \lambda^{\mu-1} = 1600 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 100 \cdot 2^{\mu-1} = 1600 \Leftrightarrow 2^{\mu-1} = 16 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2^{\mu-1} = 2^4 \Leftrightarrow \mu - 1 = 4 \Leftrightarrow \mu = 5$$

Επομένως το θέατρο θα γεμίσει στην 5^η παράσταση.

Γ16. α) 15.

β) 64.

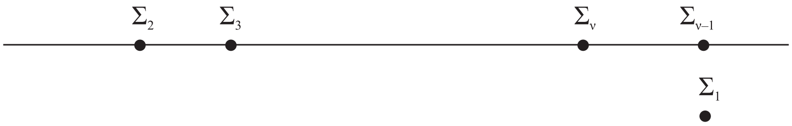
γ) 20.

δ) 1729.

ε) $\alpha_\nu = 1 + \nu(\nu - 1)$.

Γ17. α) Έστω Σ_1, Σ_2, Σ_3,..., Σ_ν ο πρώτος, ο δεύτερος, ο τρίτος,...ο ν-οστός σηματοδότης αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.

Ο εργάτης μεταφέρει τον Σ_1 στον Σ_ν κάνοντας την διαδρομή $\Sigma_1\Sigma_\nu$ μόνο μία φορά και το παραπάνω σχήμα διαμορφώνεται ως εξής:



β) Για να μεταφέρει το δεύτερο σηματοδότη Σ_2 στον τελευταίο Σ_ν πρέπει να κάνει τη διαδρομή $\Sigma_\nu\Sigma_2 + \Sigma_2\Sigma_\nu$ και επειδή οι διαρομές αυτές είναι ίσες μεταξύ τους συμπεραίνουμε ότι κάνει δύο φορές τη διαδρομή από τον δεύτερο έως τον τελευταίο σηματοδότη.

γ) Έστω α_1, α_2, α_3, ..., $\alpha_{\nu-1}$ οι αποστάσεις σε μέτρα του σηματοδότη Σ_1 από τους σηματοδότες Σ_2, Σ_3,..., $\Sigma_{\nu-1}$ αντίστοιχα. Οι αποστάσεις αυτές αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 10$ και διαφορά $\omega = 10$. Η απόσταση $\Sigma_1\Sigma_\nu$ εκφράζεται από τον όρο $\alpha_{\nu-1}$ με:

$$\alpha_{\nu-1} = \alpha_1 + (\nu - 2)\omega \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_{\nu-1} = 10 + 10(\nu-2) \Leftrightarrow \alpha_{\nu-1} = 10(\nu-1)$$

Η συνολική διαδρομή που κάλυψε ο εργάτης είναι

$$\Sigma_1\Sigma_\nu + 2\Sigma_2\Sigma_\nu + 2\Sigma_3\Sigma_\nu + \ldots 2\Sigma_{\nu-1}\Sigma_\nu$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\Sigma_1\Sigma_\nu + 2\Sigma_2\Sigma_\nu + 2\Sigma_3\Sigma_\nu + \ldots 2\Sigma_{\nu-1}\Sigma_\nu =$$
$$= 10(\nu-1) + 2\left[10(\nu-1) - 10\right] + 2\left[10(\nu-1) - 20\right] + \ldots + 2\cdot 10 =$$
$$= 10(\nu-1) + 2\left[10(\nu-2)\right] + 2\left[10(\nu-3)\right] + \ldots + 2\cdot 10 =$$
$$= 10(\nu-1) + 20\left[(\nu-2) + (\nu-3) + \ldots + 1\right] =$$
$$= 10(\nu-1) + 20\cdot\frac{\nu-2}{2}(\nu-2+1) = 10(\nu-1) + 10(\nu-2)(\nu-1) =$$
$$= 10(\nu-1)(1+\nu-2) = 10(\nu-1)^2$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι η συνολική διαδρομή που κάλυψε ο εργάτης είναι $1,44\ \text{Km} = 1440\ \text{m}$. Άρα έχουμε:

$$10(\nu-1)^2 = 1440 \Leftrightarrow (\nu-1)^2 = 144 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\nu - 1 = 12 \ \text{ή}\ \nu - 1 = -12) \Leftrightarrow (\nu = 13 \ \text{ή}\ \nu = -11)$$

Από τις τιμές του ν δεκτή είναι μόνο η $\nu = 13$. Επομένως οι σηματοδότες ήταν 13.

Γ18. α) i), ii) Διαδοχικές πράξεις και καταλήγουμε σε αληθή σχέση.

β) i) $\dfrac{1}{\alpha_1\alpha_2} + \dfrac{1}{\alpha_2\alpha_3} + \dfrac{1}{\alpha_3\alpha_4} + \ldots + \dfrac{1}{\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu} = \dfrac{\nu-1}{\alpha_1\alpha_\nu}$

ii) $\dfrac{1}{\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu} = \dfrac{1}{\omega}\cdot\dfrac{\omega}{\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu} = \dfrac{1}{\omega}\cdot\dfrac{\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}}{\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu} = \dfrac{1}{\omega}\cdot\left(\dfrac{1}{\alpha_{\nu-1}} - \dfrac{1}{\alpha_\nu}\right).$

Με διαδοχική εφαρμογή του παραπάνω τύπου έχουμε:

$$\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}=\frac{1}{\omega}\cdot\left(\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1}{\alpha_2}\right)$$

$$\frac{1}{\alpha_2\alpha_3}=\frac{1}{\omega}\cdot\left(\frac{1}{\alpha_2}-\frac{1}{\alpha_3}\right)$$

$$\frac{1}{\alpha_3\alpha_4}=\frac{1}{\omega}\cdot\left(\frac{1}{\alpha_3}-\frac{1}{\alpha_4}\right)$$

....

....

....

$$\frac{1}{\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu}=\frac{1}{\omega}\cdot\left(\frac{1}{\alpha_{\nu-1}}-\frac{1}{\alpha_\nu}\right)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των παραπάνω σχέσεων προκύπτει το ζητούμενο.

γ) $\frac{99}{100}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α) Οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν) αφού, σύμφωνα με τον ορισμό της αριθμητικής προόδου, κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού, που αποτελεί και την διαφορά της προόδου ω. Ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου είναι ο αριθμός των καθισμάτων της $1^{ης}$ σειράς, δηλαδή $\alpha_1 = 16$. Για την εύρεση της διαφοράς ω έχουμε:

$$\alpha_7 = 28 \Leftrightarrow \alpha_1 + 6\omega = 28 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 16 + 6\omega = 28 \Leftrightarrow 6\omega = 12 \Leftrightarrow \omega = 2$$

β) Ο τύπος του ν-στού όρου (γενικός όρος) μίας αριθμητικής προόδου (α_ν), με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$. Άρα έχουμε:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\cdot\omega \Leftrightarrow \alpha_\nu = 16 + 2(\nu - 1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = 16 + 2\nu - 2 \Leftrightarrow \alpha_\nu = 2\nu + 14$$

γ) Ο συνολικός αριθμός των καθισμάτων του θεάτρου είναι το άθροισμα των καθισμάτων και των 20 σειρών, δηλαδή:

$$S = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{20} = \frac{20}{2}[2\cdot 16 + 19\cdot 2] = 700$$

Επομένως το θέατρο έχει συνολικά 700 καθίσματα.

δ) Η $1^{η}$ σειρά έχει 16-6=10 κατειλειμένα καθίσματα.

Η $2^{η}$ σειρά έχει $\alpha_2 - 9 = (\alpha_1 + \omega) - 9 = 18 - 9 = 9$ κατειλειμένα καθίσματα.

Η $3^{η}$ σειρά έχει $\alpha_3 - 12 = (\alpha_2 + \omega) - 12 = 20 - 12 = 8$ κατειλειμένα καθίσματα κ.ο.κ.

Επομένως ο αριθμός των κατειλειμένων καθισμάτων κάθε σειράς αποτελεί μία αριθμητική πρόοδο (β_ν), όπου ν η σειρά καθισμάτων, με πρώτο όρο $\beta_1 = 10$ και διαφορά $\omega' = -1$.

i) Η σειρά μετά την οποία θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα είναι αυτή που ο αριθμός των κατειλείμένων καθισμάτων είναι μηδέν, δηλαδή :

$$\beta_\nu = 0 \Leftrightarrow \beta_1 + (\nu-1)\cdot\omega' = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10-(\nu-1) = 0 \Leftrightarrow 11-\nu = 0 \Leftrightarrow \nu = 11$$

Επομένως από την 11^{η} σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα.

ii) Το πλήθος των θεατών είναι το άθροισμα των κατειλειμένων καθισμάτων των 10 πρώτων σειρών, δηλαδή:

$$S' = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_{10} = \frac{10}{2}\left[2\cdot 10 + 9\cdot(-1)\right] = 55$$

Άρα οι θεατές είναι 55.

Δ2. **α)** Έχουμε:

$$\omega = \alpha_3 - \alpha_2 = (\kappa+1)^2 - \kappa^2 = \kappa^2 + 2\kappa + 1 - \kappa^2 = 2\kappa + 1$$

Επομένως η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 2\kappa+1$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$, που είναι περιττός αριθμός.

β) **i)** Έχουμε:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega \Leftrightarrow \kappa^2 = 2 + 2\kappa + 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \kappa^2 - 2\kappa - 3 = 0 \Leftrightarrow (\kappa = -1 \text{ ή } \kappa = 3)$$

Επειδή ο κ είναι ακέραιος με $\kappa > 1$ δεκτή τιμή είναι η $\kappa = 3$. Για $\kappa = 3$ η διαφορά ω είναι $\omega = 2\cdot 3 + 1 = 7$. Επομένως έχουμε $\kappa = 3$ και $\omega = 7$.

ii) Αν κάποιος όρος α_ν, $\nu \in \mathbb{N}^*$ της προόδου είναι ίσος με 1017 έχουμε:

$$\alpha_\nu = 1017 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 1017 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2 + 7(\nu-1) = 1017 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 7\nu - 5 = 1017 \Leftrightarrow 7\nu = 1022 \Leftrightarrow \nu = 146$$

Επομένως ο 1017 είναι ο $146^{ος}$ όρος της προόδου.

Δ3. **α)** Οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου (α_ν), αφού σύμφωνα με τον ορισμό της αριθμητικής προόδου κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού, που αποτελεί και τη διαφορά της προόδου $\omega = 3$. Ο πρώτος όρος της προόδου αυτής είναι ο $\alpha_1 = 1$. Ο $\nu^{ος}$ όρος της προόδου είναι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \Leftrightarrow \alpha_\nu = 1 + 3(\nu - 1) \Leftrightarrow \alpha_\nu = 3\nu - 2$$

Ο πρώτος όρος α_1 εκφράζει την απόσταση της πρώτης κυψέλης από την αποθήκη Α και η διαφορά ω την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κυψελών.

β) Ζητάμε τον $20^{ο}$ όρο της προόδου, δηλαδή τον α_{20}. Έχουμε:

$$\alpha_{20} = \alpha_1 + 19\omega \Leftrightarrow \alpha_{20} = 1 + 19 \cdot 3 \Leftrightarrow \alpha_{20} = 58$$

Επομένως η $20^{η}$ κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α 58 μέτρα.

γ) **i)** Πηγαίνοντας ο μελισσοκόμος στην $1^{η}$ κυψέλη διανύει 1 μέτρο και άλλο 1 μέτρο στην επιστροφή στην αποθήκη Α, δηλαδή συνολικά 2 μέτρα. Στην $2^{η}$ κυψέλη διανύει 4 μέτρα και άλλα 4 μέτρα στην επιστροφή στην αποθήκη Α, δηλαδή συνολικά 8 μέτρα. Τέλος, στην $3^{η}$ κυψέλη διανύει 7 μέτρα και άλλα 7 μέτρα στην επιστροφή στην αποθήκη Α, δηλαδή συνολικά 14 μέτρα.
Άρα η απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3η κυψέλη είναι 2+8+14=24 μέτρα.

ii) Επεκτείνοντας τον συλλογισμό του προηγούμενου ερωτήματος (βi) προκύπτει ότι οι αποστάσεις, σε μέτρα, που διανύει ο μελισσοκόμος πηγαίνοντας στην ν-κυψέλη ($\nu = 1, 2 ... 20$) και επιστρέφοντας στην αποθήκη Α είναι 2, 8, 14, 20, ...116. Οι αριθμοί αυτοί αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου (β_ν) με πρώτο όρο $\beta_1 = 2$ και διαφορά $\omega = 6$. Η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες είναι το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου (β_ν), δηλαδή:

$$S_{20}=\frac{20}{2}\left[2\beta_1+19\cdot\omega\right]=10\left(2\cdot 2+19\cdot 6\right)=1180$$

Επομένως η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες είναι 1180 μέτρα.

Δ4. Τα ποσά που καταθέτει η οικογένεια κάθε μήνα για το πρόγραμμα Α αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου (α_ν) με πρώτο όρο $\alpha_1=1$ και λόγο $\lambda=2$.

Τα ποσά που καταθέτει η οικογένεια κάθε μήνα για το πρόγραμμα Β αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου (β_ν) με πρώτο όρο $\beta_1=100$ και διαφορά $\omega=10$.

α) i) Το ποσό α_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το ν^o μήνα, σύμφωνα με το πρόγραμμα Α, είναι:

$$\alpha_\nu=\alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1}\Leftrightarrow\alpha_\nu=2^{\nu-1}$$

ii) Το ποσό β_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το ν^o μήνα, σύμφωνα με το πρόγραμμα Β, είναι:

$$\beta_\nu=\beta_1+(\nu-1)\omega\Leftrightarrow\beta_\nu=100+10(\nu-1)\Leftrightarrow\beta_\nu=90+10\nu$$

iii) Το ποσό A_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες, σύμφωνα με το πρόγραμμα Α, είναι το άθροισμα των ποσών που κατατίθενται κάθε μήνα μέχρι και το ν^o μήνα. Άρα έχουμε:

$$A_\nu=S_\nu=\alpha_1\frac{\lambda^\nu-1}{\lambda-1}=\frac{2^\nu-1}{2-1}=2^\nu-1$$

Επομένως το ποσό A_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες, σύμφωνα με το πρόγραμμα Α, είναι $A_\nu=2^\nu-1$ ευρώ.

iv) Το ποσό B_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες, σύμφωνα με το πρόγραμμα Β, είναι το άθροισμα των ποσών που κατατίθενται κάθε μήνα μέχρι και το ν^o μήνα. Άρα έχουμε:

$$B_\nu = S_\nu{}' = \frac{\nu}{2}\left[2\beta_1 + (\nu-1)\omega\right] = \frac{\nu}{2}\left[2\cdot 100 + 10(\nu-1)\right] =$$
$$= \frac{\nu}{2}(190+10\nu) = \nu(95+5\nu)$$

Επομένως το ποσό B_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες, σύμφωνα με το πρόγραμμα Β, είναι $B_\nu = \nu(95+5\nu)$ ευρώ.

β) i) Το ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με το πρόγραμμα Α, είναι $A_6 = 2^6 - 1 \Rightarrow A_6 = 63$ ευρώ.

Το ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με το πρόγραμμα Β, είναι $B_6 = 6(95+5\cdot 6) = 750$ ευρώ.

ii) Το ποσό που θα συγκεντρωθεί μετά από 12 μήνες, σύμφωνα με το πρόγραμμα Α, είναι $A_{12} = 2^{12} - 1 \Rightarrow A_{12} = 4095$ ευρώ, ενώ το ποσό που θα συγκεντρωθεί μετά από 12 μήνες, σύμφωνα με το πρόγραμμα Β, είναι $B_{12} = 12(95+5\cdot 12) \Rightarrow B_{12} = 1860$ ευρώ.

Επομένως το ποσό που θα συγκεντρωθεί από το πρόγραμμα Α είναι μεγαλύτερο από αυτό που θα συγκεντρωθεί με το πρόγραμμα Β.

Δ5. α) Οι αριθμοί 3, 7, 11, 15,... είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν), διότι σύμφωνα με τον ορισμό της αριθμητικής προόδου, κάθε αριθμός προκύπτει από τον προηγούμενό του με την πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού, που αποτελεί και την διαφορά της προόδου $\omega = 4$. Ο πρώτος όρος της προόδου είναι ο $\alpha_1 = 3$.

β) Το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών είναι:

$$S_{40} = \frac{40}{2}\left[2\alpha_1 + 39\cdot\omega\right] = 20(6+156) = 3240$$

γ) Ο αριθμός 120 είναι ένας από αυτούς αν και μόνο αν υπάρχει θετικός ακέραιος ν, ώστε να ισχύει:

$$\alpha_\nu = 120 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 120 \Leftrightarrow 3 + 4(\nu - 1) = 120 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\nu - 1 = 120 \Leftrightarrow \nu = \frac{121}{4}$$

Όμως ο αριθμός $\nu = \frac{121}{4}$ δεν είναι θετικός ακέραιος και επομένως ο αριθμός 120 δεν είναι ένας από τους όρους 3, 7, 11, 15,... της προόδου (α_ν).

δ) Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιο 40 αριθμούς στη σειρά από τους όρους της αριθμητικής προόδου 3, 7, 11, 15,... . Άρα ο τελευταίος αριθμός που έγραψε είναι ο:

$$\alpha_{40} = \alpha_1 + 39\omega \Leftrightarrow \alpha_{40} = 3 + 39 \cdot 4 \Leftrightarrow \alpha_{40} = 159$$

Ο Γιώργος συνεχίζει να γράφει τους αριθμούς της προόδου μετά τον 159, δηλαδή 163, 167, 171,..., 235. Πρέπει να βρούμε ποιος όρος α_ν, $\nu \in \mathbb{N}^*$ της προόδου είναι ίσος με 235. Έχουμε:

$$\alpha_\nu = 235 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 235 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3 + 4(\nu - 1) = 235 \Leftrightarrow 4\nu - 1 = 235 \Leftrightarrow \nu = 59$$

Δηλαδή ο τελευταίος αριθμός που έγραψε ο Γιώργος είναι ο

$$\alpha_{59} = 235$$

Το άθροισμα των όρων που έγραψε ο Γιώργος είναι:

$$\alpha_{41} + \alpha_{42} + \ldots \alpha_{59} = S_{59} - S_{40} =$$
$$= \frac{59}{2}(3 + 235) - \frac{40}{2}(3 + 159) = 3781$$

Δ6. Οι σειρές των καθισμάτων του σταδίου αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής πρόδου (α_ν), με πρώτο όρο $\alpha_1 = 12$ και διαφορά $\omega = 2$.

α) Ζητάμε τον $13^\text{ο}$ και τον $25^\text{ο}$ όρο αντίστοιχα της προόδου (α_ν).

Έχουμε:

$$\alpha_{13}=\alpha_1+12\omega \Leftrightarrow \alpha_{13}=12+12\cdot 2 \Leftrightarrow \alpha_{13}=36$$

Άρα η μεσαία σειρά έχει 36 καθίσματα.

Επίσης έχουμε:

$$\alpha_{25}=\alpha_1+24\omega \Leftrightarrow \alpha_{24}=12+24\cdot 2 \Leftrightarrow \alpha_{24}=60$$

Άρα η τελευταία σειρά έχει 60 καθίσματα.

β) Η χωρητικότητα του σταδίου είναι το άθροισμα όλων των καθισμάτων του σταδίου. Άρα είναι το άθροισμα των 25 πρώτων όρων της προόδου, οπότε έχουμε:

$$S_{25}=\frac{25}{2}\left[2\alpha_1+24\cdot\omega\right]=\frac{25}{2}\left[2\cdot 12+24\cdot 2\right]=900$$

Επομένως η χωρητικότητα του σταδίου είναι 900 καθίσματα.

γ) Το πλήθος Α των μαθητών που κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7^{η} μέχρι και την 14^{η} σειρά είναι:

$$A=\alpha_7+\alpha_8+\alpha_9+\ldots+\alpha_{14}=S_{14}-S_6=$$

$$=\frac{14}{2}\left[2\cdot 12+13\cdot 2\right]-\frac{6}{2}\left[2\cdot 12+5\cdot 2\right]=248$$

Επομένως το πλήθος των μαθητών του λυκείου είναι 248.

Δ7. α) Έχουμε:

$$\alpha_{20}-\alpha_{10}=\left(\alpha_1+19\omega\right)-\left(\alpha_1+9\omega\right)=\alpha_1+19\omega-\alpha_1-9\omega=10\omega$$

Άρα $\alpha_{20}-\alpha_{10}=10\omega$.

β) Έχουμε $\alpha_{20}-\alpha_{10}=30 \Leftrightarrow 10\omega=30 \Leftrightarrow \omega=3$

Επίσης έχουμε:

$$\alpha_\nu=\alpha_1+\left(\nu-1\right)\omega \Leftrightarrow \alpha_\nu=1+3\left(\nu-1\right) \Leftrightarrow \alpha_\nu=3\nu-2$$

γ) Πρέπει για κάποιο $\nu\in\mathbb{N}^*$ να έχουμε:

$$\alpha_\nu>30 \Leftrightarrow 3\nu-2>30 \Leftrightarrow \nu>\frac{32}{3}$$

Άρα $\nu = 11$. Επομένως ο $11^{ος}$ όρος της προόδου[14] είναι ο πρώτος όρος που ξεπερνάει το 30.

δ) Ζητάμε το μεγαλύτερο $\nu \in \mathbb{N}^*$ για τον οποίο ισχύει:

$$\alpha_\nu < 60 \Leftrightarrow 3\nu - 2 < 60 \Leftrightarrow 3\nu < 62 \Leftrightarrow \nu < \frac{62}{3}$$

Άρα $\nu = 20$. Επομένως 20 όροι της προόδου (α_ν) είναι μικρότεροι του 60.

