

Αναστάσιος Χ. Μπάρλας

# Γεωμετρία

Α΄ Λυκείου

Τράπεζα  
Θεμάτων  
2020

**ΘΕΜΑΤΑ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ**

**6. Στοιχεία και είδη τριγώνων – Κριτήρια ισότητας τριγώνων**

**Θέμα 2**

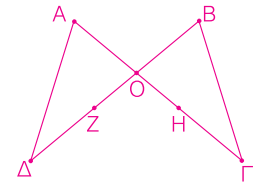
**1 Θέμα 1627**

Δίνεται γωνία  $\hat{xOy}$  και η διχοτόμος της  $Oδ$ . Θεωρούμε σημείο  $M$  της  $Oδ$  και σημεία  $A$  και  $B$  στις ημιευθείες  $Ox$  και  $Oy$  αντίστοιχα, τέτοια ώστε  $OA = OB$ . Να αποδείξετε ότι:

- α.  $MA = MB$
- β. Η ημιευθεία  $MO$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{AMB}$ .

**2 Θέμα 1674**

Δίνονται τα τμήματα  $AG = BD$  που τέμνονται στο σημείο  $O$  έτσι ώστε  $OA = OB$ , και τα σημεία  $H$  και  $Z$  στα τμήματα  $AG$  και  $BD$  αντίστοιχα, έτσι ώστε  $OH = OZ$ . Να αποδείξετε ότι:



- α. Οι γωνίες  $\hat{AOZ}$  και  $\hat{BOZ}$  είναι ίσες
- β.  $AZ = BH$

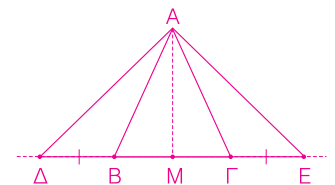
**3 Θέμα 1598**

Στις προεκτάσεις των πλευρών  $BA$  και  $GA$  τριγώνου  $ABG$  παίρνουμε τα τμήματα  $AD = AB$  και  $AE = AG$ .

- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $ABG$  και  $ADE$  είναι ίσα.
- β. Αν  $AM$  είναι η διάμεσος του τριγώνου  $ABG$  και η προέκτασή της  $AM$  τέμνει την  $ED$  στο  $Z$ , να δείξετε ότι:
  - i. Τα τρίγωνα  $AZD$  και  $AMB$  είναι ίσα.
  - ii.  $ZD = \frac{ED}{2}$

**4 Θέμα 1592**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $ABG$  ( $AB = AG$ ). Στην προέκταση της πλευράς  $BG$  και προς τα δυο της άκρα, θεωρούμε σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα έτσι ώστε  $B\Delta = GE$ . Να αποδείξετε ότι:



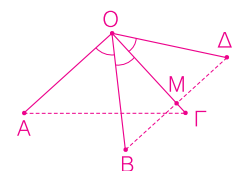
- α.  $\hat{B}_{\epsilon\zeta} = \hat{G}_{\epsilon\zeta}$
- β. Τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $AG E$  είναι ίσα.
- γ. Η διάμεσος  $AM$  του τριγώνου  $ABG$  είναι και διάμεσος του τριγώνου  $ADE$ .

**5 Θέμα 1621**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $ABG$  ( $AB = AG$ ) και στις ίσες πλευρές  $AB$ ,  $AG$  παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα  $AD = \frac{1}{3}AB$  και  $AE = \frac{1}{3}AG$ . Αν  $M$  είναι μέσο της  $BG$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $DEM$  είναι ισοσκελές.

**6 Θέμα 1632**

Αν  $\hat{AOB} = \hat{BOG} = \hat{GO\Delta}$  και  $OA = OB = OG = O\Delta$ , να αποδείξετε ότι:



- α.  $AG = B\Delta$
- β. το  $M$  είναι μέσο της  $B\Delta$ , όπου  $M$  το σημείο τομής των τμημάτων  $OG$  και  $B\Delta$ .

**7 Θέμα 1601**

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $ABG$  ( $AB = AG$ ) και σημείο  $M$  εσωτερικό του τριγώνου, τέτοιο ώστε  $MB = MG$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα  $AMB$  και  $AMG$  είναι ίσα.
- β. Η ευθεία  $AM$  διχοτομεί τη γωνία  $\hat{BMG}$ .

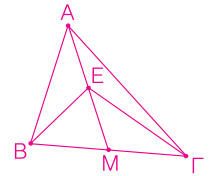
**8 Θέμα 1660**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $E$  το μέσο της διαμέσου του  $AM$ .

Αν  $B\Gamma = 2BE$  να αποδείξετε ότι:

**α.**  $\widehat{A\hat{E}B} = \widehat{E\hat{M}\Gamma}$

**β.**  $AB = E\Gamma$

**9 Θέμα 1648**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Στις προεκτάσεις των πλευρών  $BA$  και  $\Gamma A$  (προς το  $A$ ) θεωρούμε τα σημεία  $E$  και  $\Delta$  αντίστοιχα τέτοια ώστε  $A\Delta = AE$ .

Να αποδείξετε ότι:

**α.**  $BE = \Gamma\Delta$

**β.**  $B\Delta = \Gamma E$

**γ.**  $\widehat{\Delta B\Gamma} = \widehat{E\Gamma B}$

**10 Θέμα 1622**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $KAB$  ( $KA = KB$ ) και  $K\Gamma$  διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{K}$ . Στην προέκταση της  $BA$  (προς το  $A$ ) παίρνουμε σημείο  $\Lambda$  και στην προέκταση της  $AB$  (προς το  $B$ ) παίρνουμε σημείο  $M$ , έτσι ώστε  $A\Lambda = BM$ . Να αποδείξετε ότι:

**α.** το τρίγωνο  $K\Lambda M$  είναι ισοσκελές

**β.** η  $K\Gamma$  είναι διάμεσος του τριγώνου  $K\Lambda M$ .

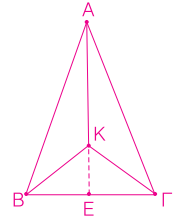
**11 Θέμα 1591**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και  $K$  εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο ώστε  $KB = K\Gamma$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $BAK$  και  $KA\Gamma$  είναι ίσα.

**β.** Να αποδείξετε ότι η  $AK$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ .

**γ.** Η προέκταση της  $AK$  τέμνει την  $B\Gamma$  στο  $E$ . Να δείξετε ότι η  $KE$  είναι διάμεσος του τριγώνου  $BK\Gamma$ .

**12 Θέμα 1624**

Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $BA = B\Gamma$  και  $\Delta A = \Delta\Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι η  $B\Delta$  είναι διχοτόμος των γωνιών  $B$  και  $\Delta$  του τετραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$ .

**13 Θέμα 1587**

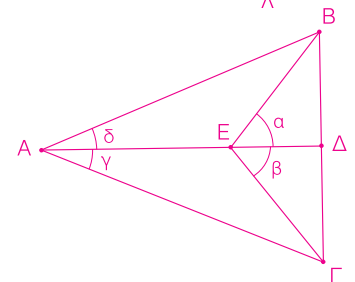
Αν για το ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) του σχήματος ισχύουν  $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$

και  $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$ , να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

**α.** Τα τρίγωνα  $AEB$  και  $AEG$  είναι ίσα.

**β.** Το τρίγωνο  $\Gamma EB$  είναι ισοσκελές.

**γ.** Η ευθεία  $A\Delta$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $B\Gamma$ .

**14 Θέμα 1588**

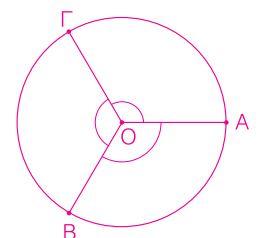
Σε κύκλο κέντρου  $O$  θεωρούμε τρεις διαδοχικές ίσες γωνίες  $\widehat{A\hat{O}B}$ ,  $\widehat{B\hat{O}\Gamma}$  και  $\widehat{\Gamma\hat{O}A}$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι η προέκταση της ακτίνας  $AO$  διχοτομεί τη γωνία  $\widehat{BO\Gamma}$ .

**β.** Να βρείτε το είδος του τριγώνου  $AB\Gamma$  ως προς τις πλευρές του.

**γ.** Αν με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $OK$ , όπου  $K$  το μέσο της ακτίνας  $OA$ , γράψουμε έναν άλλο κύκλο που θα τέμνει τις ακτίνες  $OB$  και  $O\Gamma$  στα σημεία  $\Lambda$  και  $M$  αντίστοιχα, τότε τα τόξα  $KM$  και  $AB$  είναι ίσα;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

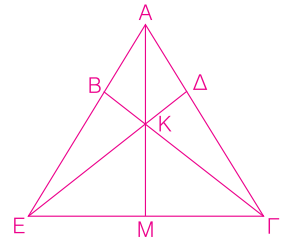


**Θέμα 4**

**15 Θέμα 1846**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ .

Στην προέκταση της  $AB$  (προς το  $B$ ) θεωρούμε σημείο  $E$  έτσι ώστε  $AE = A\Gamma$ . Στην πλευρά  $A\Gamma$  θεωρούμε σημείο  $\Delta$  έτσι ώστε  $A\Delta = AB$ . Αν τα τμήματα  $\Delta E$  και  $B\Gamma$  τέμνονται στο  $K$  και η προέκταση της  $AK$  τέμνει την  $E\Gamma$  στο  $M$ , να αποδείξετε ότι:

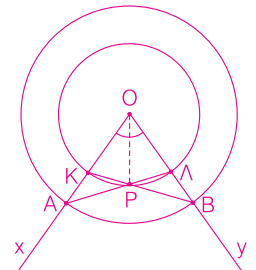


- α.  $B\Gamma = \Delta E$
- β.  $BK = K\Delta$
- γ. Η  $AK$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $A$ .
- δ. Η  $AM$  είναι μεσοκάθετος της  $E\Gamma$ .

**16 Θέμα 1725**

Δίνεται οξεία γωνία  $x\hat{O}y$  και δύο ομόκεντροι κύκλοι  $(O, \rho_1)$  και  $(O, \rho_2)$  με  $\rho_1 < \rho_2$ , που τέμνουν την  $Ox$  στα σημεία  $K, A$  και την  $Oy$  στα  $\Lambda, B$  αντίστοιχα.

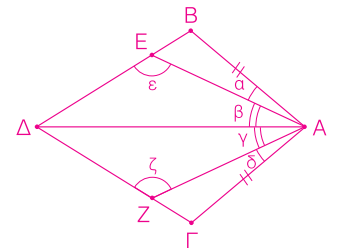
Να αποδείξετε ότι:



- α.  $A\Lambda = BK$
- β. Το τρίγωνο  $APB$  είναι ισοσκελές, όπου  $P$  το σημείο τομής των  $A\Lambda$  και  $BK$ .
- γ. Η  $OP$  διχοτομεί την  $x\hat{O}y$ .

**17 Θέμα 1582**

Αν στο διπλανό σχήμα είναι  $\hat{\alpha} = \hat{\delta}$ ,  $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$  και  $AB = A\Gamma$ , να αποδείξετε ότι:



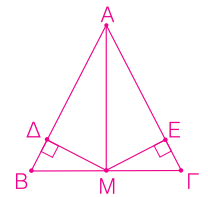
- α. Τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma\Delta$  είναι ίσα.
- β. Οι γωνίες  $\epsilon$  και  $\zeta$  είναι ίσες.

**7. Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων**

**Θέμα 2**

**18 Θέμα 1657**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και από σημείο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$  φέρουμε τα κάθετα τμήματα  $M\Delta$  και  $ME$  στις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



- α. Αν  $M\Delta = ME$ , τότε τα τρίγωνα  $AM\Delta$  και  $AME$  είναι ίσα.
- β. Αν  $AB = A\Gamma$  και  $M$  μέσο του  $B\Gamma$ , τότε  $M\Delta = ME$ .

**19 Θέμα 1568**

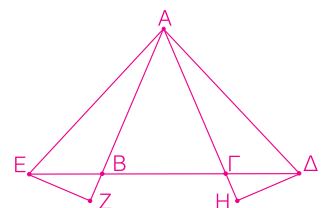
Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα ύψη του  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  που αντιστοιχούν στις πλευρές του  $A\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α. Αν το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $AB = A\Gamma$ , τότε τα ύψη  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  είναι ίσα.
- β. Αν τα ύψη  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  είναι ίσα, τότε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $A\Gamma = AB$ .

**20 Θέμα 1659**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ .

Στην προέκταση της  $B\Gamma$  (προς το  $\Gamma$ ) θεωρούμε σημείο  $\Delta$  και στην προέκταση της  $\Gamma B$  (προς το  $B$ ) θεωρούμε σημείο  $E$  έτσι ώστε  $\Gamma\Delta = BE$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε  $\Delta H$  κάθετη στην ευθεία  $A\Gamma$  και από το  $E$  φέρουμε  $EZ$  κάθετη στην ευθεία  $AB$ . Να αποδείξετε ότι:



- α.  $A\Delta = AE$
- β.  $EZ = \Delta H$

**21 Θέμα 1574**

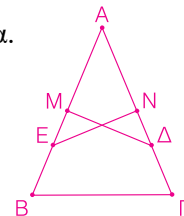
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και η διχοτόμος της γωνίας του  $\hat{\Gamma}$ , η οποία τέμνει την πλευρά  $AB$  στο  $\Delta$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε  $DE \perp B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα  $A\Gamma\Delta$  και  $\Delta\Gamma E$  είναι ίσα.
- Το  $\Gamma$  ισαπέχει από τα σημεία  $A$  και  $E$  και η ευθεία  $\Gamma\Delta$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $AE$ .

**22 Θέμα 1656**

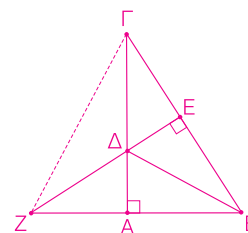
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $M\Delta$ ,  $NE$  οι μεσοκάθετοι των πλευρών του  $AB$ ,  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- αν  $M\Delta = NE$ , τότε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές
- αν  $AB = A\Gamma$ , τότε  $M\Delta = NE$ .

**23 Θέμα 1705**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και η διχοτόμος του  $B\Delta$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε  $DE \perp B\Gamma$  που τέμνει την προέκταση της  $AB$  (προς το  $A$ ) στο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:

- $BE = AB$
- το τρίγωνο  $B\Gamma Z$  είναι ισοσκελές.

**24 Θέμα 1532**

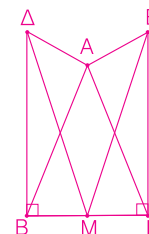
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και οι διχοτόμοι του  $B\Delta$  και  $\Gamma E$ . Αν  $EH \perp B\Gamma$  και  $\Delta Z \perp B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι:

- τα τρίγωνα  $B\Gamma\Delta$  και  $\Gamma B E$  είναι ίσα
- $EH = \Delta Z$

**25 Θέμα 1698**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  της  $B\Gamma$  φέρουμε προς το ίδιο μέρος της  $B\Gamma$ , τα τμήματα  $B\Delta \perp B\Gamma$  και  $\Gamma E \perp B\Gamma$  τέτοια ώστε  $B\Delta = \Gamma E$ . Αν  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι:

- τα τρίγωνα  $B\Delta M$  και  $\Gamma E M$  είναι ίσα.
- $A\Delta = A E$

**26 Θέμα 1545**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και τα ύψη του  $B\Delta$  και  $\Gamma E$ . Να αποδείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα  $B\Delta\Gamma$  και  $\Gamma E B$  είναι ίσα.
- $A\Delta = A E$

**27 Θέμα 1547**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Από το μέσο  $M$  της  $B\Gamma$  φέρουμε τα κάθετα τμήματα  $M\Delta$  και  $M E$  στις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- $M\Delta = M E$
- το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές

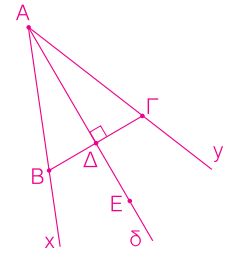
**28 Θέμα 1569**

Σε οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  προεκτείνουμε τη διάμεσο  $AM$  (προς το  $M$ ) κατά ίσο τμήμα  $M\Delta$ . Να αποδείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα  $ABM$  και  $M\Gamma\Delta$  είναι ίσα.
- Τα σημεία  $A$  και  $\Delta$  ισαπέχουν από την πλευρά  $B\Gamma$ .

**29 Θέμα 1670**

Δίνεται γωνία  $\widehat{x\hat{A}y}$  και η διχοτόμος της  $\Delta\delta$ . Από τυχαίο σημείο  $B$  της  $Ax$  φέρουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την  $\Delta\delta$  στο  $\Delta$  και την  $Ay$  στο  $\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:



- α. Τα τμήματα  $AB$  και  $A\Gamma$  είναι ίσα.
- β. Το τυχαίο σημείο  $E$  της  $\Delta\delta$  ισαπέχει από τα  $B$  και  $\Gamma$ .

**30 Θέμα 1571**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ) και  $B\Delta$  η διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{B}$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε  $\Delta E \perp B\Gamma$ , και έστω  $Z$  το σημείο στο οποίο η ευθεία  $E\Delta$  τέμνει την προέκταση της  $BA$  (προς το  $A$ ). Να αποδείξετε ότι:

- α.  $AB = BE$
- β. Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $ZEB$  είναι ίσα.

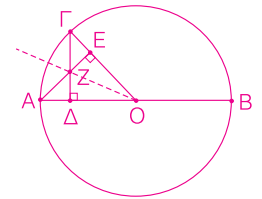
**31 Θέμα 1546**

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και το μέσο  $M$  της βάσης του  $B\Gamma$ . Φέρουμε τις αποστάσεις  $MK$  και  $M\Lambda$  του σημείου  $M$  από τις ίσες πλευρές του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

- α.  $MK = M\Lambda$
- β. Η  $AM$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $KML$ .
- γ. Το τρίγωνο  $AK\Lambda$  είναι ισοσκελές.

**32 Θέμα 1677**

Έστω κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$ . Θεωρούμε διάμετρο  $AB$  και τυχαίο σημείο  $\Gamma$  του κύκλου. Αν  $A\Delta$  κάθετο στην  $O\Gamma$  και  $\Gamma\Delta$  κάθετο στην  $AO$  να αποδείξετε ότι:



- α. Το τρίγωνο  $\Delta O\Gamma$  είναι ισοσκελές.
- β. Η  $OZ$  διχοτομεί τη γωνία  $\widehat{A\hat{O}\Gamma}$  και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου  $A\Gamma$ .

**Θέμα 4**

**33 Θέμα 1724**

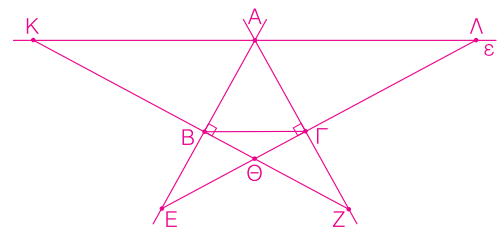
Έστω  $AB\Gamma$  τρίγωνο και τα ύψη του  $BE$  και  $\Gamma\Delta$  που αντιστοιχούν στις πλευρές  $A\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

**Π:** Αν το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $AB = A\Gamma$ , τότε τα ύψη  $BE$  και  $\Gamma\Delta$  που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

- α. Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση  $\Pi$  αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- β. Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της  $\Pi$  και να αποδείξετε ότι ισχύει.
- γ. Να διατυπώσετε την πρόταση  $\Pi$  και την αντίστροφή της ως ενιαία πρόταση.

**34 Θέμα 1875**

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ), και την ευθεία  $\epsilon$  της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας  $A$ . Η κάθετη στην πλευρά  $AB$  στο  $B$  τέμνει την  $\epsilon$  στο  $K$  και την ευθεία  $A\Gamma$  στο  $Z$ . Η κάθετη στην πλευρά  $A\Gamma$  στο  $\Gamma$  τέμνει την  $\epsilon$  στο  $\Lambda$  και την ευθεία  $AB$  στο  $E$ .



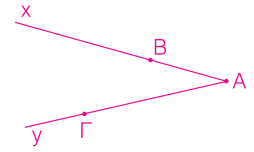
- α. Να αποδείξετε ότι:
  - i.  $AZ = AE$
  - ii.  $AK = AL$
- β. Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η  $A\Theta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $A$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ , όπου  $\Theta$  το σημείο τομής των  $KZ$  και  $E\Lambda$ . Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

## 8. Βασικοί γεωμετρικοί τύποι

## Θέμα 2

## 35 Θέμα 1688

Στο διπλανό σχήμα έχουμε το χάρτη μίας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες  $Ax$  και  $Ay$  παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  βρίσκονται δύο πλατάνια. Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:



- ισαπέχει από τα δύο πλατάνια
- ισαπέχει από τα δύο ποτάμια
- ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

## 10. Ανισοτικές σχέσεις

## Θέμα 2

## 36 Θέμα 1540

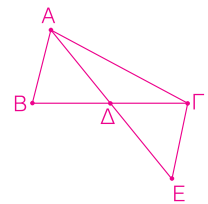
Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A = 90^\circ$ ), η διχοτόμος τη γωνίας  $\hat{\Gamma}$  τέμνει την πλευρά  $AB$  στο σημείο  $\Delta$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε προς την πλευρά  $B\Gamma$  την κάθετο  $\Delta E$ , η οποία τέμνει τη  $B\Gamma$  στο σημείο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:

- $A\Delta = \Delta E$
- $A\Delta < \Delta B$

## 37 Θέμα 1573

Στο διπλανό σχήμα, η  $A\Delta$  είναι διάμεσος του τριγώνου  $AB\Gamma$  και το  $E$  είναι σημείο στην προέκταση της  $A\Delta$ , ώστε  $\Delta E = A\Delta$ . Να αποδείξετε ότι:

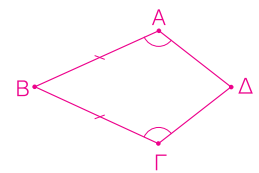
- $AB = \Gamma E$
- $AE < AB + A\Gamma$



## 38 Θέμα 1585

Έστω κυρτό τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $BA = B\Gamma$  και  $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ . Να αποδείξετε ότι:

- $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{A}$
- Το τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές.
- Η ευθεία  $B\Delta$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $A\Gamma$ .



## 39 Θέμα 1558

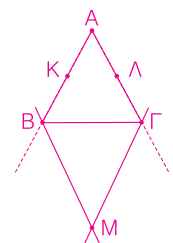
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και  $I$  το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$ . Να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο  $B\Gamma I$  είναι ισοσκελές.
- Οι γωνίες  $\hat{A}\hat{I}\hat{\Gamma}$  και  $\hat{A}\hat{I}\hat{B}$  είναι ίσες.
- Η ευθεία  $AI$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $B\Gamma$ .

## 40 Θέμα 1553

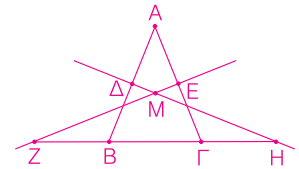
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών  $B$  και  $\Gamma$  τέμνονται στο σημείο  $M$  και  $K, \Lambda$  είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$ .

- Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $BM\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $MB = M\Gamma$ .
- Να δείξετε ότι  $MK = M\Lambda$ .



**41 Θέμα 1578**

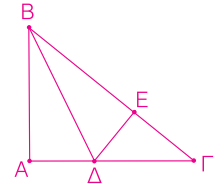
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) . Οι μεσοκάθετες ευθείες των ίσων πλευρών του τέμνονται στο  $M$  και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση  $B\Gamma$  στα  $Z$  και  $H$  .



- α. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα  $\Delta BH$  και  $EZ\Gamma$  .
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $MZH$  είναι ισοσκελές.

**42 Θέμα 1646**

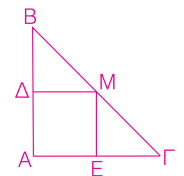
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία  $A$  . Η  $B\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $B$  , η  $\Delta E$  είναι κάθετη στην  $B\Gamma$  και η γωνία  $\Gamma$  είναι μικρότερη της γωνίας  $B$  . Να αποδείξετε ότι:



- α.  $A\Delta = \Delta E$      β.  $A\Delta < \Delta\Gamma$      γ.  $A\Gamma > AB$

**43 Θέμα 1658**

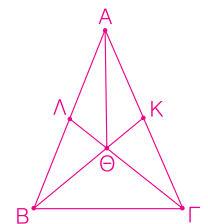
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $A$  ορθή και από το μέσο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$  φέρουμε τα κάθετα τμήματα  $M\Delta$  και  $ME$  στις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



- α. Αν  $M\Delta = ME$  τότε:
  - i. τα τρίγωνα  $B\Delta M$  και  $\Gamma E M$  είναι ίσα
  - ii. το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.
- β. Αν  $AB = A\Gamma$  τότε  $M\Delta = ME$  .

**44 Θέμα 1664**

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και τις διαμέσους του  $BK$  και  $\Gamma\Lambda$  , οι οποίες τέμνονται στο σημείο  $\Theta$  .



- Να αποδείξετε ότι:
- α. Οι διάμεσοι  $BK$  και  $\Gamma\Lambda$  είναι ίσες.
  - β. Τα τρίγωνα  $AB\Theta$  και  $A\Gamma\Theta$  είναι ίσα.

**45 Θέμα 1749**

Θεωρούμε δυο σημεία  $A$  και  $B$  τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία  $\epsilon$  , τέτοια ώστε η ευθεία  $AB$  δεν είναι κάθετη στην  $\epsilon$  . Έστω  $A'$  το συμμετρικό του  $A$  ως προς την ευθεία  $\epsilon$  .

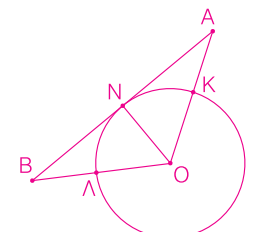
- α. Αν η  $A'B$  τέμνει την ευθεία  $\epsilon$  στο σημείο  $O$  , να αποδείξετε ότι:
  - i. Η ευθεία  $\epsilon$  διχοτομεί τη γωνία  $\widehat{OA'A'}$  .
  - ii. Οι ημιευθείες  $OA$  και  $OB$  σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία  $\epsilon$  .
- β. Αν  $K$  είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία  $\epsilon$  , να αποδείξετε ότι:
  - i.  $KA = KA'$      ii.  $KA + KB > AO + OB$

**11. Ευθεία και κύκλος**

**Θέμα 2**

**46 Θέμα 1676**

Έστω κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$  . Σε σημείο  $N$  του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενή του, και εκατέρωθεν του  $N$  θεωρούμε σημεία  $A$  και  $B$  , τέτοια ώστε  $NA = NB$  . Οι  $OA$  και  $OB$  τέμνουν τον κύκλο στα  $K$  και  $\Lambda$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

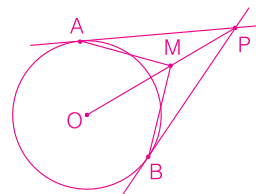


- α. Το τρίγωνο  $AOB$  είναι ισοσκελές.
- β. Το σημείο  $N$  είναι μέσο του τόξου  $K\Lambda$  .

