ΘΕΜΑ 2

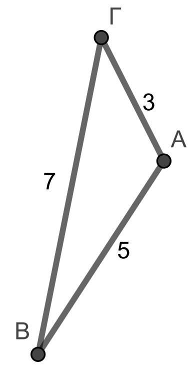
Τα μήκη των πλευρών α, β, γ του τριγώνου ΑΒΓ είναι : $\alpha=7$, $\beta=3$ και $\gamma=5$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΑΓ και να υπολογίσετε το μήκος της. (Μονάδες 13)

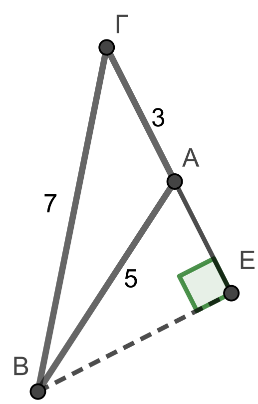
ΛΥΣΗ

Σχεδιάζουμε τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών ΑΒ = γ = 5, ΑΓ = β = 3 και ΒΓ = α =7. Συγκρίνουμε το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς του με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του.



Παρατηρούμε ότι $\alpha^2 = 7^2 = 49$ και $\beta^2 + \gamma^2 = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$. Δηλαδή ισχύει ότι $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο με αμβλεία τη γωνία που είναι απέναντι από την πλευρά α , δηλαδή αμβλεία είναι η γωνία Α.

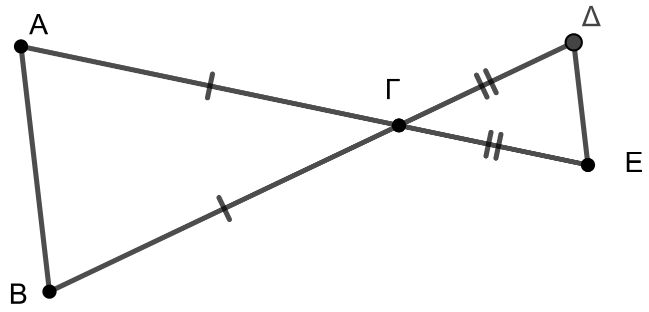
β)



Για να σχεδιάσουμε την προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΑΓ φέρουμε κάθετο τμήμα από την κορυφή Β προς το φορέα της πλευράς ΑΓ. Αν Ε είναι το σημείο τομής της καθέτου αυτής με το φορέα της ΑΓ, τότε η προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΑΓ είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ. Από τη γενίκευση του πυθαγορείου θεωρήματος για την πλευρά που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία έχουμε: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\cdot\beta\cdot ΑΕ$ ή $7^2 = 3^2 + 5^2 + 2\cdot 3\cdot ΑΕ$ ή $49 = 34 + 6\cdot ΑΕ$ ή $49 - 34 = 6\cdot ΑΕ$ ή $15 = 6\cdot ΑΕ$ ή $ΑΕ = \frac{15}{6}$.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΒΔ τέμνονται στο Γ, τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΔΕ που σχηματίζονται είναι ισοσκελή και οι βάσεις τους ΑΒ και ΔΕ είναι τέτοιες, ώστε ΑΒ = 2·ΔΕ.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΔΕ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

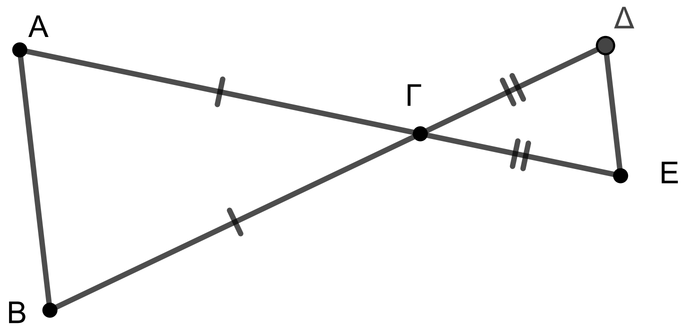
β)

i. Να γράψετε την ισότητα των λόγων που προκύπτει από την ομοιότητα των τριγώνων του ερωτήματος α).

ii. Ποια σχέση συνδέει τις πλευρές ΑΓ και ΓΕ των δύο τριγώνων;

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΕΔ είναι ισοσκελή με βάσεις ΑΒ και ΔΕ αντίστοιχα και έχουν τις γωνίες στην κορυφή τους ίσες αφού, $\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{B} = \Delta\widehat{\Gamma}\mathrm{E}$, ως κατακορυφήν.

Έτσι $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{B}} = \dfrac{180° - \mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{B}}{2} = \dfrac{180° - \Delta\widehat{\Gamma}\mathrm{E}}{2} = \widehat{\mathrm{E}} = \widehat{\Delta}$. Οπότε τα τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, άρα είναι όμοια.