Δ8. α) Για να αποτελούν οι αριθμοί 2, x, 8, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου πρέπει $x = \dfrac{8+2}{2} \Leftrightarrow x = 5$.

Η διαφορά της προόδου αυτής είναι $\omega = x - 2 = 8 - x = 3$.

β) Για να αποτελούν οι αριθμοί 2, x, 8, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου πρέπει:

$$x^2 = 8 \cdot 2 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow (x = 4 \ \text{ή} \ x = -4)$$

Όμως αφού $x > 0$ έχουμε $x = 4$, οπότε ο λόγος λ της προόδου είναι $\lambda = \dfrac{x}{2} = \dfrac{8}{x} = 2$.

γ) Η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με όρους 2, 5, 8, 11,... έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 2$ και διαφορά $\omega = 3$, ενώ η γεωμετρική πρόοδος (β_ν) με όρους 2, 4, 8, 16, ... έχει πρώτο όρο $\beta_1 = 2$ και λόγο $\lambda = 2$.

i) Το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν) είναι:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right] = \frac{\nu}{2}\left[4 + 3(\nu-1)\right] = \frac{\nu}{2}(3\nu+1)$$

ii) Έχουμε $\beta_7 = \beta_1 \cdot \lambda^6 \Leftrightarrow \beta_7 = 2 \cdot 2^6 \Leftrightarrow \beta_7 = 128$. Επομένως έχουμε:

$$2(S_\nu + 24) = \beta_7 \Leftrightarrow 2\left[\frac{\nu}{2}(3\nu+1) + 24\right] = 128 \Rightarrow$$
$$\nu(3\nu+1) + 48 = 128 \Leftrightarrow 3\nu^2 + \nu - 80 = 0$$

14. Πράγματι έχουμε $\alpha_{11} = 1 + 10 \cdot 3 \Leftrightarrow \alpha_{11} = 31$.

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τις $\nu = 5$ ή $\nu = -\dfrac{16}{3}$ (απορρίπτεται).

Επομένως $\nu = 5$.

Δ9. α) Για να είναι οι αριθμοί $x^2+5,\ x^2+x,\ 2x+4$, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου πρέπει:

$$x^2+x=\frac{\left(x^2+5\right)+\left(2x+4\right)}{2}\Leftrightarrow x^2+x=\frac{x^2+2x+9}{2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+2x=x^2+2x+9\Leftrightarrow x^2-9=0\Leftrightarrow\left(x=3\ \text{ ή }\ x=-3\right)$$

Άρα οι δυνατές τιμές του x, ώστε οι αριθμοί που δόθηκαν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου είναι $x=3$ ή $x=-3$.

β) Αν $\left(\alpha_\nu\right)$ είναι η παραπάνω αριθμητική πρόοδος, τότε έχουμε $\alpha_4 = x^2+5$. Για $x=3$ είναι $\alpha_4 = 14$. Τώρα έχουμε:

i) Η διαφορά ω της προόδου είναι $\omega=\left(x^2+x\right)-\left(x^2+5\right)=x-5$ και για $x=3$ είναι $\omega=-2$.

ii) Έχουμε:

$$\alpha_4=\alpha_1+3\omega\Leftrightarrow 14=\alpha_1+3\left(-2\right)\Leftrightarrow\alpha_1=20$$

Επομένως ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 20$.

iii) Έχουμε[15]:

$$S=\alpha_{15}+\alpha_{16}+\alpha_{17}+\ldots+\alpha_{24}=S_{24}-S_{14}=$$
$$=\frac{24}{2}\left[2\cdot 20+23\cdot\left(-2\right)\right]-\frac{14}{2}\left[2\cdot 20+13\cdot\left(-2\right)\right]=-170$$

Δ10. Ο τύπος του ν-στού όρου μίας αριθμητικής προόδου $\left(\alpha_\nu\right)$, με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι $\alpha_\nu=\alpha_1+\left(\nu-1\right)\omega$.

α) Έχουμε:

15. Σε οποιαδήποτε πρόοδο μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι ισχύει:
$$\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa+1}+\ldots+\alpha_\nu=S_\nu-S_{\kappa-1}\ (\nu>\kappa)$$

$$\alpha_3 = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 + 2\omega = 8 \ (1) \text{ και } \alpha_8 = 23 \Leftrightarrow \alpha_1 + 7\omega = 23 \ (2)$$

Οι σχέσεις (1) και (2) αποτελούν σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, τους α_1 και ω. Με αφαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε $5\omega = 15 \Leftrightarrow \omega = 3$ και $\alpha_1 = 8 - 2\omega \Leftrightarrow \alpha_1 = 2$.

Άρα ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 2$ και η διαφορά $\omega = 3$.

β) Έχουμε:

$$\alpha_{31} = \alpha_1 + 30\omega \Leftrightarrow \alpha_{31} = 2 + 30 \cdot 3 \Leftrightarrow \alpha_{31} = 92$$

Επομένως ο $31^{ος}$ όρος της προόδου είναι ο αριθμός 92.

γ) Έχουμε διαδοχικά:

$$S = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{31}) + (1 + 2 + 3 \ldots + 31) =$$

$$= S_{31} + \left[\frac{31}{2}(1+31)\right] = \frac{31}{2}[2 \cdot 2 + 30 \cdot 3] + 31 \cdot 16 = 1953$$

Δ11. Ο τύπος του ν-στού όρου μίας αριθμητικής προόδου (α_ν), με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$.

α) Έχουμε:

$$\alpha_3 = 10 \Leftrightarrow \alpha_1 + 2\omega = 10 \ (1) \text{ και } \alpha_{20} = 61 \Leftrightarrow \alpha_1 + 19\omega = 61 \ (2)$$

Οι σχέσεις (1) και (2) αποτελούν σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, τους α_1 και ω. Με αφαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε $17\omega = 51 \Leftrightarrow \omega = 3$ και $\alpha_1 = 10 - 2\omega \Leftrightarrow \alpha_1 = 4$.

Άρα ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 4$ και η διαφορά $\omega = 3$.

β) Ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου αν και μόνο αν υπάρχει θετικός ακέραιος ν τέτοιος, ώστε να ισχύει $\alpha_\nu = 333$. Έχουμε:

$$\alpha_\nu = 333 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 333 \Leftrightarrow 4 + 3(\nu - 1) = 333 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\nu + 1 = 333 \Leftrightarrow 3\nu = 332 \Leftrightarrow \nu = \frac{332}{3}$$

Όμως ο αριθμός $\dfrac{332}{4}$ δεν είναι θετικός ακέραιος. Επομένως είναι ο αριθμός 333 δεν είναι όρος της προόδου (α_ν).

γ) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν x, y είναι διαδοχικοί όροι της παραπάνω αριθμητικής προόδου, με τη σειρά αυτή, έχουμε ότι:

$$y = x + \omega \Leftrightarrow y = x + 3 \ (3)$$

Έχουμε:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{x+3}{3} \Leftrightarrow 3x = 2x + 6 \Leftrightarrow x = 6$$

και από την (3) είναι $y = 9$

Όμως ο αριθμός 6 (και κατά συνέπεια και ο αριθμός 9) δεν αποτελεί όρο της αριθμητικής προόδου (α_ν), αφού αν ήταν όρος της θα είχαμε:

$$\alpha_\nu = 6 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4 + 3(\nu - 1) = 6 \Leftrightarrow 3\nu + 1 = 6 \Leftrightarrow \nu = \frac{5}{3}$$

που είναι άτοπο, αφού ο αριθμός $\nu = \frac{5}{3}$ δεν είναι θετικός ακέραιος.

Επομένως δεν υπάρχουν διαδοχικοί αριθμοί x, y της αριθμητικής προόδου (α_ν) που να ικανοποιούν τη σχέση $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$.

- Αν y, x είναι διαδοχικοί όροι της παραπάνω αριθμητικής προόδου, με τη σειρά αυτή, έχουμε ότι:

$$x = y + \omega \Leftrightarrow x = y + 3 \ (4) \text{ και από την (4) είναι } x = -6$$

Έχουμε:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Leftrightarrow 3x = 2y \Leftrightarrow 3(y+3) = 2y \Leftrightarrow y = -9$$

και από την (4) είναι $x = -6$

Όμως ο αριθμός −9 (και κατά συνέπεια και ο αριθμός 9) δεν αποτελεί όρο της αριθμητικής προόδου (α_ν), αφού αν ήταν όρος της θα είχαμε:

$$\alpha_\nu = -9 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = -9 \Leftrightarrow 4 + 3(\nu-1) = -9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 + 3\nu = -9 \Leftrightarrow \nu = -\frac{10}{3}$$

που είναι άτοπο, αφού ο αριθμός $-\frac{10}{3}$ δεν είναι θετικός ακέραιος.

Επομένως δεν υπάρχουν διαδοχικοί αριθμοί y, x της αριθμητικής προόδου (α_ν) που να ικανοποιούν τη σχέση $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$.

Δ12. α) Το πλήθος των μαθητών της Α΄τάξης του λυκείου είναι $x(x-1)$ ή $(x+3)(x-3)-1$. Άρα έχουμε:

$$x(x-1) = (x+3)(x-3) - 1 \Leftrightarrow x^2 - x = x^2 - 9 - 1 \Leftrightarrow x = 10$$

β) Για $x = 10$ έχουμε $10 \cdot (10-1) = 90$. Επομένως η Α΄τάξη του λυκείου έχει 90 μαθητές.

γ) Το πλήθος των μαθητών στις ομάδες εργασίας αποτελεί διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 2$ και διαφορά $\omega = 2$. Αφού το σύνολο των μαθητών της τάξης είναι 90 τόσο θα είναι και το άθροισμα των ν όρων (ομάδων εργασίας) της αριθμητικής προόδου.

Άρα έχουμε:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right] \Leftrightarrow 90 = \frac{\nu}{2}\left[2 \cdot 2 + 2(\nu-1)\right] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 90 = \frac{\nu}{2}(2 + 2\nu) \Leftrightarrow 180 = 2\nu + 2\nu^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\nu^2 + 2\nu - 180 = 0 \Leftrightarrow \nu^2 + \nu - 90 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τις $\nu_1 = 9$ και $\nu_2 = -10$ (απορρίπτεται αφού ο ν πρέπει να είναι θετικός ακέραιος).

Επομένως θα δημιουργηθούν 9 ομάδες εργασίας.

Δ13. Ο τύπος του ν-στού όρου μίας γεωμετρικής προόδου (α_ν), με πρώτο όρο α_1 και λόγο $\lambda \neq 0$ είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$.

α) Έχουμε $\alpha_3 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \lambda^2 = 4$ (1) και $\alpha_5 = 16 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \lambda^4 = 16$ (2). Διαιρώντας τις σχέσεις (2) και (1) κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{\alpha_1 \cdot \lambda^4}{\alpha_1 \cdot \lambda^2} = \frac{16}{4} \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow (\lambda = 2 \ \text{ ή } \ \lambda = -2)$$

Αφού $\lambda > 0$ έχουμε $\lambda = 2$. Από τη σχέση (1) έχουμε

$$\alpha_1 \cdot \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow 4\alpha_1 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 = 1$$

Επομένως ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 1$ και ο λόγος $\lambda = 2$.

β) Για να είναι η ακολουθία (β_ν) γεωμετρική πρόδος πρέπει το πηλίκο δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων της να είναι σταθερό[16]. Έχουμε:

$$\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} = \frac{\frac{1}{\alpha_{\nu+1}}}{\frac{1}{\alpha_\nu}} = \frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = \frac{1}{\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}} = \frac{1}{\lambda},$$

$$\text{όπου } \lambda = \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \text{ ο λόγος της προόδου } (\alpha_\nu)$$

Επομένως η ακολουθία (β_ν) είναι γεωμετρική πρόδος με λόγο λ' τον αντίστροφο του λόγου λ της (α_ν).

γ) Έχουμε:

$$S_{10} = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} = \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 2^{10} - 1 \ (1)$$

και ακόμα:

16. Για να αποδείξουμε ότι μια ακολουθία (α_ν) αποτελεί γεωμετρική πρόοδο αρκεί να δείξουμε ότι το πηλίκο δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων της $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$ είναι σταθερό. Το πηλίκο αυτό αποτελεί τον λόγο της προόδου (α_ν)

$$S_{10} = \beta_1 \frac{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\nu} - 1}{\frac{1}{\lambda} - 1} = \frac{\frac{1}{2^{10}} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = -\frac{1}{2^9}\,2 =$$

$$= \frac{2^{10} - 1}{2^9} = \frac{1}{2^9}\left(2^{10} - 1\right) = \frac{1}{2^9} S_{10}$$

Επομένως αποδείξαμε ότι $S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}$.

Δ14. α) Αφού οι αριθμοί α, Ε, β, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου[17] έχουμε:

$$E^2 = \alpha \cdot \beta \Leftrightarrow E^2 = E \Leftrightarrow E^2 - E = 0 \Leftrightarrow \left(E = 0 \text{ ή } E = 1\right)$$

Επειδή $E \neq 0$(ως εμβαδό ορθογωνίου παραλληλογράμμου) θα είναι $E = 1$ τετραγωνικές μονάδες.

β) i) Έχουμε $S = \alpha + \beta = 10$ και $P = \alpha \cdot \beta = E = 1$. Επομένως η εξίσωση που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β είναι:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 1 = 0$$

ii) Τα μήκη των πλευρών α, β του ορθογωνίου είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 10x + 1 = 0$. Έχουμε $\Delta = 96$ και ρίζες τις $x_1 = \alpha = 5 + 2\sqrt{6}$ και $x_2 = \beta = 5 - 2\sqrt{6}$ (ή $\alpha = 5 - 2\sqrt{6}$ και $\beta = 5 + 2\sqrt{6}$).

Δ15. α) Οι αποστάσεις που διανύει το μυρμήγκι αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής πρόοδου (α_ν), αφού κάθε λεπτό διανύει απόσταση κατά 2 cm μεγαλύτερη από αυτήν που διήνυσε το προηγούμενο λεπτό, δηλαδή κάθε όρος της (α_ν) προκύπτει από τον προηγούμενό της με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού, που αποτελεί και την διαφορά $\omega = 2$ της προόδου. Ο πρώτος όρος της προόδου είναι ο $\alpha_1 = 1$.

17. Το εμβαδόν Ε ορθογωνίου παραλληλογράμμου με μήκη των πλευρών του α και β είναι $E = \alpha \cdot \beta$.

Ο ν-οστος όρος α_ν της προόδου είναι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_\nu = 1 + 2(\nu-1) \Leftrightarrow \alpha_\nu = 2\nu - 1$$

β) Η συνολική απόσταση που κάλυψε το μυρμήγκι τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του είναι το άθροισμα των 5 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου (α_ν) του ερωτήματος (α). Άρα έχουμε:

$$S_5 = \frac{5}{2}(2\alpha_1 + 4\omega) = \frac{5}{2}(2\cdot 1 + 4\cdot 2) = 25$$

Επομένως η συνολική απόσταση που κάλυψε το μυρμήγκι τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του είναι 25 μέτρα.

γ) Ζητάμε $\nu \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $S_\nu = 100$. Έχουμε:

$$S_\nu = 100 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right] = 100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\left[2 + 2(\nu-1)\right] = 100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \nu^2 = 100 \Leftrightarrow (\nu = 10 \text{ ή } \nu = -10)$$

Αφού $\nu \in \mathbb{N}^*$ δεκτή τιμή είναι $\nu = 10$.

Επομένως το μυρμήγκι θα φτάσει στο άλλο άκρο του κλαδιού σε 10 λεπτά.

δ) i) Οι αποστάσεις που διανύει η αράχνη κάθε λεπτό της κίνησής της, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου (β_ν) με πρώτο όρο $\beta_1 = 1$ και λόγο $\lambda = 2$, αφού κάθε λεπτό διανύει απόσταση διπλάσια από αυτήν που διήνυσε το αμέσως προηγούμενο λεπτό.

Έχουμε:

$$\beta_\nu = \beta_1 \cdot \lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow \beta_\nu = 1\cdot 2^{\nu-1} \Leftrightarrow \beta_\nu = 2^{\nu-1}$$

ii) Αν S_ν είναι η συνολική απόσταση που διάνυσε το μυρμήγκι στα ν λεπτά της κίνησής του τότε έχουμε:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right] \Leftrightarrow S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2 + 2(\nu-1)\right] \Leftrightarrow S_\nu = \nu^2 \text{(I)}$$

Αν Σ_ν είναι η συνολική απόσταση που διάνυσε η αράχνη στα ν λεπτά της κίνησής της τότε έχουμε:

$$\Sigma_\nu = \beta_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} \Leftrightarrow \Sigma_\nu = \frac{2^\nu - 1}{2 - 1} \Leftrightarrow \Sigma_\nu = 2^\nu - 1 \text{ (II)}$$

Το μυρμήγκι και η αράχνη θα βρεθούν αντιμέτωπα σε απόσταση 1 cm, όταν το άθροισμα των αποστάσεων που έχουν διανύσει και τα δύο είναι 99 cm. Άρα πρέπει:

$$S_\nu + \Sigma_\nu = 99 \Leftrightarrow \nu^2 + 2^\nu - 1 = 99 \Leftrightarrow \nu^2 + 2^\nu = 100$$

Η τελευταία εξίσωση επαληθεύεται μόνο για $\nu = 6$.
Επομένως το μυρμήγκι και η αράχνη θα βρεθούν αντιμέτωπα σε απόσταση 1 cm σε 6 λεπτά.

Δ16. α) Από τα δεδομένα του πίνακα

Έτος	2000	2001	2002	2003	2004
Αριθμός ελαφιών	1300	1360	1420	1480	1540

παρατηρούμε ότι ο αριθμός των ελαφιών αυξάνει κάθε έτος μετά το 2000 κατά 60. Άρα ο αριθμός των ελαφιών αποτελεί αριθμητική πρόοδο (α_ν), αφού κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με την πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού, που αποτελεί και τη διαφορά $\omega = 60$ της προόδου. Ο πρώτος όρος της προόδου είναι ο αριθμός των ελαφιών το έτος 2000, δηλαδή $\alpha_1 = 1300$. Άρα ο ν-οστός όρος[18] της προόδου είναι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \Leftrightarrow \alpha_\nu = 1300 + 60(\nu - 1) \Leftrightarrow \alpha_\nu = 60\nu + 1240$$

Επομένως μια σχέση που να επιτρέπει τον υπολογισμό του πληθυσμού των ελαφιών στο τέλος κάθε έτους, από το 2000 και μετά, είναι η $\alpha_\nu = 60\nu + 1240$, όπου ν το έτος μετά το 1999.

18. Ο ν-οστός όρος α_ν υπολογίζει τον αριθμό των ελαφιών το έτος $1999 + \nu$.

β) **i)** Για το έτος[19] 2012 έχουμε $\nu = 13$, οπότε:

$$\alpha_{13} = 60 \cdot 13 + 1240 \Leftrightarrow \alpha_{13} = 2020$$

Επομένως στο τέλος του 2012 ο αριθμός των ελαφιών θα είναι 2020.

ii) Ζητάμε το έτος στο τέλος του οποίου ο αρχικός πληθυσμός των 1300 ελαφιών θα είναι $1300 + 0,6 \cdot 1300 = 2080$. Άρα έχουμε:

$$\alpha_\nu = 2080 \Leftrightarrow 60\nu + 1240 = 2080 \Leftrightarrow 60\nu = 840 \Leftrightarrow \nu = 14$$

Επομένως η πρόβλεψη είναι ότι ο αρχικός πληθυσμός των 1300 ελαφιών θα αυξηθεί κατά 60% σε 14 χρόνια μετά το 1999, δηλαδή στο τέλος του 2013.

iii) Έχουμε:

$$\alpha_\nu \le 2600 \Leftrightarrow 60\nu + 1240 \le 2600 \Leftrightarrow 60\nu \le 1360 \Leftrightarrow \nu \le 22,66$$

και αφού ο ν είναι θετικός ακέραιος έχουμε $\nu = 22$.
Επομένως 22 χρόνια μετά το 1999, δηλαδή το έτος 2021, ο ο πληθυσμός των ελαφιών δεν θα υπερβεί τα 2600**.**

Δ17. α) Αφού οι όροι $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4$, $\alpha_3 = x^2 - 2$ της αριθμητικής προόδου είναι διαδοχικοί έχουμε:

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 4 = \frac{x + x^2 - 2}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 - 6x - 8 = x + x^2 - 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 7x - 6 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τις $x = 3$ ή $x = -\frac{2}{3}$. Επειδή πρέπει $x \in \mathbb{Z}$ δεκτή τιμή είναι η $x = 3$.

β) Για $x = 3$ οι τρεις πρώτοι όροι της αριθμητικής προόδου γίνονται $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 5$, $\alpha_3 = 7$ και άρα η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 2$. Επομένως ο ν-οστός όρος της προόδου είναι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \Leftrightarrow \alpha_\nu = 3 + 2(\nu - 1) \Leftrightarrow \alpha_\nu = 1 + 2\nu$$

19. $1999 + \nu = 2012 \Leftrightarrow \nu = 13$

Ο αριθμός 2014 είναι όρος της προόδου αν και μόνο αν υπάρχει θετικός ακέραιος ν, ώστε να ισχύει $\alpha_\nu = 2014$. Έχουμε:

$$\alpha_\nu = 2014 \Leftrightarrow 1+2\nu = 2014 \Leftrightarrow 2\nu = 2013 \Leftrightarrow \nu = \frac{2013}{2}$$

Όμως ο αριθμός $\nu = \frac{2013}{2}$ δεν είναι θετικός ακέραιος και επομένως δεν υπάρχει όρος της προόδου (α_ν) τέτοιος ώστε να ισούται με 2014.

