mathematica.gr

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Τετάρτη 16 Ιουνίου 2021

Λύσεις

των

θεμάτων

Έκδοση 1η (16/06/2021, 15:00)

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς
των Επιμελητών των φακέλων του Λυκείου
του Δικτυακού Τόπου **mathematica.gr**
με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica
https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=133&t=69789

Συνεργάστηκαν οι:
Αντωνέας Στρατής, Καρδαμίτσης Σπύρος, Κατσίπης Νίκος,
Κωστάκος Γρηγόρης, Μάγκος Θάνος, Μπεληγιάννης Αθανάσιος,
Παπαγρηγοράκης Μίλτος, Πρωτοπαπάς Λευτέρης,
Ρίζος Γιώργος, Στόγιας Σωτήρης, Συγκελάκης Αλέξανδρος,
Συννεφακόπουλος Αχιλλέας, Τσιφάκης Χρήστος,
Χασάπης Σωτήρης

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

Α3. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Ισχύει $|ημx|<|x|$, για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

β) Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α ισχύει ότι $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$, για κάθε $x\in A$.

γ) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)>0$ τότε f(x) > 0 κοντά στο x_0.

δ) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

ε) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α, β] τότε η f παίρνει στο [α, β] μια μέγιστη τιμή, M, και μια ελάχιστη τιμή, m.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α1. Θεωρία. Στο σχολικό βιβλίο, σελ. 135.
Α2. Θεωρία. Στο σχολικό βιβλίο, σελ. 51.
Α3. Θεωρία. Στο σχολικό βιβλίο, σελ. 23.
Α4. **α. Σ** **β. Λ** **γ. Σ** **δ. Σ** **ε. Σ**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+1)=(x+1)\cdot e^{-x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να δείξετε ότι $f(x)=x\cdot e^{1-x}$, $x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 3

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Β3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, αν υπάρχουν.

Μονάδες 9

Β4. Να βρείτε:

(i) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f (μονάδες 4).

(ii) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ (μονάδες 3).

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ:

Β1. Θέτουμε $x+1=t$ με $t\in\mathbb{R}$. Τότε $x=t-1$ και έχουμε: $f(t)=t\cdot e^{1-t}, t\in\mathbb{R}$. Άρα $f(x)=x\cdot e^{1-x}, x\in\mathbb{R}$.

Β2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων με $f'(x)=x'e^{1-x}+x\left(e^{1-x}\right)'=(1-x)\cdot e^{1-x}$.

Έχουμε ότι $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow(1-x)\cdot e^{1-x}\geq 0\Leftrightarrow x\leq 1$, γιατί $e^{1-x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ομοίως, $f'(x)<0\Leftrightarrow(1-x)\cdot e^{1-x}<0\Leftrightarrow x>1$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$. Παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x=1$ το $f(1)=1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	1	↘	
			Ο.Μ.		

Β3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=(x-2)\cdot e^{1-x}$.

Έχουμε ότι $f''(x)\geq 0\Leftrightarrow(x-2)\cdot e^{1-x}\geq 0\Leftrightarrow x\geq 2$ και $f''(x)<0\Leftrightarrow x<2$.

Άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,2]$ και κυρτή στο $[2,+\infty)$.

Είναι $f''(2)=0$ και $f(2)=2\cdot e^{1-2}=\dfrac{2}{e}$, άρα παρουσιάζει καμπή στο σημείο $A\left(2,\dfrac{2}{e}\right)$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''(x)	−	0	+
f(x)	$\frown$	2/e	$\smile$
		σ.κ.	

Η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες γιατί ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής σ' αυτό.

- Αναζητούμε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

  Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot e^{1-x}$ όπου και έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $+\infty\cdot 0$,

  γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x-1}}=0$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-1}=+\infty$.

  Οπότε:

  $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\cdot e^{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot e}{e^x}=e\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}e\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x'}{\left(e^x\right)'}=e\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=e\cdot 0=0.$$

  Άρα η ευθεία $y=0$ (ο θετικός ημιάξονας Ox) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Αναζητούμε οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

  Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^{1-x}=-\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x}=+\infty$.