β)

i. Ομόλογες είναι οι πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες στα δύο τρίγωνα. Οπότε οι λόγοι των ομόλογων πλευρών είναι :

   $\dfrac{\mathrm{AB}}{\Delta\mathrm{E}}$, ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{B}$ και $\Delta\widehat{\Gamma}\mathrm{E}$

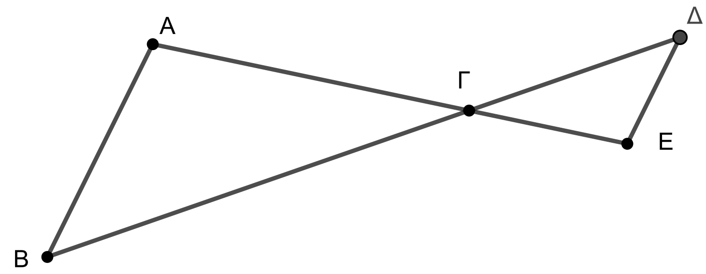
   $\dfrac{\mathrm{B}\Gamma}{\Gamma\Delta}$, $\dfrac{\mathrm{A}\Gamma}{\Gamma\mathrm{E}}$, ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\mathrm{A}}$, $\widehat{\mathrm{E}}$ και $\widehat{\mathrm{B}}$, $\widehat{\Delta}$ αντίστοιχα.

   Αφού τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΕΔ είναι όμοια οι λόγοι των ομόλογων πλευρών του είναι ίσοι δηλαδή, ισχύει $\dfrac{\mathrm{AB}}{\Delta\mathrm{E}} = \dfrac{\mathrm{B}\Gamma}{\Gamma\Delta} = \dfrac{\mathrm{A}\Gamma}{\Gamma\mathrm{E}}$.

ii. Από το προηγούμενο ερώτημα ισχύει $\dfrac{\mathrm{A}\Gamma}{\Gamma\mathrm{E}} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\Delta\mathrm{E}} = \dfrac{2\cdot\Delta\mathrm{E}}{\Delta\mathrm{E}} = 2$. Δηλαδή ισχύει $\dfrac{\mathrm{A}\Gamma}{\Gamma\mathrm{E}} = 2$ ή ΑΓ = 2·ΓΕ. Οπότε η πλευρά ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ είναι διπλάσια από την πλευρά ΓΕ του τριγώνου ΓΔΕ.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα τα τμήματα ΑΒ και ΔΕ είναι παράλληλα και τα τμήματα ΑΓ και ΓΕ είναι τέτοια, ώστε ΑΓ=2ΓΕ.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

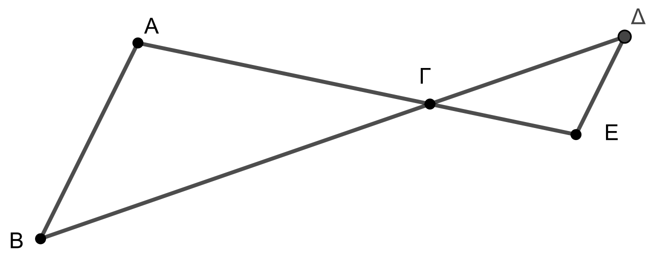
β)

i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δύο τριγώνων.

ii. Ποιος είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων;

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ



α) Δίνεται ότι ΑΒ//ΔΕ οπότε οι γωνίες $\widehat{\mathrm{A}}$ και $\widehat{\mathrm{E}}$ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΔΕ με τέμνουσα την ΑΕ. Ομοίως $\widehat{\mathrm{B}}$ = $\widehat{\Delta}$ ως εντός εναλλάξ των ΑΒ και ΔΕ με τέμνουσα τη ΒΔ. Οι γωνίες $\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{B}$ και $\Delta\widehat{\Gamma}\mathrm{E}$ είναι ίσες ως κατακορυφήν. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ έχουν τις γωνίες τους ίσες μια προς μία, οπότε είναι όμοια.

β)

i. Ομόλογες είναι οι πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες στα δύο τρίγωνα. Οπότε οι λόγοι των ομόλογων πλευρών είναι :

   $\frac{\mathrm{B}\Gamma}{\Gamma\Delta}$, ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\mathrm{A}}$ και $\widehat{\mathrm{E}}$

   $\frac{\mathrm{A}\Gamma}{\Gamma\mathrm{E}}$, ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\mathrm{B}}$ και $\widehat{\Delta}$ και

   $\frac{\mathrm{AB}}{\Delta\mathrm{E}}$, ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{B}$ και $\Delta\widehat{\Gamma}\mathrm{E}$.

ii. Ο λόγος ομοιότητας είναι ο λόγος των ομόλογων πλευρών τους, δηλαδή οποιοσδήποτε από τους ίσους λόγους $\frac{\mathrm{B}\Gamma}{\Gamma\Delta}$, $\frac{\mathrm{A}\Gamma}{\Gamma\mathrm{E}}$, $\frac{\mathrm{AB}}{\Delta\mathrm{E}}$. Οπότε ο λόγος ομοιότητας ισούται με $\frac{\mathrm{A}\Gamma}{\Gamma\mathrm{E}} = \frac{2\cdot\Gamma\mathrm{E}}{\Gamma\mathrm{E}} = 2$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ για τα οποία γνωρίζουμε ότι:

$\widehat{A} = 48^o$, $\widehat{B} = 53^o$, $\widehat{E} = 79^o$ και $\widehat{Z} = 48^o$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

β)

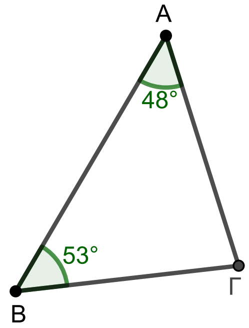
i. Ποιες είναι οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων; (Μονάδες 9)

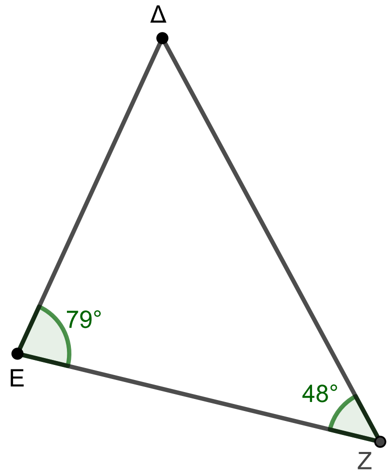
ii. Να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

Σχεδιάζουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ τέτοια ώστε $\widehat{A}$ = 48°, $\widehat{B}$ = 53°, $\widehat{E}$ = 79° και $\widehat{Z}$ = 48°.





α) Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ είναι 180°. Οπότε $\widehat{\Gamma}$ = 180° – (48° + 53°) = 180° – 101° = 79°. Αντίστοιχα στο τρίγωνο ΔΕΖ έχουμε $\widehat{\Delta}$ = 180° – (79° + 48°) = 180° – 127° = 53°. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι όμοια.

β)

i. Ομόλογες είναι οι πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες στα δύο τρίγωνα. Δηλαδή οι πλευρές ΒΓ και ΔΕ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{A}$ = $\widehat{Z}$ = 48°. Αντίστοιχα οι πλευρές ΑΓ και ΕΖ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B}$ = $\widehat{\Delta}$ = 53°, και οι πλευρές ΑΒ και ΔΖ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\Gamma}$ = $\widehat{E}$ = 79°.

ii. Οι ίσοι λόγοι των ομόλογων πλευρών είναι $\frac{B\Gamma}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{EZ} = \frac{AB}{\Delta Z}$.

ΘΕΜΑ 2

Για δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ΕΔΖ (ΕΔ = ΕΖ) γνωρίζουμε ότι:

$\widehat{\mathrm{A}} = 48^o$, $\widehat{\mathrm{Z}} = 66^o$ και ΑΒ = 3·ΕΔ.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΖ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β)

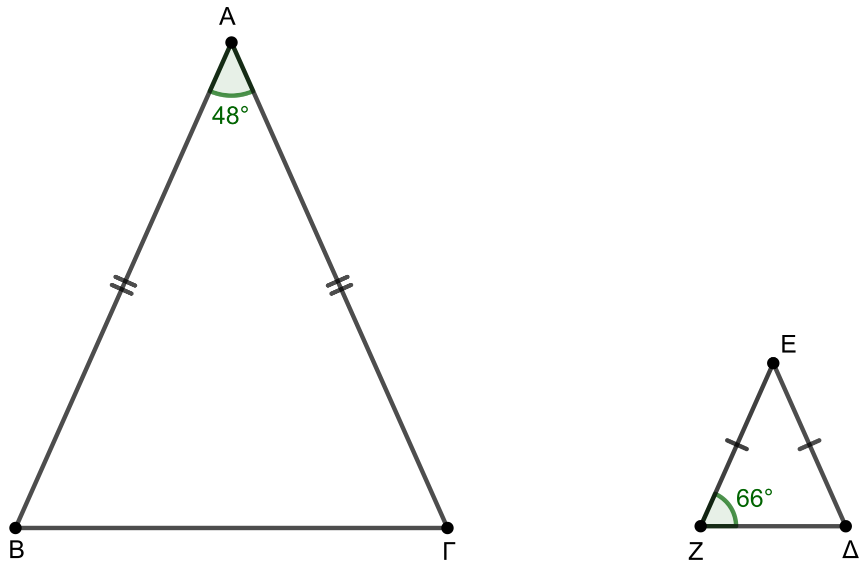
i. Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των δυο τριγώνων

ii. Να βρείτε το λόγο των βάσεων των δυο τριγώνων.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

Σχεδιάζουμε δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ΕΔΖ (ΕΔ = ΕΖ), τέτοια ώστε $\widehat{\mathrm{A}}$ = 48^o, $\widehat{\mathrm{Z}}$ = 66^o και ΑΒ = 3·ΕΔ.



Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ το άθροισμα των γωνιών του είναι 180^o. Οπότε καθεμιά από τις γωνίες της βάσης του θα είναι ίση με $\frac{180°-48°}{2}$ = $\frac{132°}{2}$ = 66^o . Στο ισοσκελές τρίγωνο ΕΖΔ έχουμε ότι η μια γωνία της βάσης του $\widehat{\mathrm{Z}}$ είναι ίση με 66^o , οπότε $\widehat{\Delta}$ = $\widehat{\mathrm{Z}}$ = 66^o και άρα η γωνία της κορυφής είναι ίση με 180^o – (66^o + 66^o) = 180^o – 132^o = 48^o . Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΖΔ έχουν τις γωνίες τους μία προς μία ίσες, οπότε είναι όμοια.

β)

i. Στα όμοια τρίγωνα ομόλογες είναι οι πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες. Οι λόγοι που σχηματίζονται είναι $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{EZ}}$, $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{E\Delta}}$ και $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{Z\Delta}}$ οι οποίοι είναι ίσοι μεταξύ τους, αφού τα τρίγωνα είναι όμοια. Δηλαδή ισχύει ότι: $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{EZ}}$ = $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{E\Delta}}$ = $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{Z\Delta}}$.

ii. Ο λόγος των βάσεων είναι ο λόγος $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{Z\Delta}}$ ο οποίος είναι ίσος με το λόγο $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{EZ}}$.