γ) Η ακολουθία $\alpha_1,\ \alpha_3,\ \alpha_5,\ ...\alpha_{2\kappa+1},...$ $(\kappa \in \mathbb{N}^*)$ αποτελεί επίσης αριθμητική πρόοδο[20] με πρώτο όρο τον α_1 και διαφορά $\omega' = 2\omega = 4$, όπου ω η διαφορά της προόδου $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ ...$.
Ζητάμε το άθροισμα των 8 πρώτων[21] όρων της αριθμητικής προόδου $\alpha_1,\ \alpha_3,\ \alpha_5,\ ...$. Έχουμε:

$$S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + ... + \alpha_{15} = \frac{8}{2}(2\alpha_1 + 7\omega') =$$
$$= 4\cdot(2\cdot 3 + 7\cdot 4) = 136$$

Δ18. α) Ο 2ος επιβάτης θα πληρώσει 3 + 0,5 = 3,5 ευρώ, ο 3ος επιβάτης θα πληρώσει 3,5 + 0,5 = 4 ευρώ και ο 4ος επιβάτης θα πληρώσει 4 + 0,5 = 4,5 ευρώ.

β) Τα ποσά σε ευρώ που πληρώνουν οι επιβάτες στη σειρά αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου (α_ν), με $\nu = 1,\ 2,\ 3,\ ...,\ 51$, αφού κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού που αποτελεί και τη διαφορά $\omega = 0,5$ της προόδου. Ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 3$.

γ) Το ποσό που θα πληρώσει ο $51^{ος}$ επιβάτης του λεωφορείου είναι ο $51^{ος}$ όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν), δηλαδή:

---

20. Αν (α_ν) μία αριθμητική πρόοδος τότε αποδυκνείεται ότι οι ακολουθίες $(\alpha_{2\nu})$ και $(\alpha_{2\nu-1})$ αποτελούν επίσης αριθμητική πρόοδο με διαφορά το διπλάσιο της διαφοράς της (α_ν).

21. Αφού 8 είναι το πλήθος των περιττής τάξης όρων $\alpha_1,\ \alpha_3,\ \alpha_5,\ ...\alpha_{15}$.

$$\alpha_{51}=\alpha_1+50\omega \Leftrightarrow \alpha_{51}=3+50\cdot 0,5 \Leftrightarrow \alpha_{51}=28.$$

Επομένως ο $51^{ος}$ επιβάτης θα πληρώσει 28 ευρώ.

δ) Η είσπραξη σε ευρώ του γραφείου από την πώληση ν εισιτηρίων με την παραπάνω προσφορά είναι:

$$S_\nu=\frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1+\left(\nu-1\right)\omega\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_\nu=\frac{\nu}{2}\left[6+0,5\left(\nu-1\right)\right]\Leftrightarrow S_\nu=\frac{\nu}{2}\left(5,5+0,5\nu\right)$$

Για να ξεπερνά αυτή την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των 21 € ανά εισιτήριο, δηλαδή $21\cdot 30=630$ ευρώ, πρέπει:

$$S_\nu>630\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\left(5,5+0,5\nu\right)>630\Leftrightarrow \nu\left(5,5+0,5\nu\right)>1260\Leftrightarrow$$

$$5\nu^2+55\nu-1260>0\Leftrightarrow \nu^2+11\nu-2520>0 \text{ (I)}$$

Το τριώνυμο $\nu^2+11\nu-2520$ έχει διακρίνουσα $\Delta=10201$ και ρίζες τις $\nu_1=45$ και $\nu_2=-56$(απορρίπτεται αφού ο ν είναι θετικός ακέραιος).

Η ανίσωση (Ι) αληθεύει για κάθε $\nu\in\left(45,\ +\infty\right)$. Άρα ο ελάχιστος θετικός ακέραιος που αληθεύει η ανίσωση (Ι) είναι ο $\nu=46$.
Επομένως θα πρέπει να πουληθούν τουλάχιστον 46 εισιτήρια, ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των 21 € ανά εισιτήριο.

Δ19. Οι αριθμοί των βακτηρίων στο τέλος κάθε ώρας αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου $\left(\alpha_\nu\right)$ με πρώτο όρο $\alpha_1=102400$ και λόγο $\lambda=\dfrac{1}{2}$ (αφού ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται).

α) Ο ν-οστός όρος της προόδου α_ν είναι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow \alpha_\nu = 102400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} = \frac{102400}{2^{\nu-1}}$$

Μετά από 6 ώρες θα υπάρχουν $\alpha_6 = \dfrac{102400}{2^5} = 3200$ βακτήρια.

β) **i)** Η ακολουθία (β_ν), όπου ο όρος β_ν εκφράζει το πλήθος των βακτηρίων ν ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης $(\nu \le 5)$, αποτελεί γεωμετρική πρόοδο, αφού κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο του με πολλαπλασιαμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό, που αποτελεί και το λόγο $\lambda_1 = 3$ της προόδου. Στο τέλος της πρώτης ώρας από την επιδείνωση υπάρχουν $3200 \cdot 3 = 9600$ βακτήρια και άρα ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\beta_1 = 9600$.

ii) Έχουμε:

$$\beta_\nu = \beta_1 \cdot \lambda_1^{\ \nu-1} \Leftrightarrow \beta_\nu = 9600 \cdot 3^{\nu-1}$$

όπου ο όρος β_ν εκφράζει το πλήθος των βακτηρίων ν ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης $(\nu \le 5)$

iii) 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης στον οργανισμό θα υπάρχουν $\beta_3 = 9600 \cdot 3^2 = 86400$ βακτήρια.

Δ20. Οι καλύψεις με πετρέλαιο της θαλάσσιας επιφάνειας σε τετραγωνικά μίλια (τ.μ), στο τέλος κάθε ημέρας, από τη στιγμή του ατυχήματος αποτελούν γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με πρώτο όρο $\alpha_1 = 3$ και λόγο $\lambda = 2$.

α) Ο ν-οστός όρος της προόδου είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow \alpha_\nu = 3 \cdot 2^{\nu-1}$ και άρα στο τέλος της $5^{ης}$ ημέρας μετά το ατύχημα η κάλυψη της θαλάσσιας επιφάνειας από το πετρέλαιο θα είναι $\alpha_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$ τ.μ.

β) Αν ν ημέρες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο καλύπτει 768τ.μ έχουμε:

$$\alpha_\nu = 76 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{\nu-1} = 768 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2^{\nu-1} = 256 \Leftrightarrow 2^{\nu-1} = 2^8 \Leftrightarrow \nu - 1 = 8 \Leftrightarrow \nu = 9$$

Επομένως στο τέλος της $9^{ης}$ ημέρας από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο καλύπτει 768τ.μ.

γ) Από την επέμβαση του κρατικού μηχανισμού και μετά οι καλύψεις της θαλάσσιας επιφάνειας από το πετρέλαιο σε τετραγωνικά μίλια (τ.μ), στο τέλος κάθε ημέρας αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου (β_ν) με πρώτο όρο $\beta_1 = \alpha_9 = 768$ και διαφορά $\omega = -6$. Ο ν-οστός όρος της προόδου αυτής είναι:

$$\beta_\nu = \beta_1 + (\nu - 1)\omega \Leftrightarrow \beta_\nu = 768 - 6(\nu - 1) \Leftrightarrow \beta_\nu = 774 - 6\nu$$

Αν ν ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ., τότε έχουμε:

$$\beta_\nu = 12 \Leftrightarrow 774 - 6\nu = 12 \Leftrightarrow 6\nu = 762 \Leftrightarrow \nu = 127$$

Επομένως 127 ημέρες μετά από τη στιγμή που επενέβη ο κρατικός μηχανισμός, και άρα 127 + 9 = 136 ημέρες από τη στιγμή του ατυχήματος, η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

06.indd 305 4/12/2014 12:50:05

Απαντήσεις και λύσεις
Διαγωνισμάτων

Διαγώνισμα 1

ΘΕΜΑ Α

α) Λάθος. **β)** Σωστό. **γ)** Σωστό.

δ) Λάθος. **ε)** Σωστό.

Α2. Απόδειξη πρότασης 3.

ΘΕΜΑ Β

Δες στο θέμα Β13.

ΘΕΜΑ Γ

Δες στο θέμα Γ6.

ΘΕΜΑ Δ

Δες στο θέμα Δ13.

Διαγώνισμα 2

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α) Λάθος. **β)** Σωστό. **γ)** Λάθος.

δ) Το Β. **ε)** Το Δ.

Α2. Απόδειξη πρότασης 2.

ΘΕΜΑ Β

Δες στο θέμα Β18.

ΘΕΜΑ Γ

Δες στο θέμα Γ5.

ΘΕΜΑ Δ

Δες στο θέμα Δ4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο
Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων

- ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
- ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ
- ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις
στις ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου

I) (Οι ερωτήσεις με αριθμό 3 έως 12 είναι εκτός της εξεταστέας ύλης. Οι απαντήσεις δίνονται για λόγους πληρότητας χωρίς σχολιασμό)

Αριθμός ερώτησης	**Απάντηση**	**Σχόλιο**
1	Ψ	Για $x=1$ αντιστοιχούν δύο τιμές του y, οι $y=2$ και $y=3$.
2	Α	Αφού η εξίσωση $\alpha^2 x-2=-x+1 \Leftrightarrow \alpha^2 x+x=3 \Leftrightarrow \left(\alpha^2+1\right)x=3$ έχει λύση για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
3	Α	
4	Α	
5	Ψ	
6	Ψ	
7	Α	
8	Α	
9	Ψ	
10	Α	
11	Α	
12	Ψ	

II) Είναι εκτός της εξεταστέας ύλης για το σχολικό έτος 2014-2015
Το Γ

Απαντήσεις
στις ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου

Α.1.1. Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Λ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ

Α.1.2. Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

1	2	3	4	5	6	7	8
Β	Β	Α	Γ	Δ	Β	Α	Δ

Α.1.3. Ερωτήσεις Αντιστοίχισης

1.

1	2	3
β	γ	α

2.

1	2	3
δ	α	β

Λύσεις ασκήσεων
της Τράπεζας Θεμάτων

ΘΕΜΑ Β

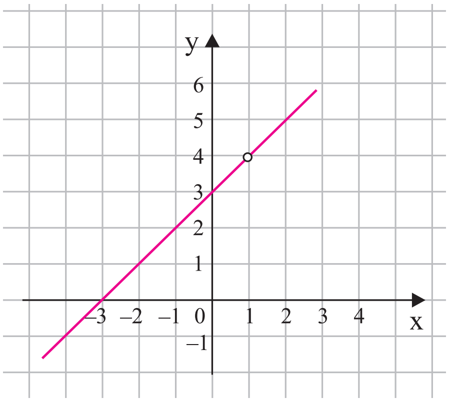
Β1. **α)** Η διακρίνουσα του τριωνύμου x^2+2x+1 είναι $\Delta=16$ και οι ρίζες του $x_1=-3$ και $x_2=1$. Άρα το τριώνυμο γράφεται:

$$x^2+2x+1=(x+3)(x-1)$$

β) Πρέπει $x\neq 1$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x-1}$ είναι $A=\mathbb{R}-\{1\}$. Για κάθε $x\in A$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x-1}=\frac{(x+3)(x-1)}{x-1}=x+3$$

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x+3$ είναι ευθεία από την οποία εξαιρείται το σημείο με τετμημένη 1, αφού δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού A της συνάρτησης. Επομένως από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f εξαιρείται το σημείο A(1, 4). Η γραφική παράσταση της συνάρτησης φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



B2. **α)** Για τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}8-x, \text{αν } x<0\\ 2x+5, \text{αν } x\geq 0\end{cases}$ έχουμε:

$$f(-5)=8-(-5)=8+5=13 \text{ και } f(4)=2\cdot 4+5=8+5=13$$

Επομένως $f(-5)=13$ και $f(4)=13$.

β)
- Αν $x<0$, τότε έχουμε $f(x)=9 \Leftrightarrow 8-x=9 \Leftrightarrow x=-1$, η οποία είναι δεκτή τιμή.
- Αν $x\geq 0$, τότε έχουμε $f(x)=9 \Leftrightarrow 2x+5=9 \Leftrightarrow x=2$, η οποία είναι δεκτή τιμή.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=9$ έχει λύσεις τις $x_1=-1$ και $x_2=2$.

B3. **α)** Πρέπει $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 1 \Leftrightarrow (x\neq 1 \text{ και } x\neq -1)$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$ είναι το $A=\mathbb{R}-\{-1,\ 1\}$.

β) Το τριώνυμο $2x^2-5x+3$ έχει διακρίνουσα $\Delta=1$ και ρίζες τις $x_1=1$ και $x_2=\dfrac{3}{2}$. Άρα το τριώνυμο γράφεται:

$$2x^2-5x+3=2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)=(x-1)(2x-3)$$

γ) Για κάθε $x\in A$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{2x^2-5x+3}{x^2-1}=\frac{(x-1)(2x-3)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2x-3}{x+1}$$

B4. **α)** Για τη συνάρτηση $f(x)=x^2+2x-15,\ x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(-1)=-16,\ f(0)=-15,\ f(1)=-12$$

Άρα:

$$f(-1)+f(0)+f(1)=-16-15-12=-43$$

β)
- Τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι αυτά για τα οποία ισχύει:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+2x-15=0 \Leftrightarrow (x=-5 \text{ ή } x=3)$$

Επομένως είναι τα σημεία A(−5, 0) και B(3, 0).

- Το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y είναι το σημείο $\Gamma(0, f(0))$, δηλαδή το σημείο $\Gamma(0,\ -15)$.

B5. **α)** Έχουμε:

$$f(0)=5 \Leftrightarrow \beta=5 \text{ και } f(1)=3 \Leftrightarrow \alpha+\beta=3 \Leftrightarrow \alpha=-2$$

Επομένως $\alpha=-2$ και $\beta=5$. Για τις τιμές αυτές η συνάρτηση f γίνεται $f(x)=-2x+5$.

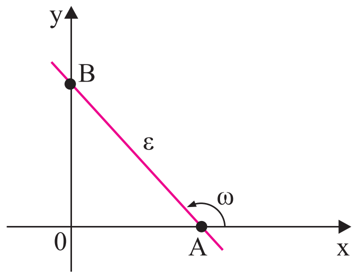
β)
- Τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x είναι αυτά για τα οποία ισχύει:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow -2x+5=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$$

Επομένως είναι το σημείο $A\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$.

- Το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα y΄y είναι $B(0, f(0))$, δηλαδή το σημείο $B(0,\ 5)$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=-2x+5,\ x\in\mathbb{R}$ φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



B6. **α)** Πρέπει $x-4\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 4$ και άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^3-16x}{x-4}$ είναι το $A=\mathbb{R}-\{4\}$. Για κάθε $x\in A$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{x^3-16x}{x-4}=\frac{x\left(x^2-16\right)}{x-4}=$$
$$=\frac{x\left(x-4\right)\left(x+4\right)}{x-4}=x\left(x+4\right)=x^2+4x$$

β) Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x)=32\Leftrightarrow x^2+4x=32\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+4x-32=0\Leftrightarrow\left(x_1=-8 \text{ και } x_2=4\right)$$

Η τιμή $x_2=4$ απορρίπτεται αφού δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.

Επομένως τιμή του x για την οποία ισχύει $f(x)=32$ είναι η $x=-8$

B7. α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases}2x-5, & x\le 3\\ x^2, & 3<x<10\end{cases}$ σε μορφή διαστήματος[22] είναι $\left(-\infty,\ 3\right]\cup\left(3,\ 10\right)=\left(-\infty,\ 10\right)$.

β) Έχουμε:

- Αφού $-1<3$ είναι $f(-1)=2\cdot\left(-1\right)-5=-7$
- Αφού $3\in\left(-\infty,\ 3\right]$ είναι $f(3)=2\cdot 3-5=1$
- Αφού $3<5<10$ είναι $f(5)=5^2=25$

γ) Αν $x\le 3$, τότε έχουμε:

$f(x)=25\Leftrightarrow 2x-5=25\Leftrightarrow 2x=30\Leftrightarrow x=15$, που απορρίπτεται

Αν $3<x<10$, τότε έχουμε:

$$f(x)=25\Leftrightarrow x^2=25\Leftrightarrow\left(x=5 \text{ ή } x=-5\right)$$

Η τιμή $x=-5$ απορρίπτεται.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=25$ έχει λύση την $x=5$.

B8. α) Για τη συνάρτηση $f(x)=x+\frac{1}{x},\ x\ne 0$ έχουμε:

22. Η σωστή διατύπωση στην εκφώνηση της άσκησης είναι «σε μορφή ένωσης διαστημάτων».

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$
$$f(1)=1+1=2$$
$$f(2)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

Επομένως έχουμε:

$$A=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)-f(2)=\frac{5}{2}+2-\frac{5}{2}=2$$

β) Για $x\neq 0$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{5}{2}\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2x^2+2=5x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0\Leftrightarrow\left(x_1=\frac{1}{2}\ \text{ή}\ x_2=2\right)$$

B9. α) Έχουμε:

$$A=x^3-x^2+3x-3=$$
$$=x^2(x-1)+3(x-1)=(x-1)(x^2+3)$$

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=\dfrac{3}{x}$ και $g(x)=x^2-x+3$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ όταν $x\neq 0$. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow\frac{3}{x}=x^2-x+3\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^3-x^2+3x-3=0\Leftrightarrow(x-1)(x^2+3)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(x-1=0\ \text{και}\ x^2+3=0\right)\Leftrightarrow x=1$$

Επομένως το μόνο κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των συνατήσεων f και g είναι το $A(1,\ f(1))$ ή το $A(1,\ g(1))$, δηλαδή το $A(1,\ 3)$.

Β10. α) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=x^3$ και $g(x)=x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^3=x\Leftrightarrow x^3-x=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\left(x^2-1\right)=0\Leftrightarrow\left(x=0 \text{ ή } x^2-1=0\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(x=0 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-1\right)$$

Επομένως τα κοινά σημεία των συναρτήσεων f και g είναι $O\left(0,f(0)\right)$, $A\left(1,f(1)\right)$ και $B\left(-1,f(-1)\right)$, δηλαδή τα σημεία $O\left(0,\ 0\right)$, $A\left(1,\ 1\right)$ και $B\left(-1,\ -1\right)$.

β) Τα σημεία A και B είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων O(0, 0) αφού έχουν αντίθετες τετμημένες και τεταγμένες.

Β11. α) Πρέπει:

$$2|x|-6\neq 0\Leftrightarrow 2|x|\neq 6\Leftrightarrow |x|\neq 3\Leftrightarrow\left(x\neq 3 \text{ και } x\neq -3\right)$$

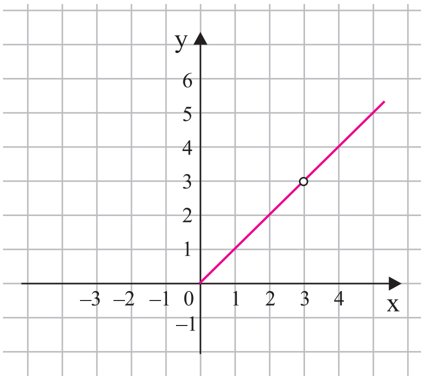
Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{2x^2-6|x|}{2|x|-6}$ είναι το $A=\mathbb{R}-\{-3,\ 3\}$.

β) Για κάθε $x\in A$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{2x^2-6|x|}{2|x|-6}=\frac{2|x|^2-6|x|}{2|x|-6}=\frac{2|x|\left(|x|-3\right)}{2\left(|x|-3\right)}=|x|$$

Επομένως για κάθε $x\in A$ είναι $f(x)=|x|$.

γ) Για $x>0$ η συνάρτηση γίνεται $f(x)=|x|\Leftrightarrow f(x)=x$. Επομένως σχεδιάζουμε την ευθεία $y=x$, με $x>0$ (τη διχοτόμο του $1^{ου}$ τεταρτημορίου των αξόνων), από την οποία εξαιρείται το σημείο $A\left(3,3\right)$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



B12. α) Η θερμοκρασία T είναι συνάρτηση του x με $T = T(x) = 15 + 25 \cdot x$ όταν $0 < x < 200$.

Όταν $x = 30$ έχουμε $T_1 = T(30) = 15 + 25 \cdot 30 = 765$.

Επομένως η θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης είναι 765 °C.

β) Ζητάμε το $x \in (0,\ 200)$ ώστε να είναι $T(x) = 290$. Έχουμε:

$$T(x) = 290 \Leftrightarrow 15 + 25 \cdot x = 290 \Leftrightarrow 25x = 275 \Leftrightarrow x = 11$$

Επομένως σε βάθος 11 Km κάτω από την επιφάνεια της Γης η θερμοκρασία είναι ίση με 290℃

γ) Πρέπει να έχουμε:

$$T(x) > 440 \Leftrightarrow 15 + 25 \cdot x > 440 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 25 \cdot x > 425 \Leftrightarrow x > \frac{425}{25} \Leftrightarrow x > 17$$

Επομένως ένα σημείο μπορεί να βρίσκεται σε βάθος μεγαλύτερο από 17 Km ώστε η θερμοκρασία να είναι μεγαλύτερη από 440 °C.

B13. α) Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 1$ και ρίζες τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 3$. Επομένως γράφεται $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$.

β) i) Για τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2 - 5x + 6}$ πρέπει:

$$x^2-5x+6\neq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3)\neq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-2\neq 0 \text{ και } x-3\neq 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x\neq 2 \text{ και } x\neq 3)$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το:

$$A=\mathbb{R}-\{2,\ 3\}$$

ii) Για κάθε $x\in A$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{x-2}{x^2-5x+6}=\frac{x-2}{(x-2)(x-3)}=\frac{1}{x-3}$$

Επομένως για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$.