**47 Θέμα 1617**

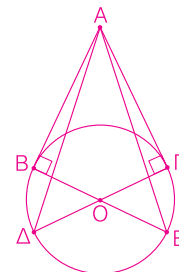
Από εξωτερικό σημείο  $P$  ενός κύκλου  $(O, \rho)$  φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα  $PA$  και  $PB$ . Αν  $M$  είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος  $OP$ , να αποδείξετε ότι:

- α. τα τρίγωνα  $PAM$  και  $PMB$  είναι ίσα
- β. οι γωνίες  $\hat{M}AO$  και  $\hat{M}BO$  είναι ίσες.

**48 Θέμα 1684**

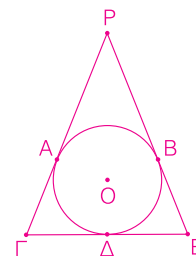
Έστω κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$ . Από σημείο  $A$  εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα  $AB$  και  $AG$ . Τα σημεία  $E$  και  $\Delta$  είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα  $ABE$  και  $AG\Delta$  είναι ίσα.
- β. Τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $AGE$  είναι ίσα.

**49 Θέμα 1751**

Έστω ότι ο κύκλος  $(O, \rho)$  εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου  $PGE$  στα σημεία  $A$ ,  $\Delta$  και  $B$ .

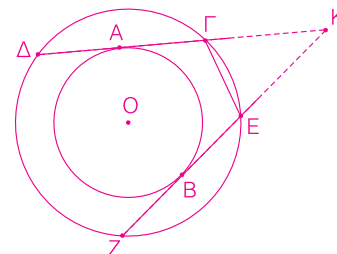
- α. Να αποδείξετε ότι:
  - i.  $PG = G\Delta + AP$
  - ii.  $PG - G\Delta = PE - DE$
- β. Αν  $AG = BE$ , να αποδείξετε ότι:
  - i. Το τρίγωνο  $PGE$  είναι ισοσκελές.
  - ii. Τα σημεία  $P$ ,  $O$  και  $\Delta$  είναι συνευθειακά.

**50 Θέμα 1667**

Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο  $O$  και ακτίνες  $\rho$  και  $R$  ( $\rho < R$ ).

Οι χορδές  $\Delta\Gamma$  και  $ZE$  του κύκλου  $(O, R)$  εφάπτονται του κύκλου  $(O, \rho)$  στα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα.

- α. Να αποδείξετε ότι  $\Delta\Gamma = ZE$ .
- β. Αν οι  $\Delta\Gamma$  και  $ZE$  προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο  $K$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $KE\Gamma$  είναι ισοσκελές.

**Θέμα 4****51 Θέμα 1752**

Θεωρούμε κύκλο κέντρου  $O$  και εξωτερικό σημείο του  $P$ . Από το  $P$  φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα  $PA$  και  $PB$ . Η διακεντρική ευθεία  $PO$  τέμνει τον κύκλο στο σημείο  $\Lambda$ . Η εφαπτόμενη του κύκλου στο  $\Lambda$  τέμνει τα  $PA$  και  $PB$  στα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

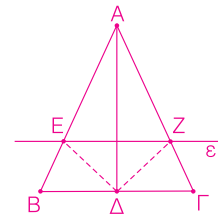
- α. το τρίγωνο  $P\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές
- β.  $\Gamma A = \Delta B$
- γ. η περίμετρος του τριγώνου  $P\Gamma\Delta$  είναι ίση με  $PA + PB$ .

14. Παράλληλες ευθείες

Θέμα 2

52 Θέμα 1544

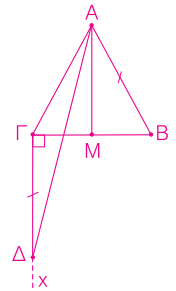
Σε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) φέρουμε τη διχοτόμο  $A\Delta$  και μια ευθεία  $\epsilon$  παράλληλη προς την  $B\Gamma$ , που τέμνει τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



- α. Το τρίγωνο  $A\epsilon Z$  είναι ισοσκελές.
- β. Τα τρίγωνα  $A\epsilon\Delta$  και  $AZ\Delta$  είναι ίσα.

53 Θέμα 1595

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και η διάμεσός του  $AM$ . Φέρουμε ημιευθεία  $\Gamma\chi \perp B\Gamma$  προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το  $A$  και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα  $\Gamma\Delta = AB$ . Να αποδείξετε ότι:



- α. Η γωνία  $\hat{\Delta A\Gamma}$  είναι ίση με τη γωνία  $\hat{\Gamma\Delta A}$ .
- β. Η  $A\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{M A\Gamma}$ .

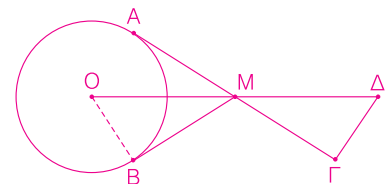
54 Θέμα 1597

Στις προεκτάσεις των πλευρών  $BA$  (προς το  $A$ ) και  $\Gamma A$  (προς το  $A$ ) τριγώνου  $AB\Gamma$  παίρνουμε τα τμήματα  $A\Delta = AB$  και  $A\epsilon = A\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A\Delta\epsilon$  είναι ίσα.
- β.  $\epsilon\Delta \parallel B\Gamma$

55 Θέμα 1620

Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος  $(O, R)$  και τα εφαπτόμενα τμήματα  $MA$  και  $MB$ . Προεκτείνουμε την  $AM$  κατά τμήμα  $M\Gamma = MA$  και την  $OM$  κατά τμήμα  $M\Delta = OM$ .

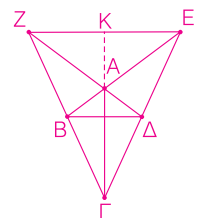


- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $OMB$  και  $M\Gamma\Delta$  είναι ίσα, και να γράψετε τα ίσα στοιχεία τους.
- β. Να αιτιολογήσετε γιατί  $OA \parallel \Gamma\Delta$ .

Θέμα 4

56 Θέμα 1793

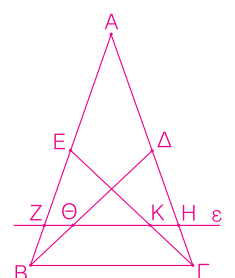
Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB = A\Delta$  και  $\Gamma B = \Gamma\Delta$ . Αν  $E$  το σημείο τομής των προεκτάσεων των  $BA$  και  $\Gamma\Delta$  και  $Z$  το σημείο τομής των προεκτάσεων των  $\Delta A$  και  $\Gamma B$ , να αποδείξετε ότι:



- α. Η  $\Gamma A$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $B\Gamma\Delta$ .
- β.  $\Gamma Z = \Gamma\epsilon$
- γ.  $\epsilon Z \parallel B\Delta$

57 Θέμα 1744

Στο ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) φέρουμε τις διαμέσους  $B\Delta$  και  $\Gamma\epsilon$ . Μία ευθεία  $\epsilon$  παράλληλη στη βάση  $B\Gamma$  τέμνει τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  στα  $Z$  και  $H$  αντίστοιχα και τις διαμέσους  $B\Delta$  και  $\Gamma\epsilon$  στα σημεία  $\Theta$  και  $K$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



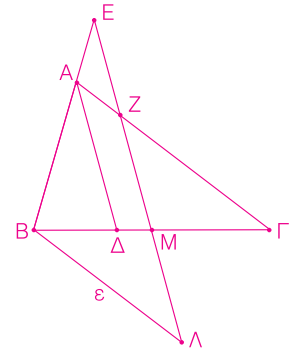
- α.  $BZ = \Gamma H$
- β. τα τρίγωνα  $ZB\Theta$  και  $H\Gamma K$  είναι ίσα.
- γ.  $ZK = H\Theta$

**58 Θέμα 1818**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ , η διχοτόμος του  $A\Delta$  και η ευθεία  $\varepsilon$  παράλληλη από το  $B$  προς την  $A\Gamma$ . Από το μέσο  $M$  της  $B\Gamma$  φέρουμε ευθεία παράλληλη στην  $A\Delta$  η οποία τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $Z$ , την ευθεία  $\varepsilon$  στο σημείο  $\Lambda$  και την προέκταση της  $BA$  στο σημείο  $E$ .

Να αποδείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα  $AEZ$  και  $B\Lambda E$  είναι ισοσκελή.
- $B\Lambda = \Gamma Z$
- $AE = A\Gamma - BA$

**16. Άθροισμα γωνιών τριγώνου****Θέμα 2****59 Θέμα 1700**

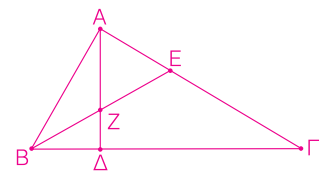
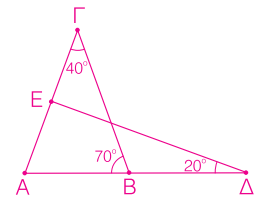
Στο διπλανό σχήμα, να αποδείξετε ότι:

- το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές
- η γωνία  $AE\Delta$  είναι ορθή.

**60 Θέμα 1645**

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύουν  $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$  και  $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$ .

- Να αποδείξετε ότι η γωνία  $B$  είναι  $60^\circ$ .
- Αν το ύψος του  $A\Delta$  και η διχοτόμος του  $BE$  τέμνονται στο σημείο  $Z$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AZE$  είναι ισόπλευρο.

**61 Θέμα 1623**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 80^\circ$  και  $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$ , και  $A\Delta$  η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$ .

- Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$ .
- Φέρουμε από το  $\Delta$  ευθεία παράλληλη στην  $AB$ , που τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $E$ . Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{A\Delta E}$ ,  $\hat{E\Delta\Gamma}$ .

**62 Θέμα 1604**

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) με γωνία κορυφής  $\hat{A} = 40^\circ$ . Στην προέκταση της  $\Gamma B$  (προς το  $B$ ) παίρνουμε τμήμα  $B\Delta$  τέτοιο ώστε  $B\Delta = AB$ .

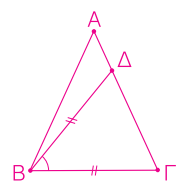
Να υπολογίσετε:

- τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$
- τη γωνία  $\hat{\Delta A\Gamma}$

**63 Θέμα 1602**

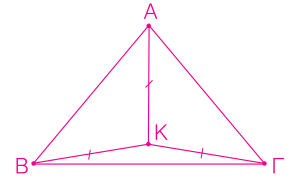
Δίνεται τρίγωνο ισοσκελές  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) με γωνία  $\hat{A} = 50^\circ$ . Έστω  $\Delta$  είναι σημείο της πλευράς  $A\Gamma$ , τέτοιο ώστε  $B\Delta = B\Gamma$ .

- Να υπολογίσετε τις γωνίες  $B$  και  $\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- Να αποδείξετε ότι η γωνία  $\hat{\Delta B\Gamma}$  είναι ίση με τη γωνία  $\hat{A}$ .



**64 Θέμα 1593**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=AG$  και  $\hat{A}=80^\circ$ . Έστω  $K$  σημείο της διχοτόμου της γωνίας  $\hat{A}$ , τέτοιο ώστε  $KB=KA=K\Gamma$ .



- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $BKA$  και  $\Gamma KA$  είναι ίσα.
- β. Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{ABK}$  και  $\hat{A\Gamma K}$ .
- γ. Να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{BK\Gamma}$ .

**65 Θέμα 1541**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A}=90^\circ$ ). Η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$  τέμνει την πλευρά  $AG$  στο σημείο  $\Delta$ . Φέρουμε τμήμα  $\Delta E$  κάθετο στην πλευρά  $B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

- α.  $BE=AB$
- β. Αν επιπλέον  $\hat{B\Delta A}=55^\circ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $\Gamma\Delta E$ .

**66 Θέμα 1693**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A}=90^\circ$ ) και  $AD$  η διχοτόμος της γωνίας  $A$ . Από το σημείο  $\Delta$  φέρουμε την παράλληλη προς την  $AB$  που τέμνει την  $AG$  στο  $E$ .

- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $E\Delta\Gamma$  είναι ορθογώνιο.
- β. Να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{ADE}$ .
- γ. Αν η γωνία  $\hat{B}$  είναι 20 μοίρες μεγαλύτερη της γωνίας  $\hat{\Gamma}$ , να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{E\Delta\Gamma}$ .

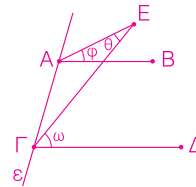
**67 Θέμα 1590**

Δίνεται ευθεία  $\epsilon$  του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  καθώς και ένα τυχαίο σημείο  $E$  βρίσκονται στο ίδιο ημιπίεδο της  $\epsilon$ .

Να αποδείξετε ότι:

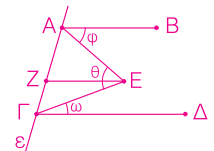
- α. Αν το  $E$  είναι εκτός των τμημάτων  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  τότε:

$$\hat{\omega} = \hat{\phi} + \hat{\theta}$$



- β. Αν το  $E$  είναι ανάμεσα στα τμήματα  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  και  $EZ \parallel AB$ , τότε να αποδείξετε ότι

$$\hat{\theta} = \hat{\omega} + \hat{\phi}$$



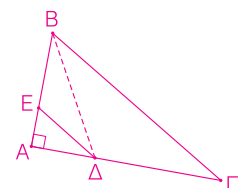
**68 Θέμα 1552**

Ένας μαθητής της Α' λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία  $XO\Psi$ . Στη συνέχεια με κέντρο την κορυφή  $O$  της γωνίας σχεδιάζει δυο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές  $OX$  και  $O\Psi$  της γωνίας στα σημεία  $A, B$  αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία  $\Gamma, \Delta$ . Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;

**69 Θέμα 1594**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A}=90^\circ$ ). Έστω  $\Delta$  σημείο της πλευράς  $AG$  τέτοιο ώστε, η διχοτόμος  $\Delta E$  της γωνίας  $\hat{A\Delta B}$  να είναι παράλληλη στην πλευρά  $B\Gamma$ .

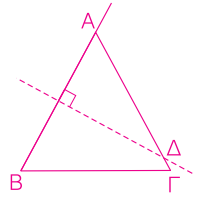
- α. Να αποδείξετε ότι:
  - i.  $\hat{E\Delta B} = \hat{\Delta B\Gamma}$  και  $\hat{E\Delta A} = \hat{\Gamma}$
  - ii. Το τρίγωνο  $B\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές.
- β. Αν  $\hat{A\Delta B} = 60^\circ$  να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{\Gamma}$ .



**70 Θέμα 1554**

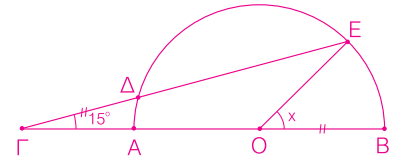
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  στο οποίο η εξωτερική γωνία  $A$  είναι διπλάσια της εσωτερικής γωνίας  $B$ .

- Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $AB = A\Gamma$ .
- Η μεσοκάθετη της πλευράς  $AB$  τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο εσωτερικό της σημείο  $\Delta$ . Αν η γωνία  $A\Delta B$  είναι ίση με  $80^\circ$ , τότε να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

**71 Θέμα 1576**

Σε ημικύκλιο διαμέτρου  $AB$  προεκτείνουμε την  $AB$  προς το μέρος του  $A$  και παίρνουμε ένα σημείο  $\Gamma$ . Θεωρούμε  $E$  ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω  $\Delta$  το σημείο τομής του τμήματος  $GE$  με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα  $\Gamma\Delta$  είναι ίσο με το  $OB$  και η γωνία  $B\hat{G}E = 15^\circ$ , τότε

- να αποδείξετε ότι  $O\hat{\Delta}E = 30^\circ$
- να υπολογίσετε τη γωνία  $E\hat{O}B = x$ .

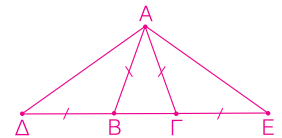
**72 Θέμα 1607**

Στο διπλανό σχήμα ισχύουν

$$\Delta B = BA = A\Gamma = \Gamma E \text{ και } B\hat{A}\Gamma = 40^\circ.$$

Να αποδείξετε ότι

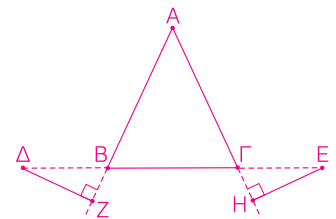
- $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E = 110^\circ$
- τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma E$  είναι ίσα.
- το τρίγωνο  $\Delta AE$  είναι ισοσκελές.

**73 Θέμα 1572**

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και σημεία  $\Delta$  και  $E$  στην ευθεία  $B\Gamma$  τέτοια, ώστε  $B\Delta = \Gamma E$ .

Έστω ότι  $\Delta Z \perp AB$  και  $E\Gamma H \perp A\Gamma$ .

- Να αποδείξετε ότι:
  - $BZ = \Gamma H$
  - Το τρίγωνο  $AZH$  είναι ισοσκελές
- Αν  $\hat{A} = 50^\circ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AZH$ .

**74 Θέμα 1699**

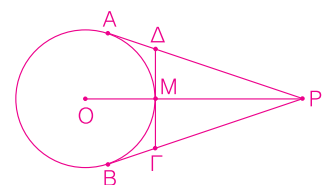
Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ).

- Να αποδείξετε ότι τα μέσα  $\Delta$  και  $E$  των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση  $B\Gamma$ .
- Αν  $\hat{A} = 75^\circ + \hat{B}$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

**75 Θέμα 1636**

Δίνεται κύκλος κέντρου  $O$ , και από ένα σημείο  $P$  εκτός αυτού φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα  $PA$  και  $PB$ . Το τμήμα  $PO$  τέμνει τον κύκλο στο σημείο  $M$  και η εφαπτομένη του κύκλου στο  $M$  τέμνει τα  $PA$  και  $PB$  στα σημεία  $\Delta$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα.

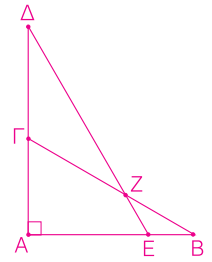
- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $P\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές.
- Αν η γωνία  $APB$  είναι  $40^\circ$  να υπολογίσετε τη γωνία  $AOB$ .



**76 Θέμα 1639**

Στα ορθογώνια τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A\Delta E$  (γωνία  $A$  ορθή) του διπλανού σχήματος ισχύει  $\hat{B} = \hat{\Delta} = 30^\circ$ .

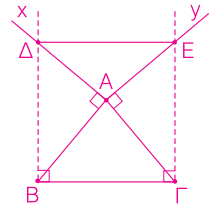
- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου  $A\epsilon Z\Gamma$ .
- β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $\Gamma Z\Delta$  και  $E B Z$  είναι ισοσκελή.



**77 Θέμα 1556**

Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες  $Ax$  και  $Ay$  τέτοιες ώστε  $Ax \perp AB$  και  $Ay \perp A\Gamma$ , όπως στο διπλανό σχήμα. Οι κάθετες στην πλευρά  $B\Gamma$  στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  τέμνουν τις  $Ax$  και  $Ay$  στα σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα.

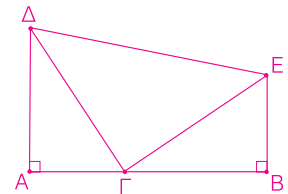
- α. Να αποδείξετε ότι  $B\Delta = \Gamma E$ .
- β. Αν η γωνία  $B A \Gamma$  είναι ίση με  $80^\circ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $\Delta A E$ .



**78 Θέμα 1641**

Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  είναι ορθές και επιπλέον  $A\Delta = B\Gamma$  και  $A\Gamma = B E$ . Να αποδείξετε ότι:

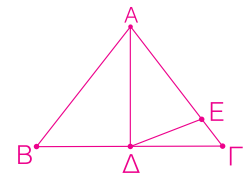
- α. Τα τρίγωνα  $A\Gamma\Delta$  και  $B\Gamma E$  είναι ίσα.
- β. Αν η γωνία  $E\Gamma B = 40^\circ$ , τότε το τρίγωνο  $\Delta\Gamma E$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.



**79 Θέμα 1661**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και η διάμεσός του  $A\Delta$  τέτοια ώστε  $B\hat{A}\Delta = 30^\circ$ . Θεωρούμε σημείο  $E$  στην  $A\Gamma$  τέτοιο ώστε  $A\Delta = A E$ .

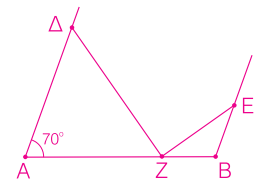
- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισόπλευρο.
- β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $A\Delta E$ .
- γ. Να υπολογίσετε τη γωνία  $E\Delta\Gamma$ .



**80 Θέμα 1640**

Στο διπλανό σχήμα, οι  $A\Delta$  και  $B E$  είναι παράλληλες. Επιπλέον ισχύουν  $A\Delta = A Z$ ,  $B E = B Z$  και  $\hat{A} = 70^\circ$ .

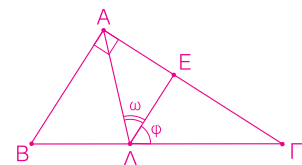
- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων  $A\Delta Z$  και  $B Z E$ .
- β. Να αποδείξετε ότι  $\hat{\Delta Z E} = 90^\circ$ .



**81 Θέμα 1605**

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Έστω ότι η  $A\Delta$  είναι η διχοτόμος της γωνίας  $A$  και η  $\Delta E \parallel AB$ . Αν η γωνία  $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$ ,

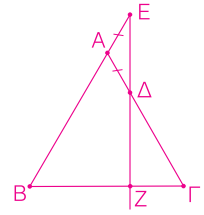
- α. να υπολογίσετε:
  - i. τις γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$
  - ii. τις γωνίες  $\hat{\phi}$  και  $\hat{\omega}$ .
- β. να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $A E \Delta$  είναι ισοσκελές.



**82 Θέμα 1689**

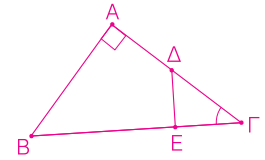
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Θεωρούμε σημείο  $E$  στην προέκταση της  $BA$  (προς το  $A$ ) και σημείο  $\Delta$  στο εσωτερικό της πλευράς  $A\Gamma$ , ώστε  $AE = A\Delta$ .

- Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $A\Delta E$ .
- Αν  $Z$  είναι το σημείο τομής της προέκτασης της  $E\Delta$  (προς το  $\Delta$ ) με την  $B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι η  $EZ$  είναι κάθετη στην  $B\Gamma$ .

**83 Θέμα 1603**

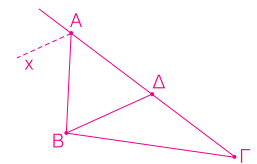
Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $\hat{\Gamma} = 40^\circ$ . Έστω  $\Delta$  τυχαίο σημείο της πλευράς  $A\Gamma$  και  $\Delta E \perp B\Gamma$ . Να υπολογίσετε:

- τις γωνίες του τριγώνου  $\Delta E\Gamma$
- τις γωνίες του τετράπλευρου  $A\Delta E B$ .

**84 Θέμα 1596**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ . Έστω  $Ax$  η διχοτόμος της εξωτερικής του γωνίας  $\hat{A}_{εξ} = 120^\circ$ . Από την κορυφή  $B$  φέρουμε ευθεία παράλληλη στην  $Ax$ , η οποία τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$ .

- Να αποδείξετε ότι:
  - $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = 60^\circ$
  - το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ισόπλευρο.
  - $A\Gamma - AB = \Delta\Gamma$
- Αν η γωνία  $\hat{B}\hat{\Delta}A$  είναι διπλάσια της γωνίας  $\hat{\Gamma}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $B\Delta\Gamma$ .

**85 Θέμα 1565**

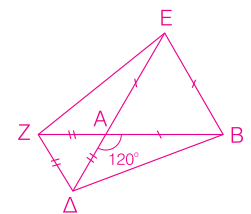
Έστω δυο ισοσκελή τρίγωνα  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και  $A'B'\Gamma'$  ( $A'B' = A'\Gamma'$ ).

- Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει  $AB = A'B'$  και  $\hat{A} = \hat{A}'$ , τότε τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  είναι ίσα.
- Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει  $A\Gamma = A'\Gamma'$  και  $\hat{B} = \hat{B}'$ , τότε τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  είναι ίσα.

**86 Θέμα 1682**

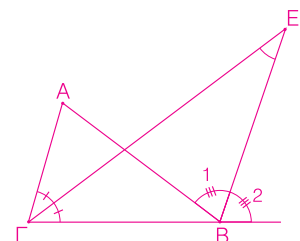
Έστω τρίγωνο  $AB\Delta$  με  $\hat{A} = 120^\circ$ . Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα  $A\hat{E}B$  και  $A\hat{Z}\Delta$ . Να αποδείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα  $AEZ$  και  $AB\Delta$  είναι ίσα.
- Το τμήμα  $\Delta Z$  είναι παράλληλο στο  $BE$ .

**87 Θέμα 1851**

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  η προέκταση της διχοτόμου της  $\hat{\Gamma}$  και της εξωτερικής γωνίας του  $\hat{B}$  τέμνονται στο  $E$ . Δίνεται ότι  $\hat{A}\hat{B}E = 70^\circ = 2\hat{\Gamma}E\hat{B}$

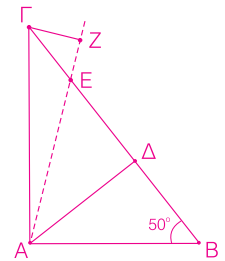
- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $\Gamma BE$  είναι ισοσκελές.
- Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ .



**Θέμα 4**

**88 Θέμα 1708**

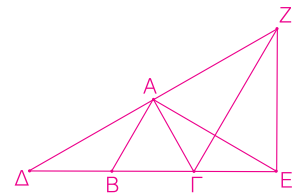
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $\hat{B} = 50^\circ$ , το ύψος του  $AD$  και σημείο  $E$  στην  $D\Gamma$  ώστε  $DE = BD$ . Το σημείο  $Z$  είναι η προβολή του  $\Gamma$  στην  $AE$ .



- α.** Να αποδείξετε ότι:
  - i.** Το τρίγωνο  $ABE$  είναι ισοσκελές.
  - ii.**  $\hat{\Gamma A E} = 10^\circ$
- β.** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $ZGE$ .