$\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{Z\Delta}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{EZ}} =$ $\frac{3\cdot\mathrm{E\Delta}}{\mathrm{EZ}}$ = $\frac{3\cdot\mathrm{EZ}}{\mathrm{EZ}}$ = 3. Άρα ο ζητούμενος λόγος των βάσεων είναι ίσος με 3.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ για τα οποία γνωρίζουμε ότι:

ΑΒ = 9, ΑΓ =15 και $\widehat{\mathrm{A}}$ = 48° , ΖΔ = 12, ΖΕ = 20 και $\widehat{\mathrm{Z}}$ = 48°.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β)

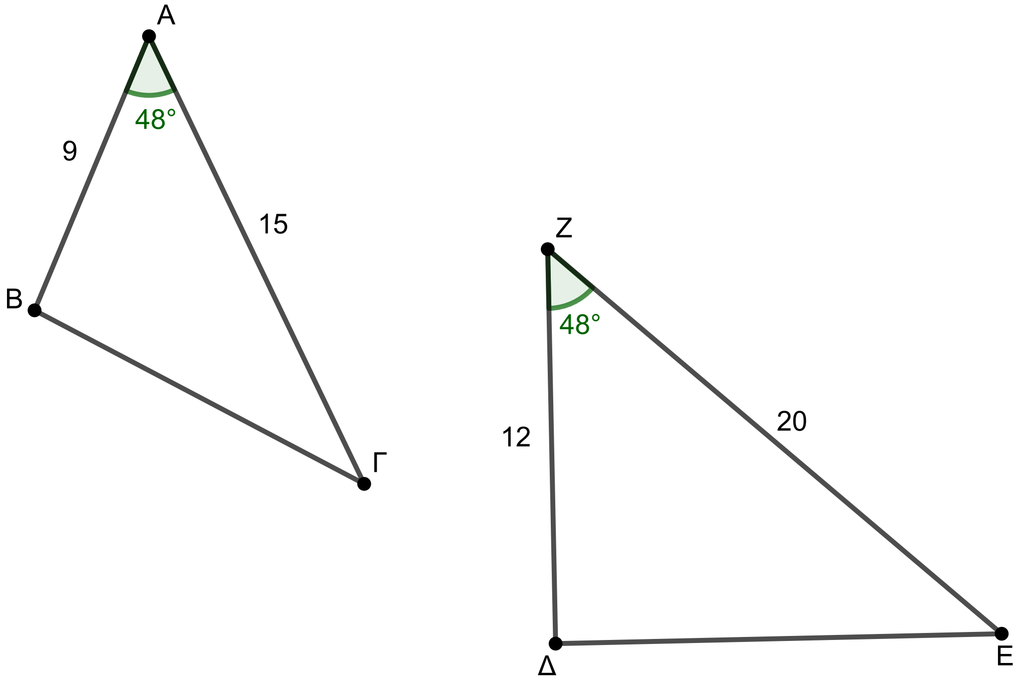
i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.

ii. Να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

Σχεδιάζουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΔΕ ώστε $\widehat{A} = \widehat{Z} = 48^o$, ΑΒ=9, ΑΓ=15, ΖΔ=12 και ΖΕ=20.



α) Στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΔΕ οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{Z}$ που καθεμιά είναι ίση με 48^o, περιέχονται στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ και ΖΔ, ΖΕ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύει $\frac{AB}{Z\Delta} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ και $\frac{A\Gamma}{ZE} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$, οπότε $\frac{AB}{Z\Delta} = \frac{A\Gamma}{ZE}$. Δηλαδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΔΕ έχουν δυο πλευρές τους ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες σε αυτές τις πλευρές ίσες, οπότε τα τρίγωνα είναι όμοια.

β)

i. Δύο λόγοι πλευρών των δυο τριγώνων είναι οι $\frac{AB}{Z\Delta}$ και $\frac{A\Gamma}{ZE}$ που αποδείξαμε πριν ότι είναι μεταξύ τους ίσοι αφού καθένας από τους λόγους αυτούς είναι ίσος με $\frac{3}{4}$. Οι τρίτες πλευρές των δύο τριγώνων είναι οι ΒΓ και ΔΕ που είναι ομόλογες αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{Z}$. Οι τρεις λόγοι των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων είναι $\frac{AB}{Z\Delta}$, $\frac{A\Gamma}{ZE}$ και $\frac{B\Gamma}{\Delta E}$.

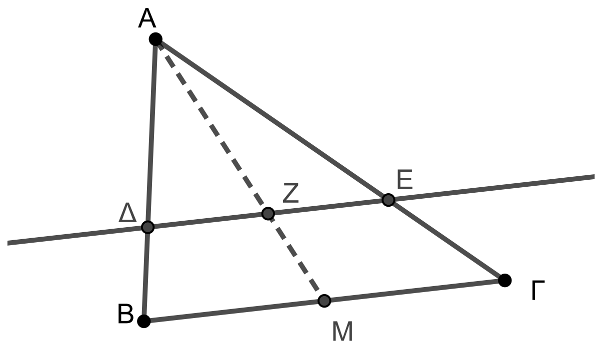
ii. Ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων είναι ο λόγος των ομόλογων πλευρών τους που όπως αποδείχθηκε στο ερώτημα α) ισούται με $\frac{3}{4}$.