B14. α) Αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,\ 6)$ και $B(-1,\ 4)$ έχουμε αντίστοιχα:

$$f(1)=6 \Leftrightarrow \alpha+\beta=6 \ (1) \text{ και } f(-1)=4 \Leftrightarrow -\alpha+\beta=4 \ (2)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε
$2\beta=10 \Leftrightarrow \beta=5$, οπότε από τη σχέση (1)έχουμε:

$$\alpha=6-\beta \Leftrightarrow \alpha=6-5 \Leftrightarrow \alpha=1$$

Επομένως $\alpha=1$ και $\beta=5$.

β) Για $\alpha=1$ και $\beta=5$ η συνάρτηση f γίνεται $f(x)=x+5,\ x\in\mathbb{R}$.

- Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα xx΄ είναι αυτά για τα οποία ισχύει

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$$

Επομένως το σημείο τομής της C_f με τον άξονα x΄x είναι το σημείο $K(-5,\ 0)$.

- Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα y΄y είναι το σημείο $M(0, f(0))$, δηλαδή το σημείο $M(0,\ 5)$.

Β15. α) Έχουμε:

- Επειδή $-1<0$ είναι $f(-1)=2\cdot(-1)+4=-2+4=2$.
- Επειδή $3>0$ είναι $f(3)=3-1=2$.

  Άρα $f(-1)=f(3)=2$.

β) Έχουμε:

- Αν $x<0$, έχουμε $f(x)=0 \Leftrightarrow 2x+4=0 \Leftrightarrow 2x=-4 \Leftrightarrow x=-2$, η οποία είναι δεκτή.
- Αν $x\geq 0$, έχουμε $f(x)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$, η οποία είναι δεκτή.

  Επομένως οι τιμές του x ώστε να ισχύει $f(x)=0$ είναι $x=-2$ και $x=1$.

Β16. α) Για τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$ πρέπει:

$$x^2-x-6\neq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-3)\neq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+2\neq 0 \text{ και } x-3\neq 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x\neq -2 \text{ και } x\neq 3)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A=\mathbb{R}-\{-2,\ 3\}$

β) Έχουμε:

$$f(2)=\frac{2+2}{2^2-2-6}=\frac{4}{-4}=-1 \text{ και } f(4)=\frac{4+2}{4^2-4-6}=\frac{6}{6}=1$$

Επομένως $f(2)+f(4)=-1+1=0$

Β17. α) Πρέπει $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 1 \Leftrightarrow (x\neq 1 \text{ και } x\neq -1)$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=\mathbb{R}-\{-1,\ 1\}$.

β) Για να ανήκει το σημείο $M\left(\alpha,\dfrac{1}{8}\right)$ στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f πρέπει:

$$f(\alpha)=\frac{1}{8}\Leftrightarrow\frac{1}{\alpha^2-1}=\frac{1}{8}\Leftrightarrow\alpha^2-1=8\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\alpha^2=9\Leftrightarrow(\alpha=3\ \text{ή}\ \alpha=-3)$$

Επομένως οι δυνατές τιμές του α ώστε το σημείο Μ να ανήκει στη C_f είναι $\alpha=3$ και $\alpha=-3$.

Β18. α) Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη Α, μετά από x λεπτά, είναι συνάρτηση του x δηλαδή $y=y(x)=35+0,8\cdot x$. Μετά από 25 λεπτά έχουμε:

$$y(25)=35+0,8\cdot 25=55.$$

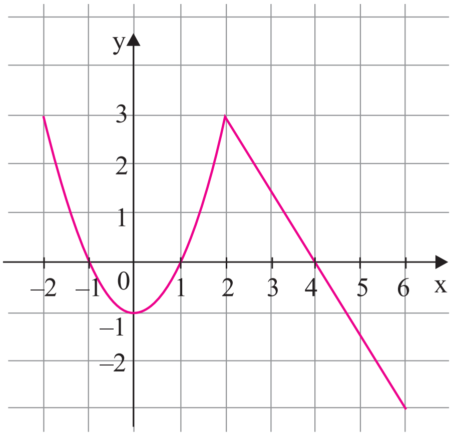
Επομένως η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά είναι 55 Km.

β) Όταν το αυτοκίνητο θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α έχουμε:

$$y=75\Leftrightarrow 35+0,8\cdot x=75\Leftrightarrow 0,8\cdot x=40\Leftrightarrow x=50$$

Επομένως το αυτοκίνητο θα έχει κινηθεί 50 λεπτά, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α.

Β19. α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, όπως προκύπτει από το παρακάτω σχήμα, είναι το διάστημα $\Delta=[-2,\ 6]$



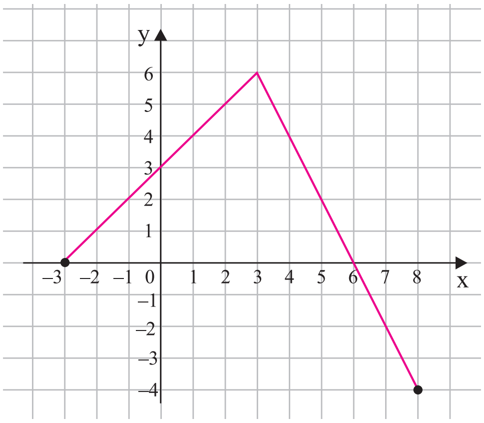
β) Ο επόμενος πίνακας είναι συμπληρωμένος[23], σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα

x	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**	**6**
y	**3**	**0**	**–1**	**0**	**3**	**–3**

γ)
- Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x είναι $A(-1,\ 0)$ και $B(1,\ 0)$.
- Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα άξονα y΄y είναι $\Gamma(0,\ -1)$

δ) Τα διαστήματα του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση f παίρνει αρνητικές τιμές είναι το $(-1,\ 1)$ και το $(4,\ 6]$.

Β20. α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, όπως προκύπτει από το παρακάτω σχήμα, είναι το διάστημα $\Delta = [-3,\ 8]$.



β) Ο επόμενος πίνακας είναι συμπληρωμένος[24], σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα

x	**–3**	**–1**	**0**	**3**	**7**	**8**
y	**0**	**2**	**3**	**6**	**–2**	**–4**

23. Συμπληρώθηκαν τα έγχρωμα στοιχεία.
24. Συμπληρώθηκαν τα έγχρωμα στοιχεία.

γ) • Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι $A(-3,\ 0)$ και $B(6,\ 0)$.

• Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα άξονα $y'y$ είναι $\Gamma(0,\ 3)$.

δ) Το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση f παίρνει θετικές τιμές είναι το $(-3,\ 6)$.

B21. α) Αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο $A(1,-4)$ έχουμε:

$$g(1)=-4 \Leftrightarrow \frac{\mu-2}{2}=-4 \Leftrightarrow \mu-2=-8 \Leftrightarrow \mu=-6$$

Επομένως $\mu=-6$ για να διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης g από το σημείο A.

β) Πρέπει $x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$. Άρα η συνάρτηση:

$$g(x)=\frac{2x^2-4x+\mu}{x+1},\mu\ \in\mathbb{R}$$

έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $K=\mathbb{R}-\{-1\}$.

γ) Για $\mu=-6$ η συνάρτηση γίνεται $g(x)=\dfrac{2x^2-4x-6}{x+1}$. Για κάθε $x\in K$ έχουμε διαδοχικά[25]:

$$g(x)=\frac{2x^2-4x-6}{x+1}=\frac{2\left(x^2-2x-3\right)}{x+1}=$$
$$=\frac{2(x+1)(x-3)}{x+1}=2(x-3)$$

25. Το τριώνυμο x^2-2x-3 έχει διακρίνουσα $\Delta=16$ και ρίζες τις $x_1=-1$ και $x_2=3$. Επομένως γράφεται $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$.

ΘΕΜΑ Γ

(Δίνονται οι αναλυτικές λύσεις των θεμάτων με ζυγή αρίθμηση και οι απαντήσεις-υποδείξεις των θεμάτων με μονή αρίθμηση).

Γ1. **α)** $f(-1)=f(1)=f(0)=0.$

β) $O(0,\ 0)$, $A(1,\ 0)$ και $B(-1,\ 0)$.

γ) $x\in(-1,\ 0)\cup(1,\ \infty)$.

Γ2. **α)** Το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g είναι το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow 2x^2-3x+1=x^2-x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$$

Άρα το κοινό σημείο των C_f και C_g είναι το $A(1,\ f(1))$, δηλαδή το $A(1,\ 0)$.

γ) Οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g είναι οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)>g(x)$. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x)>g(x)\Leftrightarrow 2x^2-3x+1>x^2-x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1>0\Leftrightarrow(x-1)^2>0$$

η οποία αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{1\}$.

Επομένως οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g είναι όλα τα $x\neq 1$.

Γ3. **α)** Το $\mathbb{R}$.

β) $K=1+3\sqrt{2}$

γ) $x_1=-1$ και $x_2=4$.

Γ4. **α)** Για να ανήκει το σημείο $M(\sqrt{2},\ 0)$ στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f πρέπει:

$$f\left(\sqrt{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{2}\kappa+\kappa^2=0 \Leftrightarrow \kappa^2-\sqrt{2}\kappa+2=0 \ (1)$$

Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=-6<0$, οπότε είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Επομένως δεν υπάρχει $\kappa\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε το σημείο $M(\sqrt{2},\ 0)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

β) Για να ανήκει το σημείο $N(\sqrt{2},\ 2)$ στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f πρέπει:

$$\begin{aligned}&f\left(\sqrt{2}\right)=2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{2}\kappa+\kappa^2=2 \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow \kappa^2-\sqrt{2}\kappa+2=2 \Leftrightarrow \kappa^2-\sqrt{2}\kappa=0 \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow \kappa\left(\kappa-\sqrt{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left(\kappa=0 \ \text{ή} \ \kappa=\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

Επομένως για $\kappa=0$ ή $\kappa=\sqrt{2}$ το σημείο $N(\sqrt{2},\ 2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

γ) Η συνάρτηση f τέμνει:

- τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(x,\ 0)$ με $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-\kappa x+\kappa^2=0$ (2). Η εξίσωση (2) έχει $\Delta=-3\kappa^2<0$ και άρα είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$. Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.
- τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,\ f(0))$, δηλαδή στο $(0,\kappa^2)$ με $\kappa\in\mathbb{R}$.

Γ5. **α)** Το $\mathbb{R}$

β) $x_1=1$

Γ6. **α)** Η ζητούμενη ευθεία έχει τη μορφή $y=\frac{1}{2}x+\kappa,\ \kappa\in\mathbb{R}$. Αφού τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Κ(0, 3) έχουμε $3 = \frac{1}{2}\cdot 0 + \kappa \Leftrightarrow \kappa = 3$.

Επομένως η ζητούμενη ευθεία είναι η $y = \frac{1}{2}x + 3$.

β) Η ζητούμενη ευθεία έχει τη μορφή $y = \lambda x + \mu$ με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Αφού σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\omega = 135^o$ θα είναι $\lambda = \varepsilon\varphi 135 = -1$, οπότε έχουμε την $y = -x + \mu,\ \mu \in \mathbb{R}$. Αφού, επιπλέον, τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $\Lambda(0,\ -3)$ έχουμε $\mu = -3$ και επομένως η ζητούμενη ευθεία είναι η $y = -x - 3$.

γ) Η ζητούμενη ευθεία έχει τη μορφή $y = \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αφού είναι παράλληλη με την ευθεία $y = -2x + 7$ θα είναι $\alpha = -2$, οπότε έχουμε την $y = -2x + \beta,\ \beta \in \mathbb{R}$. Αφού, επιπλέον, διέρχεται από το σημείο $A(1,\ -2)$ έχουμε $-2 = -2\cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 0$. Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η $y = -2x$, που διέρχεται και από την αρχή των αξόνων.

Γ7. β) $|x| \geq 1 \Leftrightarrow (x \geq 1 \text{ ή } x \leq -1)$ και $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

Γ8. α) Αφού οι ευθείες $(\varepsilon_1):\ y = \left(P(A) + \frac{1}{2}\right)x + 1$ και

$(\varepsilon_2): y = P(A \cup B)x - 2$ είναι παράλληλες έχουμε

$$P(A) + \frac{1}{2} = P(A \cup B)\ (1)$$

Επειδή τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα η σχέση (1) γίνεται:

$$P(A) + \frac{1}{2} = P(A \cup B) \Leftrightarrow P(A) + \frac{1}{2} = P(A) + P(B) \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2}\ (2)$$

Ακόμα, επειδή η (ε_2) διέρχεται από το σημείο $K(2,\ 0)$ έχουμε:

$$0 = 2P(A \cup B) - 2 \Leftrightarrow 2P(A \cup B) = 2 \Leftrightarrow P(A \cup B) = 1$$

Τέλος, έχουμε:

$$P(A\cup B)=1 \Leftrightarrow P(A)+P(B)=1 \Leftrightarrow P(A)=1-P(B) \Leftrightarrow P(A)=\frac{1}{2}$$

Επομένως οι ζητούμενες πιθανότητες είναι:

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2} \text{ και } P(A\cup B)=1$$

β) Για να τέμνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) πρέπει:

$$P(A)+\frac{1}{2}\neq P(A\cup B)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A)+\frac{1}{2}\neq P(A)+P(B)\Leftrightarrow P(B)\neq\frac{1}{2}$$

Επομένως αν $P(B)\neq\frac{1}{2}$ οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται. Οι συντεταγμένες του σημείου τομής τους είναι η λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y=\left(P(A)+\frac{1}{2}\right)x+1 \\ y=P(A\cup B)x-2 \end{cases}$$

Για $P(B)\neq\frac{1}{2}$ έχουμε:

$$\left(P(A)+\frac{1}{2}\right)x+1=P(A\cup B)x-2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(P(A)+\frac{1}{2}-P(A\cup B)\right)x=-3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(P(B)-\frac{1}{2}\right)x=3\Leftrightarrow x=\frac{3}{P(B)-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x=\frac{6}{2P(B)-1}$$

και άρα $y=P(A\cup B)\cdot\dfrac{6}{2P(B)-1}-2=\dfrac{6P(A\cup B)}{2P(B)-1}-2.$

Επομένως το σημείο τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι $M\left(x_0,\ y_0\right)$, όπου $x_0=\dfrac{6}{2P(B)-1}$ και $y_0=\dfrac{6P\left(A\cup B\right)}{2P(B)-1}-2$.

Γ9. β) Δεν έχουν κοινά σημεία

γ) $x\in\mathbb{R}$

Γ10. α) Για να ορίζεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt[3]{x^2-7x+6}-\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ πρέπει να ισχύουν συγχρόνως οι σχέσεις:

$$x^2-7x+6\geq 0\ (1)\text{ και } x-2>0\ (2)$$

Έχουμε:

$$x^2-7x+6\geq 0\Leftrightarrow\left(x\leq 1\text{ ή } x\geq 6\right)(3)\text{ και } x-2>0\Leftrightarrow x>2\ (4)$$

Οι σχέσεις (3) και (4) συναληθεύουν όταν $x\in\left[6,\ +\infty\right)$, οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=\left[6,\ +\infty\right)$.

β) Έχουμε $f(6)=-\dfrac{1}{\sqrt{6-2}}=-\dfrac{1}{2}$ και άρα τα σημεία είναι $A\left(1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$ και $B\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$.

Τα συμμετρικά σημεία[26] των Α και Β, αντίστοιχα ως προς:

i) τον άξονα x΄x είναι τα $A'\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ και $B'\left(-1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$

ii) την διχοτόμο της $1^{ης}$ και $3^{ης}$ γωνίας των αξόνων είναι τα:

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)\text{ και }\Delta\left(\frac{1}{2},\ -1\right)$$

γ) Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β έχει τη μορφή $y=\alpha x+\beta$, με $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$. Έχουμε:

26. Τα σημεία Α και Β είναι μεταξύ τους συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων.

$$-\frac{1}{2}=\alpha+\beta \ (5) \text{ και } \frac{1}{2}=-\alpha+\beta \ (6)$$

Οι σχέσεις (5) και (6) αποτελούν σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, τα α και β, η λύση του οποίου είναι $\alpha=-\frac{1}{2}$ και $\beta=0$.

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B είναι $y=-\frac{1}{2}x$

Γ11. α) $x=\frac{3}{|\alpha-1|+|2\alpha+1|}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

β) Αδύνατη για όλες τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$.

γ) Δεν υπάρχουν

Γ12. α) Η συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-2P(A)x+\left[(P(A))^2+1)\right]}}$ ορίζεται όταν:

$$x^2-2P(A)x+\left[(P(A))^2+1)\right]>0 \ (1)$$

Η σχέση (1) αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αφού η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta=4\left[P(A)\right]^2-4\left[(P(A))^2+1)\right]=-4<0$$

οπότε το τριώνυμο γίνεται ομόσημο του α=1, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

β) Έχουμε:

$$f\left(P(A)\right)=\frac{P(A)}{\sqrt{\left[P(A)\right]^2-2\left[P(A)\right]^2+P(A))^2+1}}=$$

$$=\frac{P(A)}{1}=P(A)$$

οπότε ο σημείο $K(P(A),\ f(P(A)))$ είναι το $K(P(A),\ P(A))$, που ανήκει στην ευθεία $y=x$ η οποία είναι διχοτόμος της $1^{ης}$ και $3^{ης}$ γωνίας των αξόνων.

γ) Έχουμε:

$$f(1)=\frac{1}{\sqrt{1-2P(A)+P(A)^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{(1-P(A))^2+1}}>0$$

Άρα το σημείο $B(1,\ f(1))$ ανήκει στο $1^{ο}$ τεταρτημόριο των αξόνων.

Γ13. α) Το $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$.

β) $f(\alpha)=\dfrac{1}{(1-\alpha)^2}$, $f(\alpha+1)=\dfrac{1}{\alpha^2}$ κλπ.

Γ14. α) Αφού η ευθεία $(\varepsilon_1)\ y=(\mu^2-4\mu)x+2,\ \mu\in\mathbb{R}$, διέρχεται από το σημείο $A(1,\ -1)$ έχουμε:

$$-1=(\mu^2-4\mu)\cdot 1+2 \Leftrightarrow \mu^2-4\mu+3=0\ (\mu=1\ \text{ ή }\ \mu=3)$$

- Για $\mu=1$ η ευθεία (ε_1) γίνεται $y=-3x+2$, η οποία είναι προφανώς παράλληλη με την ευθεία που έχει εξίσωση $y=-3x+2015$.
- Για $\mu=3$ η ευθεία (ε_1) γίνεται $y=-3x+2$, η οποία είναι προφανώς παράλληλη με την ευθεία που έχει εξίσωση $y=-3x+2015$.

β) Για να είναι η ευθεία (ε_2) παράλληλη με την ευθεία (ε_1) πρέπει:

$$-3=-|\kappa-2015| \Leftrightarrow |\kappa-2015|=3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\kappa-2015=3\ \text{ ή }\ \kappa-2015=-3) \Leftrightarrow (\kappa=2018\ \text{ ή }\ \kappa=2012)$$

Επομένως για $\kappa=2018$ ή $\kappa=2012$ η ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες.

Γ15. β) $t=\dfrac{25}{23}\simeq 1{,}09$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. **α)** Για να διέρχεται η γραφική παράσταση της f από το σημείο (1,2), για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α, πρέπει $f(1)=2$. Έχουμε:

$$f(1)=2 \Leftrightarrow \alpha\cdot 1-\alpha+2=2 \Leftrightarrow 2=2$$

που είναι αληθής για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

β) **i)** Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε έχουμε:

$$f(1)=g(1) \Leftrightarrow 2=1^2-\alpha+3 \Leftrightarrow \alpha=2$$

Επομένως για $\alpha=2$, οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1.

ii) Για $\alpha=2$ οι συναρτήσεις γίνονται $f(x)=2x$ και $g(x)=x^2+1$
Οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$. Έχουμε:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow 2x=x^2+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$$

Επομένως για $\alpha=2$ δεν υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g εκτός από το σημείο $A(1,\ 2)$.

γ) Για να έχουν οι γραφικές παραστάσεις των f και g δύο σημεία τομής πρέπει η εξίσωση $f(x)=g(x)$ να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. Έχουμε:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \alpha x-\alpha+2=x^2-\alpha+3 \Leftrightarrow x^2-\alpha x+1=0 \ (1)$$

Η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες αν και μόνο αν ισχύει:

$$\Delta=\alpha^2-4>0 \Leftrightarrow \alpha^2>4 \Leftrightarrow |\alpha|>2 \Leftrightarrow (\alpha>2 \ \text{ ή } \ \alpha<-2)$$

Επομένως αν $\alpha \in (-\infty,\ -2)\cup(2,\ \infty)$ οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν δύο σημεία τομής.

Δ2. **α)** Για $\alpha=1$ η συνάρτηση g γίνεται $g(x)=x+1,\ x\in\mathbb{R}$. Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$. Έχουμε:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2+1=x+1 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow (x=0 \text{ ή } x=1)$$

Επομένως τα κοινά σημεία των C_f και C_g είναι τα $A(0,\ f(0))$ και $B(1,\ f(1))$, δηλαδή τα σημεία $A(0,\ 1)$ και $B(1,\ 2)$.

β) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δυο σημεία αν και μόνο αν η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες. Έχουμε:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2+1=x+\alpha \Leftrightarrow x^2-x+1-\alpha=0 \ (1)$$

Η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες αν και μόνο αν ισχύει:

$$\Delta>0 \Leftrightarrow 1-4(1-\alpha)>0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\alpha-3>0 \Leftrightarrow 4\alpha>3 \Leftrightarrow \alpha>\frac{3}{4}$$

Επομένως αν $\alpha \in \left(\frac{3}{4},\ +\infty\right)$ οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δυο σημεία.