**89 Θέμα 1819**

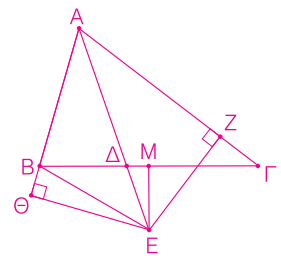
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και στην προέκταση της  $\Gamma B$  (προς το  $B$ ) θεωρούμε σημείο  $\Delta$  τέτοιο ώστε  $B\Delta = B\Gamma$ , ενώ στην προέκταση της  $B\Gamma$  (προς το  $\Gamma$ ) θεωρούμε σημείο  $E$  τέτοιο ώστε  $\Gamma E = B\Gamma$ . Φέρουμε την κάθετη στην  $E\Delta$  στο σημείο  $E$ , η οποία τέμνει την προέκταση της  $\Delta A$  στο  $Z$ .



- α.** Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων  $\Gamma A E$  και  $B\Delta A$ .
- β.** Να αποδείξετε ότι η  $\Gamma Z$  είναι μεσοκάθετος του  $AE$ .
- γ.** Να αποδείξετε ότι  $AB \parallel \Gamma Z$ .

**90 Θέμα 1707**

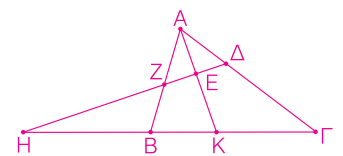
Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  του διπλανού σχήματος, η κάθετη από το μέσο  $M$  της  $B\Gamma$  τέμνει την προέκταση της διχοτόμου  $A\Delta$  στο σημείο  $E$ . Αν  $\Theta, Z$  είναι οι προβολές του  $E$  στις  $AB, A\Gamma$ , να αποδείξετε ότι:



- α.** Το τρίγωνο  $E\Gamma$  είναι ισοσκελές.
- β.** Τα τρίγωνα  $\Theta B E$  και  $Z\Gamma E$  είναι ίσα.
- γ.**  $\hat{A\Gamma E} + \hat{A\beta E} = 180^\circ$

**91 Θέμα 1792**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ . Φέρουμε τη διχοτόμο του  $AK$  και σε τυχαίο σημείο της  $E$  φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο  $AK$ , η οποία τέμνει τις  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $Z$  και  $\Delta$  αντίστοιχα και την προέκταση της  $\Gamma B$  στο σημείο  $H$ . Να αποδείξετε ότι:



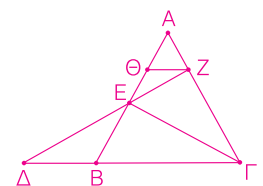
- α.**  $\hat{Z\Delta\Gamma} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$
- β.**  $ZK = K\Delta$
- γ.**  $\hat{Z\eta\Gamma} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$

**92 Θέμα 1828**

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και το ύψος του  $\Gamma E$ . Στην προέκταση της  $\Gamma B$  (προς το  $B$ ) θεωρούμε σημείο  $\Delta$  τέτοιο ώστε

$$B\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$$

Αν η ευθεία  $\Delta E$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $Z$  και  $Z\Theta \parallel B\Gamma$ :

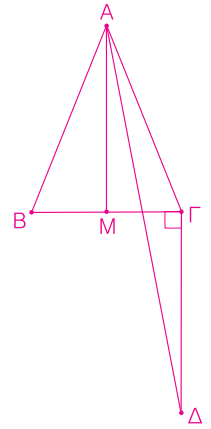


- α.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $B\Delta E$  είναι ισοσκελές και το τρίγωνο  $A\Theta Z$  είναι ισόπλευρο.
- β.** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $\Theta E Z$ .
- γ.** Να αποδείξετε ότι  $AE = 2\Theta Z$ .
- δ.** Να αποδείξετε ότι  $3AB = 4\Theta B$ .

**93 Θέμα 1888**

Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$ . Φέρουμε  $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$  με  $\Gamma\Delta = AB$  ( $A, \Delta$  εκατέρωθεν της  $B\Gamma$ ). Να αποδείξετε ότι:

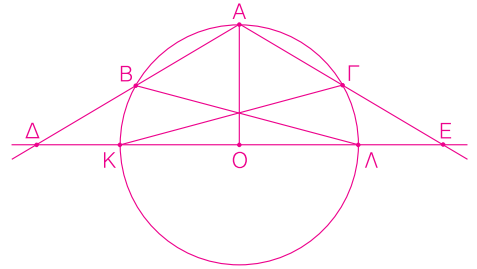
- $AM \parallel \Gamma\Delta$
- η  $A\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{MAG}$
- $\widehat{\Delta A\Gamma} = 45^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}$
- $A\Delta < 2AB$

**94 Θέμα 1874**

Έστω κύκλος με κέντρο  $O$  και διάμετρο  $ΚΛ$ . Έστω  $A$  σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα  $OA$  να είναι κάθετη στην  $ΚΛ$ . Φέρουμε τις χορδές  $AB = A\Gamma = \rho$ .

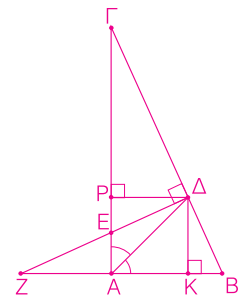
Έστω  $\Delta$  και  $E$  τα σημεία τομής των προεκτάσεων των  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα με την ευθεία της διαμέτρου  $ΚΛ$ . Να αποδείξετε ότι:

- Η γωνία  $\widehat{BAG}$  είναι  $120^\circ$ .
- Τα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  είναι μέσα των  $A\Delta$  και  $AE$  αντίστοιχα.
- $K\Gamma = \Lambda B$

**95 Θέμα 1894**

Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ) φέρουμε τη διχοτόμο του  $A\Delta$ . Έστω  $\Delta K$  και  $\Delta P$  οι προβολές του  $\Delta$  στις  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Η κάθετη της  $B\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$  τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο  $E$  και την προέκταση της πλευράς  $AB$  (προς το  $B$ ) στο σημείο  $Z$ .

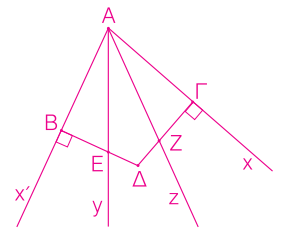
- Να αποδείξετε ότι:
  - $\widehat{B} = \widehat{\Delta E\Gamma}$
  - $\Delta E = \Delta B$
- Να υπολογίσετε τη γωνία  $\Delta\Gamma Z$ .

**96 Θέμα 1849**

Στις πλευρές  $Ax'$  και  $Ax$  γωνίας  $\widehat{x'Ax}$  θεωρούμε σημεία  $B$  και  $\Gamma$  ώστε  $AB = A\Gamma$ .

Οι κάθετες στις  $Ax'$  και  $Ax$  στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα, τέμνονται στο  $\Delta$ . Αν οι ημιευθείες  $Ay$  και  $Az$  χωρίζουν τη γωνία  $\widehat{x'Ax}$  σε τρεις ίσες γωνίες και τέμνουν τις  $B\Delta$  και  $\Delta\Gamma$  στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο  $\Delta EAZ$  είναι ισοσκελές.
- Το  $\Delta$  ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας  $\widehat{x'Ax}$ .
- Οι γωνίες  $\Gamma B\Delta$  και  $\Gamma A\Delta$  είναι ίσες.

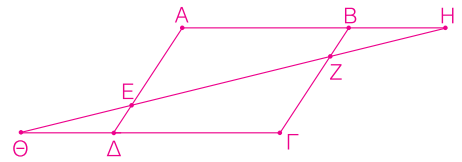
**17. Παραλληλόγραμμα****Θέμα 2****97 Θέμα 1538**

Δίνεται  $AB\Gamma\Delta$  παραλληλόγραμμο με  $AB = 2A\Delta$ . Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας  $\widehat{\Delta}$  του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την  $AB$  στο  $E$ .

- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές.
- Είναι το σημείο  $E$  μέσο της πλευράς  $AB$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**98 Θέμα 1610**

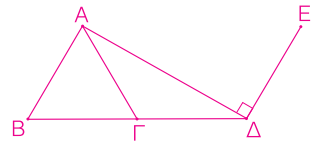
Στις πλευρές  $AD$  και  $BG$  παραλληλογράμμου  $ABGD$  θεωρούμε σημεία  $E$  και  $Z$ , τέτοια ώστε  $AE = GZ$ . Αν η ευθεία  $ZE$  τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών  $AB$  και  $GD$  στα σημεία  $H$  και  $\Theta$ , να αποδείξετε ότι:



- α.  $\widehat{HBZ} = \widehat{E\Delta\Theta}$
- β.  $\widehat{BZH} = \widehat{\Delta E\Theta}$
- γ.  $BH = \Theta\Delta$

**99 Θέμα 1637**

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $ABG$ . Στην προέκταση της  $BG$  (προς το μέρος του  $G$ ) θεωρούμε τμήμα  $G\Delta = BG$ . Φέρουμε τμήμα  $\Delta E$  κάθετο στην  $AD$  στο σημείο της  $\Delta$ , τέτοιο ώστε  $\Delta E = BG$ .

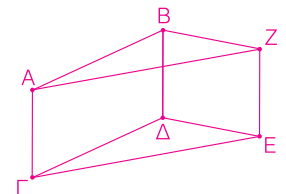


( $A$  και  $E$  στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την  $BD$ ).

- α. Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Delta$ .
- β. Να αποδείξετε ότι  $AB\Delta E$  παραλληλόγραμμο.

**100 Θέμα 1654**

Δίνονται τα παραλληλόγραμμο  $AB\Delta\Gamma$  και  $B\Delta E Z$ . Να αποδείξετε ότι:



- α. Το τετράπλευρο  $A\Gamma E Z$  είναι παραλληλόγραμμο.

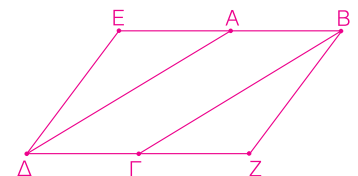
β.  $\widehat{ABZ} = \widehat{\Gamma\Delta E}$

**101 Θέμα 1687**

Έστω παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ .

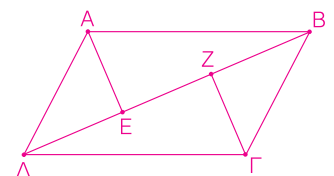
Προεκτείνουμε την πλευρά  $BA$  (προς το  $A$ ) και την πλευρά  $\Delta\Gamma$  (προς το  $\Gamma$ ) κατά τμήματα  $AE = AB$  και  $\Gamma Z = \Delta\Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $EBZ\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.



**102 Θέμα 1628**

Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με  $AB > B\Gamma$  φέρουμε από τις κορυφές  $A$  και  $\Gamma$  καθέτους στη διαγώνιο  $B\Delta$ , οι οποίες την τέμνουν σε διαφορετικά σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

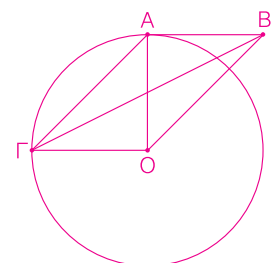


- α.  $AE = \Gamma Z$
- β. Το τετράπλευρο  $A\Gamma E Z$  είναι παραλληλόγραμμο.

**103 Θέμα 1678**

Έστω κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$ . Θεωρούμε κάθετες ακτίνες  $OA$ ,  $OB$  και εφαπτόμενο στον κύκλο τμήμα  $AB$  με  $AB = OB$ .

- α. Να αποδείξετε ότι τα τμήματα  $AO$  και  $B\Gamma$  διχοτομούνται.
- β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου  $ABO\Gamma$ .



**104 Θέμα 1559**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διάμέσός του  $AM$ . Στην προέκταση της διαμέσου  $M\Delta$  του τριγώνου  $AM\Gamma$  (προς το  $\Delta$ ) θεωρούμε σημείο  $E$  ώστε  $M\Delta = \Delta E$ . Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τετράπλευρο  $AM\Gamma E$  είναι παραλληλόγραμμο.
- β. Η  $BE$  διέρχεται από το μέσο της διαμέσου  $AM$ .

**105 Θέμα 1533**

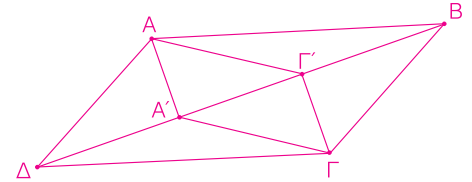
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ , στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του  $BM$  και  $\Gamma N$ . Προεκτείνουμε την  $BM$  (προς το  $M$ ) κατά τμήμα  $M\Delta = BM$  και την  $\Gamma N$  (προς το  $N$ ) κατά τμήμα  $NE = \Gamma N$ .

- α.** Να αποδείξετε ότι  $A\Delta \parallel B\Gamma$  και  $AE \parallel B\Gamma$ .
- β.** Είναι τα σημεία  $E$ ,  $A$  και  $\Delta$  συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**106 Θέμα 1600**

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και  $A'$ ,  $\Gamma'$  οι προβολές των κορυφών  $A$  και  $\Gamma$  στη διαγώνιο  $B\Delta$ . Αν τα σημεία  $A'$  και  $\Gamma'$  δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι:

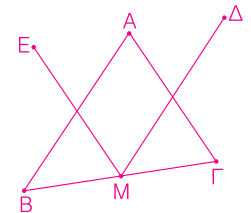
- α.**  $AA' \parallel \Gamma\Gamma'$
- β.**  $AA' = \Gamma\Gamma'$
- γ.** Το τετράπλευρο  $A\Gamma'\Gamma A'$  είναι παραλληλόγραμμο.

**107 Θέμα 1535**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Από το μέσο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$  φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα  $M\Delta$  ίσο και παράλληλο προς την πλευρά  $BA$  και ευθύγραμμο τμήμα  $ME$  ίσο και παράλληλο προς την πλευρά  $\Gamma A$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α.**  $\Delta A = AE$
- β.** Τα σημεία  $\Delta$ ,  $A$  και  $E$  βρίσκονται στην ίδια ευθεία.
- γ.**  $\Delta E = B\Gamma$

**108 Θέμα 1534**

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και η διαγώνιός του  $B\Delta$ . Από τις κορυφές  $A$  και  $\Gamma$  φέρουμε τις κάθετες  $AE$  και  $\Gamma Z$  στη  $B\Delta$ , που την τέμνουν στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα.

- α.** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $\Delta AE$  και  $\Gamma BZ$  είναι ίσα.
- β.** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AEGZ$  είναι παραλληλόγραμμο.

**109 Θέμα 1539**

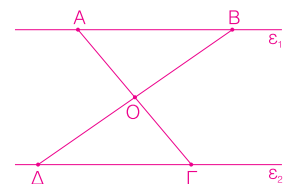
Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και  $O$  το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο  $E$  του τμήματος  $AO$  και σημείο  $Z$  του τμήματος  $OG$ , ώστε  $OE = OZ$ . Να αποδείξετε ότι:

- α.**  $\Delta E = BZ$
- β.** το  $\Delta EBZ$  είναι παραλληλόγραμμο.

**110 Θέμα 1618**

Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  και τα σημεία  $A$ ,  $B$  στην  $\varepsilon_1$  και  $\Delta$  και  $\Gamma$  στην  $\varepsilon_2$  ώστε τα τμήματα  $A\Gamma$  και  $B\Delta$  να τέμνονται στο μέσο  $O$  του  $B\Delta$ . Να αποδείξετε ότι:

- α.** τα τρίγωνα  $AOB$  και  $\Gamma OD$  είναι ίσα και να αναφέρετε τα ίσα κύρια στοιχεία τους αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- β.** το  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.



**111 Θέμα 1701**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$  και  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$ . Προεκτείνουμε τη διάμεσο  $AM$  κατά τμήμα  $M\Delta = MA$ . Από το  $A$  φέρουμε παράλληλη προς τη  $B\Gamma$  η οποία τέμνει την προέκταση της  $\Delta\Gamma$  στο σημείο  $E$ .  
 Να αποδείξετε ότι:

- α. το τετράπλευρο  $AB\Delta\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμο
- β.  $BM = \frac{AE}{2}$

**112 Θέμα 1557**

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB = 2B\Gamma$  και  $E$  το μέσο της πλευράς του  $AB$ . Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο  $EA\Delta$  είναι ισοσκελές.
- β. Η  $\Delta E$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{\Delta}$ .

**113 Θέμα 1531**

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB = 2B\Gamma$ . Προεκτείνουμε την πλευρά  $A\Delta$  κατά τμήμα  $\Delta E = A\Delta$  και φέρουμε την  $BE$  που τέμνει τη  $\Delta\Gamma$  στο σημείο  $H$ . Να αποδείξετε ότι:

- α. το τρίγωνο  $BAE$  είναι ισοσκελές
- β. το  $\Delta E\Gamma B$  είναι παραλληλόγραμμο
- γ. η  $AH$  είναι διάμεσος του  $BAE$  τριγώνου.

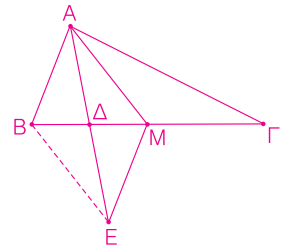
**114 Θέμα 1609**

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ . Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών  $\hat{\Delta}$  και  $\hat{B}$  τέμνουν τις πλευρές  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα  $AE\Delta$  και  $B\Gamma Z$  είναι ίσα.
- β. Το τετράπλευρο  $\Delta EBZ$  είναι παραλληλόγραμμο.

**115 Θέμα 1642**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  στο οποίο ισχύει  $B\Gamma = 2AB$  και έστω  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$ . Αν η  $A\Delta$  είναι διάμεσος του τριγώνου  $ABM$  και  $E$  σημείο στην προέκτασή της ώστε  $A\Delta = \Delta E$ . Να αποδείξετε ότι:

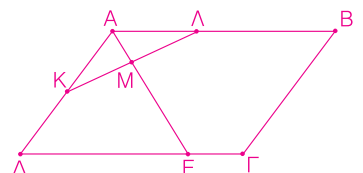


- α. Το τετράπλευρο  $ABEM$  είναι παραλληλόγραμμο.
- β.  $ME = M\Gamma$

**Θέμα 4**

**116 Θέμα 1785**

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ , με  $AB > A\Delta$ . Θεωρούμε σημεία  $K, \Lambda$ , των  $A\Delta$  και  $AB$  αντίστοιχα ώστε  $AK = A\Lambda$ . Έστω  $M$  το μέσο του  $K\Lambda$  και η προέκταση του  $AM$  (προς το  $M$ ) τέμνει τη  $\Delta\Gamma$  στο σημείο  $E$ .

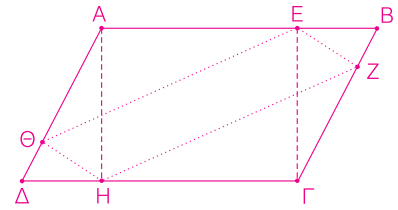


Να αποδείξετε ότι:

- α.  $A\Delta = \Delta E$
- β.  $B\Gamma + \Gamma E = AB$
- γ.  $\hat{B} = 2\hat{A}\Lambda K$

**117 Θέμα 1839**

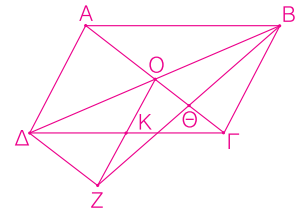
Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  θεωρούμε σημεία  $E, Z, H, \Theta$  στις πλευρές  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$  αντίστοιχα, με  $AE = \Gamma H$  και  $BZ = \Delta\Theta$ .  
Να αποδείξετε ότι:



- α. Το τετράπλευρο  $AEGH$  είναι παραλληλόγραμμο.
- β. Το τετράπλευρο  $EZH\Theta$  είναι παραλληλόγραμμο.
- γ. Τα τμήματα  $A\Gamma, B\Delta, EH$  και  $Z\Theta$  διέρχονται από το ίδιο σημείο.

**118 Θέμα 1877**

Έστω παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $O$  το σημείο τομής των διαγωνίων του και  $K$  το μέσο του  $\Gamma\Delta$ . Προεκτείνουμε το τμήμα  $OK$  κατά τμήμα  $KZ = KO$ . Η  $BZ$  τέμνει τη διαγώνιο  $A\Gamma$  στο  $\Theta$ . Να αποδείξετε ότι:

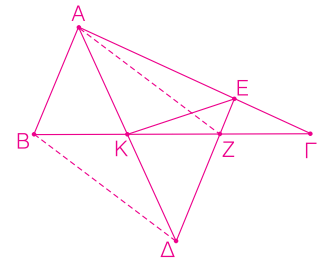


- α. Τα τμήματα  $O\Gamma$  και  $BZ$  διχοτομούνται.
- β.  $AO = \Delta Z$
- γ. Τα τρίγωνα  $\triangle AOB$  και  $\triangle \Delta Z\Gamma$  είναι ίσα.

**119 Θέμα 1857**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ , με  $AK$  διχοτόμο της γωνίας  $A$ . Στην προέκταση της  $AK$  θεωρούμε σημείο  $\Delta$  ώστε  $AK = K\Delta$ .

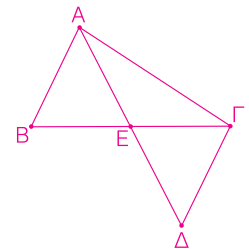
Η παράλληλη από το  $\Delta$  προς την  $AB$  τέμνει τις  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$  στα  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



- α. Το τρίγωνο  $AED$  είναι ισοσκελές.
- β. Η  $EK$  είναι μεσοκάθετος της  $A\Delta$ .
- γ. Τα τρίγωνα  $AKB$  και  $K\Delta Z$  είναι ίσα.
- δ. Το τετράπλευρο  $AZ\Delta B$  είναι παραλληλόγραμμο.

**120 Θέμα 1890**

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών  $A, B, \Gamma, \Delta$  και  $E$  και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωριό  $E$  ισαπέχει από τα χωριά  $B, \Gamma$  και επίσης από τα χωριά  $A$  και  $\Delta$ .



- α. Να αποδείξετε ότι:
  - i. η απόσταση των χωριών  $A$  και  $B$  είναι ίση με την απόσταση των χωριών  $\Gamma$  και  $\Delta$ .
  - ii. αν οι δρόμοι  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν.
  - iii. τα χωριά  $B$  και  $\Gamma$  ισαπέχουν από τον δρόμο  $A\Delta$ .
- β. Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου  $A\Gamma$  που ισαπέχει από τα χωριά  $A$  και  $\Delta$ .

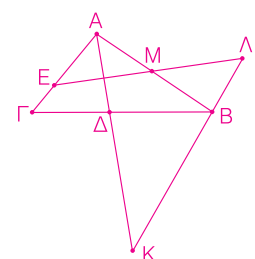
**121 Θέμα 1882**

Έστω τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$ ,  $A\Delta$  η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$  και  $M$  το μέσον της  $AB$ . Η κάθετη από το  $M$  στην  $A\Delta$  τέμνει το  $A\Gamma$  στο  $E$ .

Η παράλληλη από το  $B$  στην  $A\Gamma$  τέμνει την προέκταση της  $EM$  στο  $\Lambda$ .

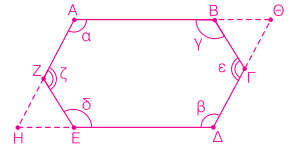
Να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα  $AEM, MB\Lambda$  και  $ABK$  είναι ισοσκελή.
- β. Το τετράπλευρο  $A\Lambda B E$  είναι παραλληλόγραμμο.



**122 Θέμα 1746**

Στο κυρτό εξάγωνο  $ΑΒΓΔΕΖ$  ισχύουν τα εξής:  $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ ,  $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$  και  $\hat{\epsilon} = \hat{\zeta}$ .



- α.** Να υπολογίσετε το άθροισμα  $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\epsilon}$ .
- β.** Αν οι πλευρές  $AZ$  και  $ΔΕ$  προεκτεινόμενες τέμνονται στο  $H$  και οι πλευρές  $AB$  και  $ΔΓ$  προεκτεινόμενες τέμνονται στο  $\Theta$ , να αποδείξετε ότι:
  - i.** Οι γωνίες  $A$  και  $H$  είναι παραπληρωματικές.
  - ii.** Το τετράπλευρο  $A\Theta\Delta H$  είναι παραλληλόγραμμο.

**123 Θέμα 1730**

Έστω ότι  $E$  και  $Z$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  παραλληλογράμμου  $ΑΒΓΔ$  αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  επιπλέον ισχύει  $AB > AD$ , να εξετάσετε αν είναι αληθείς ή όχι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο  $\Delta EBZ$  είναι παραλληλόγραμμο.

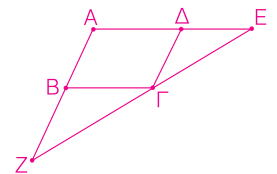
Ισχυρισμός 2:  $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{Z}\hat{\Gamma}$ .

Ισχυρισμός 3: Οι  $\Delta E$  και  $BZ$  είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών  $\hat{\Delta}$  και  $\hat{B}$ .

- α.** Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε.
- β.** Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής.  
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**124 Θέμα 1805**

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  και στην προέκταση της  $ΑΔ$  θεωρούμε σημείο  $E$  τέτοιο ώστε  $\Delta E = \Delta \Gamma$  ενώ στην προέκταση της  $ΑΒ$  θεωρούμε σημείο  $Z$  τέτοιο ώστε  $BZ = B\Gamma$ .



- α.** Να αποδείξετε ότι:
  - i.**  $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{Z} = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}\hat{E}$
  - ii.** τα σημεία  $Z, \Gamma, E$  είναι συνευθειακά.
- β.** Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι τα σημεία  $Z, \Gamma, E$  είναι συνευθειακά ανέπτυξε τον παρακάτω συλλογισμό.

«Έχουμε:  $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{Z} = \hat{\Delta}\hat{E}\hat{\Gamma}$  (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων  $\Delta E$  και  $B\Gamma$  που τέμνονται από τη  $ZE$ ) και  $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{E}$  (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων  $\Delta E$  και  $B\Gamma$  που τέμνονται από την  $\Delta\Gamma$ ).

Όμως  $\hat{\Delta}\hat{\Gamma}\hat{E} + \hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{E} + \hat{\Delta}\hat{E}\hat{\Gamma} = 180^\circ$  (ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου  $\Delta E\Gamma$ ).

Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα:

$$\hat{\Delta}\hat{\Gamma}\hat{E} + \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} + \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{Z} = 180^\circ$$

Οπότε τα σημεία  $Z, \Gamma, E$  είναι συνευθειακά.».

Όμως ο καθηγητής υπέδειξε ένα λάθος στο συλλογισμό αυτό. Να βρείτε το λάθος στο συγκεκριμένο συλλογισμό.

**125 Θέμα 1731**

Έστω ότι  $E$  και  $Z$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$  αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  επιπλέον ισχύουν  $AB > A\Delta$  και γωνία  $A$  αμβλεία, να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο  $\Delta EBZ$  είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: Τα τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $B\Gamma Z$  είναι ίσα.