ΘΕΜΑ 2

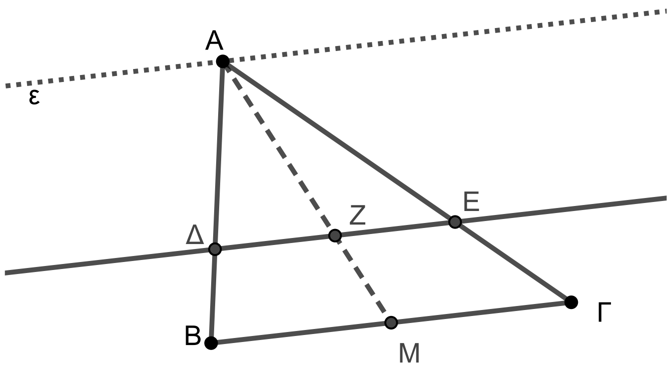
Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=6 και ΑΓ=9. ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου και το σημείο Ζ εσωτερικό στην ΑΜ ώστε να σχηματίζει λόγο $\frac{AZ}{AM}=\frac{2}{3}$. Από το σημείο Ζ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην πλευρά ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι : $\frac{A\Delta}{AB}=\frac{2}{3}$ και $\frac{AE}{E\Gamma}=2$. (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΑΔ και ΕΓ. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ



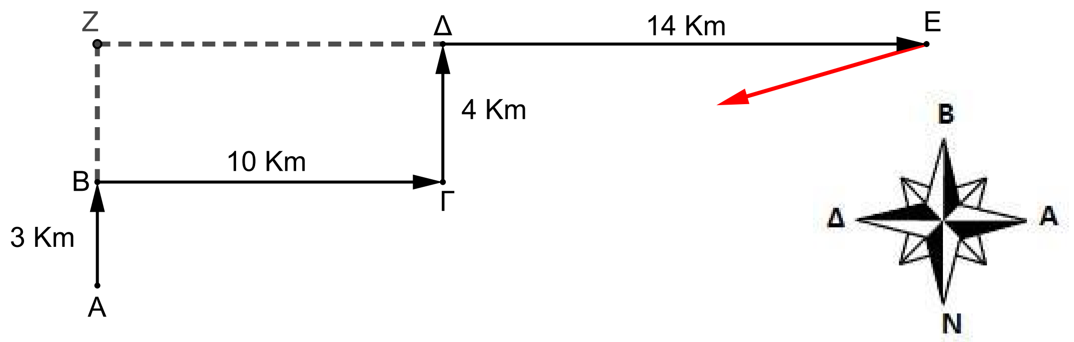
α) Θεωρούμε υποθετική ευθεία ε από το σημείο Α παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ. Τότε ε//ΔΕ//ΒΓ και οι ΑΒ, ΑΜ είναι τέμνουσες των ευθειών αυτών. Από το Θεώρημα του Θαλή έχουμε ότι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΖ}{ΑΜ}$, οπότε $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{2}{3}$ (1). Από το θεώρημα του Θαλή για τις τέμνουσες ΑΜ και ΑΓ έχουμε ότι $\frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΑΖ}{ΑΜ} = \frac{2}{3}$ (2). Από ιδιότητες αναλογιών $\frac{ΑΕ}{ΑΓ-ΑΕ} = \frac{2}{3-2}$, δηλαδή $\frac{ΑΕ}{ΕΓ} = 2$.

β) Από τη σχέση (1) του ερωτήματος α) έχουμε $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{2}{3}$ ή ΑΔ = $\frac{2}{3} \cdot ΑΒ = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$.

Αντίστοιχα από τη σχέση (2) έχουμε $\frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{2}{3}$ ή ΑΕ = $\frac{2}{3} \cdot ΑΓ = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6$. Οπότε, ΕΓ = ΑΓ – ΑΕ = = 9 – 6 = 3.

ΘΕΜΑ 4

Δύο κινητά βρίσκονται στο σημείο Α και σκοπεύουν να μεταβούν στο σημείο Ε, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο Α και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίζει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια προχωράει 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο Ε. Το δεύτερο κινητό ξεκινάει από το σημείο Α κινείται βόρεια μέχρι το σημείο Ζ και συνεχίζει ανατολικά μέχρι το σημείο Ε. Όταν συναντιούνται στο σημείο Ε επιστρέφουν μαζί στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα.



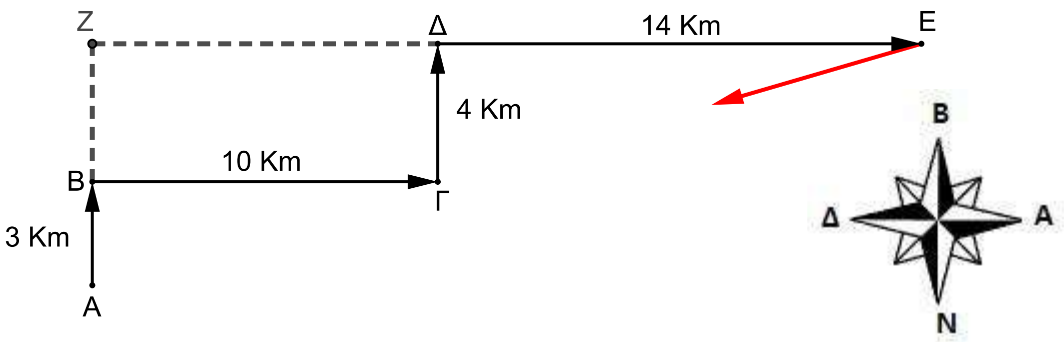
α)

i. Πόσα χιλιόμετρα διάνυσε το κάθε κινητό από το σημείο Α στο σημείο Ε με τον τρόπο που κινήθηκε; (Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε την απόσταση ΑΕ που διάνυσαν τα δύο κινητά κατά την επιστροφή από το σημείο Ε στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα. (Μονάδες 12)

