

1. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A ;

Απάντηση

Εστω A ένα υποσύνολο του \mathbb{R} . Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A** μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $f(x)$.

Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε:

$$f : A \rightarrow \mathbf{R}$$

$$x \rightarrow f(x)$$

2. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση της συνάρτησης f ;

Απάντηση

Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f .

3. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Απάντηση

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$. Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$.

4. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι :

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο,
- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο,

Απάντηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι :

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν:

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, $f(x_0)$, όταν

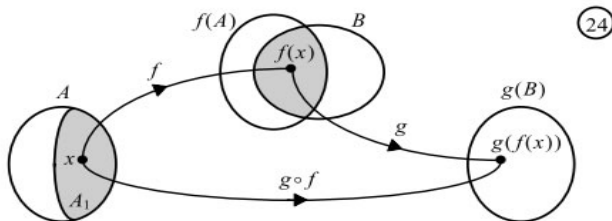
$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

5. Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$, τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g ;

Απάντηση

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g** , και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ .}$$



Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g . Δηλαδή είναι το σύνολο:

$$A_1 = \{x \in A / f(x) \in B\}$$

Είναι φανερό ότι η $g \circ f$ ορίζεται αν $A_1 \neq \emptyset$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

6. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται :

- ♦ γνησίως αύξουσα σ' ένα δ i á σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της;
- ♦ γνησίως φθίνουσα σ' ένα δ i á σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέγεται :

- **γνησίως αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2).$$

- **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x_1) > f(x_2).$$

7. Πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση «1-1»;

Απάντηση

Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση 1-1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

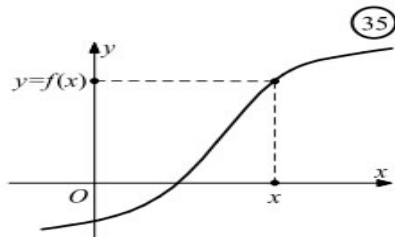
$$\text{«Αν } x_1 \neq x_2 \text{, τότε } f(x_1) \neq f(x_2)\text{»}$$

που σημαίνει ότι: «τα διαφορετικά στοιχεία $x_1, x_2 \in D_f$ έχουν πάντοτε διαφορετικές εικόνες».

8. Τι ονομάζουμε αντίστροφη της συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$;

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbf{R}$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι «1-1», τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $g : f(A) \rightarrow \mathbf{R}$.



με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $g(y) = x$.

Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

- έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f ,
- έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και
- ισχύει η ισοδυναμία: $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$

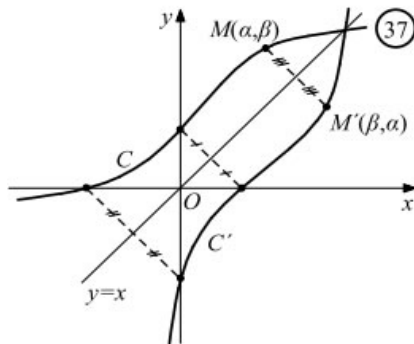
Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y , τότε η g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f . Για το λόγο αυτό η g λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με f^{-1} . Επομένως έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

9. Ποια είναι η σχέση των γραφικών παραστάσεων $C_f, C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f, f^{-1} αντίστοιχα; Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας.

Απάντηση

Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.



Ας πάρουμε τώρα μια «1-1» συνάρτηση f και ας θεωρήσουμε τις γραφικές παραστάσεις C και C' των f και της f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων (Σχ. 37). Επειδή $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ αν ένα σημείο $M(a, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f , τότε το σημείο $M'(\beta, a)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} και

αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy$.

10. Αν $P(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ένα πολυώνυμο, να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_0) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_v x^v) + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_{v-1} x^{v-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 = \\ &= a_v x_0^v + a_{v-1} x_0^{v-1} + \dots + a_0 = P(x_0) \end{aligned}$$

11. Να διατυπώσετε το κριτήριο της παρεμβολής.

Απάντηση

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν

$$\bullet \quad h(x) \leq f(x) \leq g(x) \text{ κοντά στο } x_0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

12. Πότε μία συνάρτηση λέγεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 , όταν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

13. Πότε μία συνάρτηση λέγεται συνεχής

- ♦ σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) ;
- ♦ σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Απάντηση

- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) .
- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha) \text{ και } \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

14. Πότε μία συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:

- α) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή
- β) Υπάρχει το όριό της στο x_0 , αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, στο σημείο x_0 .

15. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Απάντηση

Διατύπωση:

Εστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

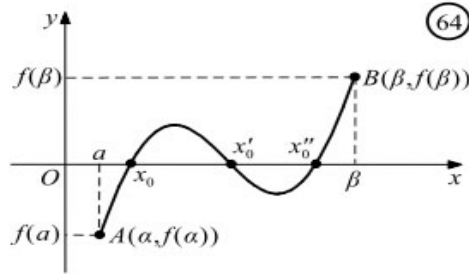
- ♦ η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- ♦ $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β) .

Γεωμετρική Ερμηνεία:

Στο επόμενο σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



16. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

Απάντηση

Διατύπωση

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν:

- ♦ η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- ♦ $f(a) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

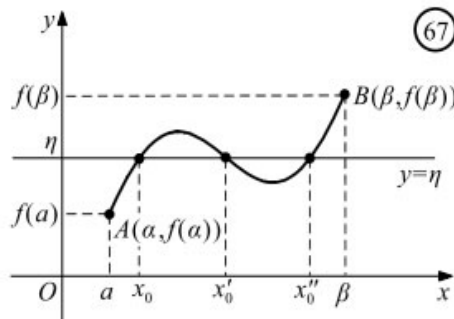
Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι $f(a) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(a) < \eta < f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [a, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- $g(a)g(\beta) < 0$, αφού $g(a) = f(a) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, πάργει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0, \text{ οπότε } f(x_0) = \eta. \blacksquare$$



17. Να διατυπώσετε το θεώρημα της Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής.

Απάντηση

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[a, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

18. Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$;**Απάντηση**

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Αν υπάρχει το

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ , τότε ορίζουμε ως

εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A , την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ .

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι:

$$y - f(x_0) = \lambda(x - x_0) \quad , \quad \lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

19. Τι ονομάζεται ακολουθία;**Απάντηση**

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

20. Πότε λέμε ότι μια ακολουθία (α_n) έχει όριο το $l \in \mathbb{R}$;**Απάντηση**

Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_n) έχει όριο το $l \in \mathbb{R}$ και θα γράφουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = l$,

όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $n > n_0$ να ισχύει

$$|\alpha_n - l| < \varepsilon.$$

21. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;**Απάντηση**

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου

ορισμού της, υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , αν και μόνο αν υπάρχουν στο \mathbb{R} τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι ίσα.

22. Να αποδείξετε ότι: Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Απόδειξη

Για $x \neq x_0$ έχουμε:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 ■

23. Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $f'(x) = 0$, δηλαδή $(c)' = 0$.

Απόδειξη

Αν x_0 είναι ένα σημείο του \mathbb{R} , τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

δηλαδή $(c)' = 0$. ■

24. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbf{R} και ισχύει $f'(x) = 1$, δηλαδή $(x)' = 1$.

Απόδειξη:

Αν x_0 είναι ένα σημείο του \mathbf{R} , τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1$$

δηλαδή $(x)' = 1$. ■

25. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^v$, $v \in \mathbf{N} - \{0, 1\}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbf{R} και ισχύει $f'(x) = vx^{v-1}$, δηλαδή:

$$(x^v)' = vx^{v-1}.$$

Απόδειξη

Αν x_0 είναι ένα σημείο του \mathbf{R} , τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{x^v - x_0^v}{x - x_0} = \frac{(x - x_0) \cdot (x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1})}{x - x_0} = \\ &= x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1} \end{aligned}$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}) = \\ &= x_0^{v-1} + x_0^{v-1} + \dots + x_0^{v-1} = vx_0^{v-1} \end{aligned}$$

Δηλαδή: $(x^v)' = vx^{v-1}$. ■

26. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Απόδειξη

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

Οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Δηλαδή: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

27. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Απόδειξη

Για $x \neq x_0$, ισχύει :

$$\begin{aligned} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

Δηλαδή $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

28. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbf{N}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbf{R}^* και ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή:

$$(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}.$$

Απόδειξη

Για κάθε $x \in \mathbf{R}^*$ έχουμε :

$$(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = \frac{(1)'x^\nu - 1 \cdot (x^\nu)'}{(x^\nu)^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}$$

29. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}_1 =$

$$\mathbf{R} - \{x \mid \sigma\nu\nu x = 0\} \text{ και ισχύει } f'(x) = \frac{1}{\sigma\nu\nu^2 x}, \text{ δηλαδή } (\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\nu\nu^2 x}.$$

Απόδειξη

Για κάθε $x \in \mathbf{R}$ έχουμε :

$$\begin{aligned} (\varepsilon\varphi x)' &= \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\nu\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)' \sigma\nu\nu x - \eta\mu x (\sigma\nu\nu x)'}{\sigma\nu\nu^2 x} = \\ &= \frac{\sigma\nu\nu x \cdot \sigma\nu\nu x + \eta\mu x \cdot \eta\mu x}{\sigma\nu\nu^2 x} = \frac{\sigma\nu\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\nu\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\nu\nu^2 x} \end{aligned}$$

30. Η συνάρτηση $f(x) = x^a$, $a \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$, είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και

$$\text{ισχύει: } f'(x) = ax^{a-1}, \text{ δηλαδή } (x^a)' = ax^{a-1}.$$

Απόδειξη

Αν $y = x^a = e^{a \ln x}$ και θέσουμε $u = a \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{a \ln x} \cdot a \cdot \frac{1}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = a \cdot x^{a-1}$$

31. Η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$, είναι παραγωγίσιμη στο \mathbf{R} και ισχύει

$$f'(x) = a^x \ln a, \text{ δηλαδή } (a^x)' = a^x \ln a.$$

Απόδειξη

Αν $y = a^x = e^{x \ln a}$ και θέσουμε $u = x \ln a$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως:

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

32. Η συνάρτηση $f(x) = \ln |x|$, $x \in \mathbf{R}^*$, είναι παραγωγίσιμη στο \mathbf{R}^* και ισχύει

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}.$$

Απόδειξη

$$\text{— αν } x > 0, \text{ τότε } (\ln |x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ ενώ}$$

— αν $x < 0$, τότε $\ln |x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$,
έχουμε $y = \ln u$.

Επομένως,

$$(\ln u)' = \frac{1}{u} u' = \frac{1}{-x} (-1) = \frac{1}{x}$$

και άρα $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$.

33. Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το x στο σημείο x_0 όταν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ;

Απάντηση

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0** την παράγωγο $f'(x_0)$.

34. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Απάντηση

Διατύπωση

Αν μια συνάρτηση f είναι:

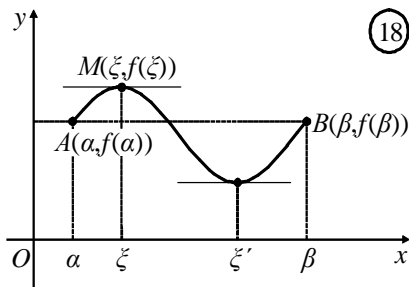
- ♦ συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$
- ♦ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, β) και
- ♦ $f(a) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = 0$$

Γεωμετρική ερμηνεία

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x .



(18)

35. Να διατυπώσετε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Απάντηση

Διατύπωση

Αν μια συνάρτηση f είναι:

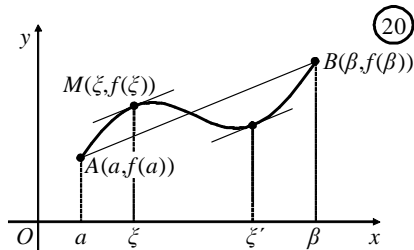
- ♦ συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και
- ♦ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$$

Γεωμετρική ερμηνεία

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ένα $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB .



(20)

36. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- ♦ η είναι συνεχής στο Δ και
- ♦ $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό

σημείο x του Δ ,

τότε να αποδείξετε ότι η είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

Πράγματι:

- ♦ Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- ♦ Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

37. Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν

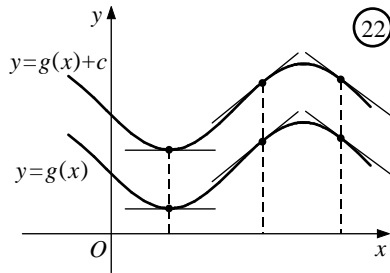
- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $\varepsilon \sigma \tau \varepsilon \rho \iota \kappa \acute{o}$ σημείο x του Δ ,

Τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) = g(x) + c$.