  Άρα η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

- Αναζητούμε πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

  Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\cdot e^{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x}=+\infty\notin\mathbb{R}$.

  Άρα η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

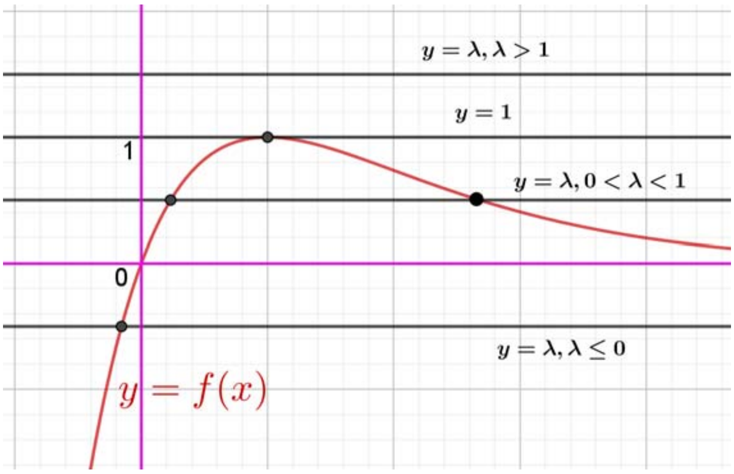
B4. **(i)** Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,1]$, οπότε το σύνολο τιμών της σε αυτό το διάστημα είναι το $f\left((-\infty,1]\right)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\, f(1)\right]=(-\infty,1]$, αφού είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^{1-x}=-\infty$ (από το Β3) και $f(1)=1\cdot e^{1-1}=1\cdot e^0=1$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$, οπότε το σύνολο τιμών της σε αυτό το διάστημα είναι το $f\left([1,+\infty)\right)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\, f(1)\right]=(0,1]$, αφού είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot e^{1-x}=0$ (από το Β3).

Οπότε το σύνολο τιμών της είναι το $f(R)=(-\infty,1]\cup(0,1]=(-\infty,1]$.

ii) Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Αν είναι $\lambda \le 0$ η εξίσωση έχει ακριβώς μια ρίζα, γιατί $\lambda \in (-\infty, 1]$ και $\lambda \notin (0,1]$.
- Αν $\lambda \in (0,1)$ η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες, γιατί $\lambda \in (-\infty, 1]$ και $\lambda \in (0,1]$.
- Αν είναι λ = 1, η εξίσωση έχει μία ρίζα (διπλή), γιατί f(1) = 1.
- Αν είναι $\lambda > 1$ η εξίσωση δεν έχει ρίζες γιατί $\lambda \notin (-\infty, 1]$ και $\lambda \notin (0,1]$.



ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1, & x \le 0 \\ \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x \le \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$ με $\alpha < -3$.

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της (μονάδες 3) αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ2. **(i)** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμιά από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ (μονάδες 3).

(ii) Να βρεθεί το μοναδικό $\xi \in \left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ3. Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα xx′ .

Μονάδες 6

Γ4. Να δείξετε ότι $f(x) \ge -1$ για κάθε $x \in \left(-\infty, \dfrac{3\pi}{2}\right]$

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ:

Γ1. Στο διάστημα $(-\infty,0)$, η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3-3x^2-x+1$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Στο διάστημα $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right]$, η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχής.

Εξετάζουμε τη συνέχεια της συνάρτησης f στο $x_0=0$,

$$\text{Είναι}\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu 0=1\\ \lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\alpha x^3-3x^2-x+1\right)=1\\ f(0)=\alpha\cdot0^3-3\cdot0^2-0+1=1\end{cases}$$

Αφού είναι $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\alpha x^3-3x^2-x+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x\left(\alpha x^2-3x-1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\alpha x^2-3x-1\right)=-1$

και $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$ (βασικό όριο).

Άρα, η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, αφού $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

Γ2. **(i)** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x)=(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$ και είναι $f(0)=1\neq0=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

Άρα, ικανοποιούνται οι δύο πρώτες προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, αλλά δεν ικανοποιείται η τρίτη προϋπόθεση.