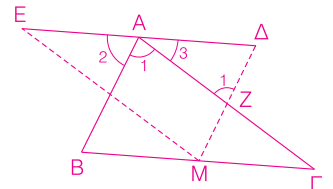
Ισχυρισμός 3: Τα τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $B\Gamma Z$  είναι ισοσκελή.

- Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε.
- Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**126 Θέμα 1810**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Από το μέσο  $M$  του  $B\Gamma$  φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα  $M\Delta$  ίσο και παράλληλο με το  $BA$  και ευθύγραμμο τμήμα  $ME$  ίσο και παράλληλο με το  $\Gamma A$  (τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  είναι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη  $B\Gamma$  και το σημείο  $A$ ). Να αποδείξετε ότι:

- Τα σημεία  $\Delta$ ,  $A$ ,  $E$  είναι συνευθειακά.
- Η περίμετρος του τριγώνου  $M\Delta E$  είναι ίση με την περίμετρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- Όταν ένας καθηγητής έθεσε στους μαθητές του το ερώτημα αν τα σημεία  $\Delta$ ,  $A$ ,  $E$  είναι συνευθειακά, ένας από αυτούς έκανε το παρακάτω σχήμα και απάντησε ως εξής:



$$\hat{Z}_1 = \hat{A}_1 \text{ (εντός εναλλάξ των } AB // M\Delta \text{ που τέμνονται από } AZ \text{)}$$

$$A\hat{\Delta}Z = \hat{A}_2 \text{ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των } AB // M\Delta \text{ που τέμνονται από } \Delta E \text{)}$$

$$\text{Όμως } \hat{Z}_1 + \hat{A}_3 + A\hat{\Delta}Z = 180^\circ \text{ (άθροισμα γωνιών του τριγώνου } A\Delta Z \text{)}.$$

$$\text{Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε: } \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ.$$

Οπότε  $\Delta$ ,  $E$ ,  $A$  συνευθειακά.

Όμως ο καθηγητής είπε ότι υπάρχει λάθος στο συλλογισμό. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή;

**127 Θέμα 1709**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ , στο οποίο η εξωτερική του γωνία  $\hat{\Gamma}$  είναι διπλάσια της εσωτερικής του γωνίας  $\hat{A}$ . Από την κορυφή  $A$  διέρχεται ημιευθεία  $Ax // B\Gamma$  στο ημιεπίπεδο  $(AB, \Gamma)$ . Στην ημιευθεία  $Ax$  θεωρούμε σημείο  $\Delta$  τέτοιο ώστε  $A\Delta = B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

- Η  $B\Delta$  διέρχεται από το μέσο του τμήματος  $A\Gamma$ .
- Η  $\Gamma\Delta$  είναι διχοτόμος της  $\hat{\Gamma}_{\text{εξ}}$ .
- Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.

**18. Ορθογώνιο****Θέμα 2****128 Θέμα 1599**

Σε ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$ , αν  $M$  και  $N$  είναι τα μέσα των  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- $M\Delta = M\Gamma$
- Η ευθεία  $MN$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $\Gamma\Delta$ .

**129 Θέμα 1692**

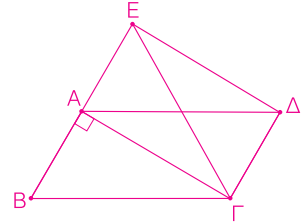
Έστω ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  και τα σημεία  $N$  και  $K$  των  $AB$  και  $\Delta\Gamma$  αντίστοιχα, τέτοια ώστε  $AN = K\Gamma$ .  
 Να αποδείξετε ότι:

- α. τα τρίγωνα  $AN\Delta$  και  $B\Gamma K$  είναι ίσα
- β. το τετράπλευρο  $NBK\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.

**130 Θέμα 1653**

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο και το  $A\Gamma\Delta E$  είναι ορθογώνιο. Να αποδείξετε ότι:

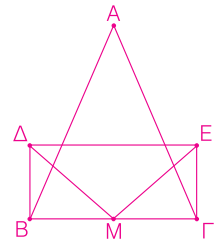
- α. Το σημείο  $A$  είναι μέσο του  $BE$ .
- β. Το τρίγωνο  $BE\Gamma$  είναι ισοσκελές.
- γ.  $\hat{B\Gamma A} = \hat{A\Delta E}$



**131 Θέμα 1668**

Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $M$  το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ . Στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  φέρουμε κάθετες στη  $B\Gamma$  προς το ίδιο μέρος, και θεωρούμε σε αυτές σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα, τέτοια ώστε  $M\Delta = ME$ . Να αποδείξετε ότι:

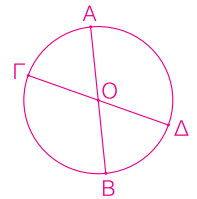
- α. Τα τμήματα  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  είναι ίσα.
- β. Το τετράπλευρο  $B\Delta E\Gamma$  είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



**132 Θέμα 1683**

Σε κύκλο κέντρου  $O$  φέρουμε δυο διαμέτρους του  $AB$  και  $\Gamma\Delta$ . Να αποδείξετε ότι:

- α. Οι χορδές  $A\Gamma$  και  $B\Delta$  του κύκλου είναι ίσες.
- β. Το τετράπλευρο  $A\Gamma B\Delta$  είναι ορθογώνιο.

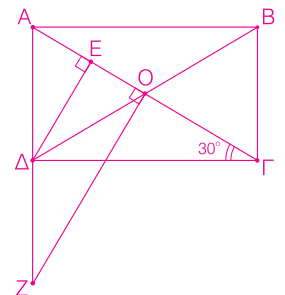


**Θέμα 4**

**133 Θέμα 1729**

Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $\hat{\Delta\Gamma A} = 30^\circ$  και  $O$  το κέντρο του. Φέρουμε  $\Delta E \perp A\Gamma$ .

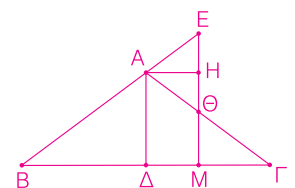
- α. Να αποδείξετε ότι η γωνία  $\hat{A\Delta\Gamma}$  χωρίζεται από τη  $\Delta E$  και τη διαγώνιο  $\Delta B$  σε τρεις ίσες γωνίες.
- β. Φέρουμε κάθετη στην  $A\Gamma$  στο σημείο  $O$  η οποία τέμνει την προέκταση της  $A\Delta$  στο  $Z$ . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα  $AZO$  και  $AB\Gamma$  είναι ίσα.



**134 Θέμα 1822**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ), και τυχαίο σημείο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$ . Από το σημείο  $M$  φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά  $B\Gamma$  που τέμνει τις ευθείες  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $E$  και  $\Theta$  αντίστοιχα. Αν  $A\Delta$  και  $AH$  τα ύψη των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $A\Theta E$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α.  $\hat{\Delta A H} = 90^\circ$
- β. Το τρίγωνο  $A\Theta E$  είναι ισοσκελές.
- γ.  $M\Theta + ME = 2A\Delta$



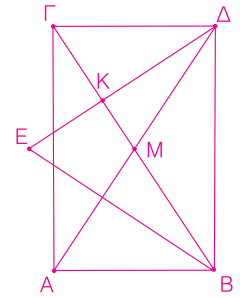
**135 Θέμα 1833**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Φέρουμε τη διάμεσό του  $AM$  την οποία προεκτείνουμε (προς το μέρος του  $M$ ) κατά τμήμα  $M\Delta = AM$ . Θεωρούμε ευθεία  $\Delta K$  κάθετη στη  $B\Gamma$ , η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας  $B$  στο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:

**α.** Το τετράπλευρο  $AB\Delta\Gamma$  είναι ορθογώνιο.

**β.**  $\hat{K\epsilon B} = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$

**γ.**  $\Delta E = B\Delta$

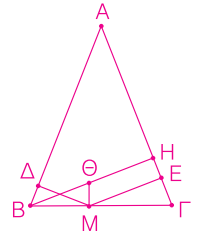
**136 Θέμα 1800**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ , τυχαίο σημείο  $M$  της βάσης του  $B\Gamma$  και το ύψος του  $BH$ . Από το  $M$  φέρουμε κάθετες  $M\Delta$ ,  $ME$  και  $M\Theta$  στις  $AB$ ,  $A\Gamma$  και  $BH$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

**α.** Το τετράπλευρο  $MEH\Theta$  είναι ορθογώνιο.

**β.**  $B\Theta = M\Delta$

**γ.** Το άθροισμα  $M\Delta + ME = BH$ .

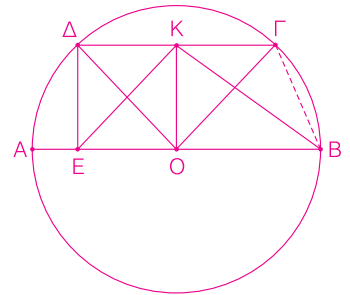
**137 Θέμα 1879**

Έστω κύκλος με κέντρο  $O$  και διάμετρο  $AB$ . Φέρουμε χορδή  $\Gamma\Delta // AB$  με  $K$  το μέσο της. Από το  $\Delta$  φέρνουμε το τμήμα  $\Delta E$  κάθετο στην  $AB$ . Να αποδείξετε ότι:

**α.** Το τετράπλευρο  $K\Gamma O E$  είναι παραλληλόγραμμο.

**β.**  $\hat{\Delta E K} = \frac{\hat{\Delta O \Gamma}}{2}$

**γ.**  $KE < KB$

**138 Θέμα 1733**

Έστω  $\epsilon_1, \epsilon_2$  δυο κάθετες ευθείες που τέμνονται στο  $O$  και τυχαίο σημείο  $M$  του επιπέδου που δεν ανήκει στις ευθείες.

**α.** Αν  $M_1$  είναι το συμμετρικό του  $M$  ως προς την  $\epsilon_1$  και  $M_2$  το συμμετρικό του  $M_1$  ως προς την  $\epsilon_2$ , να αποδείξετε ότι:

**i.**  $OM = OM_1$

**ii.** Τα σημεία  $M, O$  και  $M_2$  είναι συνευθειακά.

**iii.** Το τρίγωνο  $MM_1M_2$  είναι ορθογώνιο.

**β.** Αν  $M_3$  είναι το συμμετρικό σημείο του  $M_2$  ως προς την  $\epsilon_1$ , τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το  $MM_1M_2M_3$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**139 Θέμα 1891**

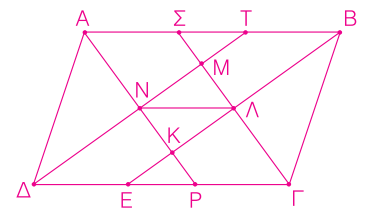
Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB > A\Delta$  και οι διχοτόμοι των γωνιών του  $AP, BE, \Gamma\Sigma$  και  $\Delta T$  (όπου  $P, E$  στην  $\Delta\Gamma$  και  $\Sigma, T$  στην  $AB$ ) τέμνονται στα σημεία  $K, \Lambda, M$  και  $N$  όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

**α.** το τετράπλευρο  $\Delta EBT$  είναι παραλληλόγραμμο.

**β.** το τετράπλευρο  $K\Lambda MN$  είναι ορθογώνιο.

**γ.**  $\Lambda N // AB$

**δ.**  $\Lambda N = AB - A\Delta$



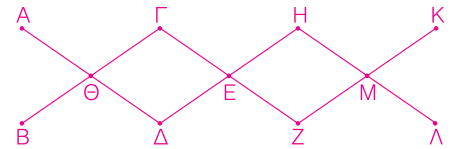
**140 Θέμα 1714**

Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι ίσα ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου

$$(A\Delta, B\Gamma, \Gamma Z, \Delta H, ZK, H\Lambda)$$

που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά

$$(A, B, \Gamma, \Delta, \Theta, E, M, H, K, \Lambda, Z)$$

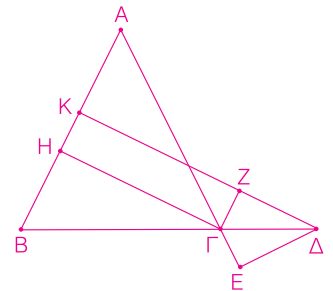


Αν το σημείο  $\Theta$ , είναι μέσο των τμημάτων  $A\Delta$  και  $B\Gamma$  ενώ το σημείο  $E$  είναι μέσο των τμημάτων  $\Gamma Z$  και  $\Delta H$ , να αποδείξετε ότι:

- α. Το τετράπλευρο  $\Gamma H Z \Delta$  είναι ορθογώνιο.
- β. Τα σημεία  $B, \Delta, Z$  είναι συνευθειακά.
- γ. Το τετράπλευρο  $A\Gamma Z \Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.

**141 Θέμα 1816**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και σημείο  $\Delta$  στην προέκταση της  $B\Gamma$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε  $\Delta K$  κάθετη στην  $AB$  και  $\Delta E$  κάθετη στην προέκταση της  $A\Gamma$ . Από το σημείο  $\Gamma$  φέρουμε  $\Gamma H$  κάθετη στην  $AB$  και  $\Gamma Z$  κάθετη στην  $K\Delta$ . Να αποδείξετε ότι:



- α. Η γωνία  $Z\Gamma\Delta$  είναι ίση με τη γωνία  $B$ .
- β. Η  $\Gamma\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $Z\Gamma E$ .
- γ. Το τρίγωνο  $\Delta Z E$  είναι ισοσκελές.
- δ.  $\Delta K - \Delta E = H\Gamma$

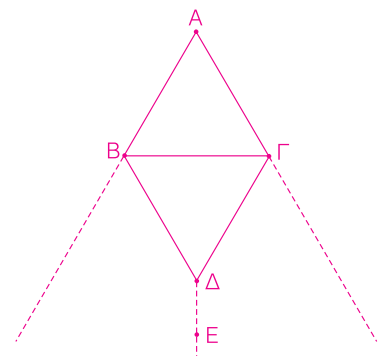
**19. Ρόμβος**

**Θέμα 2**

**142 Θέμα 1681**

Δίνεται ρόμβος  $AB\Delta\Gamma$ . Στην προέκταση της διαγωνίου  $A\Delta$  (προς το  $\Delta$ ) παίρνουμε τυχαίο σημείο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:

- α. Το σημείο  $E$  ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  (προς το μέρος των  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα).
- β. Το σημείο  $E$  ισαπέχει από τα σημεία  $B$  και  $\Gamma$ .



**143 Θέμα 1570**

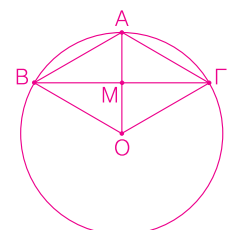
Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$  και το ύψος του  $A\Delta$ . Προεκτείνουμε το  $A\Delta$  (προς το  $\Delta$ ) κατά τμήμα  $\Delta E = A\Delta$ . Έστω  $K$  το συμμετρικό του  $B$  ως προς το  $\Delta$ . Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο  $ABK$  είναι ισοσκελές.
- β. Το τετράπλευρο  $ABEK$  είναι ρόμβος.

**144 Θέμα 1679**

Έστω κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$ . Θεωρούμε την ακτίνα  $OA$  και τη χορδή  $B\Gamma$  κάθετη στην  $OA$  στο μέσο της  $M$ .

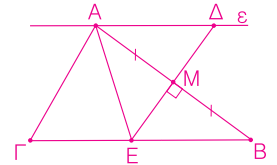
- α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $A\Gamma OB$  είναι ρόμβος.
- β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου  $A\Gamma OB$ .



**145 Θέμα 1630**

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $ΑΓΒ$ . Φέρουμε από τη κορυφή  $A$  ευθεία  $\epsilon$  παράλληλη στη  $BΓ$ . Η μεσοκάθετος της πλευράς  $AB$  τέμνει την  $\epsilon$  στο  $\Delta$  και την  $BΓ$  στο  $E$ .

- Να αποδείξετε ότι  $\Delta A = \Delta B$  και  $EA = EB$ .
- Αν  $M$  το μέσο του  $AB$ , να συγκρίνετε τα τρίγωνα  $ΑΜΔ$  και  $ΕΜΒ$ .
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AΔBE$  είναι ρόμβος.

**146 Θέμα 1584**

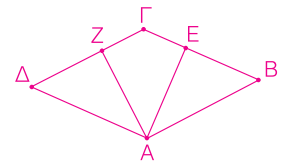
Σε κύκλο κέντρου  $O$ , έστω  $OA$  μία ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της  $OA$  που τέμνει τον κύκλο στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο  $OBA$  είναι ισόπλευρο.
- Το τετράπλευρο  $OBA\Gamma$  είναι ρόμβος.

**147 Θέμα 1575**

Το τετράπλευρο  $ΑΒΓΔ$  του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω ότι  $AE \perp BΓ$  και  $AZ \perp ΔΓ$ . Να αποδείξετε ότι:

- Αν το παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  είναι ρόμβος, τότε  $AZ = AE$ .
- Αν για το παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  ισχύει  $AZ = AE$ , τότε αυτό είναι ρόμβος.

**Θέμα 4****148 Θέμα 1840**

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  και σημεία  $K, \Lambda$  της διαγωνίου του  $BΔ$ , τέτοια ώστε να ισχύει  $BK = K\Lambda = \Lambda\Delta$ .

- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $ΑΚΓ\Lambda$  είναι παραλληλόγραμμο.
- Να αποδείξετε ότι, αν το αρχικό παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  είναι ρόμβος, τότε και το  $ΑΚΓ\Lambda$  είναι ρόμβος.
- Ποια πρέπει να είναι η σχέση των διαγωνίων του αρχικού παραλληλογράμμου  $ΑΒΓΔ$ , ώστε το  $ΑΚΓ\Lambda$  να είναι ορθογώνιο.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**149 Θέμα 1740**

Δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις  $\Pi 1$  και  $\Pi 2$ :

**$\Pi 1$ :** Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

**$\Pi 2$ :** Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.

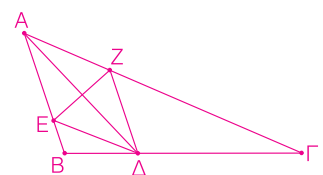
- Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις  $\Pi 1$  και  $\Pi 2$  αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.
- Στην περίπτωση που και οι δύο προτάσεις ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως μια ενιαία πρόταση.

**150 Θέμα 1844**

Έστω τρίγωνο  $ΑΒΓ$  και  $ΑΔ$  η διχοτόμος της γωνίας  $A$ , για την οποία ισχύει  $AΔ = ΔΓ$

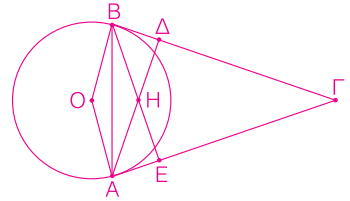
Η  $ΔΕ$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $AΔB$  και η  $ΔZ$  παράλληλη στην  $AB$ . Να αποδείξετε ότι:

- Τα τμήματα  $EΔ$  και  $AΓ$  είναι παράλληλα.
- Το τρίγωνο  $EΑΔ$  είναι ισοσκελές.
- Τα τμήματα  $AΔ$  και  $EZ$  διχοτομούνται.



**151 Θέμα 1823**

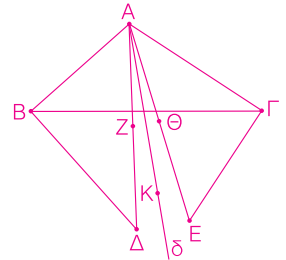
Δίνεται κύκλος κέντρου  $O$  και δυο μη αντιδιαμετρικά σημεία του  $A$  και  $B$ . Φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία  $A$  και  $B$  οι οποίες τέμνονται στο σημείο  $\Gamma$ . Φέρουμε επίσης και τα ύψη  $A\Delta$  και  $BE$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  τα οποία τέμνονται στο σημείο  $H$ . Να αποδείξετε ότι:



- α. Το τρίγωνο  $BHA$  είναι ισοσκελές.
- β. Το τετράπλευρο  $OBHA$  είναι ρόμβος.
- γ. Τα σημεία  $O, H, \Gamma$  είναι συνευθειακά.

**152 Θέμα 1869**

Δίνεται τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ . Φέρουμε τμήμα  $B\Delta$  κάθετο στην  $AB$  και με  $B\Delta = A\Gamma$  και τμήμα  $\Gamma E$  κάθετο στην  $A\Gamma$  με  $\Gamma E = AB$ . Θεωρούμε τα μέσα  $Z$  και  $\Theta$  των  $A\Delta$  και  $A\Gamma$  καθώς και τη διχοτόμο  $A\delta$  της γωνίας  $\hat{\Delta A E}$ .



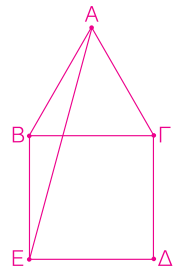
- α. Να αποδείξετε ότι  $A\Delta = A\Gamma$ .
- β. Αν  $K$  τυχαίο σημείο της διχοτόμου  $A\delta$ , να αποδείξετε ότι το  $K$  ισαπέχει από τα μέσα  $Z$  και  $\Theta$ .
- γ. Αν το  $K$  είναι σημείο της διχοτόμου  $A\delta$  τέτοιο ώστε  $KZ = AZ$ , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AZK\Theta$  είναι ρόμβος.

**20. Τετράγωνο**

**Θέμα 2**

**153 Θέμα 1651**

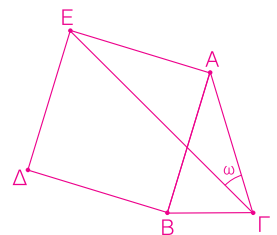
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο  $B\Gamma\Delta E$ .



- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες:
  - i.  $\hat{A B E}$
  - ii.  $\hat{B E A}$
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $A E \Delta$  είναι ισοσκελές.

**154 Θέμα 1652**

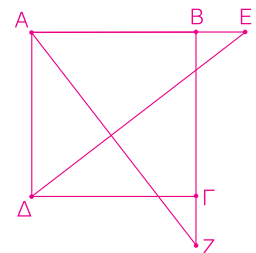
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο  $AB\Delta E$ . Να αποδείξετε ότι:



- α. Το τρίγωνο  $A\Gamma E$  είναι ισοσκελές.
- β.  $2 \cdot \hat{E\Gamma A} = 90^\circ - \hat{B A \Gamma}$

**155 Θέμα 1643**

Θεωρούμε τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  και σημεία  $E$  και  $Z$  στις προεκτάσεις των  $AB$  (προς το  $B$ ) και  $B\Gamma$  (προς το  $\Gamma$ ) αντίστοιχα, ώστε  $BE = \Gamma Z$ . Να αποδείξετε ότι:



- α. Τα τρίγωνα  $ABZ$  και  $A E \Delta$  είναι ίσα.
- β. Οι γωνίες  $\hat{E \Delta \Gamma}$  και  $\hat{A Z B}$  είναι ίσες.
- γ.  $AZ \perp \Delta E$

**156 Θέμα 1662**

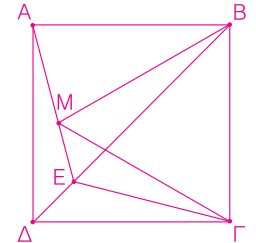
Σε κύκλο κέντρου  $O$  φέρουμε τις διαμέτρους του  $ΑΓ$  και  $ΒΔ$ .

- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $ΑΒΓΔ$  είναι ορθογώνιο.
- Ποια σχέση πρέπει να έχουν οι διάμετροι  $ΑΓ$  και  $ΒΔ$  ώστε το τετράπλευρο  $ΑΒΓΔ$  να είναι τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Θέμα 4****157 Θέμα 1814**

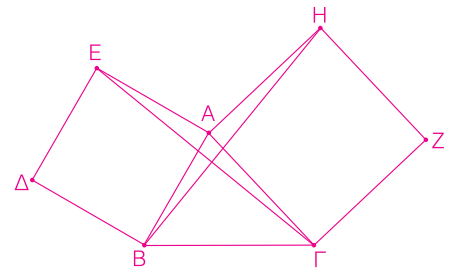
Δίνεται τετράγωνο  $ΑΒΓΔ$  και εντός αυτού ισόπλευρο τρίγωνο  $ΜΒΓ$ . Αν η προέκταση της  $ΑΜ$  τέμνει την  $ΒΔ$  στο σημείο  $Ε$ , να αποδείξετε ότι:

- $\hat{\Delta}ΑΕ = 15^\circ$
- Τα τρίγωνα  $\Delta ΑΕ$  και  $\Delta ΕΓ$  είναι ίσα.
- Η  $ΓΕ$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{\Delta}ΓΜ$ .

**158 Θέμα 1788**

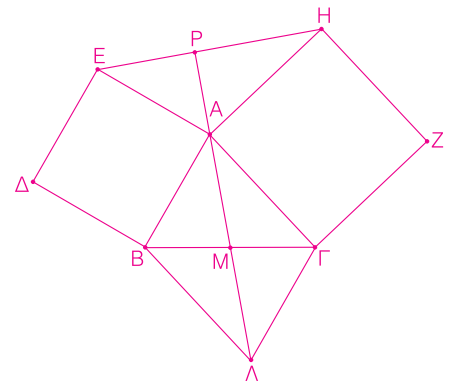
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $ΑΒΓ$  και στο εξωτερικό του σχηματίζονται τα τετράγωνα  $ΑΒΔΕ$  και  $ΑΓΖΗ$ . Να αποδείξετε ότι:

- $\hat{Ε}ΑΗ = \hat{Α}ΒΓ + \hat{Α}ΓΒ$
- $ΕΓ = ΒΗ$
- Η  $ΕΓ$  είναι κάθετη στη  $ΒΗ$ .

**159 Θέμα 1795**

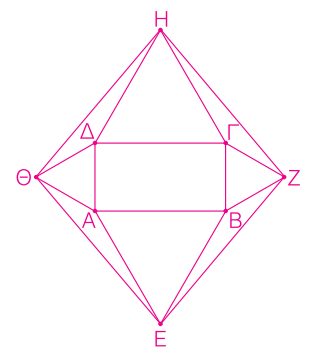
Εκτός τριγώνου  $ΑΒΓ$  κατασκευάζουμε τετράγωνα  $ΑΒΔΕ$  και  $ΑΓΖΗ$ . Αν  $Μ$  το μέσο του  $ΒΓ$  και  $Λ$  σημείο στην προέκταση του  $ΑΜ$  τέτοιο ώστε  $ΑΜ = ΜΛ$ , να αποδείξετε ότι:

- $ΓΛ = ΑΕ$
- Οι γωνίες  $ΑΓΛ$  και  $ΕΑΗ$  είναι ίσες.
- Η προέκταση του  $ΜΑ$  (προς το  $Α$ ) τέμνει κάθετα την  $ΕΗ$ .