β) Επιστρέφοντας τα δύο κινητά από το σημείο Ε στο σημείο Α, θα περάσουν από το σημείο Γ; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 08)

ΛΥΣΗ



α)

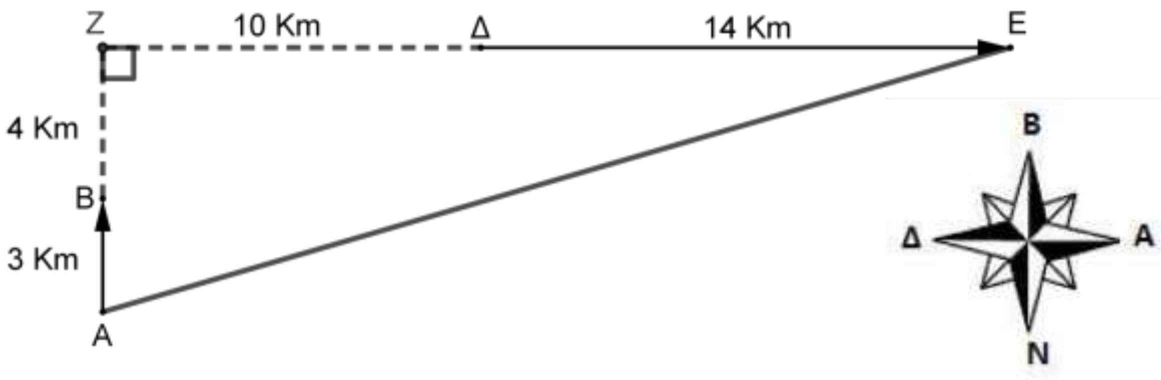
i. Το πρώτο κινητό που έκανε τη διαδρομή ΑΒΓΔΕ διάνυσε συνολικά (3+10+4+14) km = 31 km.

Για το δεύτερο κινητό που έκανε τη διαδρομή ΑΖΕ έχουμε:

ΑΖ//ΓΔ γιατί η κίνηση από το σημείο Α στο σημείο Ζ είναι βόρεια όπως και η κίνηση από το σημείο Γ στο σημείο Δ. Επίσης, η κίνηση από το σημείο Ζ στο σημείο Ε είναι ανατολικά όπως και η κίνηση από το σημείο Β στο σημείο Γ, άρα ΖΕ//ΒΓ. Στο τετράπλευρο ΒΓΔΖ οι απέναντι πλευρές τους είναι παράλληλες, οπότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο και επειδή οι γωνίες του είναι ορθές είναι ορθογώνιο.

Άρα ΒΖ=ΓΔ=4 και ΖΔ=ΒΓ=10. Η συνολική διαδρομή του δεύτερου κινητού είναι (7+10+14) km =31km

ii.



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΕ με $\widehat{Z} = 90^o$ εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$EA^2 = AZ^2 + ZE^2$ ή $EA^2 = 7^2 + 24^2$, δηλαδή $EA^2 = 49 + 576$, οπότε $EA^2 = 625$ ή EA = 25 km.

β) Αν, τα κινητά κατά την επιστροφή τους από το σημείο Ε στο Α, περάσουν από το σημείο Γ θα ισχύει ότι ΕΑ = ΕΓ + ΓΑ (1). Υπολογίζουμε τα τμήματα ΕΓ και ΓΑ εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο Θεώρημα στα ορθογώνια τρίγωνα ΔΓΕ και ΒΑΓ.

$ΕΓ^2 = ΕΔ^2 + ΔΓ^2$ ή $ΕΓ^2 = 14^2 + 4^2$, $ΕΓ^2 = 196 + 16$, $ΕΓ^2 = 212$, δηλαδή $ΕΓ = \sqrt{212}$ ή $ΕΓ = 2\sqrt{53}$.

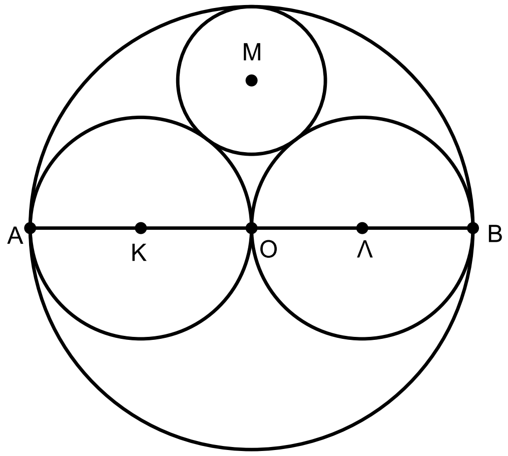
$ΑΓ^2 = ΒΓ^2 + ΑΒ^2$ ή $ΑΓ^2 = 10^2 + 3^2$, $ΑΓ^2 = 100 + 9$, $ΕΓ^2 = 109$, δηλαδή $ΕΓ = \sqrt{109}$.