Απόδειξη

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 .$$



Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ . Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει

$$f(x) - g(x) = c, \text{ οπότε } f(x) = g(x) + c. \quad \blacksquare$$

38. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

- ♦ Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
- ♦ Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

Απόδειξη

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

, οπότε έχουμε $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$.

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

Η απόδειξη για τη γνησίως φθίνουσα είναι ανάλογη.

39. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε:

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) .$$

Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο** της f .

40. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;

Απάντηση

Μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε:

$$f(x) \geq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) .$$

Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο** της f .

41. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat και να το αποδείξετε.

Απάντηση

Διατύπωση

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0) = 0$$

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε:

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta \quad \text{και}$$

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ , για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ .} \quad (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ .}$$

Επομένως,

— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \text{ , οπότε θα έχουμε}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \text{ , οπότε θα έχουμε:}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$.

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

42. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι:

i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

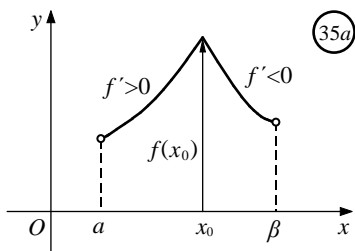
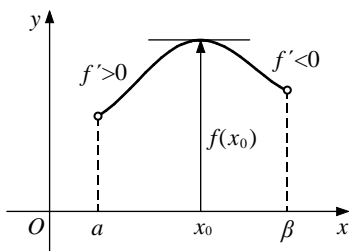
Απόδειξη

i) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(a, x_0]$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (a, x_0] \quad (1)$$

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in [x_0, \beta) \quad (2)$$

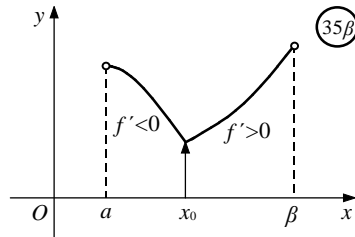
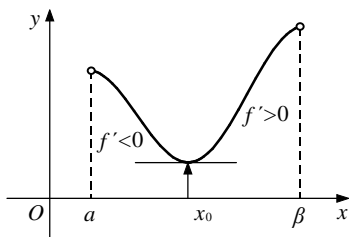


Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

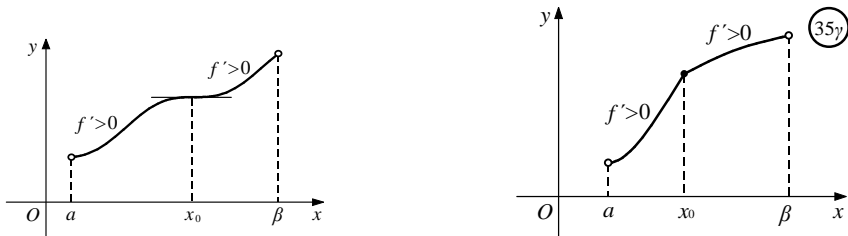
$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (a, \beta),$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (a, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.



iii) Έστω ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$.



Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(a, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f . Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a, β) . Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (a, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (a, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(a, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε

$$f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$$

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a, β) .

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$. ■

43. Πότε λέμε ότι:

A. Μία συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ ;

B. Μία συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ ;

Απάντηση

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι:

- ◆ Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .
- ◆ Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

44. Πως σχετίζεται η δεύτερη παράγωγος μιας συνάρτησης f με την κυρτότητά της;

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .

- ◆ Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
- ◆ Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κοίλη στο Δ .

45. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 .

Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f ;

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν

- ◆ η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) , ή αντιστρόφως, και
- ◆ η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f .

46. Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη ποια είναι η τιμή της $f''(x_0)$;

Απάντηση

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

47. Τι ονομάζουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f ;

Απάντηση

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f .

48. Τι ονομάζουμε οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$);

Απάντηση

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$), τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

49. Πότε λέμε ότι ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$;

Απάντηση

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0,$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0.$$

50. Να διατυπώσετε τους κανόνες του de l' Hospital

Απάντηση

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$