**160 Θέμα 1734**

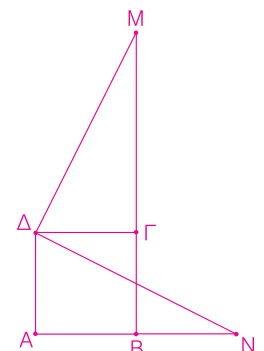
Δίνεται ορθογώνιο  $ΑΒΓΔ$  και έξω από αυτό, κατασκευάζουμε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα  $ΑΒΕ$ ,  $ΒΓΖ$ ,  $ΓΔΗ$ ,  $\Delta ΑΘ$ .

- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $ΕΖΗΘ$  είναι ρόμβος.
- Αν το αρχικό τετράπλευρο  $ΑΒΓΔ$  είναι τετράγωνο, τότε το  $ΕΖΗΘ$  τι είδους παραλληλόγραμμο είναι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

**161 Θέμα 1750**

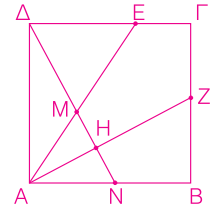
Στο τετράγωνο  $ΑΒΓΔ$  προεκτείνουμε την πλευρά  $ΑΒ$  κατά τμήμα  $ΒΝ$  και την πλευρά  $ΒΓ$  κατά τμήμα  $ΓΜ = ΑΝ$ . Να αποδείξετε ότι:

- $\Delta Ν = \Delta Μ$
- $\Delta Ν \perp \Delta Μ$



**162 Θέμα 1825**

Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  και τυχαίο σημείο  $E$  στην πλευρά  $\Delta\Gamma$ . Φέρουμε τη διχοτόμο  $AZ$  της γωνίας  $EAB$  και τη  $\Delta H$  κάθετη από το  $\Delta$  προς την  $AZ$ , η οποία τέμνει την  $AE$  στο  $M$  και την  $AB$  στο  $N$ . Να αποδείξετε ότι:



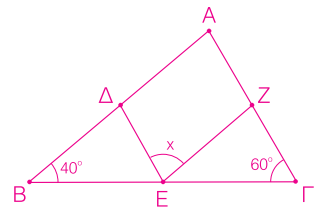
- α. Τα τρίγωνα  $A\Delta N$  και  $ABZ$  είναι ίσα.
- β.  $AM = AN$  και  $\Delta E = EM$
- γ.  $AE = \Delta E + BZ$

**21. Εφαρμογές των παραλληλογράμμων**

**Θέμα 2**

**163 Θέμα 1589**

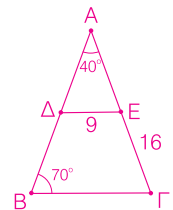
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{B} = 40^\circ$  και  $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ . Επιπλέον, τα σημεία  $\Delta$ ,  $E$  και  $Z$  είναι τα μέσα των πλευρών του  $AB$ ,  $B\Gamma$  και  $\Gamma A$  αντίστοιχα.



- α. Να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{A}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- β. Να αποδείξετε ότι  $\Delta E \parallel A\Gamma$  και  $ZE \parallel AB$ .
- γ. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $B\Delta E$ .

**164 Θέμα 1608**

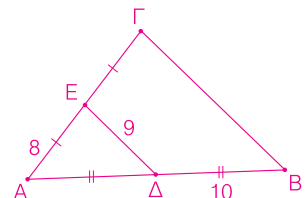
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 40^\circ$  και  $\hat{B} = 70^\circ$ . Τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  είναι τα μέσα των  $AB$  και  $A\Gamma$  με  $\Delta E = 9$  και  $E\Gamma = 16$ .



- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.
- β. Να αποδείξετε ότι  $B\Gamma = 18$ .
- γ. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

**165 Θέμα 1613**

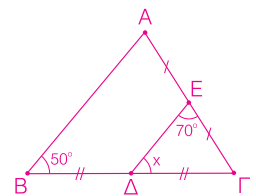
Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  του διπλανού σχήματος τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα,  $AE = 8$ ,  $E\Delta = 9$  και  $\Delta B = 10$ .



- α. Να αποδείξετε ότι οι  $B\Gamma$  και  $\Delta E$  είναι παράλληλες.
- β. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς  $B\Gamma$ .
- γ. Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου  $AB\Gamma$  και του τετραπλεύρου  $\Delta E\Gamma B$ .

**166 Θέμα 1611**

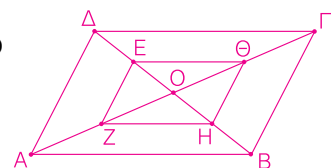
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{B} = 50^\circ$ . Έστω ότι τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  είναι τα μέσα των πλευρών  $B\Gamma$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα, τέτοια ώστε  $\hat{\Delta E\Gamma} = 70^\circ$ .



- α. Να δικαιολογήσετε γιατί  $\Delta E \parallel AB$ .
- β. Να υπολογίσετε
  - i. τη γωνία  $\hat{x}$
  - ii. τις γωνίες  $\hat{A}$  και  $\hat{\Gamma}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

**167 Θέμα 1583**

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και  $O$  είναι το κέντρο του. Έστω  $E$ ,  $Z$ ,  $H$ ,  $\Theta$  τα μέσα των  $O\Delta$ ,  $OA$ ,  $OB$  και  $O\Gamma$  αντίστοιχα.



Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τετράπλευρο  $EZH\Theta$  είναι παραλληλόγραμμο.
- β. Αν η περίμετρος του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$  είναι 40, να βρείτε την περίμετρο του  $EZH\Theta$ .

**168 Θέμα 1566**

Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα μέσα  $\Delta$ ,  $E$  και  $Z$  των πλευρών του  $AB$ ,  $B\Gamma$  και  $GA$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο  $\Delta BEZ$  είναι παραλληλόγραμμο.
- Η ευθεία  $\Delta Z$  διχοτομεί το τμήμα  $AE$ .

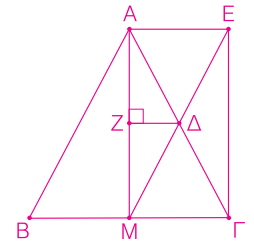
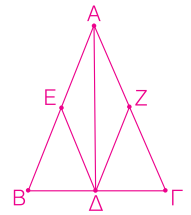
**169 Θέμα 1564**

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ), το ύψος του  $A\Delta$  και τα μέσα  $E$  και  $Z$  των πλευρών του  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AZ\Delta E$  είναι ρόμβος.

**170 Θέμα 1560**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και η διάμεσός του  $AM$ . Στην προέκταση της διαμέσου  $M\Delta$  του τριγώνου  $AM\Gamma$  θεωρούμε σημείο  $E$  ώστε  $M\Delta = \Delta E$ . Αν το σημείο  $Z$  είναι το ίχνος του  $\Delta$  στην  $AM$ , να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο  $AM\Gamma E$  είναι ορθογώνιο.
- $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{4}$

**171 Θέμα 1542**

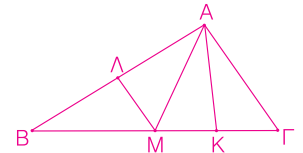
Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και  $A\Delta$  η διάμεσός του. Από το σημείο  $\Delta$  φέρουμε παράλληλη προς την  $AB$  που τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο  $\Delta E\Gamma$  είναι ορθογώνιο.
- $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2}$

**Θέμα 4****172 Θέμα 1803**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $B\Gamma = 2A\Gamma$ . Έστω  $AM$  διάμεσος του  $AB\Gamma$  και  $K$ ,  $\Lambda$  τα μέσα των  $M\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- $\hat{M}\Lambda\Gamma = \hat{A}M\Gamma$
- $M\Lambda = MK$
- Η  $AM$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{\Lambda}\hat{A}K$ .

**173 Θέμα 1726**

- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές.
- Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για
  - ισόπλευρο τρίγωνο
  - ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

**174 Θέμα 1798**

- Σε ρόμβο  $AB\Gamma\Delta$  θεωρούμε  $K$ ,  $\Lambda$ ,  $M$ ,  $N$  τα μέσα των πλευρών του  $AB$ ,  $B\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $\Delta A$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $K\Lambda M N$  είναι ορθογώνιο.
- Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου.
- Σε ένα τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  τα μέσα  $K$ ,  $\Lambda$ ,  $M$ ,  $N$  των πλευρών του  $AB$ ,  $B\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $\Delta A$  αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$ , πρέπει να είναι απαραίτητα ορθογώνιο; Να τεκμηριώσετε τη θετική ή αρνητική σας απάντηση.

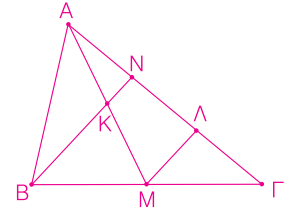
**175 Θέμα 1728**

Έστω παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$ . Αν τα σημεία  $Ε$  και  $Ζ$  είναι τα μέσα των πλευρών του  $ΑΒ$  και  $ΓΔ$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α. Το τετράπλευρο  $ΔΕΒΖ$  είναι παραλληλόγραμμο.
- β.  $\hat{ΑΕΔ} = \hat{ΒΖΓ}$
- γ. Οι  $ΔΕ$  και  $ΒΖ$  τριχοτομούν τη διαγώνιο  $ΑΓ$  του παραλληλογράμμου  $ΑΒΓΔ$ .

**176 Θέμα 1802**

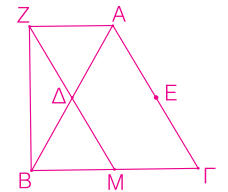
Δίνεται τρίγωνο  $ΑΒΓ$ ,  $ΑΜ$  διάμεσός του και  $Κ$  το μέσο του  $ΑΜ$ . Αν η προέκταση της  $ΒΚ$  τέμνει την  $ΑΓ$  στο σημείο  $Ν$ , και  $Λ$  είναι το μέσο του  $ΓΝ$ , να αποδείξετε ότι:



- α. Το σημείο  $Ν$  είναι μέσο του  $ΑΛ$ .
- β.  $\hat{ΚΜΓ} = \hat{ΜΒΚ} + \hat{ΑΚΝ}$
- γ.  $ΒΚ = 3ΚΝ$

**177 Θέμα 1868**

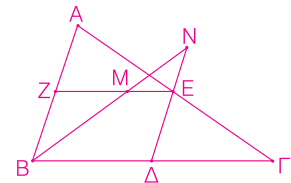
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $ΑΒΓ$  και τα μέσα  $Δ$ ,  $Ε$  και  $Μ$  των  $ΑΒ$ ,  $ΑΓ$  και  $ΒΓ$  αντίστοιχα. Στην προέκταση του  $ΜΔ$  (προς το  $Δ$ ) θεωρούμε τμήμα  $ΔΖ = ΔΜ$ . Να αποδείξετε ότι:



- α. Τα τρίγωνα  $ΑΖΔ$  και  $ΒΜΔ$  είναι ίσα.
- β. Το τετράπλευρο  $ΖΑΓΜ$  είναι παραλληλόγραμμο.
- γ. Τα τμήματα  $ΖΕ$  και  $ΑΔ$  τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται.
- δ. Η  $ΒΖ$  είναι κάθετη στη  $ΖΑ$ .

**178 Θέμα 1801**

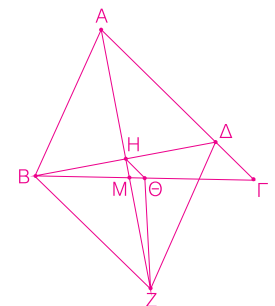
Δίνεται τρίγωνο  $ΑΒΓ$  με  $ΑΒ < ΑΓ$  και  $Δ$ ,  $Ε$ ,  $Ζ$  τα μέσα των πλευρών του  $ΒΓ$ ,  $ΑΓ$ ,  $ΑΒ$  αντίστοιχα. Αν η διχοτόμος της γωνίας  $Β$  τέμνει την  $ΖΕ$  στο σημείο  $Μ$  και την προέκταση της  $ΔΕ$  στο σημείο  $Ν$ , να αποδείξετε ότι:



- α. Το τετράπλευρο  $ΖΕΔΒ$  είναι παραλληλόγραμμο.
- β. Τα τρίγωνα  $ΒΖΜ$  και  $ΜΕΝ$  είναι ισοσκελή.
- γ.  $ΒΖ + ΝΕ = ΔΓ$

**179 Θέμα 1889**

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $ΑΒΓ$  με  $ΑΒ < ΑΓ$ . Από το  $Β$  φέρουμε κάθετη στην διχοτόμο  $ΑΜ$  της γωνίας  $Α$ , η οποία τέμνει την  $ΑΜ$  στο  $Η$  και την  $ΑΓ$  στο  $Δ$ . Στην προέκτασή της  $ΑΗ$  θεωρούμε σημείο  $Ζ$  τέτοιο ώστε  $ΑΗ = ΗΖ$  και έστω  $Θ$  το μέσο της πλευράς  $ΒΓ$ . Να αποδείξετε ότι:



- α. το τετράπλευρο  $ΑΒΖΔ$  είναι ρόμβος.
- β.  $ΗΘ // ΒΖ$
- γ.  $ΗΘ = \frac{ΑΓ - ΑΒ}{2}$ .

**180 Θέμα 1898**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διάμεσος του  $A\Delta$ . Έστω  $E$ ,  $Z$  και  $H$  είναι τα μέσα των  $B\Delta$ ,  $A\Delta$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.

- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $\Delta EZH$  είναι παραλληλόγραμμο.
- Να βρείτε τη σχέση των πλευρών  $AB$  και  $B\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ , ώστε το παραλληλόγραμμο  $\Delta EZH$  να είναι ρόμβος.
- Στην περίπτωση που το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο (η γωνία  $B$  ορθή), να βρείτε το είδος του παραλληλογραμμού  $\Delta EZH$ .

**181 Θέμα 1741**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και έστω  $K$ ,  $\Lambda$  τα μέσα των πλευρών του  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.

- Θεωρούμε τυχαίο σημείο  $M$  στο εσωτερικό του τριγώνου και  $\Delta$ ,  $E$  τα συμμετρικά του  $M$  ως προς  $K$  και  $\Lambda$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι  $\Delta E \parallel B\Gamma$ .
- Στην περίπτωση που το σημείο  $M$  είναι το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ , και  $\Delta$ ,  $E$  τα συμμετρικά του  $M$  ως προς  $K$  και  $\Lambda$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $\Delta$ ,  $A$  και  $E$  είναι συνευθειακά.

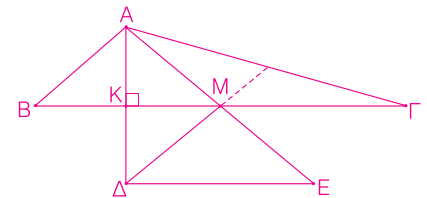
**182 Θέμα 1873**

Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  με διάμεσο  $AM$  τέτοια ώστε  $AM = AB$ . Φέρουμε το ύψος του  $AK$  και το προεκτείνουμε (προς το  $K$ ) κατά τμήμα  $K\Delta = AK$ .

Προεκτείνουμε τη διάμεσο  $AM$  (προς το  $M$ ) κατά τμήμα  $ME = AM$ .

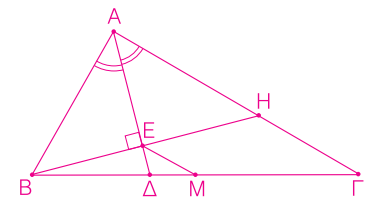
Να αποδείξετε ότι:

- $\Delta E \perp A\Delta$  και  $\Delta E = 2KM$
- Το τετράπλευρο  $ABE\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμο.
- Το τετράπλευρο  $AB\Delta M$  είναι ρόμβος.
- Η προέκταση της  $\Delta M$  τέμνει το  $A\Gamma$  στο μέσον του  $Z$ .

**183 Θέμα 1723**

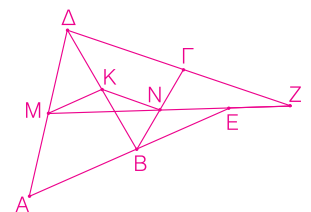
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB < B\Gamma$ ) και η διχοτόμος του  $A\Delta$ . Φέρουμε από το  $B$  κάθετη στην  $A\Delta$  που τέμνει την  $A\Delta$  στο  $E$  και την πλευρά  $A\Gamma$  στο  $H$ . Αν  $M$  είναι το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο  $ABH$  είναι ισοσκελές.
- $EM \parallel H\Gamma$
- $EM = \frac{A\Gamma - AB}{2}$

**184 Θέμα 1804**

Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB = \Gamma\Delta$  και  $M$ ,  $N$ ,  $K$  τα μέσα των  $A\Delta$ ,  $B\Gamma$ ,  $B\Delta$  αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των  $AB$  και  $\Delta\Gamma$  τέμνουν την προέκταση της  $MN$  στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

- $MK = KN$
- $\hat{M}\hat{E}A = \hat{M}\hat{Z}\Delta$

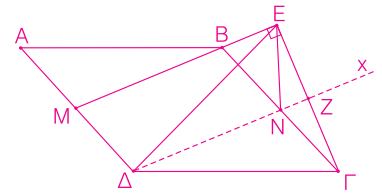


**185 Θέμα 1775**

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ . Θεωρούμε το μέσο  $M$  της πλευράς  $A\Delta$  και  $GE$  κάθετος από τη κορυφή  $\Gamma$  στην ευθεία  $MB$  ( $GE \perp MB$ ).

Η παράλληλη από την κορυφή  $\Delta$  στην ευθεία  $MB$  ( $\Delta x // MB$ ) τέμνει τις  $B\Gamma$  και  $GE$  στα σημεία  $N$ ,  $Z$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

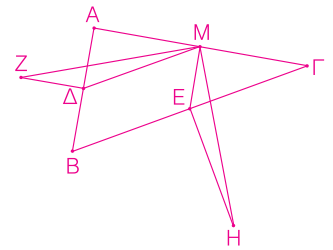
- α.** Το τετράπλευρο  $MBN\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.
- β.** Το σημείο  $Z$  είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος  $GE$ .
- γ.**  $\Delta E = \Delta\Gamma$



**186 Θέμα 1832**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με γωνίες  $B$  και  $\Gamma$  οξείες και  $\Delta$ ,  $M$  και  $E$  τα μέσα των πλευρών του  $AB$ ,  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Στις μεσοκάθετες των  $AB$  και  $B\Gamma$  και εκτός του τριγώνου  $AB\Gamma$  θεωρούμε σημεία  $Z$  και  $H$  αντίστοιχα, τέτοια ώστε  $\Delta Z = \frac{AB}{2}$  και  $EH = \frac{B\Gamma}{2}$ .

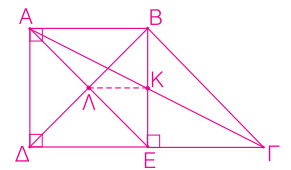
- α.** Να αποδείξετε ότι:
  - i.** Το τετράπλευρο  $B\Delta M E$  είναι παραλληλόγραμμο.
  - ii.** Τα τρίγωνα  $Z\Delta M$  και  $EMH$  είναι ίσα.
- β.** Αν τα σημεία  $Z$ ,  $\Delta$ ,  $E$  είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι η γωνία  $\hat{A} = 90^\circ$ .



**187 Θέμα 1727**

Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ,  $\Delta\Gamma = 2AB$  και  $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$ . Από το  $B$  φέρνουμε κάθετη στη  $\Gamma\Delta$  που τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $K$  και την  $\Gamma\Delta$  στο  $E$ . Επίσης φέρνουμε την  $AE$  που τέμνει τη  $B\Delta$  στο σημείο  $\Lambda$ . Να αποδείξετε ότι:

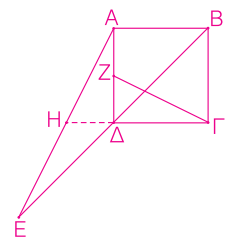
- α.**  $\hat{\Gamma} = 45^\circ$     **β.**  $B\Delta = AE$     **γ.**  $K\Lambda = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$



**188 Θέμα 1766**

Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$ . Έστω  $E$  το συμμετρικό σημείο του  $B$  ως προς το  $\Delta$  και  $Z$  είναι το μέσο της  $A\Delta$ . Η προέκταση της  $\Gamma\Delta$  τέμνει την  $AE$  στο  $H$ . Να αποδείξετε ότι:

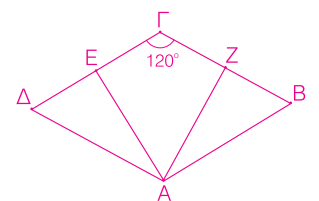
- α.**  $\Delta H = \frac{AB}{2}$
- β.** Τα τρίγωνα  $A\Delta H$  και  $Z\Delta\Gamma$  είναι ίσα.
- γ.** Η  $\Gamma Z$  είναι κάθετη στην  $AE$ .



**189 Θέμα 1743**

Δίνεται ρόμβος  $AB\Gamma\Delta$  με  $\hat{\Gamma} = 120^\circ$ . Έστω ότι  $AE$  και  $AZ$  είναι οι αποστάσεις του σημείου  $A$  στις πλευρές  $\Gamma\Delta$  και  $\Gamma B$  αντίστοιχα.

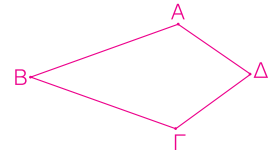
- α.** Να αποδείξετε ότι:
  - i.** Τα σημεία  $E$  και  $Z$  είναι τα μέσα των πλευρών  $\Gamma\Delta$  και  $\Gamma B$  αντίστοιχα.
  - ii.**  $A\Gamma \perp EZ$
- β.** Αν  $M$  και  $N$  τα μέσα των πλευρών  $A\Delta$  και  $AB$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $EMNZ$  είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



**190 Θέμα 1745**

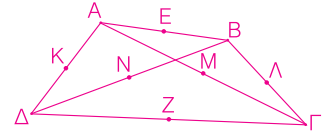
Δίνεται κυρτό τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $BA = B\Gamma$  και  $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ . Να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές.
- Οι διαγώνιοι του τετράπλευρου  $AB\Gamma\Delta$  τέμνονται κάθετα.
- Το τετράπλευρο που έχει για κορυφές τα μέσα των πλευρών του  $AB\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο.

**191 Θέμα 1773**

Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $A\Delta = B\Gamma$ . Αν  $E, \Lambda, Z, K, N, M$  είναι τα μέσα των  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A, \Delta B$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο  $EMZN$  ρόμβος.
- Η  $EZ$  είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος  $MN$ .
- $KE = Z\Lambda$
- Τα ευθύγραμμα τμήματα  $K\Lambda, MN, EZ$  διέρχονται από ίδιο σημείο.

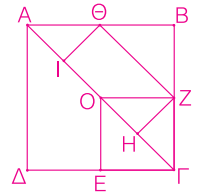
**192 Θέμα 1794**

- Σε ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  θεωρούμε  $K, \Lambda, M, N$  τα μέσα των πλευρών του  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $K\Lambda MN$  είναι ρόμβος.
- Σε ένα τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  τα μέσα  $K, \Lambda, M, N$  των πλευρών του  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$  αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$ , πρέπει να είναι απαραίτητα ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντησή σας.

**193 Θέμα 1781**

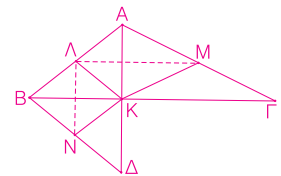
Δίνεται το τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$ . Στη διαγώνιο  $A\Gamma$  θεωρούμε σημεία  $I, O, H$  ώστε  $AI = IO = OH = H\Gamma$ . Αν  $E, \Theta$  και  $Z$  τα μέσα των πλευρών  $\Delta\Gamma, AB$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο  $OZ\Gamma E$  είναι τετράγωνο.
- $ZH = \frac{A\Gamma}{4}$
- Το τετράπλευρο  $I\Theta ZH$  είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, με  $\Theta Z = 2\Theta I$ .

**194 Θέμα 1858**

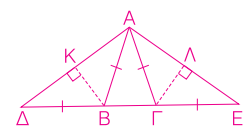
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Στην προέκταση του ύψους του  $AK$  θεωρούμε σημείο  $\Delta$  ώστε  $AK = K\Delta$ . Έστω  $\Lambda, M, N$  τα μέσα των πλευρών  $AB, A\Gamma$  και  $B\Delta$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ισοσκελές.
- Το τετράπλευρο  $B\Lambda K N$  είναι ρόμβος.
- $\Lambda M \perp \Lambda N$

**195 Θέμα 1616**

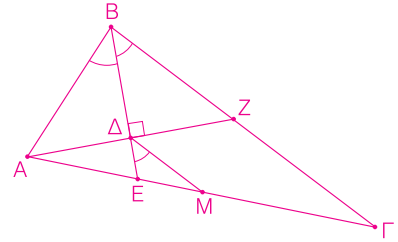
Θεωρούμε ισοσκελή τρίγωνα  $AB\Delta$  με  $AB = A\Delta = 5$  και  $A\Gamma E$  με  $A\Gamma = \Gamma E = 5$  έτσι ώστε τα σημεία  $\Delta, B, \Gamma$  και  $E$  να είναι συνευθειακά. Θεωρούμε τα ύψη τους  $BK$  και  $\Gamma\Lambda$  αντίστοιχα.

- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma E$  είναι ίσα.
- Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $K$  και  $\Lambda$  είναι τα μέσα των τμημάτων  $A\Delta$  και  $AE$  αντίστοιχα.
- Αν η περίμετρος του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα  $K\Lambda$ .



**196 Θέμα 1837**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$  και η διχοτόμος  $BE$  της γωνίας  $\hat{B}$ . Αν  $AZ \perp BE$ , όπου  $Z$  σημείο της  $B\Gamma$  και  $M$  το μέσο της  $A\Gamma$ , να αποδείξετε ότι:



α. Το τρίγωνο  $ABZ$  είναι ισοσκελές.

β.  $\Delta M \parallel B\Gamma$  και  $\Delta M = \frac{B\Gamma - AB}{2}$

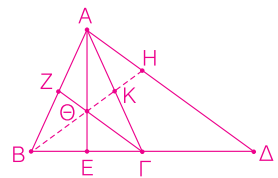
γ.  $\hat{E\Delta M} = \frac{\hat{B}}{2}$ , όπου  $\hat{B}$  η γωνία του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

**22. Βαρύκεντρο - Ορθόκεντρο τριγώνου**

**Θέμα 4**

**197 Θέμα 1878**

Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $\Delta AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Προεκτείνουμε το  $B\Gamma$  (προς το  $\Gamma$ ) κατά τμήμα  $\Gamma\Delta = B\Gamma$ . Φέρουμε τις διαμέσους  $AE$  και  $\Gamma Z$  του τριγώνου  $\Delta AB\Gamma$  που τέμνονται στο  $\Theta$ .