Από το α)ii. ερώτημα βρήκαμε ότι ΕΑ = 25, οπότε από τη σχέση (1) έχουμε ότι:

$25 = 2\sqrt{53} + \sqrt{109}$. Δηλαδή ένας θετικός ρητός αριθμός ισούται με άθροισμα θετικών αρρήτων, πράγμα που είναι άτοπο. Άρα δεν θα περάσουν από το σημείο Γ.

ΘΕΜΑ 4

Δύο ίσοι κύκλοι (Κ,R) και (Λ,R) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ο. Ένας τρίτος κύκλος (Μ,ρ) εφάπτεται εξωτερικά με τους δύο κύκλους κέντρων Κ και Λ. Με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα 2R γράφουμε κύκλο, ο οποίος εφάπτεται εξωτερικά των 3 παραπάνω κύκλων, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Στον παρακάτω πίνακα, στη στήλη Α είναι οι διάκεντροι ΚΜ, ΛΜ και ΟΜ των κύκλων με κέντρα Κ, Λ, Μ και Ο και στη στήλη Β τα μήκη των διακέντρων αυτών. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα αντίστοιχα της στήλης Β, γράφοντας στην κόλλα σας μόνο τις αντιστοιχίσεις. (Μονάδες 06)

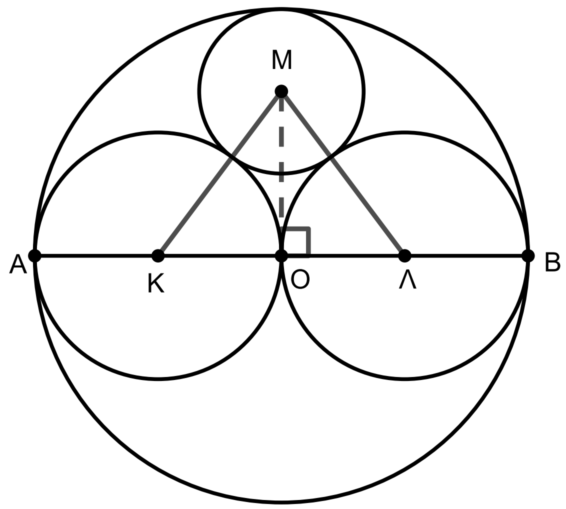
Στήλη Α	**Στήλη Β**
Διάκεντρος	Μήκος
1. ΚΛ	i. R
2. ΛΜ	ii. 2R
3. ΟΜ	iii. R+ρ
	iv. 2R-ρ

β)

i. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΚΛ είναι ισοσκελές και ότι το τμήμα ΜΟ είναι το ύψος προς τη βάση του. (Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε την ακτίνα ρ του κύκλου κέντρου Μ ως συνάρτηση του R, όπου R η ακτίνα των κύκλων κέντρων Κ και Λ. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ



α) 1 $\rightarrow$ ii., 2 $\rightarrow$ iii. , 3 $\rightarrow$ iv.

Δηλαδή ΚΛ=2R γιατί οι κύκλοι κέντρων Κ και Λ εφάπτονται εξωτερικά, οπότε η διάκεντρός τους ισούται με το άθροισμα των ακτινών τους. Ομοίως ΛΜ= R+ρ γιατί οι κύκλοι κέντρων Λ και Μ εφάπτονται εξωτερικά. Τέλος ΟΜ=2R-ρ γιατί ο κύκλος κέντρου Ο με τον κύκλο κέντρου Μ εφάπτονται εσωτερικά, οπότε η διάκεντρός τους θα ισούται με τη διαφορά των ακτινών τους.

β)

i. Οι κύκλοι (Κ,R) και (Μ,ρ) εφάπτονται εξωτερικά, οπότε η διάκεντρός τους θα ισούται με το άθροισμα των ακτινών τους, δηλαδή ΚΜ = R+ρ = ΛΜ από το ερώτημα α). Άρα το τρίγωνο ΜΚΛ έχει δύο πλευρές ίσες, οπότε είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΚΛ. Το σημείο Ο είναι το μέσο του τμήματος ΚΛ γιατί ΟΚ=ΟΛ=R, επομένως το τμήμα ΜΟ είναι διάμεσος της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου, άρα είναι και ύψος, δηλαδή ΟΜ$\perp$ΚΛ.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΛ με $\widehat{O}$ = 90^o εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε: $ΟΜ^2 + ΟΛ^2 = ΛΜ^2$