(ii) Για $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ έχουμε ότι $\eta\mu x<0$, άρα η $f'(x)=0\Leftrightarrow-\eta\mu x=0\Leftrightarrow\eta\mu x=0$ είναι αδύνατη.

Για $x\in(0,\pi)$ έχουμε ότι $\eta\mu x>0$, άρα η $f'(x)=0\Leftrightarrow-\eta\mu x=0\Leftrightarrow\eta\mu x=0$ είναι αδύνατη.

Αφού $f'(\pi)=\eta\mu\pi=0$, το $x=\pi$ είναι μοναδική λύση της $f'(x)=0$ στο $x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$.

Γ3. Οι τετμημένες των σημείων της C_f στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα x'x θα είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f'(x)=0$ με $x<0$.
Είναι

$$f'(x)=\left(\alpha x^3-3x^2-x+1\right)'=3\alpha x^2-6x-1.$$

Οπότε έχουμε

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3\alpha x^2-6x-1=0$. Η τελευταία είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού με άγνωστο το x και διακρίνουσα $\Delta=36+12\alpha=12(\alpha+3)<0$, αφού δίνεται ότι ισχύει $\alpha<-3$.

Η εξίσωση $f'(x)=0$ είναι αδύνατη, άρα η C_f δεν έχει σημεία με αρνητικές τετμημένες στα οποία η εφαπτομένη της να είναι παράλληλη στον άξονα xx'.

Γ4. Όταν ισχύει $x<0$ είναι $f'(x)=3\alpha x^2-6x-1<0$ γιατί ο συντελεστής του x^2 είναι αρνητικός, αφού α < –3 και επιπλέον έχουμε δείξει από το Γ3 ότι είναι έχει αρνητική διακρίνουσα.

Οπότε για x < 0 το τριώνυμο είναι ομόσημο του συντελεστή του x^2.

Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-\infty,0]$ και ισχύει $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$.

Τότε για $x\le 0$ θα έχουμε, λόγω της μονοτονίας της f, ότι θα είναι $f(x)\ge f(0)=1$.

Όταν $0<x\le\frac{3\pi}{2}$ γνωρίζουμε ότι είναι $f(x)=\text{συν}x\ge -1$. Άρα τελικά είναι $f(x)\ge -1$ για κάθε $x\in\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x=\frac{1}{x}$ (1) έχει μοναδική ρίζα, x_0, η οποία ανήκει στο (1, e).

Μονάδες 4

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1) και η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ έχει τύπο $f(x)=(\ln x_0)\cdot(x+1)-\ln x-1$.

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 το $f(x_0)=0$.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=x\cdot e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$ και $h(x)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$, $x\in\mathbb{R}$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

Μονάδες 8

Δ4. Έστω η συνάρτηση $\phi:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, συνεχής, με $f(x)>\phi(x)$, για κάθε $x>0$. Θεωρούμε τα σημεία $A(x,f(x))$ και $B(x,\phi(x))$ με $x>0$. Αν η απόσταση των σημείων A και B γίνεται ελάχιστη στο $x=x_0$, να δείξετε ότι το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης φ.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ:

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση a με $a(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}, x\in D_a=(0,+\infty)$.

- Η a είναι συνεχής στο $[1,e]$ ως διαφορά των συνεχών $\dfrac{1}{x}$ (ρητή που δεν μηδενίζεται ο παρονομαστής) και $\ln x$ (λογαριθμική).
- $a(1)\cdot a(e)=-\left(1-\dfrac{1}{e}\right)<0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ρίζα x_0 της εξίσωσης $a(x)=0$ στο $(1,e)$, άρα η εξίσωση $\ln x=\dfrac{1}{x}$ έχει ρίζα $x_0\in(1,e)$.

  Επίσης $a'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}>0$, δηλαδή η a είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και επομένως έχει το πολύ μία ρίζα σε αυτό, άρα το $x_0\in(1,e)$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $a(x)=0$.