Το  $B\Theta$  προεκτενόμενο, τέμνει το  $A\Gamma$  στο  $K$  και το  $A\Delta$  στο  $H$ .

Να αποδείξετε ότι:

α. Το  $ZK\Gamma E$  είναι παραλληλόγραμμο.

β.  $AH = \Theta\Gamma$

γ.  $AH = 2Z\Theta$

**198 Θέμα 1820**

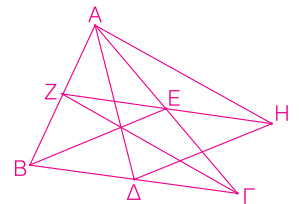
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και οι διάμεσοί του  $A\Delta$ ,  $BE$  και  $\Gamma Z$ . Προεκτείνουμε το τμήμα  $ZE$  (προς το  $E$ ) κατά τμήμα  $E\Delta = ZE$ .

Να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο  $E\Delta\Gamma B$  είναι παραλληλόγραμμο.

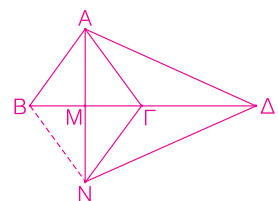
β. Η περίμετρος του τριγώνου  $A\Delta H$  είναι ίση με το άθροισμα των διαμέσων του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

γ. Οι ευθείες  $BE$  και  $\Delta H$  τριχοτομούν το τμήμα  $Z\Gamma$ .



**199 Θέμα 1760**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και  $AM$  το ύψος του στην πλευρά  $B\Gamma$ . Στην προέκταση του  $AM$  θεωρούμε τμήμα  $MN = AM$ . Στην προέκταση του  $B\Gamma$  προς το μέρος του  $\Gamma$  θεωρούμε τμήμα  $\Gamma\Delta = B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:



α. Το τετράπλευρο  $AB\Delta\Gamma$  ρόμβος.

β. Το τρίγωνο  $A\Delta N$  είναι ισοσκελές.

γ. Το σημείο  $\Gamma$  είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου  $A\Delta N$ .

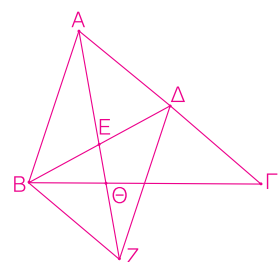
**200 Θέμα 1827**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $E$  το μέσο της διαμέσου  $BD$ . Στην προέκταση της  $AE$  θεωρούμε σημείο  $Z$  τέτοιο ώστε  $EZ = AE$ . Να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο  $ABZ\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.

β. Το τετράπλευρο  $B\Delta\Gamma Z$  είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Το σημείο  $\Theta$  είναι βαρύκεντρο του τριγώνου  $B\Delta Z$ .



**201 Θέμα 1706**

Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $\mu_\beta, \mu_\gamma$  οι διάμεσοι του τριγώνου που αντιστοιχούν στις πλευρές  $\beta$  και  $\gamma$  αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

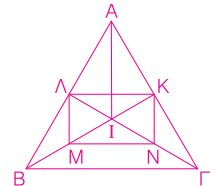
**Π:** Αν το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $\beta = \gamma$ , τότε οι διάμεσοι  $\mu_\beta, \mu_\gamma$  είναι ίσες.

- Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση Π, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της Π και να εξετάσετε αν ισχύει αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- Στην περίπτωση που οι δυο προτάσεις, η Π και η αντίστροφή της ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως ενιαία πρόταση.

**202 Θέμα 1719**

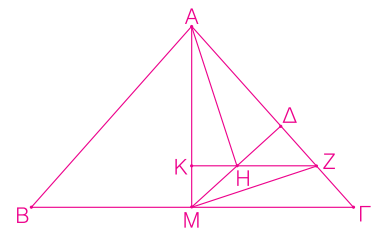
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα ύψη του  $BK$  και  $\Gamma\Lambda$ , τα οποία τέμνονται στο  $I$ . Αν τα σημεία  $M$  και  $N$  είναι τα μέσα των  $IB$  και  $I\Gamma$  αντίστοιχα, να αποδείξετε:

- Το  $AI$  προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ .
- Το τετράπλευρο  $ΜΑΚΝ$  είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

**203 Θέμα 1843**

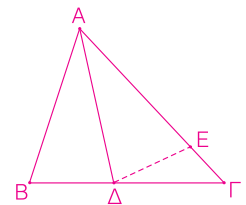
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και το ύψος του  $AM$ . Φέρουμε  $M\Delta$  κάθετη στην  $A\Gamma$  και θεωρούμε  $H$  το μέσο του τμήματος  $M\Delta$ . Από το  $H$  φέρουμε παράλληλη στη  $B\Gamma$  η οποία τέμνει τις  $AM$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $K$  και  $Z$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- $HZ = \frac{B\Gamma}{4}$
- $MZ \parallel BA$
- Η ευθεία  $AH$  είναι κάθετη στη  $B\Delta$ .

**204 Θέμα 1887**

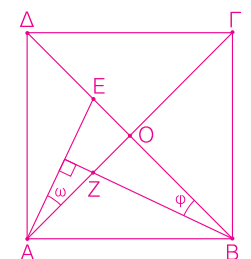
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$  και η διχοτόμος του  $A\Delta$ . Στην πλευρά  $A\Gamma$  θεωρούμε σημείο  $E$  τέτοιο ώστε  $AE = AB$ . Να αποδείξετε ότι:

- τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Delta E$  είναι ίσα.
- η ευθεία  $A\Delta$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $BE$ .
- αν το ύψος από την κορυφή  $B$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  τέμνει την  $A\Delta$  στο  $H$  τότε η ευθεία  $EH$  είναι κάθετη στην  $AB$ .

**205 Θέμα 1748**

Στο τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  ονομάζουμε  $O$  το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο  $E$  του τμήματος  $O\Delta$ . Φέρνουμε την κάθετη από το  $B$  στην  $AE$ , που τέμνει το τμήμα  $AO$  στο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:

- Οι γωνίες  $\omega$  και  $\phi$  του παραπάνω σχήματος είναι ίσες.
- $BZ = AE$  και  $\Gamma Z = BE$
- Το τμήμα  $EZ$  είναι κάθετο στο  $AB$ .



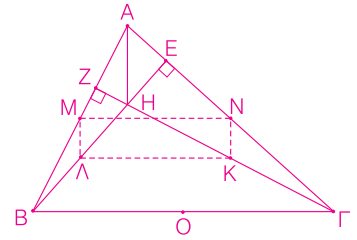
**206 Θέμα 1777**

Δίνονται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$ ,  $BE$ ,  $\Gamma Z$ , τα ύψη από τις κορυφές  $B$ ,  $\Gamma$  αντίστοιχα και  $H$  το ορθόκεντρο του τριγώνου.

Επίσης δίνονται τα

$M$ ,  $N$ ,  $K$ ,  $\Lambda$

μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων  $AB$ ,  $A\Gamma$ ,  $\Gamma H$ ,  $BH$  αντίστοιχα.



**α.** Να αποδείξετε ότι:

**i.**  $MN = \Lambda K$

**ii.**  $NK = M\Lambda = \frac{AH}{2}$

**iii.** Το τετράπλευρο  $MNK\Lambda$  είναι ορθογώνιο.

**β.** Αν το  $O$  είναι το μέσο της  $B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι το  $\hat{MOK} = 90^\circ$ .

**207 Θέμα 1764**

Δίνεται ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  με κέντρο  $O$  και  $AB > B\Gamma$ ,  $A\Gamma = 2B\Gamma$ .

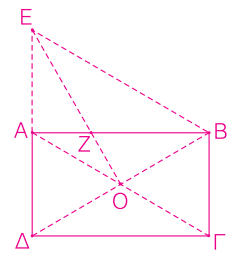
Στην προέκταση της πλευράς  $\Delta A$  (προς το  $A$ ) παίρνουμε σημείο  $E$  ώστε  $\Delta A = AE$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι:

**i.** Το τετράπλευρο  $AEB\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμο.

**ii.** Το τρίγωνο  $EBA$  είναι ισόπλευρο.

**β.** Αν η  $EO$  τέμνει την πλευρά  $AB$  στο σημείο  $Z$ , να αποδείξετε ότι  $\Delta Z \perp EB$ .



**208 Θέμα 1754**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  και το ύψος του  $A\Delta$ . Στο  $A\Delta$  θεωρούμε σημείο  $H$

τέτοιο ώστε  $HA = HB$ . Έστω ότι  $E$  είναι το σημείο τομής της  $BH$  με την  $A\Gamma$ .

Φέρνουμε την  $AZ$  κάθετη στην  $BE$ , η οποία τέμνει την πλευρά  $B\Gamma$  στο  $\Theta$ .

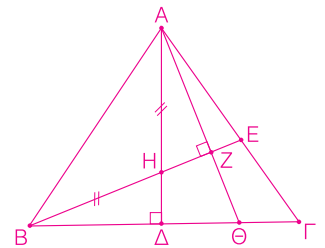
**α.** Να αποδείξετε ότι:

**i.** Τα τρίγωνα  $H\Delta B$  και  $HZA$  είναι ίσα.

**ii.**  $\Delta\Theta = \Theta Z$

**iii.** Η ευθεία  $\Theta H$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $AB$ .

**β.** Ποιο από τα σημεία του σχήματος είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου  $AHB$ ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



**209 Θέμα 1780**

Σε τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  προεκτείνουμε τη διαγώνιο  $B\Delta$  (προς το  $\Delta$ ) κατά

τμήμα  $\Delta E = \Delta B$ . Έστω  $M$  το μέσο της  $A\Delta$  και  $N$  το σημείο τομής των ευθειών  $AE$  και  $\Gamma\Delta$ .

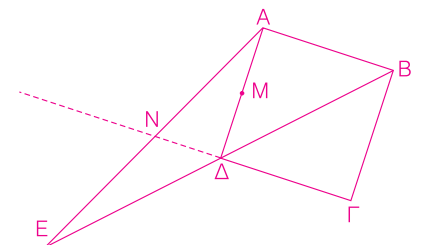
**α.** Να αποδείξετε ότι  $\Delta N = \Delta M$ .

**β.** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $NM\Delta$ .

**γ.** Να αποδείξετε ότι:

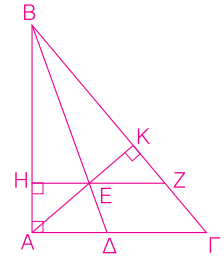
**i.**  $MN \perp A\Gamma$

**ii.**  $\Gamma M \perp AN$



**210 Θέμα 1865**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A}=90^\circ$ ) με  $B\Delta$  διχοτόμο και  $AK$  ύψος, που τέμνονται στο  $E$ . Η κάθετη από το  $E$  στην  $AB$  τέμνει τις  $AB$  και  $B\Gamma$  στα  $H$  και  $Z$  αντίστοιχα.



**α.** Να αποδείξετε ότι:

- i.** Τα τρίγωνα  $EHA$  και  $EKZ$  είναι ίσα.
- ii.** Το τρίγωνο  $BKH$  είναι ισοσκελές.
- iii.** Η  $B\Delta$  είναι κάθετη στην  $AZ$ .

**β.** Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι και ισοσκελές, να αποδείξετε ότι η  $\Gamma E$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\Gamma$ .

**23. Διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου**

**Θέμα 2**

**211 Θέμα 1647**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A}=90^\circ$ ,  $\hat{B}=35^\circ$  και  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$ .

- α.** Να υπολογίσετε τη γωνία  $\Gamma$ .
- β.** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AMB$ .

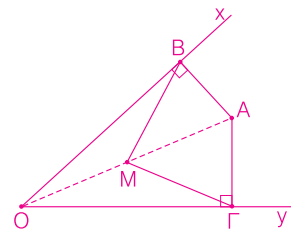
**212 Θέμα 1690**

Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A}=90^\circ$  και  $\hat{B} > \hat{\Gamma}$  φέρουμε το ύψος του  $A\Delta$  και την διάμεσο  $AM$  στην πλευρά  $B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

- α.** οι γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma\Delta A}$  είναι ίσες
- β.**  $\hat{AM\Delta} = 2 \cdot \hat{\Gamma}$ .

**213 Θέμα 1586**

Δίνεται γωνία  $\chi\hat{O}y$  και σημείο  $A$  στο εσωτερικό της. Από το  $A$  φέρνουμε τις κάθετες  $AB$ ,  $A\Gamma$  προς τις πλευρές  $Ox$ ,  $Oy$  της γωνίας αντίστοιχα, και ονομάζουμε  $M$  το μέσο του  $OA$ . Να αποδείξετε ότι:

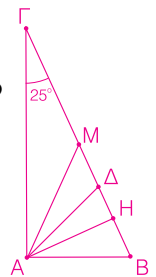


- α.** Το τρίγωνο  $BMA$  είναι ισοσκελές.
- β.**  $\hat{BMA} = 2 \cdot \chi\hat{O}A$

**214 Θέμα 1633**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A}=90^\circ$  και  $\hat{\Gamma}=25^\circ$ . Δίνονται επίσης η διάμεσος  $AM$ , το ύψος  $AH$  από την κορυφή  $A$  και η διχοτόμος  $A\Delta$  της γωνίας  $\hat{A}$ .

- α.** Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{AMB}$ ,  $\hat{HAB}$ ,  $\hat{A\Delta B}$ .
- β.** Να αποδείξετε ότι  $\hat{M\Delta A} = \hat{\Delta A H} = 20^\circ$ .



**215 Θέμα 1702**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  τέτοιο, ώστε  $A\Gamma < AB$ . Στην πλευρά  $AB$  θεωρούμε σημείο  $\Delta$  τέτοιο ώστε  $A\Delta = A\Gamma$  και στην προέκταση της  $BA$  (προς το  $A$ ) θεωρούμε σημείο  $E$  τέτοιο ώστε  $AE = A\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

- α.**  $\Delta\Gamma \perp E\Gamma$
- β.** η γωνία  $E\Delta\Gamma$  είναι διπλάσια της γωνίας  $A\Delta\Gamma$ .

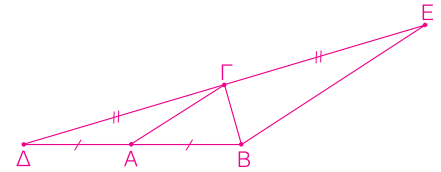
**216 Θέμα 1537**

Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ , προεκτείνουμε την πλευρά  $\Delta A$  (προς το  $A$ ) κατά τμήμα  $AH = \Delta A$ . Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας  $\hat{\Delta}$ , η οποία τέμνει την  $AB$  στο σημείο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο  $A\Delta Z$  είναι ισοσκελές.
- Το τρίγωνο  $\Delta ZH$  είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία  $\hat{Z}$ .

**217 Θέμα 1551**

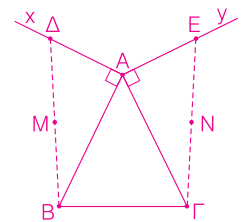
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Στην προέκταση της  $BA$  (προς το μέρος της κορυφής  $A$ ) παίρνουμε σημείο  $\Delta$  ώστε  $AB = A\Delta$  και στην προέκταση της  $\Delta\Gamma$  (προς το μέρος της κορυφής  $\Gamma$ ) παίρνουμε σημείο  $E$  ώστε  $\Delta\Gamma = \Gamma E$ .



- Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $\Delta\Gamma B$  είναι ορθογώνιο.
- Να δείξετε ότι  $BE \parallel A\Gamma$  και  $A\Gamma = \frac{BE}{2}$ .

**218 Θέμα 1555**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες  $Ax$  και  $Ay$  τέτοιες ώστε  $Ax \perp AB$  και  $Ay \perp A\Gamma$ , όπως στο διπλανό σχήμα. Στις  $Ax$  και  $Ay$  θεωρούμε τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα, ώστε  $A\Delta = AE$ .

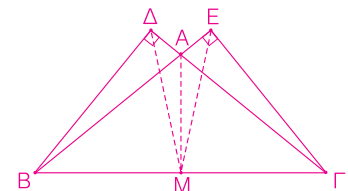


- Να αποδείξετε ότι  $B\Delta = \Gamma E$ .
- Αν  $M$  και  $N$  είναι τα μέσα των τμημάτων  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AMN$  είναι ισοσκελές.

**219 Θέμα 1680**

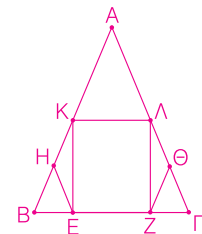
Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Στις προεκτάσεις των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  προς το  $A$  φέρουμε τμήματα  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  κάθετα στις  $A\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα.

- Να αποδείξετε ότι  $B\Delta = \Gamma E$ .
- Αν  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$  τότε:
  - Να αποδείξετε ότι  $M\Delta = ME$ .
  - Να αποδείξετε ότι η  $AM$  διχοτομεί τη γωνία  $\hat{\Delta M E}$ .

**220 Θέμα 1675**

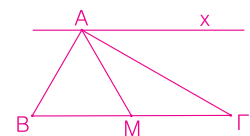
Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Από τα μέσα  $K$  και  $\Lambda$  των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα  $KE$  και  $\Lambda Z$  στην πλευρά  $B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα  $KEB$  και  $\Lambda Z\Gamma$  είναι ίσα.
- $EH = Z\Theta$ , όπου  $H$ ,  $\Theta$  τα μέσα των τμημάτων  $KB$ ,  $\Lambda\Gamma$  αντίστοιχα.

**221 Θέμα 1655**

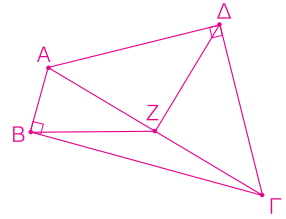
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $A$  ορθή και  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$ . Φέρουμε ημιευθεία  $Ax$  παράλληλη στη  $B\Gamma$  (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η  $AM$  με το σημείο  $\Gamma$ ). Να αποδείξετε ότι:

- $\hat{M\Lambda\Gamma} = \hat{M\Gamma A}$
- η  $A\Gamma$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $M\Lambda x$ .



**222 Θέμα 1685**

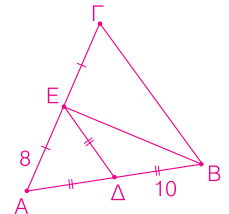
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{B} = 90^\circ$  και  $Z$  το μέσο του  $A\Gamma$ . Με υποτείνουσα το  $A\Gamma$  κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$  με  $\hat{\Delta} = 90^\circ$ .



- α. Να αποδείξετε ότι  $BZ = \Delta Z$ .
- β. Αν  $\hat{A\Gamma B} = 30^\circ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες  $B\Delta\Delta$  και  $B\Gamma\Delta$ .

**223 Θέμα 1615**

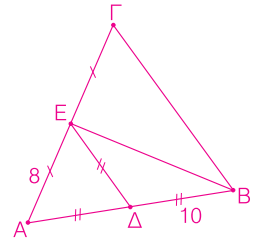
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν  $A\Delta = E\Delta = \Delta B$  με  $AE = 8$  και  $\Delta B = 10$ .



- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AEB$  είναι ορθογώνιο.
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.
- γ. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

**224 Θέμα 1614**

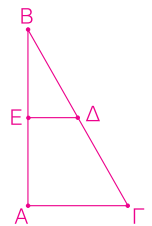
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν  $A\Delta = E\Delta = \Delta B$  με  $AE = 8$  και  $\Delta B = 10$ .



- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AEB$  είναι ορθογώνιο.
- β. Να αποδείξετε ότι  $B\Gamma = 20$ .
- γ. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

**225 Θέμα 1671**

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$  και  $\hat{B} = 30^\circ$ . Αν τα σημεία  $E$  και  $\Delta$  είναι τα μέσα των  $AB$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα με  $E\Delta = 1$ , να υπολογίσετε τα τμήματα:

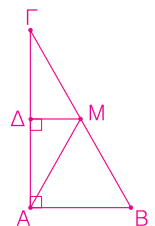


- α.  $A\Gamma$
- β.  $B\Gamma$
- γ.  $A\Delta$

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

**226 Θέμα 1548**

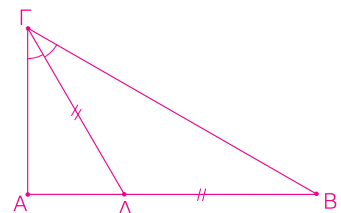
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $B\Gamma = 8\text{ cm}$ . Έστω  $AM$  είναι διάμεσος του τριγώνου και  $M\Delta \perp A\Gamma$ . Αν η γωνία  $\hat{A\Delta M}$  είναι ίση με  $120^\circ$ , τότε:



- α. Να δείξετε ότι  $AB = 4\text{ cm}$ .
- β. Να βρείτε το μήκος της  $M\Delta$ .

**227 Θέμα 1638**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  (με  $\hat{A} = 90^\circ$ ) και η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{\Gamma}$  τέμνει την πλευρά  $AB$  στο σημείο  $\Delta$ , τέτοιο ώστε  $\Gamma\Delta = \Delta B = 2\text{ cm}$ .



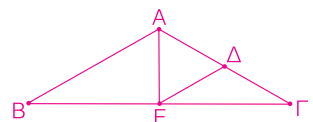
Να αποδείξετε ότι:

- α.  $\hat{B} = 30^\circ$
- β.  $AB = 3\text{ cm}$

**228 Θέμα 1686**

Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ , και γωνία  $\hat{B}$  ίση με  $30^\circ$ .

Θεωρούμε  $\Delta$  και  $E$  τα μέσα των  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα.

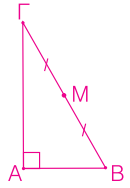


- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $E\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του.
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισόπλευρο.

**229 Θέμα 1606**

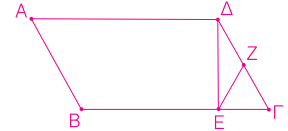
Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με γωνία  $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$  και σημείο  $M$  μέσο της  $B\Gamma$ .

- Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $AM\Gamma$  είναι ισοσκελές.
- Να βρείτε τη γωνία  $\widehat{AM\Gamma}$ .

**230 Θέμα 1704**

Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $\hat{B} = 120^\circ$  και  $\Delta E \perp B\Gamma$ . Έστω  $EZ$  η διάμεσος του τριγώνου  $\Delta E\Gamma$ .

- Να υπολογίσετε τις γωνίες  $A$  και  $\Gamma$  του παραλληλογράμμου.
- Αν  $K$  είναι το μέσο της πλευράς  $AB$ , να αποδείξετε ότι  $EZ = AK$ .
- Να υπολογίσετε τη γωνία  $EZ\Gamma$ .

**231 Θέμα 1691**

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\hat{B} = 60^\circ$ . Φέρουμε τα ύψη  $AE$  και  $BZ$  του παραλληλογράμμου που αντιστοιχούν στην ευθεία  $\Delta\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

- $\Gamma Z = \frac{A\Delta}{2}$ ,
- το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ίσο με το τρίγωνο  $B\Gamma Z$ ,
- το τετράπλευρο  $ABZE$  είναι ορθογώνιο.

**232 Θέμα 1631**

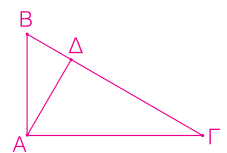
Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει  $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^\circ$  και  $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$ .

- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.
- Αν η πλευρά  $B\Gamma = 2\text{cm}$  να βρείτε το μήκος της  $AB$ .

**233 Θέμα 1649**

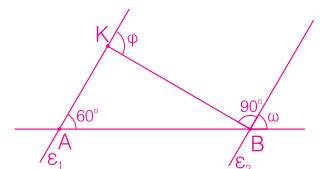
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $A$  ορθή,  $2\hat{\Gamma} = \hat{B}$  και  $A\Delta$  το ύψος του.

- Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- Να υπολογιστεί η γωνία  $BA\Delta$ .
- Να αποδείξετε ότι:  $B\Delta = \frac{AB}{2}$ .

**234 Θέμα 1619**

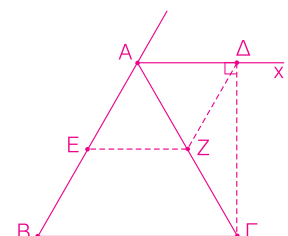
Στο διπλανό σχήμα είναι  $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$  και  $AB = 6$ .

- Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\varphi$  και  $\omega$ .
- Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου  $ABK$  ως προς τις γωνίες του.
- Να υπολογίσετε το μήκος της  $AK$ , αιτιολογώντας την απάντησή σας.

**235 Θέμα 1625**

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο  $Ax$  της γωνίας  $\hat{A}$  και από το σημείο  $\Gamma$  την κάθετο  $\Gamma\Delta$  στην  $Ax$ . Τα σημεία  $E$  και  $Z$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

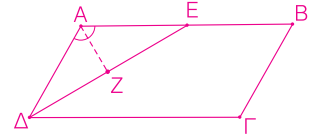
- το τρίγωνο  $AZ\Delta$  είναι ισόπλευρο.
- το τετράπλευρο  $A\Delta ZE$  είναι ρόμβος.



**236 Θέμα 1543**

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με γωνία  $\hat{A}=120^\circ$  και  $AB=2A\Delta$ .

Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας  $\Delta$  του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την  $AB$  στο  $E$ , και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα  $AZ$  στη  $\Delta E$ .



Να αποδείξετε ότι:

- α.  $\hat{A}\Delta E = 30^\circ$
- β.  $AZ = \frac{AB}{4}$

**237 Θέμα 1567**

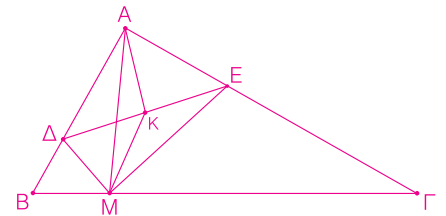
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$  και γωνία  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ . Θεωρούμε το ύψος  $A\Delta$  και το μέσο  $Z$  της πλευράς  $A\Gamma$ .

- α. Να αποδείξετε ότι  $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$ .
- β. Προεκτείνουμε το ύψος  $A\Delta$  (προς το  $\Delta$ ) κατά ίσο τμήμα  $\Delta E$ . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $A\Gamma E$  είναι ισόπλευρο.

**Θέμα 4**

**238 Θέμα 1812**

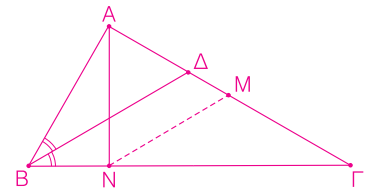
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $A$  ορθή και  $M$  τυχαίο σημείο της πλευράς  $B\Gamma$ . Φέρουμε τις διχοτόμους γωνιών  $BMA$  και  $AM\Gamma$  οι οποίες τέμνουν τις  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα.