$(2R-ρ)^2 + R^2 = (R+ρ)^2$

$4R^2 - 4Rρ + ρ^2 + R^2 = R^2 + 2Rρ + ρ^2$

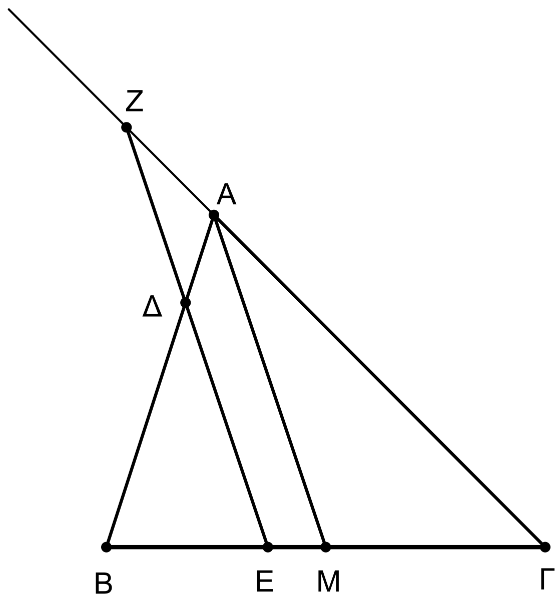
$4R^2 = 6Rρ$

$2R = 3ρ$

$ρ = \frac{2R}{3}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε ΑΜ τη διάμεσό του και Ε τυχαίο σημείο του τμήματος ΒΜ. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΜ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ και την προέκταση της ΓΑ στο Ζ.



α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας:

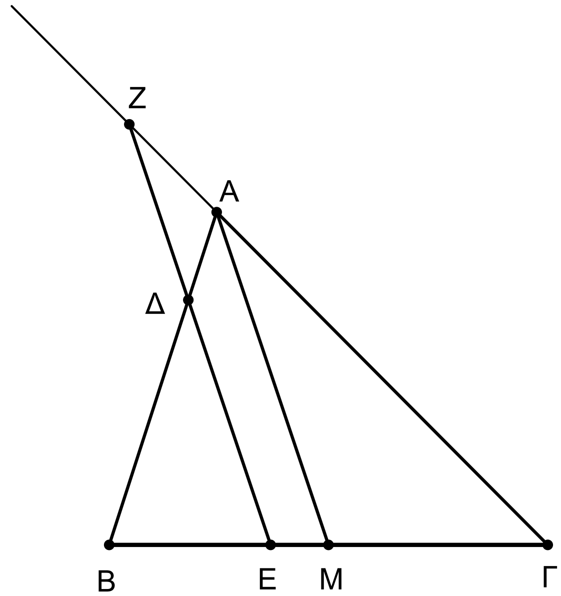
i. $\frac{\Delta\text{Ε}}{\cdots} = \frac{\cdots}{\text{ΒΜ}} = \frac{\text{Β}\Delta}{\cdots}$

ii. $\frac{\cdots}{\text{ΑΜ}} = \frac{\Gamma\text{Ε}}{\cdots} = \frac{\cdots}{\Gamma\text{Α}}$

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι ΔΕ + ΕΖ = 2ΑΜ για οποιαδήποτε θέση του Ε στο ΒΜ. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ



α)

i. Οι πλευρές ΒΕ και ΒΔ του τριγώνου ΒΕΔ ανήκουν στις πλευρές ΒΜ και ΒΑ αντίστοιχα, του τριγώνου ΒΜΑ και επιπλέον η τρίτη του πλευρά ΔΕ είναι παράλληλη στην τρίτη πλευρά ΑΜ του τριγώνου ΒΜΑ. Οπότε οι πλευρές του τριγώνου ΒΕΔ είναι ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου ΒΜΑ.

   Δηλαδή ισχύει: $\frac{ΔΕ}{ΑΜ}=\frac{ΒΕ}{ΒΜ}=\frac{ΒΔ}{ΒΑ}\,(1)$.

ii. Ομοίως οι πλευρές ΓΖ και ΓΕ του τριγώνου ΓΖΕ βρίσκονται στους φορείς των πλευρών ΓΑ και ΓΜ του τριγώνου ΓΑΜ και οι τρίτες τους πλευρές ΕΖ και ΑΜ είναι παράλληλες. Οπότε τα τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή ισχύει: $\frac{ΕΖ}{ΑΜ}=\frac{ΓΕ}{ΓΜ}=\frac{ΓΖ}{ΓΑ}$ (2).

β) Από τις σχέσεις (1) και (2) του α) ερωτήματος έχουμε ότι $\frac{ΔΕ}{ΑΜ}=\frac{ΒΕ}{ΒΜ}$ και $\frac{ΕΖ}{ΑΜ}=\frac{ΓΕ}{ΓΜ}$**.** Επειδή το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ τα τμήματα ΒΜ και ΓΜ είναι ίσα, οπότε οι προηγούμενες σχέσεις γράφονται: $\frac{ΔΕ}{ΑΜ}=\frac{ΒΕ}{ΒΜ}$ και $\frac{ΕΖ}{ΑΜ}=\frac{ΓΕ}{ΒΜ}$**.** Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$\frac{ΔΕ}{ΑΜ}+\frac{ΕΖ}{ΑΜ}=\frac{ΒΕ}{ΒΜ}+\frac{ΓΕ}{ΒΜ}$ ή $\frac{ΔΕ+ΕΖ}{ΑΜ}=\frac{ΒΕ+ΓΕ}{ΒΜ}$, δηλαδή $\frac{ΔΕ+ΕΖ}{ΑΜ}=\frac{ΒΓ}{ΒΜ}\Leftrightarrow\frac{ΔΕ+ΕΖ}{ΑΜ}=\frac{2\cdot ΒΜ}{ΒΜ}=2$.

Άρα $\frac{ΔΕ+ΕΖ}{ΑΜ}=2$ ή ΔΕ+ΕΖ=2ΑΜ για οποιαδήποτε θέση του Ε στο ΒΜ.