γ) Οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g επαληθεύουν την εξίσωση $x^2-x+1-\alpha=0$ (1) του ερωτήματος (β). Για $\alpha>1>\frac{3}{4}$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες x_1 και x_2, σύμφωνα με το ερώτημα (β).

Από τον τύπο του Vietta έχουμε $P=x_1\cdot x_2=1-\alpha$. Όμως $\alpha>1 \Leftrightarrow 1-\alpha<0 \Leftrightarrow P<0$ και άρα οι τετμημένες των σημείων τομής των C_f και C_g είναι ετερόσημες.

Δ3. α) Αφού ο αθλητής που κολυμπάει ύπτιο καίει 9 θερμίδες το λεπτό, σε 32 λεπτά θα κάψει $32\cdot 9=288$ θερμίδες. Έστω x τα λεπτά που ο αθλητής πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες. Επειδή ο αθλητής καίει 12 θερμίδες το λεπτό όταν κολυμπάει πεταλούδα θα κάψει $12x$ στα x λεπτά. Άρα συνολικά θα κάψει $(12x+288)$ θερμίδες, οπότε έχουμε:

$$12x+288=360 \Leftrightarrow 12x=72 \Leftrightarrow x=6$$

Επομένως ο αθλητής θα κολυμπήσει 6 λεπτά πεταλούδα.

β) i) Έστω x ο χρόνος σε λεπτά που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο και y ο χρόνος σε λεπτά που κολυμπάει πεταλούδα. Τότε ο αθλητής καίει συνολικά $(9x+12y)$ θερμίδες. Έχουμε διαδοχικά:

$$9x+12y=360 \Leftrightarrow 12y=360-9x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{360-9x}{12} \Leftrightarrow y=30-\frac{3}{4}x \Leftrightarrow f(x)=30-\frac{3}{4}x$$

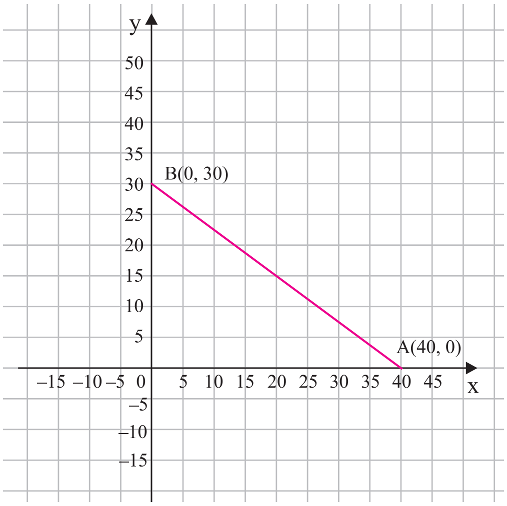
ii) Οι φυσικοί περιορισμοί της συνάρτησης στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος είναι:

$$x \geq 0 \ (1) \text{ και } f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 30-\frac{3}{4}x \geq 0 \Leftrightarrow 120-3x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3x \geq -120 \Leftrightarrow 3x \leq 120 \Leftrightarrow x \leq 40 \ (2)$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το διάστημα $\Delta=[0,\ 40]$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Για τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=30-\frac{3}{4}x,\ x\in[0,\ 40]$ με τους άξονες έχουμε:

- τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $A(x,\ 0)$ με:

$$f(x)=0\Leftrightarrow 30-\frac{3}{4}x=0\Leftrightarrow 3x=120\Leftrightarrow x=40$$

Επομένως το σημείο τομής της C_f με τον άξονα x΄x είναι το $A(40,\ 0)$.

- τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $B(0, f(0))$, δηλαδή στο σημείο $B(0,\ 30)$

Επομένως το σημείο τομής της C_f με τον άξονα y΄y είναι το σημείο $B(0,\ 30)$.

Η ερμηνεία της σημασίας των σημείων A και B στο πλαίσιο του προβλήματος είναι:

- το σημείο $A(40,\ 0)$ δείχνει ότι όταν ο αθλητής κολυμπάει μόνο ύπτιο χρειάζεται 40 λεπτά για να κάψει τις 360 θερμίδες ενώ,
- το σημείο $B(0,\ 30)$ δείχνει ότι όταν ο αθλητής κολυμπάει μόνο πεταλούδα χρειάζεται 30 λεπτά για να κάψει τις 360 θερμίδες.

Δ4. α) Οι τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x είναι αυτές για τις οποίες ισχύει $f(x)>0$. Έχουμε:

$$f(x)>0\Leftrightarrow (x-1)^2-4>0\Leftrightarrow (x-1)^2>4\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x-1|>2\Leftrightarrow (x-1>2\ \text{ ή }\ x-1<-2)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x>3\ \text{ ή }\ x<-1)$$

Επομένως για τις τιμές του $x\in(-\infty,\ -1)\cup(3,\ +\infty)$ η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

β) Για κάθε τιμή του x έχουμε $|x-1|+2>0 \Leftrightarrow g(x)>0$(ως άθροισμα του μη αρνητικού όρου $|x-1|$ και του αριθμού 2).

Επομένως για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση C_g της g βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

γ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow (x-1)^2-4=|x-1|+2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x-1|^2-|x-1|-6=0 \quad (1)$$

Θέτουμε $|x-1|=\omega \geq 0$ και η (1) γίνεται $\omega^2-\omega-6=0$, η οποία έχει ρίζες τις $\omega_1=-2$ (απορρίπτεται) και $\omega_2=3$. Άρα έχουμε:

$$|x-1|=3 \Leftrightarrow \left(x-1=3 \text{ ή } x-1=-3\right) \Leftrightarrow \left(x=4 \text{ ή } x=-2\right)$$

Επομένως τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι $A\left(4,\ f(4)\right)$ και $B\left(-2,\ f(-2)\right)$, δηλαδή τα σημεία $A\left(4,\ 5\right)$ και $B\left(-2,\ 5\right)$.

Δ5. α) Ο εξαγόμενος αριθμός λ είναι συνάρτηση του εισαγόμενου αριθμού x, δηλαδή $\lambda=\left(2x+5\right)^2-8x=f(x)$. Άρα αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι $x=-5$, τότε ο εξαγόμενος είναι:

$$\lambda=f(-5)=\left(-5\right)^2+40=65$$

β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20, τότε έχουμε:

$$20=\left(2x+5\right)^2-8x \Leftrightarrow 4x^2+20x+25-8x=20 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2+12x+5=0 \quad (1)$$

Η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα $\Delta=64$ και ρίζες τις $x_1=-\frac{1}{2}$ και $x_2=-\frac{5}{2}$.

Επομένως αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20 ο εισαγόμενος αριθμός μπορεί να είναι $x=-\frac{1}{2}$ ή $x=-\frac{5}{2}$.

γ) Έχουμε:

$$\lambda=(2x+5)^2-8x \Leftrightarrow 4x^2+20x+25-8x-\lambda=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2+12x+(25-\lambda)=0 \ (2)$$

i) Αν ο εξαγόμενος αριθμός λ είναι ίσος με 5, τότε έχουμε:

$$\lambda=5 \Leftrightarrow 5=(2x+5)^2-8x \Leftrightarrow 4x^2+20x+25-8x=5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2+12x+20=0 \Leftrightarrow x^2+3x+5=0 \ (3)$$

Η εξίσωση (3) έχει διακρίνουσα $\Delta=-11<0$ και άρα είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Επομένως οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x, ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5.

ii) Οι δυνατές τιμές του εξαγόνενου αριθμού λ είναι αυτές για τις οποίες η εξίσωση (2) έχει πραγματικές ρίζες ως προς x(εισαγόμενο αριθμό). Άρα πρέπει :

$$\Delta=144-16(25-\lambda)\geq 0 \Leftrightarrow 144-400+16\lambda\geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -256+16\lambda\geq 0 \Leftrightarrow 16\lambda\geq 256 \Leftrightarrow \lambda\geq 16$$

Επομένως οι δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ είναι $\lambda\in[16,\ +\infty)$.

Δ6. α) i) Αφού ο κάτοικος δεν κατανάλωσε νερό θα έχουμε $x=0$, οπότε το ποσό που θα πληρώσει είναι $f(0)=12+0,5\cdot 0=12$ ευρώ.

ii) Αφού ο κάτοικος κατανάλωσε 10 κυβικά μέτρα νερού θα έχουμε $x=10$, οπότε το ποσό που θα πληρώσει είναι:

$$f(10)=12+0,5\cdot 10=17 \text{ ευρώ.}$$

iii) Αφού ο κάτοικος κατανάλωσε 50 κυβικά μέτρα νερού θα έχουμε $x=50$, οπότε το ποσό που θα πληρώσει είναι:

$$f(50)=0,7\cdot 50+6=41 \text{ ευρώ.}$$

β) Διακρίνουμε περιπτώσεις ως προς την κατανάλωση x κυβικών μέτρων νερού του κάτοικου της πόλης Α:

- Αν $0 \le x \le 30$, τότε επειδή ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλη Β θα έχουμε:

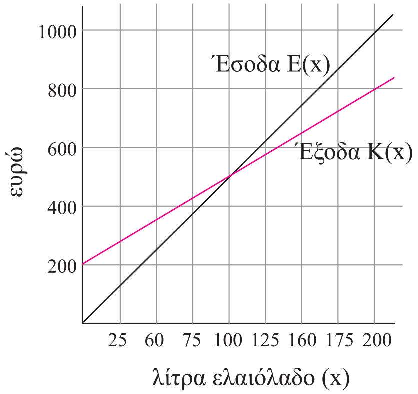
$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow 12 + 0,5x > 12 + 0,6x \Leftrightarrow -0,1x > 0 \Leftrightarrow x < 0,$$

  που είναι άτοπο, αφού το x εκφράζει κυβικά μέτρα νερού. Επομένως ο κάτοικος της πόλης Α κατανάλωσε μεγαλύτερη ποσότητα νερού από 30 κυβικά μέτρα.
- Αν $x > 30$, τότε επειδή ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλη Β θα έχουμε:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow 0,7x + 6 > 12 + 0,6x \Leftrightarrow 0,1x > 6 \Leftrightarrow x > 60$$

  Επομένως ο κάθε ένας από τους κατοίκους των πόλεωων Α κια Β κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

Δ7.



α) Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι το σημείο τομής των δύο ευθειών $E(x)$ και $K(x)$ είναι το $A(100,\ 500)$. Αυτό σημαίνει ότι όταν η εταιρεία πουλήσει 100 λίτρα βιολογικό ελαιόλαδο τότε τα έσοδα και τα έξοδα είναι ίσα με 500 ευρώ.

β) Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι για την πώληση 0 λίτρων ελαιολάδου τα έξοδα (πάγια) είναι 200 ευρώ.

γ) Για να μην έχει ζημιά η εταιρεία θα πρέπει η ευθεία που παριστάνει τα έσοδα να βρίσκεται πάνω από την ευθεία που παριστάνει τα έξοδα, συμπεριλαμβανομένου του σημείου τομής τους. Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι για $x \geq 100$ έχουμε $E(x) \geq K(x)$ (με την ισότητα να ισχύει για $x = 100$).
Επομένως η εταιρεία πρέπει να πουλήσει τουλάχιστον 100 λίτρα ελαιόλαδο για να μην έχει ζημιά.

δ) Η ευθεία $E(x)$ που παριστάνει τα έσοδα από την πώληση x λίτρων ελαιολάδου διέρχεται από την αρχή των αξόνων, οπότε έχει τη γενική μορφή $E(x) = \lambda x,\ \lambda \in \mathbb{R}$ και διέρχεται από το σημείο $A(100,\ 500)$, οπότε $500 = 100\lambda \Leftrightarrow \lambda = 5$. Επομένως είναι

$$E(x) = 5x,\ x \geq 0$$

Η ευθεία $K(x)$ που παριστάνει το κόστος από την πώληση x λίτρων ελαιολάδου θα έχει τη γενική μορφή $K(x) = \alpha x + \beta$ $(\alpha,\ \beta \in \mathbb{R})$ και διέρχεται από τα σημεία $B(0,\ 200)$ και $A(100,\ 500)$. Άρα έχουμε:

$$200 = \alpha \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 200 \text{ και}$$
$$500 = \alpha \cdot 100 + 200 \Leftrightarrow 100\alpha = 300 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

Επομένως $K(x) = 3x + 200,\ x \geq 0$.
Για την αλγεβρική επαλήθευση της απάντησης του ερωτήματος (γ), δηλαδή για να μην έχει ζημιά η εταιρεία, έχουμε:

$$E(x) \geq K(x) \Leftrightarrow 5x \geq 3x + 200 \Leftrightarrow 2x \geq 200 \Leftrightarrow x \geq 100$$

Δ8. α) Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$ ορίζεται όταν:

$$9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 9 \Leftrightarrow |x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $\Delta = (-3,\ 3)$.

β) Για τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες έχουμε:

- τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(x,\ 0),\ x \in \Delta$ με:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}=0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$$

Επομένως το σημείο τομής της C_f με τον άξονα x΄x είναι το $A(-2,\ 0)$.

- τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $B(0,\ f(0))$, δηλαδή στο σημείο $B\left(0,\ \frac{2}{3}\right)$

  Επομένως το σημείο τομής της C_f τον άξονα y΄y είναι το σημείο $B\left(0,\ \frac{2}{3}\right)$

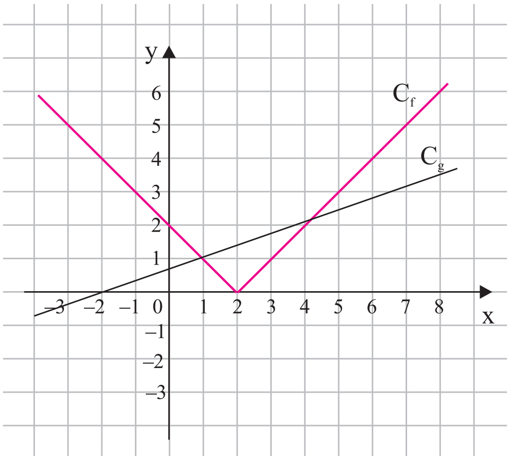
γ) Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B έχει τη γενική μορφή $y=\alpha x+\beta$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Έχουμε:

$$\frac{2}{3}=\alpha\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=\frac{2}{3} \text{ και}$$

$$0=\alpha\cdot(-2)+\frac{2}{3} \Leftrightarrow -6\alpha+2=0 \Leftrightarrow 6\alpha=2 \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{3}$$

Επομένως η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B είναι $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$.

Δ9.



α) Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα τέμνονται σε δύο σημεία, στα $A(1,\ 1)$ και $B(4,\ 2)$.

β) Έχουμε:

- Αν $x \geq 2 \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow |x-2| = x-2$, τότε:

$$3(x-2) = x+2 \Leftrightarrow 3x-6 = x+2 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$$

η οποία είναι δεκτή.

- Αν $x < 2 \Leftrightarrow x-2 < 0 \Leftrightarrow |x-2| = 2-x$, τότε:

$$3(2-x) = x+2 \Leftrightarrow 6-3x = x+2 \Leftrightarrow -4x = -4 \Leftrightarrow x = 1$$

η οποία είναι δεκτή.

Επομένως τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα είναι τα $A(1,\ 1)$ και $B(4,\ 2)$.

γ) Οι τιμές του x που η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g είναι αυτές για τις οποίες ισχύει $f(x) \geq g(x)$. Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι για $x < 1$ και για $x > 4$ ικανοποιείται η σχέση $f(x) \geq g(x)$.

Επομένως για $x \in (-\infty,\ 1) \cup (4,\ +\infty)$ η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g.

Επομένως η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g όταν

$$x \in (-\infty,\ 1) \cup (4,\ +\infty)$$

δ) Η παράσταση $K = \sqrt{3|2-x| - (x+2)}$ ορίζεται όταν:

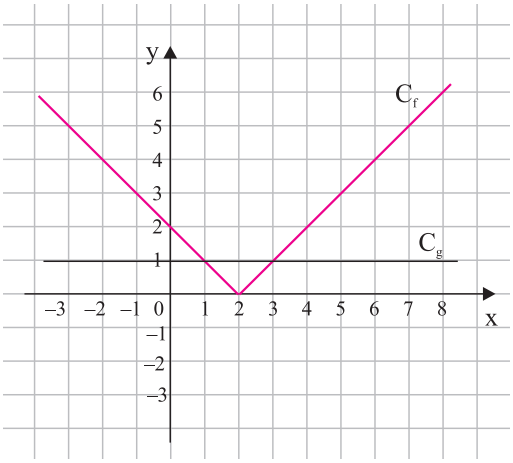
$$3|2-x| - (x+2) \geq 0 \Leftrightarrow 3|2-x| \geq x+2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x-2| \geq \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$$

Δηλαδή η παράσταση K ορίζεται για όλα εκείνα τα x για τα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g συμπεριλαμβανομένων των σημείων τομής τους.

Επομένως, σύμφωνα με το ερώτημα (γ), η παράσταση Κ ορίζεται για όλα τα $x \in (-\infty,\ 1] \cup [4,\ +\infty)$.

Δ10.



Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι:

α) **i)** οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα τέμνονται στα σημεία $A(1,\ 1)$ και $B(3,\ 1)$,

ii) οι τιμές του x, για τις οποίες η C_f είναι κάτω από τη C_g, δηλαδή $f(x) < g(x)$ είναι όλα τα $x \in (1,\ 3)$.

β) Για την αλγεβρική επαλήθευση της απάντησης του ερωτήματος (αi) έχουμε:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow |x-2| = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-2=1 \ \text{ή}\ x-2=-1) \Leftrightarrow (x=3 \ \text{ή}\ x=1)$$

Επομένως τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι τα $A(1,\ f(1))$ και $B(3,\ f(3))$, δηλαδή τα $A(1,\ 1)$ και $B(3,\ 1)$.

Για την αλγεβρική επαλήθευση της απάντησης του ερωτήματος (αii) έχουμε:

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow |x-2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-2 < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3$$

Επομένως όταν $x \in (1,\ 3)$ η C_f είναι κάτω από τη C_g.

γ) Για να έχει νόημα η παράσταση $A=\dfrac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}$ πρέπει:

$$1-f(x)\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq x-2\leq 1 \Leftrightarrow 1\leq x\leq 3 \text{ (I)}$$

και

$$f(x)\neq 0 \Leftrightarrow |x-2|\neq 0 \Leftrightarrow x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2 \text{ (II)}$$

Οι σχέσεις (Ι) και (ΙΙ) συναληθεύουν όταν $x\in[1,\ 2)\cup(2,\ 3]$.
Επομένως όταν $x\in[1,\ 2)\cup(2,\ 3]$ η παράσταση Α έχει νόημα.

Δ11. α) Πρέπει:

$$|x|-3\neq 0 \Leftrightarrow |x|\neq 3 \Leftrightarrow (x\neq 3 \text{ και } x\neq -3)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο
$A=\mathbb{R}-\{-3,\ 3\}$

β) Για κάθε $x\in A$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{x^2-5|x|+6}{|x|-3}=\frac{|x|^2-5|x|+6}{|x|-3}=$$
$$=\frac{(|x|-2)(|x|-3)}{|x|-3}=|x|-2$$

γ) Για $x\in A$ έχουμε:

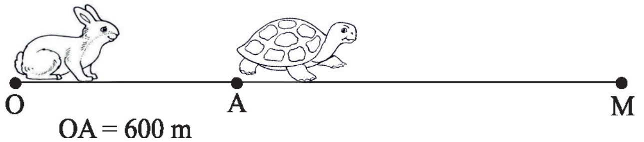
$$(f(x)+2)^2-4f(x)-5=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (|x|-2+2)^2-4(|x|-2)-5=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x|^2-4|x|+3=0 \text{ (1)}$$

Στην εξίσωση (1) θέτουμε $|x|=\omega\geq 0$ και έχουμε $\omega^2-4\omega+3=0$, η οποία έχει ρίζες τις $\omega_1=1$ και $\omega_2=3$. Άρα έχουμε:

$$|x|=1 \Leftrightarrow (x=1 \text{ ή } x=-1)$$

και $|x|=3$ που απορρίπτεται λόγω του (α) ερωτήματος.

Δ12.



α)[27] Το τέρμα Μ μπορεί να βρίσκεται σε τέτοια θέση ώστε να ισχύει:

$$S_X(t) > S_\Lambda(t) \Leftrightarrow 600 + 40t > 10t^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10t^2 - 40t - 600 < 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 60 < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -6 < t < 10$$

Επειδή $t \geq 0$ έχουμε $t \in [0,10)$. Η απόσταση της χελώνας από το Ο για το χρονικό διάστημα $t \in [0,10)$ είναι:

$$0 \leq t < 10 \Leftrightarrow 0 \leq 40t < 400 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 600 \leq 600 + 40t < 1000 \Leftrightarrow 600 \leq S_X(t) < 1000$$

Επομένως το Μ πρέπει να βρίσκεται σε απόσταση μικρότερη από 1000 μέτρα, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα.

β) i) Ο λαγός φτάνει τη χελώνα όταν:

$$S_X(t) = S_\Lambda(t) \Leftrightarrow 600 + 40t = 10t^2 \Leftrightarrow 10t^2 - 40t - 600 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t^2 - 4t - 60 = 0 \Leftrightarrow t = 10$$

Επομένως σε 10 min ο λαγός φτάνει τη χελώνα.

ii) Για $t = 12$ έχουμε $S_X(12) = 1080$ μέτρα και $S_\Lambda(12) = 1440$ μέτρα. Άρα για $t = 12$ min προηγείται ο λαγός και η μεταξύ τους απόσταση είναι:

$$S_\Lambda(12) - S_X(12) = 1440 - 1080 = 360 \text{ μέτρα.}$$

iii) Η απόσταση του τέρματος Μ από το Ο είναι ΟΜ = 2250 μέτρα. Άρα πρέπει να βρούμε το χρόνο t, ώστε:

$$S_\Lambda(t) = 2250 \Leftrightarrow 10t^2 = 2250 \Leftrightarrow t^2 = 225 \Leftrightarrow t = 15, \text{ αφού } t \geq 0$$

Επομένως σε 15 λεπτά τερματίζει ο νικητής του αγώνα.