- α. Να αποδείξετε ότι, η γωνία  $\Delta ME$  είναι ορθή.
- β. Αν  $K$  το μέσο του  $\Delta E$ , να αποδείξετε ότι  $MK = KA$ .

**239 Θέμα 1738**

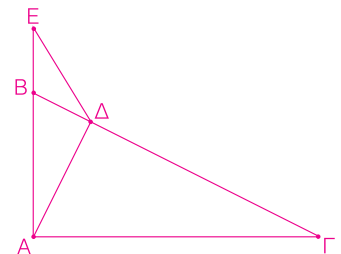
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ , και η διχοτόμος  $B\Delta$  της γωνίας  $\hat{B}$ . Από το μέσο  $M$  της  $A\Gamma$  φέρουμε παράλληλη στη διχοτόμο  $B\Delta$  που τέμνει την πλευρά  $B\Gamma$  στο  $N$ . Να αποδείξετε ότι:



- α. Το τρίγωνο  $B\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές.
- β. Το τρίγωνο  $MN\Gamma$  είναι ισοσκελές.
- γ.  $AN \perp B\Gamma$

**240 Θέμα 1831**

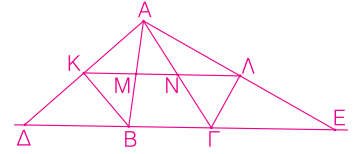
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με την γωνία  $A$  ορθή και  $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ . Φέρουμε το ύψος του  $A\Delta$  και παίρνουμε σημείο  $E$  στην προέκταση της  $AB$  τέτοιο ώστε  $BE = B\Delta$ .



- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $B\Delta E$ .
- β. Να αποδείξετε ότι:
  - i.  $BE = \frac{AB}{2}$
  - ii.  $AE = \Gamma\Delta$

**241 Θέμα 1824**

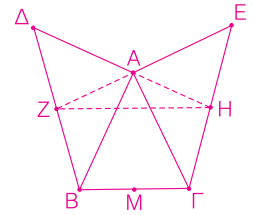
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και στην προέκταση της  $GB$  (προς το  $B$ ) θεωρούμε σημείο  $\Delta$  τέτοιο ώστε  $B\Delta = AB$  ενώ στην προέκταση της  $B\Gamma$  (προς το  $\Gamma$ ) θεωρούμε σημείο  $E$  τέτοιο ώστε  $\Gamma E = \Gamma A$ . Αν οι εξωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών  $B$  και  $\Gamma$  τέμνουν τις  $A\Delta$  και  $AE$  στα σημεία  $K$  και  $\Lambda$  αντίστοιχα, και η  $K\Lambda$  τέμνει τις  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $M$  και  $N$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



- α. Τα σημεία  $K$  και  $\Lambda$  είναι μέσα των  $A\Delta$  και  $AE$  αντίστοιχα.
- β. Τα τρίγωνα  $KMA$  και  $AN\Lambda$  είναι ισοσκελή.
- γ.  $K\Lambda = \frac{AB + A\Gamma + B\Gamma}{2}$

**242 Θέμα 1870**

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Φέρνουμε τμήμα  $A\Delta$  κάθετο στην  $AB$  και τμήμα  $AE$  κάθετο στην  $A\Gamma$  με  $A\Delta = AE$ . Θεωρούμε τα μέσα  $Z$ ,  $H$  και  $M$  τα μέσα των  $\Delta B$ ,  $E\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα.



- α. Να αποδείξετε ότι:
  - i. Τα τρίγωνα  $A\Delta B$  και  $AE\Gamma$  είναι ίσα.
  - ii. Το τρίγωνο  $ZAH$  είναι ισοσκελές.
  - iii. Η  $AM$  είναι μεσοκάθετος του  $ZH$ .
- β. Ένας μαθητής συγκρίνοντας τα τρίγωνα  $A\Delta B$  και  $AE\Gamma$  έγραψε τα εξής:
  1.  $A\Delta = AE$  από υπόθεση
  2.  $AB = A\Gamma$  πλευρές ισοσκελούς τριγώνου
  3.  $\hat{\Delta AB} = \hat{E\Lambda\Gamma}$  ως κατακορυφήν

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα έχοντας δύο πλευρές ίσες μια προς μια και την περιεχόμενη γωνία ίση».

Ο καθηγητής είπε ότι αυτή η λύση περιέχει λάθος μπορείς να το εντοπίσεις;

**243 Θέμα 1808**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $\Delta$ ,  $E$  τα μέσα των πλευρών του  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Στην προέκταση της  $\Delta E$  (προς το  $E$ ) θεωρούμε σημείο  $\Lambda$  ώστε  $E\Lambda = AE$  και στην προέκταση της  $E\Delta$  (προς το  $\Delta$ ) θεωρούμε σημείο  $K$  τέτοιο ώστε  $\Delta K = A\Delta$ . Να αποδείξετε ότι:

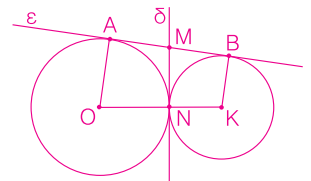
- α.  $K\Delta = \Lambda E$
- β. Τα τρίγωνα  $AKB$  και  $A\Lambda\Gamma$  είναι ορθογώνια.
- γ. Τα τρίγωνα  $AKB$  και  $A\Lambda\Gamma$  είναι ίσα.

**244 Θέμα 1771**

Δύο κύκλοι  $(O, \rho_1)$ ,  $(K, \rho_2)$  εφάπτονται εξωτερικά στο  $N$ . Μια ευθεία  $\varepsilon$  εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία  $A$ ,  $B$  αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο  $N$  τέμνει την  $\varepsilon$  στο  $M$ .

Να αποδείξετε ότι:

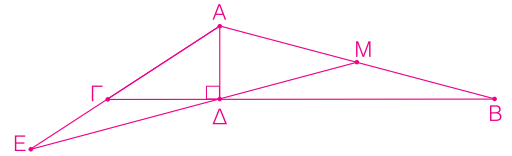
- α. Το  $M$  είναι μέσον του  $AB$ .
- β.  $\widehat{OMK} = 90^\circ$
- γ.  $\widehat{ANB} = 90^\circ$





**250 Θέμα 1881**

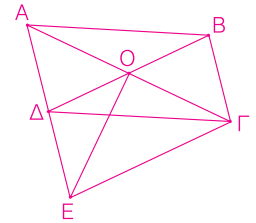
Έστω τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  με  $AB > A\Gamma$ ,  $AD$  το ύψος του και  $M$  το μέσο του  $AB$ . Η προέκταση της  $MD$  τέμνει την προέκταση της  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$  ώστε  $\Gamma D = \Gamma E$ . Να αποδείξετε ότι:



- α.  $\hat{B} = \hat{E}$
- β.  $\hat{\Gamma} = 2\hat{B} = \widehat{AM\Delta}$
- γ.  $\Gamma E < A\Gamma$

**251 Θέμα 1862**

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  τέτοιο ώστε αν φέρουμε την κάθετη στην  $A\Gamma$  στο κέντρο του  $O$ , αυτή τέμνει την προέκταση της  $A\Delta$  σε σημείο  $E$  τέτοιο ώστε  $\Delta E = A\Delta$ . Να αποδείξετε ότι:



- α. Το τρίγωνο  $A\Gamma E$  είναι ισοσκελές.
- β. Το τετράπλευρο  $B\Gamma E\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.
- γ. Το τρίγωνο  $BO\Gamma$  είναι ισοσκελές.

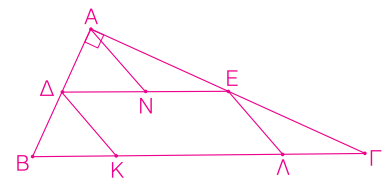
**252 Θέμα 1813**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $A$  ορθή και  $AM$  η διάμεσός του. Από το  $M$  φέρουμε  $MK$  κάθετη στην  $AB$  και  $M\Lambda$  κάθετη στην  $A\Gamma$ . Αν  $N, P$  είναι τα μέσα των  $BM$  και  $\Gamma M$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α.  $\hat{NKM} = \hat{NMK}$
- β. Η  $MK$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $NMA$ .
- γ.  $AM = KN + \Lambda P$

**253 Θέμα 1880**

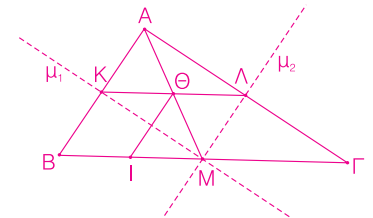
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$  και  $\Delta, E$  και  $N$  τα μέσα των  $AB, A\Gamma$  και  $\Delta E$  αντίστοιχα. Στο τμήμα  $B\Gamma$  θεωρούμε σημεία  $K$  και  $\Lambda$  ώστε  $\Delta K = KB$  και  $E\Lambda = \Lambda\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:



- α.  $\hat{\Delta K\Lambda} = 2\hat{B}$  και  $\hat{E\Lambda K} = 2\hat{\Gamma}$
- β. Το τετράπλευρο  $\Delta E\Lambda K$  είναι παραλληλόγραμμο.
- γ.  $\Delta E = 2\Delta K$

**254 Θέμα 1859**

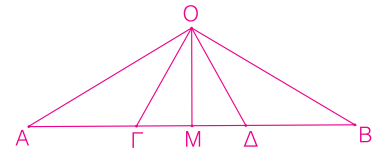
Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τις μεσοκαθέτους  $\mu_1, \mu_2$  των πλευρών του  $AB$  και  $A\Gamma$ , οι οποίες τέμνονται στο μέσο  $M$  της  $B\Gamma$ .



- α. Να αποδείξετε ότι:
  - i. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με  $\hat{A} = 90^\circ$
  - ii. Το τετράπλευρο  $A\Lambda M K$  είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
  - iii.  $\Lambda\Theta = \frac{B\Gamma}{4}$ , όπου  $\Theta$  το σημείο τομής των  $AM$  και  $K\Lambda$ .
- β. Αν  $I$  σημείο της  $B\Gamma$  τέτοιο ώστε  $BI = \frac{B\Gamma}{4}$  να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $K\Theta IB$  είναι παραλληλόγραμμο.

**255 Θέμα 1710**

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία  $\Gamma$ ,  $\Delta$  ώστε να ισχύει  $AG = \Gamma\Delta = \Delta B$ . Επίσης θεωρούμε σημείο  $O$  εκτός του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$  έτσι ώστε να ισχύουν  $OG = AG$  και  $OD = \Delta B$ .



**α.** Να αποδείξετε ότι:

- i.** η γωνία  $\hat{GO\Delta}$  είναι  $60^\circ$
- ii.** οι γωνίες  $\hat{OAG}$ ,  $\hat{OBD}$  είναι ίσες και κάθε μια ίση με  $30^\circ$ .

**β.** Αν  $M$  το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$ , να αποδείξετε ότι  $2OM = OA$ .

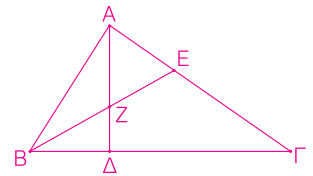
**256 Θέμα 1806**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $A$  ορθή. Φέρουμε τη διάμεσό του  $AM$  και σε τυχαίο σημείο  $K$  αυτής φέρουμε κάθετη στην  $AM$  η οποία τέμνει τις  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα. Αν  $H$  είναι το μέσο του  $\Delta E$  να αποδείξετε ότι:

- α.**  $\hat{B} = \hat{BAM}$
- β.**  $\hat{A\Delta H} = \hat{\Delta AH}$
- γ.** Η ευθεία  $AH$  τέμνει κάθετα τη  $B\Gamma$ .

**257 Θέμα 1713**

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει  $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$  και έστω  $A\Delta$  ύψος και  $BE$  διχοτόμος του τριγώνου που τέμνονται στο  $Z$ .



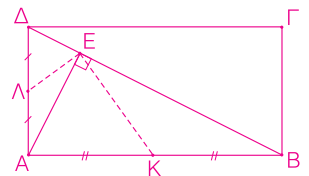
**α.** Να αποδείξετε ότι:

- i.**  $\hat{B} = 60^\circ$  και  $AZ = BZ$
- ii.**  $A\Delta = \frac{3}{2}BZ$

**β.** Αν είναι γνωστό ότι το τρίγωνο  $AZE$  είναι ισόπλευρο, να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

**258 Θέμα 1763**

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ . Από την κορυφή  $A$  φέρουμε  $AE \perp BD$ . Έστω  $K$ ,  $\Lambda$  τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Delta$  αντίστοιχως, τότε:



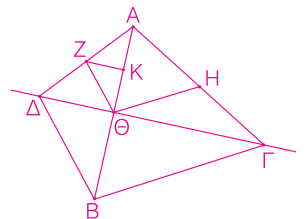
**α.** Να αποδείξετε ότι:

- i.**  $\hat{KE\Lambda} = 90^\circ$
- ii.**  $K\Lambda = \frac{A\Gamma}{2}$

**β.** Αν  $\hat{BAG} = 30^\circ$ , να αποδείξετε ότι  $K\Lambda = B\Gamma$ .

**259 Θέμα 1866**

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Με βάση την  $AB$  κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο  $A\Delta B$ , εκτός του τριγώνου  $AB\Gamma$ , με γωνία  $\hat{\Delta} = 120^\circ$ . Θεωρούμε τα μέσα  $Z$  και  $H$  των πλευρών  $A\Delta$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.



**α.** Να αποδείξετε ότι η  $\Delta\Gamma$  είναι μεσοκάθετος του  $AB$ .

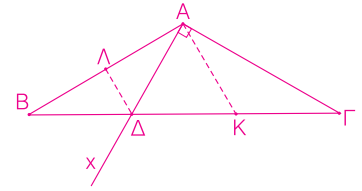
**β.** Αν η  $\Delta\Gamma$  τέμνει την  $AB$  στο  $\Theta$ , να αποδείξετε ότι η γωνία  $\hat{Z\Theta H}$  είναι ορθή.

**γ.** Αν η  $ZK$  είναι η κάθετη στην  $AB$  από το σημείο  $Z$ , να αποδείξετε ότι  $ZK = \frac{A\Delta}{4}$ .

**260 Θέμα 1871**

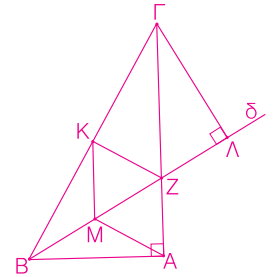
Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 120^\circ$ . Φέρουμε ημιευθεία  $Ax$  κάθετη στην  $A\Gamma$  στο  $A$ , η οποία τέμνει τη  $B\Gamma$  στο  $\Delta$ . Έστω  $\Lambda$  το μέσο του  $AB$  και  $K$  το μέσο του  $\Delta\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

- α.** Το τρίγωνο  $\triangle A\Delta B$  είναι ισοσκελές.  
**β.**  $\Delta\Gamma = 2\Delta B$       **γ.**  $\Lambda\Delta \parallel AK$       **δ.**  $AK = 2\Lambda\Delta$

**261 Θέμα 1872**

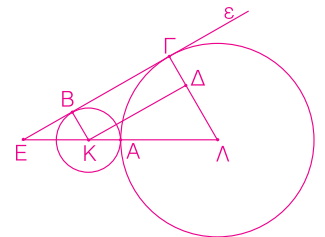
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$  και  $\hat{B} = 60^\circ$ . Η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $Z$ . Τα σημεία  $M$  και  $K$  είναι τα μέσα των  $BZ$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Αν το τμήμα  $\Gamma\Lambda$  είναι κάθετο στη διχοτόμο  $B\delta$  να αποδείξετε:

- α.** Το τρίγωνο  $\triangle BZ\Gamma$  είναι ισοσκελές.  
**β.** Το τετράπλευρο  $AMKZ$  είναι ρόμβος.  
**γ.**  $\Gamma Z = 2ZA$   
**δ.**  $B\Lambda = A\Gamma$

**262 Θέμα 1721**

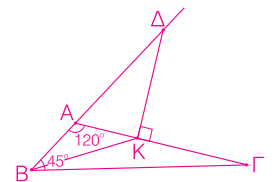
Οι κύκλοι  $(K, \rho)$  και  $(\Lambda, 3\rho)$  εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο  $A$ . Μία ευθεία  $\epsilon$  εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου  $K\Lambda$  στο σημείο  $E$ . Φέρουμε από το σημείο  $K$  παράλληλο τμήμα στην  $\epsilon$  που τέμνει το τμήμα  $A\Gamma$  στο  $\Delta$ .

- α.** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $B\Gamma\Delta K$  είναι ορθογώνιο.  
**β.** Να αποδείξετε ότι η γωνία  $\hat{\Delta K\Lambda}$  είναι  $30^\circ$ .  
**γ.** Να αποδείξετε ότι το τμήμα  $E\Lambda = 6\rho$ , όπου  $\rho$  η ακτίνα του κύκλου  $(K, \rho)$ .

**263 Θέμα 1761**

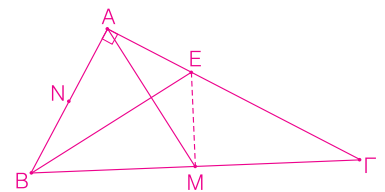
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με γωνία  $A$  ίση με  $120^\circ$  και γωνία  $B$  είναι ίση με  $45^\circ$ . Στην προέκταση της  $BA$  προς το  $A$ , παίρνουμε τμήμα  $A\Delta = 2AB$ . Από το  $\Delta$  φέρνουμε την κάθετη στην  $A\Gamma$  που την τέμνει στο σημείο  $K$ . Να αποδείξετε ότι:

- α.** Η γωνία  $\hat{A\Delta K}$  είναι ίση με  $30^\circ$ .  
**β.** Το τρίγωνο  $KAB$  είναι ισοσκελές.  
**γ.** Αν  $Z$  το μέσο της  $\Delta A$ , τότε  $\hat{ZKB} = 90^\circ$ .  
**δ.** Το σημείο  $K$  ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος  $B\Delta$ .

**264 Θέμα 1835**

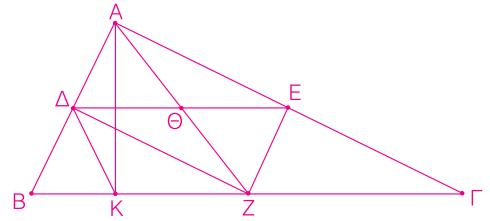
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$  με  $M$  και  $N$  τα μέσα των πλευρών  $B\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς  $B\Gamma$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$ .

- α.** Να αποδείξετε ότι:
- i.** η  $BE$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$       **ii.**  $AE = \frac{\Gamma E}{2}$
  - iii.** η  $BE$  είναι μεσοκάθετος της διαμέσου  $AM$ .
- β.** Αν  $A\Delta$  είναι το ύψος του τριγώνου  $AB\Gamma$  που τέμνει την  $BE$  στο  $H$ , να αποδείξετε ότι τα σημεία  $M$ ,  $H$  και  $N$  είναι συνευθειακά.



**265 Θέμα 1782**

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ), τα μέσα  $\Delta$ ,  $E$ ,  $Z$  των πλευρών του και το ύψος του  $AK$ . Έστω  $\Theta$  είναι το σημείο τομής των  $AZ$  και  $DE$ .



- α.** Να αποδείξετε ότι:
  - i.** Το τετράπλευρο  $A\Delta ZE$  είναι ορθογώνιο.
  - ii.**  $A\Theta = \Theta E = \frac{B\Gamma}{4}$
- β.** Αν επιπλέον είναι η γωνία  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ ,
  - i.** να βρείτε τη γωνία  $\hat{AZB}$
  - ii.** να αποδείξετε ότι  $BK = \frac{B\Gamma}{4}$ .

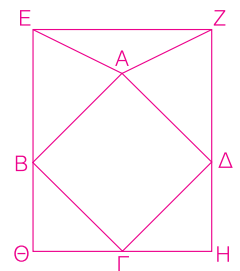
**266 Θέμα 1895**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $A\Gamma B$  ( $A\Gamma = B\Gamma$ ). Φέρουμε τα ύψη του  $AK$  και  $\Gamma\Lambda$ . Αν  $E$  είναι το μέσο της πλευράς  $A\Gamma$ , να αποδείξετε ότι:

- α.** Το τρίγωνο  $KE\Lambda$  είναι ισοσκελές.
- β.** Η  $K\Lambda$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $BKE$ .

**267 Θέμα 1850**

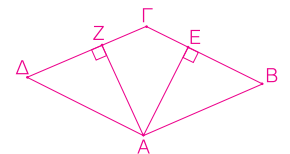
Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο  $EZH\Theta$  παριστάνει ένα τραπέζι του μπιλιάρδου. Μια μπάλα του μπιλιάρδου ξεκινάει από σημείο  $A$  της μεσοκαθέτου του τμήματος  $EZ$  και χτυπώντας διαδοχικά στους τοίχους  $E\Theta$ ,  $\Theta H$ ,  $HZ$  στα σημεία  $B$ ,  $\Gamma$  και  $\Delta$  αντίστοιχα, καταλήγει στο σημείο εκκίνησης  $A$ . Για τη διαδρομή  $A \rightarrow B \rightarrow \Gamma \rightarrow \Delta \rightarrow A$  που ακολουθεί η μπάλα ισχύει ότι κάθε γωνία πρόσπτωσης σε τοίχο (π.χ η γωνία  $\angle ABE$ ) είναι ίση με κάθε γωνία ανάκλασης σε τοίχο (π.χ η γωνία  $\angle \Theta B\Gamma$ ) και η κάθε μια απ' αυτές είναι  $45^\circ$ .



- α.** Να αποδείξετε ότι:
  - i.** Τα τρίγωνα  $AEB$  και  $AZ\Delta$  είναι ίσα.
  - ii.** Η διαδρομή  $AB\Gamma\Delta A$  της μπάλας σχηματίζει τετράγωνο.
- β.** Αν η  $AZ$  είναι διπλάσια από την απόσταση του  $A$  από τον τοίχο  $EZ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AEZ$ .

**268 Θέμα 1742**

Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  του διπλανού σχήματος είναι ρόμβος. Θεωρούμε  $AZ \perp \Gamma\Delta$  και  $AE \perp \Gamma B$ . Να αποδείξετε ότι:



- α.** Το τρίγωνο  $ZAE$  είναι ισοσκελές.
- β.** Η ευθεία  $A\Gamma$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $ZE$ .
- γ.** Αν  $M$  και  $N$  τα μέσα των πλευρών  $A\Delta$  και  $AB$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι  $MN \parallel ZE$  και  $ZM = EN$ .

**269 Θέμα 1737**

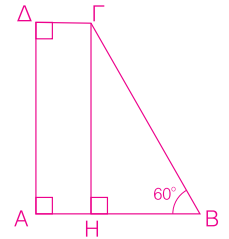
Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και το ύψος του  $AH$ . Έστω  $\Delta$  και  $E$  τα συμμετρικά σημεία του  $H$  ως προς τις ευθείες  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- $AH = A\Delta = AE$
- Η γωνία  $E\Delta H$  είναι ορθή.
- Τα σημεία  $A$ ,  $E$  και  $\Delta$  είναι συνευθειακά και  $MN = \frac{\Delta E}{2}$ .

**270 Θέμα 1549**

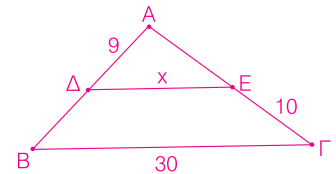
Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ,  $AB > \Gamma\Delta$ ,  $B\Gamma = 4\Delta\Gamma$  και  $\hat{B} = 60^\circ$ . Φέρουμε την  $GH \perp AB$ . Να δείξετε ότι:

- $AB = 3\Gamma\Delta$
- Το τετράπλευρο  $AH\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο με  $AH = \frac{1}{2}HB$ .

**24. Τραπέζιο****Θέμα 2****271 Θέμα 1612**

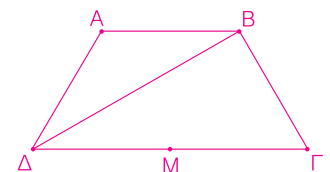
Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\Delta$  και  $E$  τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα,  $A\Delta = 9$ ,  $E\Gamma = 10$  και  $B\Gamma = 30$ .

- Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $\Delta E\Gamma B$  είναι τραπέζιο.
- Να υπολογίσετε το μήκος  $x$  του τμήματος  $\Delta E$ .

**272 Θέμα 1697**

Στο τραπέζιο του διπλανού σχήματος έχουμε  $AB = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ ,  $\hat{\Delta} = 60^\circ$  και  $M$  το μέσο της πλευράς  $\Gamma\Delta$ . Να αποδείξετε ότι:

- η  $\Delta B$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{\Delta}$
- η  $BM$  χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

**273 Θέμα 1694**

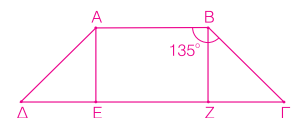
Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με  $AB = 8$  και  $\Delta\Gamma = 12$ . Αν  $AH$  και  $B\Theta$  τα ύψη του τραπέζιου,

- να αποδείξετε ότι  $\Delta H = \Theta\Gamma$
- να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραπέζιου.

**274 Θέμα 1629**

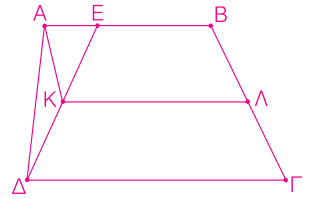
Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με  $\Gamma\Delta > AB$  και  $\hat{B} = 135^\circ$ . Από τις κορυφές  $A$  και  $B$  φέρουμε τα ύψη του  $AE$  και  $BZ$ .

- Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου.
- Να αποδείξετε ότι  $AE = ED = BZ = \Gamma Z$ .



**275 Θέμα 1644**

Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με  $AB=3$ ,  $\Gamma\Delta=4$ . Θεωρούμε σημείο  $E$  στην  $AB$  ώστε  $AE=1$ . Στο τραπέζιο  $EB\Gamma\Delta$  θεωρούμε τα  $K$  και  $\Lambda$ , μέσα των  $E\Delta$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα.

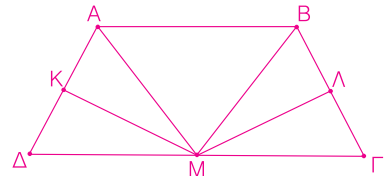


- α. Να υπολογίσετε τη διάμεσο  $K\Lambda$  του τραπέζιου  $EB\Gamma\Delta$ .
- β. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AB\Lambda K$  είναι παραλληλόγραμμο.

**276 Θέμα 1669**

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$ , το σημείο  $M$  είναι το μέσο της πλευράς  $\Delta\Gamma$  και τα σημεία  $K$  και  $\Lambda$  είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του  $A\Delta$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:



- α. Τα τμήματα  $KM$  και  $\Lambda M$  είναι ίσα.
- β. Τα τμήματα  $AM$  και  $BM$  είναι ίσα.