Δ2. Ισχύει ότι $\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}\Leftrightarrow x_0\ln x_0=1\Leftrightarrow \ln x_0^{x_0}=1\Leftrightarrow x_0^{x_0}=e$ **(1)**.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $D_{f'}=(0,+\infty)$ ως διαφορά των παραγωγίσιμων $\ln x$ (λογαριθμική) και $\ln x_0(x+1)-1$ (πολυωνυμική) με $f'(x)=\ln x_0-\dfrac{1}{x}$, η οποία, λόγω της (1), γίνεται

$f'(x)=\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-x_0}{xx_0}$. Τότε $\begin{cases} f'(x)=0\Leftrightarrow x=x_0 \\ f'(x)>0\Leftrightarrow x>x_0 \\ f'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<x_0 \end{cases}$ και δεδομένου ότι είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,x_0]$, γνησίως αύξουσα στο $[x_0,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=x_0$ το $f(x_0)=\ln x_0(x_0+1)-\ln x_0-1=x_0\ln x_0-1=0$ (λόγω της **(1)**).

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Δ3. Αναζητούμε $x\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$g(x)=h(x)\Leftrightarrow xe^{-x}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\Leftrightarrow xe^{-x}=\frac{x_0^{x+1}}{e^{x+1}}\Leftrightarrow xe^{-x}e^{x+1}=x_0^{x+1}\Leftrightarrow xe=x_0^{x+1}\quad \textbf{(2)}$$

- Αν $x\le 0$ η **(2)** είναι αδύνατη.
- Αν $x>0$ η **(2)** ισοδύναμα γίνεται:

$$\ln(xe)=\ln x_0^{x+1} \Leftrightarrow \ln x+\ln e=(x+1)\ln x_0 \Leftrightarrow \ln x+1=(x+1)\ln x_0 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow x=x_0,$$

αφού η f παρουσιάζει μοναδικό ολικό ελάχιστο για $x=x_0$ το $f(x_0)=0$.

Επίσης η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $D_g=\mathbb{R}$ ως γινόμενο των παραγωγίσιμων x (πολυωνυμική) και e^{-x} (εκθετική) με $g'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$ και $g'(x_0)=e^{-x_0}(1-x_0)$.

Επιπλέον, η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $D_g=\mathbb{R}$ ως εκθετική με

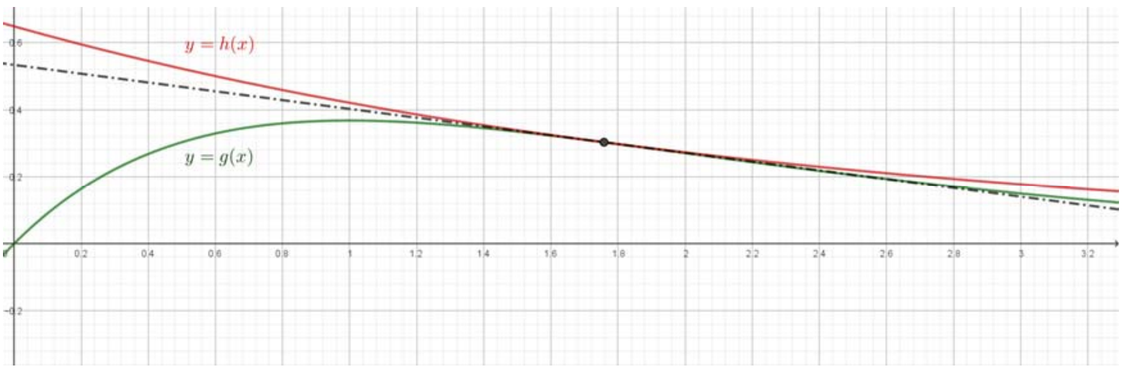
$$h'(x)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\ln\frac{x_0}{e}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}(\ln x_0-\ln e)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}(\ln x_0-1) \text{ και}$$

$$h'(x_0)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}(\ln x_0-1)=\frac{x_0^{x_0+1}}{e^{x_0+1}}(\ln x_0-1)=\frac{x_0^{x_0}x_0}{e^{x_0}e}(\ln x_0-1),$$

όπου λόγω της **(1)** γίνεται

$$h'(x_0)=\frac{ex_0}{e^{x_0}e}\left(\frac{1}{x_0}-1\right)=x_0e^{-x_0}\,\frac{1-x_0}{x_0}=e^{-x_0}(1-x_0)=g'(x_0).$$

Συνεπώς αφού $g(x_0)=h(x_0)$, $g'(x_0)=h'(x_0)$, οι C_g, C_h έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $(x_0, g(x_0))$ στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη.