27. Η ακριβής διατύπωση του ερωτήματος αυτού πρέπει να είναι «Να βρεθεί σε πόση απόσταση **το πολύ** από το Ο θα πρέπει να βρίσκεται το τέρμα Μ, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα».

Δ13. α) Έχουμε:

$$f(2)=g(2)\Leftrightarrow 4-8+\alpha=2\alpha-5\Leftrightarrow \alpha=1$$

Άρα τιμή του α ώστε $f(2)=g(2)$ είναι $\alpha=1$.

β) Για $\alpha=1$ έχουμε:

i) $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-4x+1=x-5\Leftrightarrow\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$, η οποία έχει ρίζες τις $x_1=2$ και $x_2=3$

Άρα η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει λύσεις τις $x_1=2$ και $x_2=3$.

ii) $f(x)\ge g(x)\Leftrightarrow x^2-4x+1\ge x-5\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-5x+6\ge 0\Leftrightarrow \left(x\le 2 \text{ ή } x\ge 3\right)$

Άρα η ανίσωση $f(x)\ge g(x)$ έχει λύσεις όλα τα:

$$x\in\left(-\infty,\ 2\right]\cup\left[3,\ +\infty\right)$$

Για την εξίσωση $\left|f(x)-g(x)\right|=f(x)-g(x)$ έχουμε:

$$\left|f(x)-g(x)\right|=f(x)-g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)\ge 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x)\ge g(x)\Leftrightarrow x\in\left(-\infty,\ 2\right]\cup\left[3,\ +\infty\right)$$

Δ14. α) Για $x=400$ έχουμε $y=60+0,20\cdot 400=140$ ευρώ. Άρα ο πελάτης της εταιρείας Α θα πληρώσει 140 ευρώ.

β) Για $y=150$ έχουμε $150=60+0,20x\Leftrightarrow 0,20x=90\Leftrightarrow x=450$ Km. Άρα ο πελάτης της εταιρείας Α ο οποίος, για μία ημέρα, πλήρωσε 150 ευρώ θα διανύσει 450 Km.

γ) Προκειμένου να αποφασίσουμε ποια εταιρεία μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε, θα εξετάσουμε το πρόσημο της διαφοράς της χρέωσης των πελατών από τις εταιρείες Α και Β, y_A και y_B αντίστοιχα, όπου $y_A=60+0,20x$ και $y_B=80+0,10x$ για απόσταση x Km. Έχουμε:

$$y_A-y_B=\left(60+0,20x\right)-\left(80+0,10x\right)=0,10x-20$$

Άρα έχουμε:

- $y_A>y_B\Leftrightarrow y_A-y_B>0\Leftrightarrow 0,10x-20>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}10x > 20 \Leftrightarrow x > 200$, οπότε αν σκοπεύουμε να διανύσουμε απόσταση μεγαλύτερη από 200 Km μας συμφέρει να επιλέξουμε την εταιρεία Β που έχει φθηνότερη χρέωση.

- $y_A < y_B \Leftrightarrow y_A - y_B < 0 \Leftrightarrow 0{,}10x - 20 < 0 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow 0{,}10x < 20 \Leftrightarrow x < 200$, οπότε αν σκοπεύουμε να διανύσουμε απόσταση μικρότερη από 200 Km μας συμφέρει να επιλέξουμε την εταιρεία Α που έχει φθηνότερη χρέωση.

δ) Οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$. Έχουμε:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 60 + 0{,}20x = 80 + 0{,}10x \Leftrightarrow 0{,}10x = 20 \Leftrightarrow x = 200$$

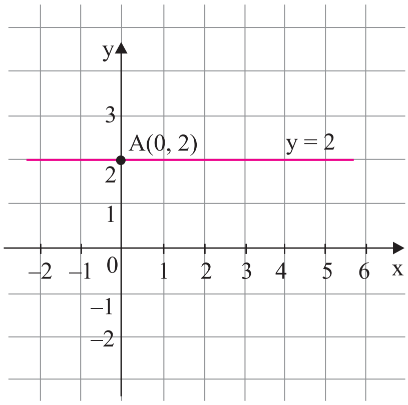
Άρα το σημείο τομής των C_f και C_g είναι το $A\big(200, f(200)\big)$, δηλαδή το $A\big(200,\ 100\big)$.

Στην περίπτωση αυτή έχουμε $f(200) = g(200) = 100$ και επομένως το κόστος ενοικίασης ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα είναι το ίδιο, 100 ευρώ και για τις δύο εταιρείες Α και Β, όταν σκοπεύουμε να διανύσουμε απόσταση ίση με 200Km.

Δ15. α) Για να διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f από το σημείο $A(0,\ 2)$ πρέπει $f(0) = 2$. Πράγματι είναι:

$$f(0) = \big(\lambda + 1\big)\cdot 0^2 - \big(\lambda + 1\big)\cdot 0 + 2 = 2$$

β) Για $\lambda = -1$ η συνάρτηση γίνεται $f(x) = 2$, η γραφική παράσταση της οποίας είναι ευθεία παράλληλη με τον άξονα των $x'x$ όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα:



γ) Αφού η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Β(2, 0), έχουμε:

$$f(2)=0 \Leftrightarrow 4(\lambda+1)-2(\lambda+1)+2=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\lambda+4=0 \Leftrightarrow 2\lambda=-4 \Leftrightarrow \lambda=-2$$

Για $\lambda=-2$ η συνάρτηση γίνεται $f(x)=-x^2+x+2$. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $(x,\ 0)$, δηλαδή όταν:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+x+2=0 \Leftrightarrow x_1=-1 \text{ και } x_2=2$$

Επομένως η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x και στο σημείο $\Gamma(-1,\ 0)$.

δ) Για $\lambda=1$ η συνάρτηση f γίνεται $f(x)=2x^2-2x+2=2(x^2-x+1)$. Έχουμε $f(x)>0$ (ομόσημο του α = 1), για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αφού η διακρίνουσα Δ του τριωνύμου είναι $\Delta=-3<0$.
Επομένως η C_f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από από τον άξονα x΄x.

Δ16. α) Η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον άξονα x΄x, αφού η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+x+1=0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, επειδή η διακρίνουσα Δ του τριωνύμου είναι $\Delta=-3<0$.

β) Οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$ ικανοποιούν τη σχέση:

$$f(x)<2x+3 \Leftrightarrow x^2+x+1<2x+3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-x-2<0 \Leftrightarrow -1<x<2$$

Στον επόμενο πίνακα φαίνεται το πρόσημο της ανίσωσης x^2-x-2.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-x-2		+	0	−	0	+	

Επομένως είναι όλα τα $x\in(-1,\ 2)$.

γ) Για την τετμημένη του σημείου $M(x,y)$ ισχύει:

$$|2x-1|<3 \Leftrightarrow -3<2x-1<3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2<2x<4 \Leftrightarrow -1<x<2$$

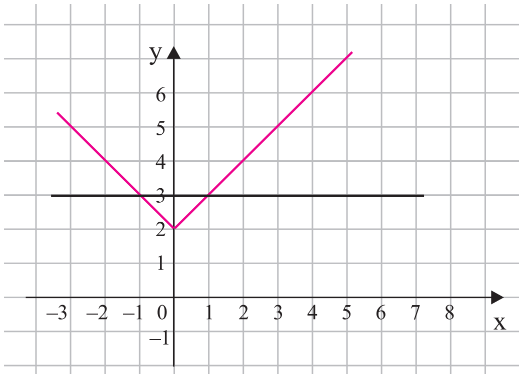
Επομένως, σύμφωνα με το ερώτημα (β), το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

Δ17. α) Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της

$$f(x)=\begin{cases} -x+2, \text{αν } x<0 \\ x+2, \text{αν } x\geq 0 \end{cases}$$

με τον άξονα y΄y είναι το $A(0,\ f(0))$, δηλαδή το σημείο $A(0,\ 2)$.

β) i) Οι συντεταγμένες των σημείων τομής της C_f με την ευθεία $y=3$, όπως προκύπτουν από το επόμενο σχήμα είναι $B(-1,\ 3)$ και $\Gamma(1,\ 3)$.



ii) Τα σημεία $B(-1,\ 3)$ και $\Gamma(1,\ 3)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y αφού έχουν ίσες τεταγμένες και αντίθετες τετμημένες (ισαπέχουν από τον άξονα y΄y).

γ) i) Για να τέμνει η ευθεία $y=\alpha$ τη C_f σε δύο σημεία πρέπει η εξίσωση $f(x)=\alpha$ να έχει δύο λύσεις (τις τετμημένες των σημείων τομής τους). Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι για κάθε $\alpha>2$, η παράλληλη προς τον άξονα x΄x ευθεία $y=\alpha>2$ τέμνει τη C_f σε δύο σημεία.

ii) Έχουμε τις περιπτώσεις

- Αν $x<0$, τότε έχουμε:

$$f(x)=\alpha \Leftrightarrow -x+2=\alpha \Leftrightarrow x=2-\alpha$$

Πρέπει να ισχύει $x<0 \Leftrightarrow 2-\alpha<0 \Leftrightarrow \alpha>2$.

Επομένως το σημείο τομής της C_f με την ευθεία $y=\alpha>2$ είναι το $K(2-\alpha,\ \alpha)$.

- Αν $x>0$, τότε έχουμε:

$$f(x)=\alpha \Leftrightarrow x+2=\alpha \Leftrightarrow x=\alpha-2$$

Πρέπει να ισχύει $x>0 \Leftrightarrow \alpha-2>0 \Leftrightarrow \alpha>2$

Επομένως[28] το σημείο τομής της C_f με την ευθεία $y=\alpha>2$ είναι το $\Lambda(\alpha-2,\ \alpha)$.

Άρα για $\alpha>2$ η ευθεία $y=\alpha>2$ τέμνει τη C_f σε δύο σημεία, τα $K(2-\alpha,\ \alpha)$ και $\Lambda(\alpha-2,\ \alpha)$. Τα σημεία αυτά έχουν ίσες τεταγμένες και αντίθετες τετμημένες, οπότε είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y και άρα ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii).

Δ18. α) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Έχουμε:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2-2x=3x-4 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τις $x_1=1$ και $x_2=4$.

Επομένως τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι τα $A(1,\ f(1))$ και $B(4, f(4))$, δηλαδή τα $A(1,\ -1)$ και $B(4,\ 8)$.

β) Οι τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g είναι οι λύσεις της ανίσωσης:

$$f(x)<g(x) \Leftrightarrow x^2-2x<3x-4 \Leftrightarrow x^2-5x+4<0 \Leftrightarrow 1<x<4$$

28. Για $\alpha=2$ η $y=2$ και η C_f έχουν ένα κοινό σημείο.

δηλαδή όλα τα $x \in (1,\ 4)$. Ο επόμενος πίνακας δείχνει το πρόσημο της διαφοράς $f(x)-g(x)=x^2-5x+4$.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
x^2-5x+4		+	0	−	0	+	

Επομένως για $x \in (1,\ 4)$ η C_f είναι κάτω από τη C_g.

γ) Για να βρίσκεται κάθε ευθεία της μορφής $y=\alpha$, $\alpha<-1$ κάτω από τη γραφική παράσταση της f πρέπει:

$$f(x)>\alpha \Leftrightarrow x^2-2x>\alpha \Leftrightarrow x^2-2x-\alpha>0 \ (1), \text{ για κάθε } \alpha<-1.$$

Το τριώνυμο $x^2-2x-\alpha$ έχει διακρίνουσα $\Delta=4+4\alpha$. Έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha<-1 \Leftrightarrow 4\alpha<-4 \Leftrightarrow 4\alpha<-4 \Leftrightarrow 4+4\alpha<0 \Leftrightarrow \Delta<0$$

Επομένως η ανίσωση (1) αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε κάθε ευθεία της μορφής $y=\alpha$ με $\alpha<-1$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f.

Δ19. α) Για να έχει η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-x+\frac{\alpha}{4}}$ πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$ πρέπει να ισχύει: $x^2-x+\frac{\alpha}{4}\geq 0 \Leftrightarrow 4x^2-4x+\alpha\geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Η τελευταία ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όταν:

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 16-16\alpha \leq 0 \Leftrightarrow 16\alpha \geq 16 \Leftrightarrow \alpha \geq 1$$

Επομένως η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ όταν $\alpha \geq 1$.

β) i) Αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$ είναι $f(0)=\frac{1}{2}$. Έχουμε:

$$f(0)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\alpha}{4}}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{4}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha=1$$

Για $\alpha = 1$ η συνάρτηση γίνεται:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \left|x - \frac{1}{2}\right|$$

ii) Έχουμε:

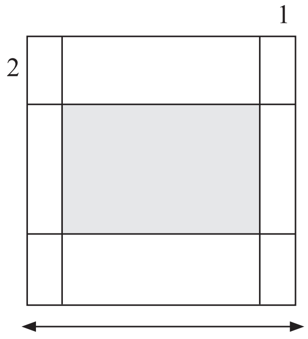
$$f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ ή } x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{4} \text{ ή } x = 0\right)$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = \frac{1}{2}$ είναι $x_1 = \frac{1}{4}$ και $x_2 = 0$.

Δ20. α) Η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από το το εμβαδόν Ε του «έγχρωμου» ορθογωνίου, που έχει πλευρές $x - 2$ και $x - 4$ αντίστοιχα. Άρα το εμβαδόν Ε εκφράζεται σε cm^2 ως συνάρτηση του x :

$$E(x) = (x-2)(x-4),\ 5 \le x \le 10$$



β) Έχουμε:

$$E(x) = 35 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 35 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 35 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 27 = 0 (1)$$

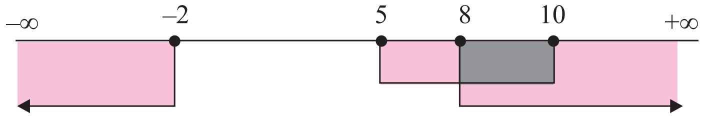
Η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις $x_1 = 9$ και $x_2 = -3$(απορρίπτεται), οπότε δεκτή τιμή είναι η $x_1 = 9$.

Επομένως για $x = 9$ το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων είναι 35 cm^2.

γ) Αφού η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον 24 cm^2 έχουμε:

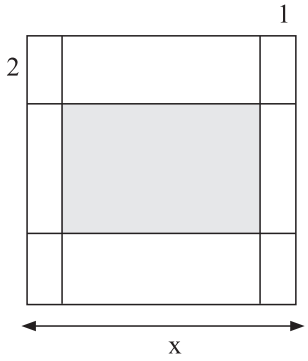
$$E(x) \geq 24 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) \geq 24 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 \geq 24 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in (-\infty,\ -2] \cup [8,\ 10)$$

Όμως $x \in [5,\ 10]$, οπότε είναι $x \in [8,\ 10]$, όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα:



Δ21. α) Η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από το το εμβαδόν E του «έγχρωμου» ορθογωνίου, που έχει πλευρές $x-2$ και $x-4$ αντίστοιχα. Άρα το εμβαδόν E εκφράζεται σε cm^2 ως συνάρτηση του x:

$$E(x) = (x-2)(x-4) \Leftrightarrow E(x) = x^2 - 6x + 8,\ \ 5 \leq x \leq 10$$



β) Έχουμε:

$$E(x)=24 \Leftrightarrow x^2-6x+8=24 \Leftrightarrow x^2-6x-16=0 \ (1)$$

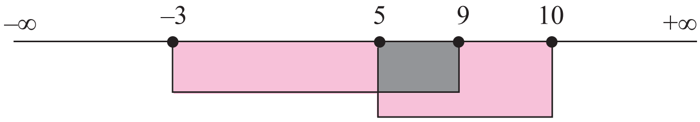
Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι οι $x_1=8$ και $x_2=-2$(απορρίπτεται), οπότε δεκτή τιμή είναι η $x=8$.

Επομένως για $x=8$ το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 24 cm^2.

γ) Αφού το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων είναι το πολύ 35 cm^2 έχουμε:

$$E(x)\le 35 \Leftrightarrow x^2-6x+8\le 35 \Leftrightarrow x^2-6x-27\le 0 \Leftrightarrow -3\le x\le 9$$

Όμως $5\le x\le 10$, οπότε είναι $x\in[5,\ 9]$ όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα:



Επομένως οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου είναι από 5 cm μέχρι 9 cm.

Δ22. α) Οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g είναι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$. Επομένως πρέπει η εξίσωση $f(x)=g(x)$ να έχει τουλάχιστον μία λύση για κάθε $\lambda\neq 0$.

Έχουμε:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2=\lambda x+(1-\lambda) \Leftrightarrow x^2-\lambda x-(1-\lambda)=0 \ (1)$$

Η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\lambda^2+4(1-\lambda)=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2\ge 0$$

για κάθε $\lambda\neq 0$, οπότε η εξίσωση (1) έχει τουλάχιστον μία ρίζα για κάθε $\lambda\neq 0$.

Επομένως οι C_f και C_g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο για κάθε τιμή του $\lambda\neq 0$.

β) Για να έχουν οι C_f και C_g ένα μόνο κοινό σημείο πρέπει η εξίσωση (1) να έχει μόνο μία ρίζα. Άρα πρέπει:

$$\Delta=(\lambda-2)^2=0 \Leftrightarrow \lambda-2=0 \Leftrightarrow \lambda=2$$

Επομένως για $\lambda=2$ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.
Για $\lambda=2$ η εξίσωση (1) γίνεται:

$$x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$$

Άρα το μοναδικό κοινό σημείο των C_f και C_g είναι το $A(1,\ f(1))$, δηλαδή το $A(1,\ 1)$.

γ) Αν $\lambda\neq 2$, τότε $\Delta>0$ και έστω $x_1,\ x_2$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g, δηλαδή οι ρίζες της εξίσωσης (1). Από τον τύπο του Vietta είναι $S=x_1+x_2=\lambda$. Άρα έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}&(x_1+x_2)^2=|x_1+x_2|+2 \Leftrightarrow S^2=|S|+2 \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow \lambda^2-|\lambda|-2=0 \Leftrightarrow |\lambda|^2-|\lambda|-2=0\end{aligned} \quad (2)$$

Στην εξίσωση (2) θέτουμε $|\lambda|=\kappa\geq 0$ και έχουμε $\kappa^2-\kappa-2=0$, η οποία έχει ρίζες τις $\kappa_1=-1$ (απορρίπτεται) και $\kappa_2=2$. Άρα έχουμε:

$$|\lambda|=2 \Leftrightarrow (\lambda=2 \text{ ή } \lambda=-2)$$

Όμως $\lambda\neq 2$ και άρα έχουμε $\lambda=-2$. Επομένως για $\lambda=-2$ ισχύει η δοθείσα σχέση.

Δ23. α) Το ύψος y (σε m) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση αποτελεί συνάρτηση του t, δηλαδή $y=y(t)$. Όταν η σφαίρα επανέλθει στο έδαφος θα ισχύει:

$$\begin{aligned}&y(t)=0 \Leftrightarrow 60t-5t^2=0 \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow 5t(12-t)=0 \Leftrightarrow (t=0 \text{ ή } t=12)\end{aligned}$$

Για $t=0$ η σφαίρα βρίσκεται στην αρχή της κίνησής της και επομένως μετά από 12 s η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος.

β) Όταν η σφαίρα θα βρεθεί σε ύψος 175 m θα ισχύει:

$$y(t)=175 \Leftrightarrow 60t-5t^2=175 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5t^2-60t+175=0 \Leftrightarrow t^2-12t+35=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(t_1=5 \text{ και } t_2=7\right)$$

Επομένως η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος $y=175$ m τις χρονικές στιγμές $t_1=5$ s και $t_2=7$ s.

γ) Η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m όταν:

$$y(t)>100 \Leftrightarrow 60t-5t^2>100 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -5t^2+60t-100>0 \Leftrightarrow t^2-12t+35<0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2<t<10$$

Επομένως η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m μεταξύ των χρονικών στιγμών 2 s και 10 s.

Δ24. α) Το μηνιαίο κόστος $K(\nu)$ της επιχείρησης, αν γεμίζει ν τόνερ το μήνα, είναι $K(\nu)=6500+15\nu$, όπου ν θετικός ακέραιος.

β) Τα μηνιαία έσοδα $E(\nu)$ της επιχείρησης από την πώληση ν αριθμού τόνερ το μήνα είναι $E(\nu)=25\nu$, όπου ν θετικός ακέραιος.

γ) Έστω $P(\nu)$ το μηνιαίο κέρδος της επιχείρησης. Έχουμε:

$$P(\nu)=E(\nu)-K(\nu) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P(\nu)=25\nu-\left(6500+15\nu\right) \Leftrightarrow P(\nu)=10\nu-6500$$

όπου ν θετικός ακέραιος.

i) Για να μην έχει ζημιά η επιχείρηση πρέπει να ισχύει:

$$P(\nu)\geq 0 \Leftrightarrow 10\nu-6500\geq 0 \Leftrightarrow 10\nu\geq 6500 \Leftrightarrow \nu\geq 650$$

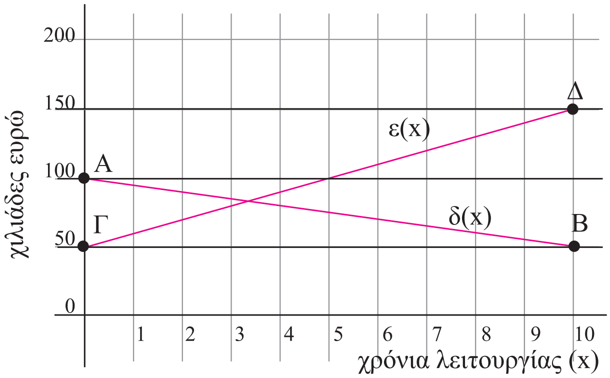
Επομένως για να μην έχει ζημιά η επιχείρηση θα πρέπει να πουλήσει τουλάχιστον 650 τόνερ.

ii) Για να έχει η επιχείρηση μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ πρέπει:

$$P(\nu)\geq 500 \Leftrightarrow 10\nu-6500\geq 500 \Leftrightarrow 10\nu\geq 7000 \Leftrightarrow \nu\geq 700$$

Επομένως για να έχει η επιχείρηση μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ πρέπει να πουλήσει τουλάχιστον 750 ευρώ.

Δ25.[29] **α)** Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων που φαίνονται στο επόμενο σχήμα εκτιμούμε τις τιμές των εσόδων και των δαπανών για $x = 5$. Είναι $\varepsilon(5) \simeq 100$ και $\delta(5) \simeq 75$ σε χιλιάδες ευρώ.



β) i) Οι συναρτήσεις $\varepsilon(x)$ και $\delta(x)$ είναι ευθείες και θα έχουν αντίστοιχα τη μορφή $\varepsilon(x) = \kappa x + \lambda$ με $\kappa,\ \lambda \in \mathbb{R}$ και $\delta(x) = \mu x + \nu$ με $\mu,\ \nu \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $\varepsilon(x) = \kappa x + \lambda$ διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(0,\ 50)$ και $\Delta(10,\ 150)$. Άρα έχουμε:

$$\varepsilon(0) = 50 \Leftrightarrow \lambda = 50 \text{ και}$$

$$\varepsilon(10) = 150 \Leftrightarrow 10\kappa + 50 = 150 \Leftrightarrow 10\kappa = 100 \Leftrightarrow \kappa = 10$$

Επομένως η συνάρτηση των ετήσιων εσόδων $\varepsilon(x)$ της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της είναι $\varepsilon(x) = 10x + 50,\ x \geq 0$.

Η συνάρτηση $\delta(x) = \mu x + \nu$ διέρχεται από τα σημεία $A(0,\ 100)$ και $B(10,\ 50)$. Άρα έχουμε:

29. Οι όροι «ετήσια έσοδα» και «ετήσια έξοδα» δεν είναι συνεχείς μεταβλητές αλλά διακριτές και επομένως δεν μπορούν να παριστάνονται με συνεχείς ευθείες.

$$\delta(0)=100 \Leftrightarrow \nu=100 \text{ και}$$
$$\delta(10)=50 \Leftrightarrow 10\mu+50=0 \Leftrightarrow 10\mu=-50 \Leftrightarrow \mu=-5$$

Επομένως η συνάρτηση των ετήσιων δαπανών $\delta(x)$ της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της είναι $\delta(x)=-5x+100,\ x\geq 0$.

Για να ελέγξουμε αν οι εκτιμήσεις μας στο ερώτημα (α) ήταν σωστές θα πρέπει να βρούμε τις τιμές ε(5) και δ(5). Πράγματι έχουμε:

$$\varepsilon(5)=10\cdot 5+50 \Leftrightarrow \varepsilon(5)=100 \text{ και}$$
$$\delta(5)=-5\cdot 5+100 \Leftrightarrow \delta(5)=75$$

Επομένως οι εκτιμήσεις μας στο ερώτημα (α) ήταν σωστές.

ii) Οι τετμημένες των σημείων τομής των συναρτήσεων:

$$\varepsilon(x)=10x+50 \text{ και } \delta(x)=-5x+100$$

είναι οι λύσεις της εξίσωσης:

$$\varepsilon(x)=\delta(x) \Leftrightarrow 10x+50=-5x+100 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 15x=50 \Leftrightarrow x=\frac{50}{15} \Leftrightarrow x\simeq 3{,}3$$

Άρα το σημείο τομής των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ είναι το $K\big(3{,}3, \delta\ (3{,}3)\big)$, δηλαδή κατά προσέγγιση το $K\big(3{,}3,\ 83{,}5\big)$.

Η ερμηνεία του σημείου τομής στο πλαίσιο του προβλήματος είναι ότι η επιχείρηση στα 3,3 χρόνια της λειτουργίας της είχε έξοδα ίσα με τα έσοδα, της τάξης των 83.500 ευρώ περίπου.

Δ26. α) i) Με βάση ότι η εταιρεία με το όνομα ‘RED’ χρεώνει 1 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,6 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης συμπληρώνουμε τον επόμενο πίνακα:

x (Km)	0	2	8
f(x) (ευρώ)	1	2,2	5,8

ii) Με βάση ότι η εταιρεία με το όνομα 'YELLOW' χρεώνει 2 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,4 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης συμπληρώνουμε τον επόμενο πίνακα:

x (Km)	0	3	7
g(x) (ευρώ)	2	3,2	4,8

β) Οι τιμές που αναφέρονται στην εκφώνηση ισχύουν για αποστάσεις x Km μικρότερες από 15 χιλιόμετρα. Επομένως τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ είναι $A_f = A_g = [0,\ 15)$.

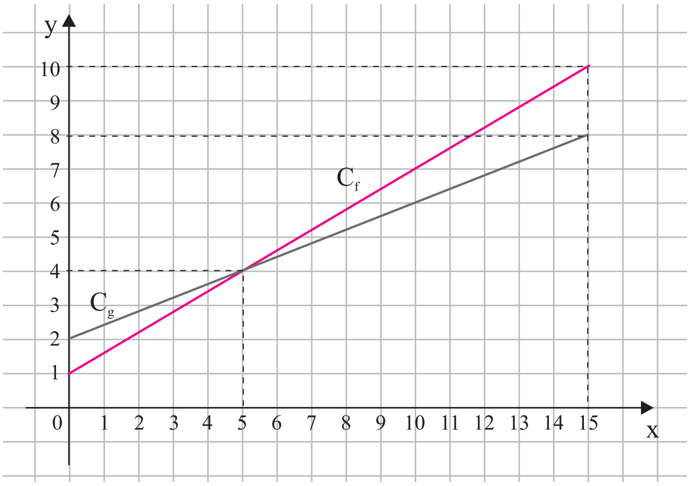
- Για τον τύπο της συνάρτησης f έχουμε:
  Ο πελάτης πληρώνει 1 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,6 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει. Άρα για να διανύσει απόσταση x Km θα πληρώσει $0,6x$. Επομένως η συνάρτηση $f(x)$, που εκφράζει το ποσό σε ευρώ που χρεώνει η εταιρεία 'RED' για μια διαδρομή x χιλιομέτρων, είναι:

$$f(x) = 1 + 0,6x,\ x \in [0,\ 15).$$

- Για τον τύπο της συνάρτησης g έχουμε:
  Ο πελάτης πληρώνει 2 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,4 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει. Άρα για να διανύσει απόσταση x Km θα πληρώσει $0,4x$. Επομένως η συνάρτηση $g(x)$, που εκφράζει το ποσό σε ευρώ που χρεώνει η εταιρεία 'YELLOW' για μια διαδρομή x χιλιομέτρων, είναι

$$g(x) = 2 + 0,4x,\ x \in [0,\ 15)$$

γ) Οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ είναι ευθείες και φαίνονται στο επόμενο σχήμα:



Για να βρούμε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας ‘RED’ είναι πιο οικονομική από την επιλογή της εταιρείας ‘YELLOW θα πρέπει να λύσουμε την ανίσωση:

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow 1 + 0,6x < 2 + 0,4x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,2x < 1 \Leftrightarrow x < 5$$

Επομένως η εταιρεία ‘RED’ είναι πιο οικονομική για αποστάσεις μικρότερες των 5 Km. Αυτό προκύπτει και από το παραπάνω σχήμα, από όπου φαίνεται ότι για $x \in [0,\ 5)$ η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση C_g της g.

δ) Αν ο πελάτης Α μετακινηθεί α Km με $\alpha \in [0,\ 12)$, τότε ο πελάτης Β θα μετακινηθεί $\alpha - 3$ Km. Ο πελάτης Α θα πληρώσει $y_1 = (1 + 0,6\alpha)$ σε ευρώ ενώ ο πελάτης Β θα πληρώσει

$y_2 = 1 + 0,6(\alpha - 3) = (0,6\alpha - 0,8)$ σε ευρώ. Άρα έχουμε:

$$y_1 - y_2 = (1 + 0,6\alpha) - (0,6\alpha - 0,8) = 1,8, \text{ δηλαδή } y_1 = 1,8 + y_2$$

Επομένως ο πελάτης Α θα πληρώσει 1,8 ευρώ παραπάνω από τον πελάτη Β.

Δ27. α) Για να ορίζεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{|2-x|}$ πρέπει:

$$|2-x|\neq 0 \Leftrightarrow 2-x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2.$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A=\mathbb{R}-\{2\}$

β) Για κάθε $x\in A$ έχουμε:

- Αν $x>2 \Leftrightarrow 2-x<0 \Leftrightarrow |2-x|=x-2$, τότε έχουμε:

$$f(x)=\frac{(x-2)(x-3)}{x-2}=x-3$$

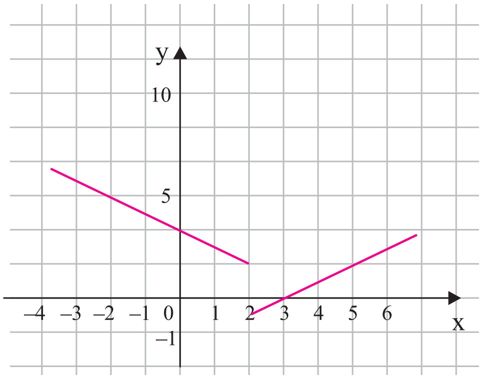
- Αν $x<2 \Leftrightarrow 2-x>0 \Leftrightarrow |2-x|=2-x$, τότε έχουμε:

$$f(x)=-\frac{(x-2)(x-3)}{x-2}=-x+3$$

Επομένως έχουμε:

$$f(x)=\begin{cases} x-3, & x>2 \\ -x+3, & x<2 \end{cases}$$

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Τα σημεία τομής με τους άξονες είναι:

- Με τον άξονα $x'x$ είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow (x=2 \text{ ή } x=3)$. Όμως $x\neq 2$, οπότε το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ είναι το σημείο, δηλαδή το $B(3,\ 0)$.

- Με τον άξονα y΄y είναι το σημείο $\Gamma\left(0, f(0)\right)$, δηλαδή το $\Gamma\left(0,\ 3\right)$.

δ) Για κάθε $x \in A$ έχουμε:

$$f(x) \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6}{|2-x|} \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-5x+6 \le 0 \Leftrightarrow 2 \le x \le 3$$

Όμως $x \ne 2$, οπότε $x \in \left(2,\ 3\right]$.

Δ28. α) Για να ορίζεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha}{2x-3}$ πρέπει:

$$2x-3 \ne 0 \Leftrightarrow 2x \ne 3 \Leftrightarrow x \ne \frac{3}{2}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

β) Για κάθε $x \in A$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha}{2x-3} = \frac{4\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)}{2x-3} =$$
$$= \frac{2\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\left(2x-3\right)}{2x-3} = 2x-\alpha$$

(το τριώνυμο $4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = 4(\alpha+3)^2-48\alpha = 4\left(\alpha-3\right)^2 \ge 0$$

και ρίζες τις $x_1 = \dfrac{\alpha}{2}$ και $x_2 = \dfrac{3}{2}$).

γ) Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(-1,\ 1)$ έχουμε:

$$f(-1) = 1 \Leftrightarrow \frac{4+2\left(\alpha+3\right)+3\alpha}{-5} = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{5\alpha+10}{5} = 1 \Leftrightarrow -\alpha-2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = -3$$

Επομένως για $\alpha = -3$ η C_f διέρχεται από το σημείο $(-1,\ 1)$.

δ) Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες xx΄ και y΄y είναι:

- Με τον άξονα x΄x:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \alpha = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{2}$$

οπότε το σημείο τομής της C_f με τον άξονα x΄x είναι το σημείο $A\left(\frac{\alpha}{2},\ 0\right)$, $\alpha \neq 3$ (διότι πρέπει $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha \neq 3$).

- Με τον άξονα y΄y το σημείο $B\left(0,\ f(0)\right)$, δηλαδή το $B\left(0,\ -\alpha\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δ29. α) Έχουμε διαδοχικά:

$$|1-3\alpha| < 2 \Leftrightarrow -2 < 1-3\alpha < 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3 < -3\alpha < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < \alpha < 1 \ (1)$$

β) Αφού η απόσταση του αριθμού β από τον αριθμό 2 είναι μικρότερη του 1 έχουμε:

$$|\beta - 2| < 1 \Leftrightarrow -1 < \beta - 2 < 1 \Leftrightarrow 1 < \beta < 3 \ (2)$$

Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (1) με -3 έχουμε $-3 < -3\alpha < 1$ (3). Προσθέτοντας τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$-2 < \beta - 3\alpha < 4 \Leftrightarrow -3 < \beta - 3\alpha - 1 < 3 \Leftrightarrow |\beta - 3\alpha - 1| < 3$$

Επομένως έχουμε $|\beta - 3\alpha - 1| < 3$.

γ) Για να ορίζεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4\left(\beta - 2\right)x + \beta^2}$ σε όλο το σύνολο $\mathbb{R}$ πρέπει να ισχύει $4x^2 - 4\left(\beta - 2\right)x + \beta^2 \geq 0$ (4), για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η ανίσωση (4) αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όταν $\Delta < 0$(γίνεται ομοσημο του α). Πράγματι έχουμε:

$$\Delta = 16(\beta-2)^2 - 16\beta^2 = 16(\beta^2-4\beta+4) - 16\beta^2 =$$
$$= -64\beta + 64 = -64(\beta-1) < 0$$

αφού από τη σχέση (2) έχουμε $1<\beta<3$, δηλαδή $\beta-1>0$.

Δ30. α) Η διακρίνουσα της εξίσωσης $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ είναι

$$\Delta = 1 - 4(\lambda-\lambda^2) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (2\lambda-1)^2$$

Αφού $\Delta \geq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

β) Για να έχει η εξίσωση δύο ρίζες ίσες πρέπει:

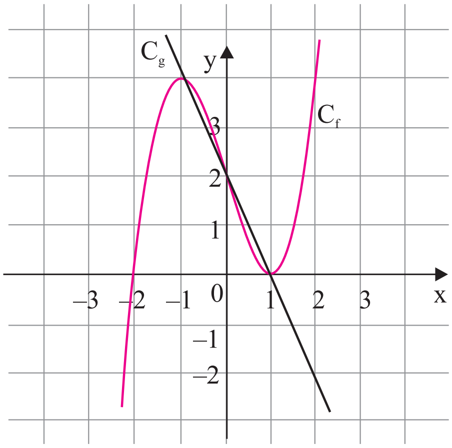
$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

γ) Για να έχει η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \lambda - \lambda^2}$ πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ πρέπει να ισχύει $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή να ισχύει:

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 \leq 0 \Leftrightarrow (2\lambda-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

Επομένως για $\lambda = \frac{1}{2}$ η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Δ31.



α) Ζητάμε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι τα σημεία τομής είναι $A(1,\ 0)$, $B(0,\ 2)$ και $\Gamma(-1,\ 4)$. Επομένως οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει είναι $x=-1,\ x=0,\ x=1$.

β) Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι $f(-1)=4,\ f(0)=2$ και $f(1)=0$.

γ) Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g, όταν $x\in(-1,\ 0)$ ή $x\in(1,\ +\infty)$, δηλαδή όταν:

$$x\in(-1,\ 0)\cup(1,\ +\infty)$$

δ) Οι τιμές του x, για τις οποίες η παράσταση $A=\sqrt{f(x)+2x-2}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού είναι αυτές για τις οποίες ισχύει:

$$f(x)+2x-2\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq -2x+2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)\geq g(x) \Leftrightarrow x\in[-1,\ 0)\cup[1,\ +\infty)$$

(σύμφωνα και με το ερώτημα (γ))

Επομένως η παράσταση Α έχει νόημα πραγματικού αριθμού όταν:

$$x\in[-1,\ 0)\cup[1,\ +\infty)$$

Δ32. α) Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, τότε θέτουμε $x=0$ στην συνάρτηση $K(x)=12,5x+120$ και έχουμε $K(0)=120$ ευρώ.

Επομένως αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια έχει έξοδα 120 ευρώ (προφανώς πάγια έξοδα).

β) Ο συντελεστής 12,5 στην συνάρτηση $K(x)=12,5x+120$ εκφράζει το κόστος παραγωγής για ένα μπλουζάκι, ενώ ο συντελεστής 15,5 στην συνάρτηση $E(x)=15,5x$ εκφράζει την τιμή πώλησης για το ένα μπλουζάκι.

γ) Ο αριθμός από τα μπλουζάκια που πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα είναι η λύση της εξίσωσης:

$$K(x) = E(x) \Leftrightarrow 12,5x + 120 = 15,5x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x = 120 \Leftrightarrow x = 40$$

Επομένως για να «μην μπαίνει μέσα» η επιχείρηση πρέπει να πουλήσουν 40 μπλουζάκια.

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια τα έσοδα θα είναι

$$E(60) = 15,5 \cdot 60 = 930 \text{ ευρώ}$$

και τα έξοδα

$$K(60) = 12,5 \cdot 60 + 120 = 870 \text{ ευρώ}$$

Επομένως το κέρδος θα είναι 930-870=60 ευρώ.

Δ33[30].α) Αφού η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$ έχει πεδίο ορισμού[31] το σύνολο $\mathbb{R} - \{-2,\ 1\}$ σημαίνει οτι οι ρίζες του τριωνύμου $x^2+\kappa x+\lambda$, που βρίσκεται στον παρονομαστή, είναι οι αριθμοί 1 και -2. Άρα έχουμε:

$$\begin{Bmatrix} 1+\kappa+\lambda = 0 \Leftrightarrow \kappa+\lambda = -1 \ (1) \\ 4-2\kappa+\lambda = 0 \Leftrightarrow -2\kappa+\lambda = -4 \ (2) \end{Bmatrix}$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) παίρνουμε $3\kappa = 3 \Leftrightarrow \kappa = 1$, οπότε $\lambda = -2$.

β) Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -2$ έχουμε

i) Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-2,\ 1\}$

$$g(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+x-2} =$$
$$= \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)} = (x+1)(x-2)$$

30. Η ορθή διατύπωση θα ήταν «Η συνάρτηση g ορίζεται στο **ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του** $\mathbb{R}$», διότι η γνώση του πεδίου ορισμού της g δεν περιορίζει απαραίτητα και τις τιμές των κ και λ.

31. Αν $\kappa^2 - 4\lambda < 0$ η g έχει πεδίο οριαμού το σύνολο $\mathbb{R}$. Άρα η λύση που δίνεται έχει ως προυπόθεση ότι $\kappa^2 - 4\lambda > 0$. Επίσης αν $\kappa^2 - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \kappa^2 = \lambda$ θα έχει μία διπλή ρίζα.

ii) Οι ρίζες της συνάρτησης $g(x)=(x+1)(x-2)=x^2-x-2$ είναι $x_1=-1$ και $x_2=2$. Το πρόσημο της g είναι:

- $g(x)<0$, για κάθε $x\in(-1,\ 2)$
- $g(x)>0$, για κάθε $x\in(-\infty,\ -1)\cup(2,\ +\infty)$

Άρα αφού $\alpha,\ \beta\in(-1,\ 1)\cup(1,\ 2)\subset(-1,\ 2)$ έχουμε ότι $\alpha,\ \beta\in(-1,\ 2)$ και επομένως $g(\alpha)<0$ και $g(\beta)<0$, οπότε είναι $g(\alpha)\cdot g(\beta)>0$.

Δ34[32]. α) Αφού η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$ έχει πεδίο ορισμού[33] το σύνολο $\mathbb{R}-\{-2,\ 1\}$ σημαίνει οτι οι ρίζες του τριωνύμου $x^2+\kappa x+\lambda$, που βρίσκεται στον παρονομαστή, είναι οι αριθμοί 1 και –2. Άρα έχουμε:

$$\left.\begin{cases}1+\kappa+\lambda=0\Leftrightarrow\kappa+\lambda=-1\ (1)\\ 4-2\kappa+\lambda=0\Leftrightarrow-2\kappa+\lambda=-4\ (2)\end{cases}\right\}$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) παίρνουμε $3\kappa=3\Leftrightarrow\kappa=1$, οπότε $\lambda=-2$.

β) Αν $\kappa=1$ και $\lambda=-2$ έχουμε:

i) Για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{-2,\ 1\}$

$$g(x)=\frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+x-2}=$$
$$=\frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)}=(x+1)(x-2)$$

32. Ισχύει η ίδια παρατήρηση όπως και στο θέμα Δ34.

33. Ισχύει το σχόλιο του προηγούμενου θέματος.

ii) Οι ρίζες της συνάρτησης $g(x)=(x+1)(x-2)=x^2-x-2$ είναι $x_1=-1$ και $x_2=2$. Το πρόσημο της g είναι:

- $g(x)<0$, για κάθε $x\in(-1,\ 2)$
- $g(x)>0$, για κάθε $x\in(-\infty,\ -1)\cup(2,\ +\infty)$

$$g(\alpha+3)>g(\alpha)\Leftrightarrow(\alpha+3)^2-(\alpha+3)-2>\alpha^2-\alpha-2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\alpha^2+6\alpha+9-\alpha-3-2>\alpha^2-\alpha-2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6\alpha>-6\Leftrightarrow\alpha>-1$$

η οποία είναι αληθής αφού $\alpha\in(-1,\ 1)\cup(1,\ 2)$.