Δ4. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Έστω ότι η συνάρτηση ϕ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε αυτό είναι κρίσιμο σημείο της ϕ.
- Έστω ότι η συνάρτηση ϕ είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Η απόσταση των σημείων A, B είναι $\sqrt{(x-x)^2+(\phi(x)-f(x))^2}=|\phi(x)-f(x)|=f(x)-\phi(x)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση q με $q(x)=f(x)-\phi(x), x\in D_q=(0,+\infty)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $q'(x_0)=f'(x_0)-\phi'(x_0)$.

Η συνάρτηση q παρουσιάζει ακρότατο στο x_0, είναι παραγωγίσιμη σε αυτό και το x_0 είναι εσωτερικό του $D_q=(0,+\infty)$, οπότε από το θεώρημα Fermat ισχύει

$$q'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)-\phi'(x_0)=0 \Leftrightarrow \phi'(x_0)=0,$$

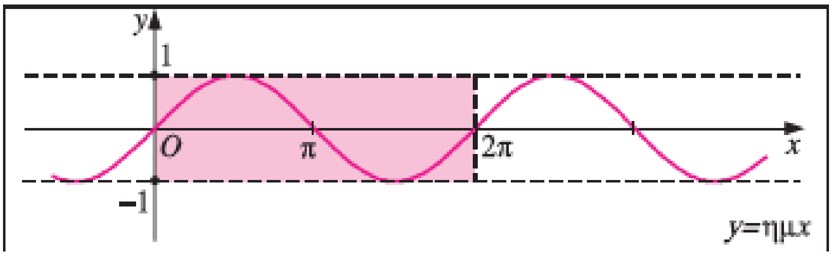
οπότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της ϕ.

ΑΛΛΕΣ ΛΥΣΕΙΣ:

Γ2. Όταν είναι $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$, τότε έχουμε $f'(x) = -ημx$. Άρα, για $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$, έχουμε:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -ημx = 0 \Leftrightarrow ημx = 0 \Leftrightarrow x = \pi$, αφού στο διάστημα $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης ημx έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον άξονα x'x.

Άρα το μοναδικό $\xi \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$ είναι το $\xi = \pi$.



Γ2. Για $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ έχουμε ότι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -ημx = 0 \Leftrightarrow ημx = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Όμως, $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 0 < k\pi < \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 0 < k < \frac{3}{2}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 1$, οπότε $x = \pi$.

Γ4. Για $x \le 0$ έχουμε $f(x) = αx^3 - 3x^2 - x + 1 = x(αx^2 - 3x - 1) + 1 \ge 1$ διότι το τριώνυμο $αx^2 - 3x - 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 9 + 4α < -3 < 0$ οπότε είναι παντού ομόσημο του α δηλαδή αρνητικό.
Έτσι για $x \le 0$ έχουμε $x(αx^2 - 3x - 1) \ge 0$.

Για $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$ έχουμε $f(x) = συνx \ge -1$ με ισότητα μόνο στο $x = \pi$.

Άρα τελικά $f(x) \ge -1$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Δ2. Για $x > 0$ αρκεί να ισχύει ότι:

$$f(x) \ge f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 (x+1) - \ln x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x\ln x_0 + \ln x_0 - \ln x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x\ln x_0 + \ln\frac{x_0}{x} - 1 \ge 0,$$

η οποία λόγω της **(1)** γίνεται:

$$\frac{x}{x_0} - \ln\frac{x}{x_0} - 1 \ge 0 \Leftrightarrow \ln\frac{x}{x_0} \le \frac{x}{x_0} - 1,$$

η οποία ισχύει λόγω της γνωστής ανισοϊσότητας $\ln x \le x - 1, x > 0$.