Επομένως[34] για $\alpha\in(-1,\ 1)\cup(1,\ 2)$ έχουμε $g(\alpha+3)>g(\alpha)$

Δ35. α) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα x΄x είναι οι λύσεις της εξίσωσης $g(x)=0$. Έχουμε διαδοχικά:

$$g(x)=0\Leftrightarrow x^2-9=0\Leftrightarrow x^2=9\Leftrightarrow(x=3\ \text{ ή }\ x=-3)$$

Επομένως τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x΄x είναι τα $B(3,\ 0)$ και $\Gamma(-3,\ 0)$.

β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα x΄x είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$. Άρα έχουμε:

$$f(x)=0\Leftrightarrow 4x+2=0\Leftrightarrow 4x=-2\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

Επομένως η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει[35] τον άξονα x΄x σε κάποιο από τα σημεία $B(3,\ 0)$ και $\Gamma(-3,\ 0)$.

34. Η διατύπωση του θέματος θα ήταν πιο ορθή αν στην υπόθεση είχαμε $\alpha(-1,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$, αφού η ανίσωση $g(\alpha+3)>g(\alpha)$ ισχύει πιο γενικά για κάθε $\alpha(-1,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$ που περιέχει το $(-1,\ 1)\cup(1,\ 2)$.

35. Θα μπορούσαμε απλά να δούμε ότι τα σημεία $A(3,\ 0)$ και $B(-3,\ 0)$ δεν επαληθεύουν την συνάρτηση $f(x)=4x+2$, αφού $f(3)=14$ και $f(-3)=-10$.

γ) • Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν κοινό σημείο πάνω στον άξονα x΄x έχουμε:

$$f(x_0)=g(x_0)=0 \Leftrightarrow \left(4x_0+2=0 \text{ και } {x_0}^2-9=0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x_0=-\frac{1}{2} \text{ και } x_0=3 \text{ ή } x_0=-3\right)$$

που είναι άτοπο.

Άρα οι C_f και C_g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω στον άξονα x΄x.

• Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν κονό σημείο πάνω στον άξονα y΄y έχουμε $f(0)=g(0) \Leftrightarrow 2=-9$, που είναι προφανώς άτοπο.

Άρα οι C_f και C_g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω στον άξονα y΄y Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες.

δ) Αφού η ζητούμενη συνάρτηση είναι ευθεία θα έχει τη μορφή $h(x)=\alpha x+\beta$, με $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Επειδή η h διέρχεται από το σημείο $A(0,\ 3)$ έχουμε $h(0)=3 \Leftrightarrow \beta=3$, οπότε η συνάρτηση γίνεται $h(x)=\alpha x+3$ με $\alpha \in \mathbb{R}$. Ακόμα επειδή η h τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Ox, το σημείο τομής της C_h και της C_g θα είναι σημείο του άξονα x΄x με θετική τετμημένη, οπότε είναι το σημείο $B(3,\ 0)$.

Έχουμε διαδοχικά:

$$h(3)=g(3) \Leftrightarrow 3\alpha+3=0 \Leftrightarrow 3\alpha=-3 \Leftrightarrow \alpha=-1$$

Επομένως η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $h(x)=-x+3,\ x \in \mathbb{R}$.

Δ36. α) Οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$. Άρα πρέπει η εξίσωση $f(x)=g(x)$ να έχει μία μόνο λύση. Εχουμε:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2+3x+2=x+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow \left(x+1\right)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

Το σημείο τομής των C_f και C_g είναι το $A\left(-1,\ f(-1)\right)$[ή $A\left(-1,\ g(-1)\right)$], δηλαδή το $A\left(-1,\ 0\right)$.

β) Οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων C_f και C_h είναι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=h(x)$. Έχουμε:

$$f(x)=h(x) \Leftrightarrow x^2+3x+2=x+\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+2x+2-\alpha=0,\ \alpha\in\mathbb{R}\ (1)$$

Η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=4-4\left(2-\alpha\right)=4-8+4\alpha=-4+4\alpha=4\left(\alpha-1\right)$$

οπότε:

i) Αν $\Delta>0 \Leftrightarrow 4\left(\alpha-1\right)>0 \Leftrightarrow \alpha-1>0 \Leftrightarrow \alpha>1$, η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες, δηλαδή οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h έχουν δύο κοινά σημεία.

ii) Αν $\Delta<0 \Leftrightarrow 4\left(\alpha-1\right)<0 \Leftrightarrow \alpha-1<0 \Leftrightarrow \alpha<1$, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες, δηλαδή οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h δεν έχουν κοινά σημεία.

Απαντήσεις και λύσεις
Διαγωνισμάτων

Διαγώνισμα 1

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α) Σωστό. **β)** Σωστό. **γ)** Σωστό.

δ) Σωστό. **ε)** Λάθος.

Α2. Απόδειξη της πρότασης 1.

ΘΕΜΑ Β

Δες τη λύση στο θέμα Β9.

ΘΕΜΑ Γ

Δες τη λύση στο θέμα Γ6.

ΘΕΜΑ Δ

Δες τη λύση στο θέμα Δ32.

Διαγώνισμα 2

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α) Σωστό. **β)** Σωστό. **γ)** Λάθος.

δ)

1	2	3
β	γ	α

ε)

1	2	3
δ	α	β

Α2. Απόδειξη της πρότασης 1.

ΘΕΜΑ Β

Δες τη λύση στο θέμα Β18.

ΘΕΜΑ Γ

Δες τη λύση στο θέμα Γ9.

ΘΕΜΑ Δ

Δες τη λύση στο θέμα Δ10.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο
Μελέτη Βασικών Συναρτήσεων

- ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
- ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ
- ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις
στις ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου

I)

Αριθμός ερώτησης	**Απάντηση**	**Σχόλιο**
1	Ψ	Η παραβολή είναι η $y = 2x^2$, οπότε βρίσκεται στο 1^o και 2^o τεταρτημόριο.
2	Α	Είναι $x_1 + x_2 = 2 = -\frac{\beta}{\alpha}$, οπότε $-\frac{\beta}{\alpha} = 2 \Leftrightarrow -\frac{\beta}{2\alpha} = 1$. Άρα έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 1$.
3	Α	Το σύστημα των δύο εξισώσεων έχει μοναδική λύση.
4	Ψ	Το σύστημα των δύο εξισώσεων είναι αδύνατο.

II) 1. $f(-5) > 0,\ f(1) < 0,\ f(5) > 0,\ \gamma < 0,\ \beta = -4$

2. $f(-5) < 0,\ f(-2) > 0,\ f(5) < 0,\ \gamma > 0,\ \beta = -2$

III)

1	2	3	4
Β	Γ	Γ	Δ

IV)

f_1	f_2	f_3	f_4
C_2	C_4	C_1	C_3

Απαντήσεις
στις ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου

Α.1.1. Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Σ	Λ	Λ	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Λ

Α.1.2. Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

1	2	3	4	5	6
Β	Γ	Α	Α	Γ	Γ

Α.1.3. Ερωτήσεις Αντιστοίχισης

1.

1	2	3
δ	β	α

2.

1	2	3
α	γ	β

3.

1	2	3
γ	α	δ

Λύσεις ασκήσεων
της Τράπεζας Θεμάτων

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. **α)** Η συνάρτηση $f(x)=3x^2+5x-2$ γράφεται[36] και ως $f(x)=3\left(x+\frac{5}{6}\right)-\frac{49}{12}$. Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της παραβολής $g(x)=3x^2$, μίας οριζόντιας κατά $\frac{5}{6}$ μονάδες προς τα αριστερά και μίας κατακόρυφης προς τα κάτω κατά $\frac{49}{12}$.

β) Η συνάρτηση $\varphi(x)=3x^2-7x+4$ γράφεται και ως $\varphi(x)=3\left(x-\frac{7}{6}\right)-\frac{1}{12}$. Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της παραβολής $h(x)=3x^2$, μίας οριζόντιας κατά $\frac{7}{6}$ μονάδες προς τα δεξιά και μίας κατακόρυφης προς τα κάτω κατά $\frac{1}{12}$.

Γ2. Είναι παραβολές και η μελέτη τους γίνεται εύκολα σύμφωνα με τη αντίστοιχη θεωρία. Οι γραφικές παραστάσεις είναι απλές.

Γ3. **α)** Για να διέρχεται η παραβολή $y=-x^2+|\kappa-1|x+\kappa,\ \kappa>0$ από το σημείο $A\left(\sqrt{\kappa},\ 0\right)$ πρέπει:

36. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ γράφεται και ως $f(x)=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha}$.

$$0=-\kappa+|\kappa-1|\cdot\sqrt{\kappa}+\kappa \Leftrightarrow |\kappa-1|\cdot\sqrt{\kappa}=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |\kappa-1|=0 \Leftrightarrow \kappa-1=0 \Leftrightarrow \kappa=1$$

η οποία είναι δεκτή τιμή.

β) Η παραβολή $y=-x^2+|\kappa-1|x+\kappa,\ \kappa\in\mathbb{R}$ τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $A(x,\, 0)$, οπότε έχουμε:

$$0=-x^2+|\kappa-1|x+\kappa \Leftrightarrow x^2-|\kappa-1|x-\kappa=0 \ (1)$$

Η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα $\Delta=|\kappa-1|^2+4\kappa>0$, οπότε η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες .

Επομένως η παραβολή $y=-x^2+|\kappa-1|x+\kappa$, με $\kappa>0$ τέμνει τον άξονα x΄x σε δύο διαφορετικά σημεία.

Επίσης η παραβολή τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $K(0,\kappa)$ αφού την επαληθεύει.

γ) Η κορυφή της παραβολής[37] είναι το σημείο $K\left(\frac{|\kappa-1|}{2},\ \frac{\Delta}{4}\right)$. Αφού η τετμημένη της κορυφής είναι 1 έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{|\kappa-1|}{2}=1 \Leftrightarrow |\kappa-1|=2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\kappa-1=2 \ \text{ή} \ \kappa-1=-2) \Leftrightarrow (\kappa=3 \ \text{ή} \ \kappa=-1)$$

Αφού $\kappa>0$ έχουμε ότι $\kappa=3$.

Επομένως για $\kappa=3$ η τετμημένη της κορυφής της παραβολής $y=-x^2+|\kappa-1|x+\kappa$, με $\kappa\in(0,\ +\infty)$ είναι 1.

Γ4. α) $x_1=-1$ και $x_2=4$.

γ) $x<-1$ ή $x>4$

Γ5. α) Έχουμε:

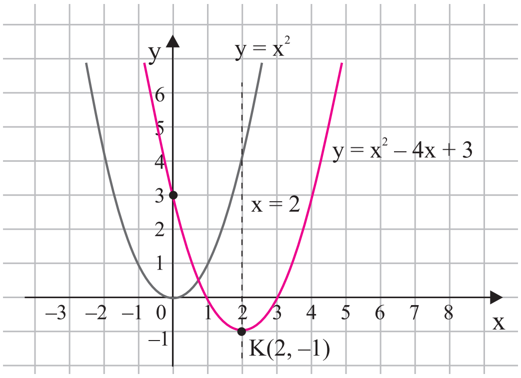
37. Η κορυφή της παραβολής $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha\neq 0$ είναι $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha},\ -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$, με $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$

$$f(x)=x^2-4x+3=\left(x^2-4x+4\right)-1=\left(x-2\right)^2-1$$

με $\alpha=1,\ p=2,\ q=-1$.

β) Η γραφική της παράσταση είναι παραβολή η οποία έχει προκύψει από την οριζόντια μετατόπιση της $y=x^2$ κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και στη συνέχεια από την κατακόρυφη μετατόπιση κατά 1 μονάδα προς τα κάτω.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



γ) Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι η συνάρτηση f,

- Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,\ 2\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[2,\ +\infty\right)$,
- Για $x=2$ παρουσιάζει ελάχιστο, το $f(2)=-1$.

  Η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f φαίνεται εποπτικά στον επόμενο πίνακα:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)=x^2-4x+3$	$-\infty$ $\searrow$	-1 min	$\nearrow$ $+\infty$

Γ6. **α)** $O(0,\ 0)$, $A\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$ και $B\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$.

γ) $g(x)=\begin{cases}(x-3)^2, \text{αν } x\geq 0\\ 2(x-3)^2-1, \text{αν } x<0\end{cases}$

Γ7. Η συνάρτηση $f(x)=\left(\left|2\sqrt[3]{\alpha}-3\right|-1\right)x^2$ είναι παραβολή με κορυφή την αρχή των αξόνων.

α) Για να είναι η f γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,\ +\infty)$ πρέπει να ισχύει:

$$\left|2\sqrt[3]{\alpha}-3\right|-1<0\Leftrightarrow\left|2\sqrt[3]{\alpha}-3\right|<1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -1<2\sqrt[3]{\alpha}-3<1\Leftrightarrow 2<2\sqrt[3]{\alpha}<4\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1<\sqrt[3]{\alpha}<2\Leftrightarrow 1<\alpha<8$$

Επομένως για $\alpha\in(1,\ 8)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,\ +\infty)$.

β) Για να έχει ελάχιστο η συνάρτηση f (στο $x=0$, το $f(0)=0$) πρέπει να ισχύει:

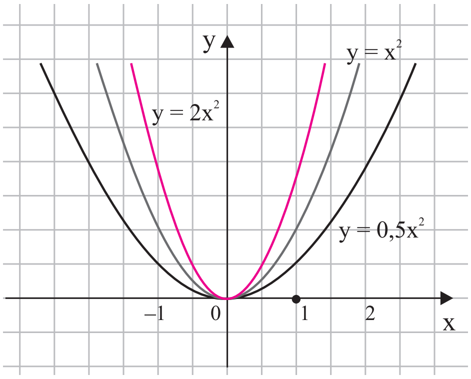
$$\left|2\sqrt[3]{\alpha}-3\right|-1>0\Leftrightarrow\left|2\sqrt[3]{\alpha}-3\right|>1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(2\sqrt[3]{\alpha}-3>1 \text{ ή } 2\sqrt[3]{\alpha}-3<-1\right)\Leftrightarrow$$
$$\left(2\sqrt[3]{\alpha}>4 \text{ ή } 2\sqrt[3]{\alpha}<2\right)\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{\alpha}>2 \text{ ή } \sqrt[3]{\alpha}<1\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\alpha>8 \text{ ή } \alpha<1)$$

Επομένως για $\alpha\in(-\infty,\ 1)\cup(8,\ +\infty)$ η fέχει ελάχιστο.

γ) • Για $\alpha=8$ η συνάρτηση γίνεται $f_1(x)=2x^2$, δηλαδή η παραβολή $y=2x^2$, η οποία έχει ελάχιστο στο $x=0$, το $f(0)=0$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,\ 0)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,\ +\infty)$.

- Για $\alpha = \frac{1}{8}$ η συνάρτηση γίνεται $f_2(x) = x^2$, δηλαδή η παραβολή $y = x^2$, η οποία έχει ελάχιστο στο $x = 0$, το $f(0) = 0$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,\ 0)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,\ +\infty)$.
- Για $\alpha = \frac{729}{64}$ η συνάρτηση γίνεται $f_3(x) = 0,5x^2$, δηλαδή η παραβολή $y = 0,5x^2$, η οποία έχει ελάχιστο στο $x = 0$, το $f(0) = 0$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,\ 0)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,\ +\infty)$.

Οι γραφικές παραστάσεις των τριών αυτών παραβολών για τις αντίστοιχες τιμές του αφαίνονται στο επόεμνο σχήμα:



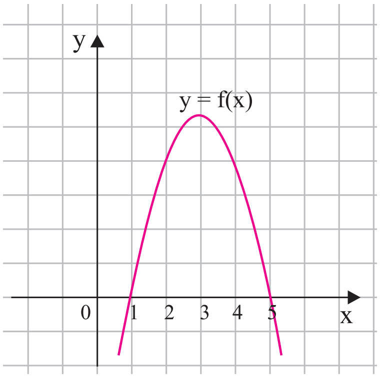
Γ8. **α)** $A\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2},\ 0\right), B\left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2},\ 0\right), \Gamma\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\ 0\right), \Delta\left(-\frac{3-\sqrt{5}}{2},\ 0\right)$

γ) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 1, \text{αν } x \geq 0 \\ x^2 + 3x + 1, \text{αν } x < 0 \end{cases}$

Γνησίως φθίνουσα $\left(-\infty,\ -\frac{3}{2}\right] \cup \left[0,\ \frac{3}{2}\right]$.

Γνησίως αύξουσα στα $\left[-\frac{3}{2},\ 0\right] \cup \left[\frac{3}{2},\ +\infty\right)$.

Γ9.



α) Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι το τριώνυμο

$$f(x) = -2x^2 + \beta x + \gamma$$

έχει δύο ρίζες και άρα η διακρίνουσα Δ είναι θετική, δηλαδή $\Delta > 0$.

β) Έχουμε:

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow -2 + \beta + \gamma = 0 \ (1) \text{ και } f(5) = 0 \Leftrightarrow -50 + 5\beta + \gamma = 0 \ (2)$$

Οι σχέσεις (1) και (2) αποτελούν σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Με αφαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε $4\beta = 48 \Leftrightarrow \beta = 12$ και από τη σχέση (1) έχουμε $\gamma = -10$.

Επομένως οι ζητούμενες τιμές των β και γ είναι $\beta = 12$ και $\gamma = -10$.

γ) Σύμφωνα με το ερώτημα (β) για τις τιμές $\beta = 12$ και $\gamma = -10$ η συνάρτηση γίνεται $f(x) = -2x^2 + 12x - 10$ η οποία γράφεται και ως $f(x) = -2(x-3)^2 + 8$. Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = -2x^2$ θα συμπέσει με αυτήν της συνάρτησης f όταν η h μετατοπιστεί κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και στη συνέχεια κατά 8 μονάδες προς τα πάνω.

Γ10. α) $E = f(x) = 5x - \frac{1}{2}x^2, x \in (0,\ 10)$

β) $x = 5$ cm (και $y = 5$, δηλαδή ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο) και

$$E_{max} = \frac{25}{4} \text{ cm}^2$$

Απαντήσεις και λύσεις
Διαγωνισμάτων

Διαγώνισμα 1

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α) Λάθος. **β)** Σωστό. **γ)** Σωστό.

δ) Σωστό. **ε)** Λάθος.

Α2. Απόδειξη της πρότασης 2.

ΘΕΜΑ Β

Δες τη λύση στο θέμα Γ7.

ΘΕΜΑ Γ

Δες τη λύση στο θέμα Γ3 .

ΘΕΜΑ Δ

Δες τη λύση στο θέμα Γ8

Διαγώνισμα 1

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α) Σωστό. **β)** Σωστό. **γ)** Σωστό.

δ)

1	2	3
α	γ	β

ε)

1	2	3
γ	α	δ

Α2. Απόδειξη της πρότασης 4.

ΘΕΜΑ Β

Δες τη λύση στο θέμα Γ 2 (α) και (β).

ΘΕΜΑ Γ

Δες τη λύση στο θέμα Γ6.

ΘΕΜΑ Δ

Δες τη λύση στο θέμα Γ4.

Απαντήσεις και λύσεις
στα επαναληπτικά διαγωνίσματα

1ο Γενικό Επαναληπτικό

ΘΕΜΑ Α

α) Σωστό. **β)** Λάθος. **γ)** Σωστό.

δ) Σωστό. **ε)** Σωστό.

Α2. Απόδειξη της πρότασης 5 στο Κεφάλαιο 4^{ο} .

ΘΕΜΑ Β

Δες τη λύση στο θέμα Β8 στο Κεφάλαιο 4^{ο}.

ΘΕΜΑ Γ

Δες τη λύση στο θέμα Γ6 στο Κεφάλαιο 5^{ο}.

ΘΕΜΑ Δ

Δες τη λύση στο θέμα Δ22 στο Κεφάλαιο 6^{ο}.

2ο Γενικό Επαναληπτικό

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α) Λάθος. **β)** Σωστό. **γ)** Λάθος.

δ) Σωστό. **ε)** Λάθος.

Α2. Απόδειξη της πρότασης στο Κεφάλαιο 1^{ο} (Α΄ τεύχος).

ΘΕΜΑ Β

Δες τη λύση στο θέμα Β2 στο Κεφάλαιο 1^{ο} (Α΄ τεύχος).

ΘΕΜΑ Γ

Δες τη λύση στο θέμα Γ1 στο Κεφάλαιο 7^{ο}.

ΘΕΜΑ Δ

Δες τη λύση στο θέμα Δ31 στο Κεφάλαιο 6^{ο}.

3ο Γενικό Επαναληπτικό

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α) Σωστό. **β)** Σωστό. **γ)** Το Β.

δ) Το Α. **ε)** Το Β.

Α2. Απόδειξη της πρότασης 1 στο Κεφάλαιο 5ο.

ΘΕΜΑ Β

Δες τη λύση στο θέμα Β21 στο Κεφάλαιο 6ο.

ΘΕΜΑ Γ

Δες τη λύση στο θέμα Γ12 στο Κεφάλαιο 1ο (Α΄ τεύχος).

ΘΕΜΑ Δ

Δες τη λύση στο θέμα Δ15 στο Κεφάλαιο 5ο.

4ο Γενικό Επαναληπτικό

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α) Σωστό. **β)** Λάθος. **γ)** Σωστό .

δ)

1	2	3
γ	α	δ

ε)

1	2	3
γ	β	α

Α2. Απόδειξη της πρότασης 1 στο Κεφάλαιο 6ο.

ΘΕΜΑ Β

Δες τη λύση στο θέμα Β7 στο Κεφάλαιο 5ο.

ΘΕΜΑ Γ

Δες τη λύση στο θέμα Γ112 στο Κεφάλαιο 3ο (Α΄τεύχος) .

ΘΕΜΑ Δ

Δες τη λύση στο θέμα Δ35 στο Κεφάλαιο 6ο.