**277 Θέμα 1634**

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ), με  $AB=6$ ,  $B\Gamma=4$  και  $\hat{\Gamma}=60^\circ$ . Δίνονται επίσης τα ύψη  $AE$  και  $BZ$  από τις κορυφές  $A$  και  $B$  αντίστοιχα.



- α. Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπέζιου  $AB\Gamma\Delta$ .
- β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AE\Delta$ ,  $BZ\Gamma$  είναι ίσα.
- γ. Να υπολογίσετε την περίμετρο του  $AB\Gamma\Delta$ .

**278 Θέμα 1579**

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $AB < \Gamma\Delta$ . Θεωρούμε τα σημεία  $E$  και  $Z$  πάνω στην  $AB$  έτσι ώστε  $AE = EZ = ZB$  και έστω  $K$  το σημείο τομής των  $\Delta Z$  και  $\Gamma E$ . Να αποδείξετε ότι:

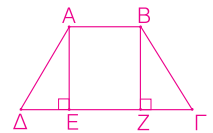
- α.  $\Delta Z = \Gamma E$
- β. Τα τρίγωνα  $EKZ$  και  $\Delta K\Gamma$  είναι ισοσκελή.

**279 Θέμα 1563**

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ). Φέρουμε τα ύψη του  $AE$  και  $BZ$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α.  $\Delta E = \Gamma Z$
- β.  $AB = EZ$

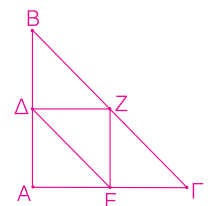


**280 Θέμα 1666**

Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A}=90^\circ$ ) θεωρούμε τα μέσα  $\Delta$ ,  $E$  και  $Z$  των πλευρών του  $AB$ ,  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα.

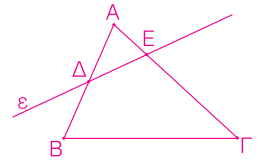
Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τετράπλευρο  $AEZ\Delta$  είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
- β. Το τετράπλευρο  $E\Delta B\Gamma$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.



**281 Θέμα 1536**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $\Delta$  το μέσο της πλευράς  $AB$ . Από το  $\Delta$  διέρχεται μια τυχαία ευθεία  $\varepsilon$  που τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  σε εσωτερικό της σημείο  $E$ . Η ευθεία  $\varepsilon$  χωρίζει το τρίγωνο  $AB\Gamma$  σε ένα τρίγωνο  $A\Delta E$  και σε ένα τετράπλευρο  $B\Delta E\Gamma$ .



- α.** Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου  $E$ , ώστε το τετράπλευρο  $B\Delta E\Gamma$  να είναι τραπέζιο;

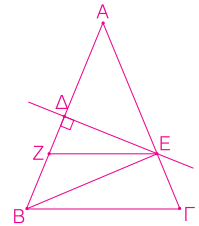
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- β.** Ποιο πρέπει να είναι το είδος του  $AB\Gamma$  τριγώνου, ώστε το τραπέζιο του ερωτήματος **α.** να είναι ισοσκελές τραπέζιο;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**282 Θέμα 1529**

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) με  $\hat{A} < 90^\circ$ . Στο μέσο  $\Delta$  της πλευράς  $AB$  φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $E$ . Από το  $E$  φέρουμε ευθεία παράλληλη στη βάση  $B\Gamma$  που τέμνει την  $AB$  στο  $Z$ .



- α.** Να αποδείξετε ότι  $AE = BE$ .

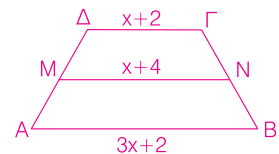
- β.** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $B\Gamma EZ$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**283 Θέμα 1550**

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Gamma\Delta$ ,  $AB > \Gamma\Delta$  και  $A\Delta = B\Gamma$ .

- α.** Αν τα μήκη των βάσεων είναι  $AB = 3x + 2$ ,  $\Gamma\Delta = x + 2$  και το μήκος της διαμέσου του τραπέζιου είναι  $MN = x + 4$ , τότε να δείξετε ότι  $x = 2$ .

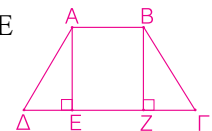
- β.** Αν η γωνία  $\hat{\Gamma}$  είναι διπλάσια της γωνίας  $\hat{B}$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου.

**284 Θέμα 1562**

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με  $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^\circ$ . Φέρουμε τα ύψη του  $AE$  και  $BZ$ . Να αποδείξετε ότι:

- α.**  $\Delta E = \Gamma Z$

- β.** Το τετράπλευρο  $AEZB$  είναι ορθογώνιο.

**Θέμα 4****285 Θέμα 1735**

Θεωρούμε ευθεία ( $\varepsilon$ ) και δυο σημεία  $A$  και  $B$  εκτός αυτής, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημιπίεδο σε σχέση με την ( $\varepsilon$ ) έτσι ώστε, η ευθεία  $AB$  να μην είναι κάθετη στην ( $\varepsilon$ ). Έστω  $A'$  και  $B'$  τα συμμετρικά σημεία των  $A$  και  $B$  αντίστοιχα ως προς την ευθεία ( $\varepsilon$ ).

- α.** Να αποδείξετε ότι  $AA' \parallel BB'$ .

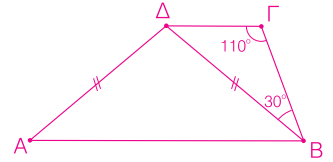
- β.** Αν η μεσοκάθετος του  $AB$  τέμνει την ευθεία ( $\varepsilon$ ) στο σημείο  $K$ , να αποδείξετε ότι το  $K$  ανήκει και στη μεσοκάθετο του  $A'B'$ .

- γ.** Να βρείτε τη σχέση των ευθειών  $AB$  και της ευθείας ( $\varepsilon$ ) ώστε το τετράπλευρο  $ABB'A'$  να είναι ορθογώνιο.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

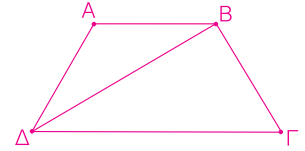
**286 Θέμα 1577**

Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Gamma\Delta$  στο οποίο η διαγώνιος  $B\Delta$  είναι ίση με την πλευρά  $A\Delta$ . Αν η γωνία  $\hat{\Gamma} = 110^\circ$  και η γωνία  $\hat{\Delta B\Gamma} = 30^\circ$ , να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{A\Delta B}$ .



**287 Θέμα 1650**

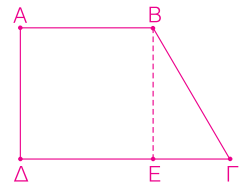
Στο τραπέζιο του διπλανού σχήματος έχουμε  $AB = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ ,  $\hat{\Delta} = 60^\circ$  και  $M$  το μέσο της πλευράς  $\Gamma\Delta$ . Να αποδείξετε ότι:



- α. η  $\Delta B$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{\Delta}$
- β. η  $BM$  χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

**288 Θέμα 1635**

Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ), με  $AB = B\Gamma = 4$ ,  $\hat{A} = 90^\circ$  και  $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ . Δίνεται επίσης το ύψος  $BE$  από τη κορυφή  $B$ .



- α. Να υπολογίσετε τις άλλες δυο γωνίες του τραπέζιου  $AB\Gamma\Delta$ .
- β. Να αποδείξετε  $2E\Gamma = B\Gamma$ .
- γ. Αν  $M, N$  τα μέσα των πλευρών  $A\Delta, B\Gamma$  αντίστοιχα να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος  $MN$ .

**289 Θέμα 1715**

Δίνεται ευθεία  $\epsilon$  και δυο σημεία  $A, B$  εκτός αυτής έτσι ώστε η ευθεία  $AB$  να μην είναι κάθετη στην  $\epsilon$ . Φέρουμε  $A\Delta, B\Gamma$  κάθετες στην  $\epsilon$  και  $M, N$  μέσα των  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  αντίστοιχα.

- α. Αν τα  $A, B$  είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την  $\epsilon$ 
  - i. να εξετάσετε αν το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι, παραλληλόγραμμο, τραπέζιο ή ορθογώνιο σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας:
    1.  $A\Delta < B\Gamma$
    2.  $A\Delta = B\Gamma$
  - ii. να εκφράσετε το τμήμα  $MN$  σε σχέση με τα τμήματα  $A\Delta, B\Gamma$  στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις.
- β. Αν η ευθεία  $\epsilon$  τέμνει το τμήμα  $AB$  στο μέσο του  $M$  να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου  $A\Gamma B\Delta$  (παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, ορθογώνιο) και να δείξετε ότι τα  $M, N$  ταυτίζονται. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

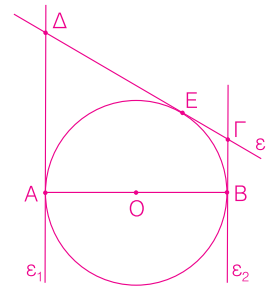
**290 Θέμα 1747**

Δίνεται κύκλος  $(O, R)$  με διάμετρο  $AB$  και δυο ευθείες  $\epsilon_1, \epsilon_2$  εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου  $AB$ . Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία  $\epsilon$  εφάπτεται του κύκλου σ' ένα σημείο του  $E$  και τέμνει τις  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  στα  $\Delta$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα.

- α. Αν το σημείο  $E$  δεν είναι το μέσο του τόξου  $AB$ , να αποδείξετε ότι:
  - i. Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι τραπέζιο.
  - ii.  $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$
- β. Αν το σημείο  $E$  βρίσκεται στο μέσον του τόξου  $AB$ , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $A\Delta\Gamma B$  είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου  $A\Delta\Gamma B$  ως συνάρτηση της ακτίνας  $R$  του κύκλου.

**291 Θέμα 1758**

Δίνεται κύκλος  $(O, R)$  με διάμετρο  $AB$  και ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου  $AB$ . Θεωρούμε ευθεία  $\varepsilon$  εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του  $E$ , η οποία τέμνει τις  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  στα  $\Delta$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα.



**α.** Να αποδείξετε ότι:

- i.** Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι τραπέζιο.
- ii.**  $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$
- iii.** Το τρίγωνο  $\Gamma O\Delta$  είναι ορθογώνιο.

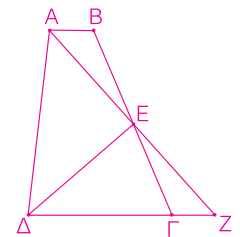
**β.** Αν η γωνία  $\Delta E\Gamma$  είναι  $60^\circ$  και η  $O\Delta$  τέμνει τον κύκλο  $(O, R)$  στο σημείο  $K$ , να αποδείξετε ότι το  $K$  είναι μέσο του  $\Delta O$ .

**292 Θέμα 1783**

Σε τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) ισχύει  $AB + \Gamma\Delta = A\Delta$ .

Αν η διχοτόμος της γωνίας  $A$  τέμνει την  $B\Gamma$  στο  $E$  και την προέκταση της  $\Delta\Gamma$  στο  $Z$ , να αποδείξετε ότι:

- α.** Το τρίγωνο  $\Delta AZ$  είναι ισοσκελές.
- β.** Το  $E$  είναι το μέσο της  $B\Gamma$ .
- γ.** Η  $\Delta E$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\Delta$  του τραpezίου.

**293 Θέμα 1885**

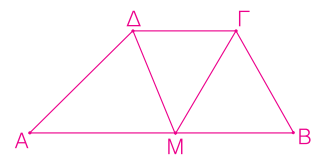
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$  και το ύψος του  $AH$ . Αν  $\Delta, E$  και  $Z$  είναι τα μέσα των  $AB, A\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α.** το τετράπλευρο  $\Delta EZH$  είναι ισοσκελές τραπέζιο
- β.** οι γωνίες  $H\Delta Z$  και  $HEZ$  είναι ίσες
- γ.** οι γωνίες  $E\Delta Z$  και  $EHZ$  είναι ίσες.

**294 Θέμα 1815**

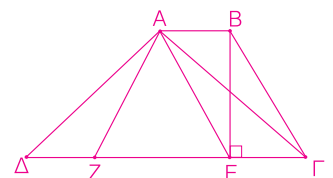
Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $AB = A\Delta + B\Gamma$ . Αν η διχοτόμος της γωνίας  $\Delta$  τέμνει την  $AB$  στο σημείο  $M$ , να αποδείξετε ότι:

- α.** Το τρίγωνο  $A\Delta M$  είναι ισοσκελές.
- β.** Το τρίγωνο  $M B\Gamma$  είναι ισοσκελές.
- γ.** Η  $\Gamma M$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\Gamma$  του τραpezίου.

**295 Θέμα 1860**

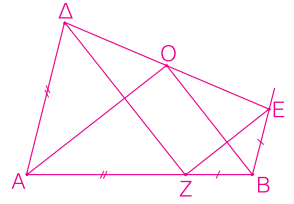
Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Gamma\Delta$ ,  $\Delta\Gamma = 4AB$  και  $B\Gamma = 2AB$ . Θεωρούμε σημείο  $Z$  της  $\Gamma\Delta$ , ώστε  $\Delta Z = AB$ . Αν η γωνία  $\Gamma$  είναι  $60^\circ$  και  $BE$  το ύψος του τραpezίου, να αποδείξετε ότι:

- α.** Το τετράπλευρο  $AB\Gamma E$  είναι παραλληλόγραμμο.
- β.** Το τρίγωνο  $ZAE$  είναι ισόπλευρο.
- γ.** Τα τρίγωνα  $\Delta AZ$  και  $\Gamma AE$  είναι ίσα.



**296 Θέμα 1784**

Δίνεται τραπέζιο  $AΔEB$ , με  $AΔ // BE$ , στο οποίο ισχύει ότι  $AB = AΔ + BE$ , και  $O$  το μέσον της  $ΔE$ . Θεωρούμε σημείο  $Z$  στην  $AB$  τέτοιο ώστε  $AZ = AΔ$  και  $BZ = BE$ . Αν γωνία  $\hat{\Delta}AZ = \varphi$ ,

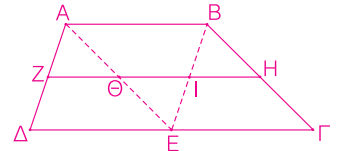


- α. να εκφράσετε τη γωνία  $AZΔ$  σε συνάρτηση με τη  $\varphi$
- β. να εκφράσετε τη γωνία  $EZB$  σε συνάρτηση με τη  $\varphi$
- γ. να αποδείξετε ότι οι  $OA$  και  $OB$  είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων  $ΔZ$  και  $ZE$  αντίστοιχα.

**297 Θέμα 1711**

Σε τραπέζιο  $ABΓΔ$  ( $AB // ΓΔ$ ) είναι  $ΓΔ = 2AB$ .

Επίσης τα  $Z, H, E$  είναι τα μέσα των  $AΔ, BΓ$  και  $ΔΓ$  αντίστοιχα. Ακόμη η  $ZH$  τέμνει τις  $AE, BE$  στα σημεία  $\Theta, I$  αντίστοιχα.



- α. Να δείξετε ότι, το τετράπλευρο  $ABΓE$  είναι παραλληλόγραμμο.
- β. Να δείξετε ότι, τα σημεία  $\Theta, I$  είναι μέσα των  $AE, BE$  αντίστοιχα.
- γ. Να δείξετε ότι  $ZH = \frac{3}{2}AB$ .

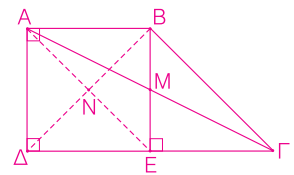
**298 Θέμα 1757**

Θεωρούμε τραπέζιο  $ABΓΔ$ , τέτοιο ώστε  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ,  $AB = \frac{1}{4}ΔΓ$  και  $AB = \frac{1}{3}AΔ$ . Επιπλέον, φέρουμε  $BE \perp ΔΓ$ .

- α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $ABEΔ$  είναι ορθογώνιο.
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $BEG$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
- γ. Αν  $K, \Lambda$  είναι τα μέσα των  $BE$  και  $AΓ$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η  $AΓ$  διέρχεται από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος  $BK$ .

**299 Θέμα 1767**

Δίνεται τραπέζιο  $ABΓΔ$  ( $AB // ΓΔ$ ) με  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ,  $ΔΓ = 2AB$  και  $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$ . Φέρνουμε  $BE \perp ΔΓ$  που τέμνει τη διαγώνιο  $AΓ$  στο  $M$ . Φέρνουμε την  $AE$  που τέμνει τη διαγώνιο  $BΔ$  στο  $N$ . Να αποδείξετε ότι:



- α.  $\hat{\Gamma} = 45^\circ$
- β. Το τετράπλευρο  $ABΓE$  είναι παραλληλόγραμμο.
- γ.  $AE \perp BΔ$

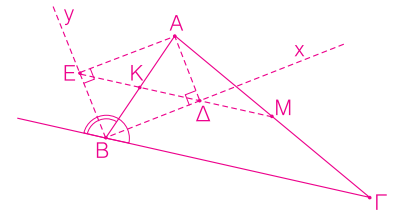
**300 Θέμα 1842**

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$ . Στην προέκταση της πλευράς  $AB$  παίρνουμε τμήμα  $BE = AB$  και στην προέκταση της πλευράς  $AΔ$  τμήμα  $ΔZ = AΔ$ .

- α. Να αποδείξετε ότι:
  - i. Τα τετράπλευρα  $BΔΓE$  και  $BΔZΓ$  είναι παραλληλόγραμμα.
  - ii. Τα σημεία  $E, \Gamma$  και  $Z$  είναι συνευθειακά.
- β. Αν  $K$  και  $\Lambda$  είναι τα μέσα των  $BE$  και  $ΔZ$  αντίστοιχα, τότε  $K\Lambda // ΔB$  και  $K\Lambda = \frac{3}{2}ΔB$ .

**301 Θέμα 1838**

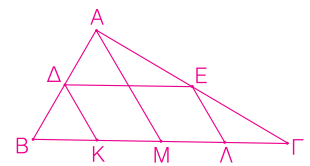
Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ , η διχοτόμος  $Bx$  της γωνίας  $B$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  και η διχοτόμος  $By$  της εξωτερικής γωνίας  $B$ . Αν  $\Delta$  και  $E$  είναι οι προβολές της κορυφής  $A$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  στην  $Bx$  και  $By$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



- α. Το τετράπλευρο  $A\Delta BE$  είναι ορθογώνιο.
- β. Η ευθεία  $E\Delta$  είναι παράλληλη προς τη  $B\Gamma$  και διέρχεται από το μέσο  $M$  της  $A\Gamma$ .
- γ. Το τετράπλευρο  $KM\Gamma B$  είναι τραπέζιο και η διάμεσός του είναι ίση με  $\frac{3a}{4}$ , όπου  $a = B\Gamma$ .

**302 Θέμα 1852**

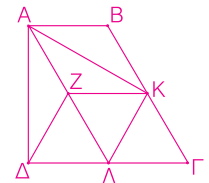
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$ . Στην πλευρά  $B\Gamma$  θεωρούμε τα σημεία  $K, M, \Lambda$  ώστε  $BK = KM = M\Lambda = \Lambda\Gamma$ . Αν τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



- α. Το τετράπλευρο  $\Delta E\Lambda K$  είναι παραλληλόγραμμο.
- β. Η διάμεσος του τραπέζιου  $K\Delta AM$  ισούται με  $\frac{3}{8}B\Gamma$ .

**303 Θέμα 1821**

Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ) με  $B\Gamma = \Gamma\Delta = 2AB$  και  $K, \Lambda$  τα μέσα των  $B\Gamma$  και  $\Gamma\Delta$ . Η παράλληλη από το  $K$  προς την  $AB$  τέμνει την  $A\Lambda$  στο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:

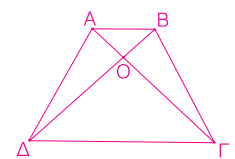


- α.  $B\Gamma = 2\Delta Z$
- β. Το τετράπλευρο  $ZK\Gamma\Lambda$  είναι ρόμβος.
- γ.  $\hat{A}\hat{K}\hat{\Lambda} = 90^\circ$

**304 Θέμα 1834**

Στο διπλανό τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  ισχύουν:  $A\Delta = B\Gamma$ ,  $A\Gamma = B\Delta$ , και  $AB < \Gamma\Delta$ .

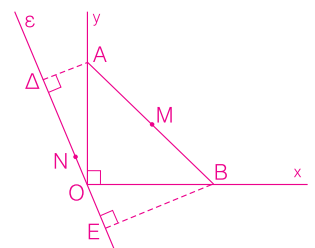
- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AOB$  και  $\Delta OG$  είναι ισοσκελή.
- β. Να αποδείξετε ότι  $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{B} = \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ .
- γ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**305 Θέμα 1778**

Δίνεται ορθή γωνία  $x\hat{O}y = 90^\circ$  και  $A, B$  σημεία των ημιευθειών  $Oy, Ox$ , με  $OA = OB$ . Η  $\varepsilon$  είναι ευθεία που διέρχεται από την κορυφή  $O$  και αφήνει τις ημιευθείες  $Ox, Oy$  στο ίδιο ημιεπίπεδο.

Η κάθετος από το σημείο  $A$  στην  $\varepsilon$  την τέμνει στο  $\Delta$  και η κάθετος από το σημείο  $B$  στην  $\varepsilon$  την τέμνει στο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:

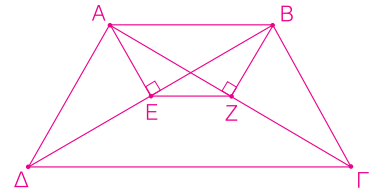
- α. Τα τρίγωνα  $O\Delta\Delta$  και  $OEB$  είναι ίσα.
- β.  $A\Delta + BE = \Delta E$
- γ.  $MN = \frac{\Delta E}{2}$ , όπου  $MN$  είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των  $\Delta E$  και  $AB$ .
- δ. Το τρίγωνο  $\Delta ME$  είναι ορθογώνιο ισοσκελές.



**306 Θέμα 1861**

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $A\Delta = B\Gamma = AB$ .  
 Φέρουμε τμήματα  $AE$  και  $BZ$  κάθετα στις διαγωνίες  $B\Delta$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.  
 Να αποδείξετε ότι:

- α. Τα σημεία  $Z$  και  $E$  είναι μέσα των διαγωνίων  $A\Gamma$  και  $B\Delta$  αντίστοιχα.
- β.  $AE = BZ$
- γ. Το τετράπλευρο  $AEZB$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- δ. Η  $B\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\Delta$ .

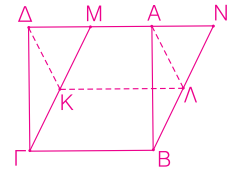


**307 Θέμα 1797**

- α. Σε ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  θεωρούμε  $K, \Lambda, M, N$  τα μέσα των πλευρών του  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $K\Lambda M N$  είναι ρόμβος.
- β. Σε ένα τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  τα μέσα  $K, \Lambda, M, N$  των πλευρών του  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$  αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Για να σχηματίζεται ρόμβος το  $AB\Gamma\Delta$  πρέπει να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντησή σας.

**308 Θέμα 1854**

Έστω τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  και  $M$  το μέσο της πλευράς  $\Delta A$ . Προεκτείνουμε το τμήμα  $\Delta A$  (προς την πλευρά του  $A$ ) κατά τμήμα  $AN = \frac{A\Delta}{2}$ .

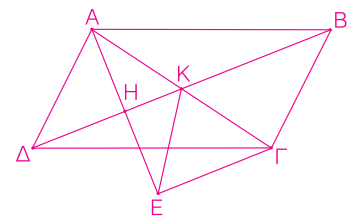


Φέρουμε τα τμήματα  $\Gamma M$  και  $BN$  και θεωρούμε τα μέσα τους  $K$  και  $\Lambda$  αντίστοιχα.  
 Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τετράπλευρο  $MNB\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμο.
- β. Το τετράπλευρο  $A\Delta K\Lambda$  είναι παραλληλόγραμμο.
- γ. Το τετράπλευρο  $AMK\Lambda$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**309 Θέμα 1830**

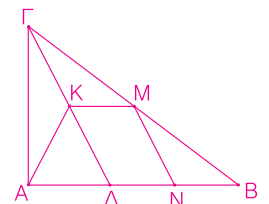
Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και  $K$  το σημείο τομής των διαγωνίων του.  
 Φέρουμε  $AH$  κάθετη στην  $B\Delta$  και στην προέκταση της  $AH$  (προς το  $H$ ) θεωρούμε σημείο  $E$  τέτοιο ώστε  $AH = HE$ . Να αποδείξετε ότι:



- α. Το τρίγωνο  $AKE$  είναι ισοσκελές.
- β. Το τρίγωνο  $AE\Gamma$  είναι ορθογώνιο.
- γ. Το τετράπλευρο  $\Delta B\Gamma E$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**310 Θέμα 1789**

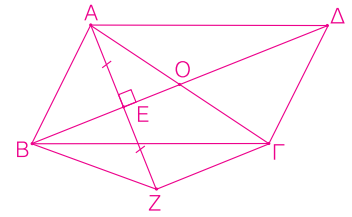
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $A$  ορθή, και τυχαίο σημείο  $\Delta$  της πλευράς  $AB$ . Έστω  $K, M, N$  τα μέσα των  $\Gamma\Delta, B\Gamma, B\Delta$  αντίστοιχα.  
 Να αποδείξετε ότι:



- α. Το τετράπλευρο  $KM N\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.
- β. Το τετράπλευρο  $AKMN$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- γ. Η διάμεσος του τραpezίου  $AKMN$  είναι ίση με  $\frac{AB}{2}$ .

**311 Θέμα 1841**

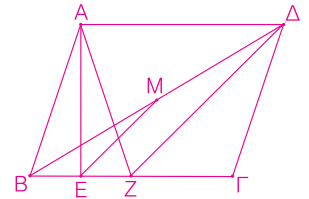
Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB < A\Delta$  και έστω  $O$  το σημείο τομής των διαγωνίων  $A\Gamma$  και  $B\Delta$ . Φέρνουμε την  $AE$  κάθετη στην διαγώνιο  $B\Delta$ . Αν το  $Z$  είναι το συμμετρικό του  $A$  ως προς την διαγώνιο  $B\Delta$  και δεν συμπίπτει με το σημείο  $\Gamma$ , τότε να αποδείξετε ότι:



- Το τρίγωνο  $A\Delta Z$  είναι ισοσκελές.
- $Z\Gamma = 2OE$
- Το  $B\Delta Z\Gamma$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**312 Θέμα 1790**

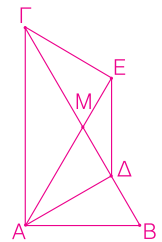
Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με τη γωνία του  $B$  να είναι ίση με  $70^\circ$  και το ύψος του  $AE$ . Έστω  $Z$  σημείο της  $B\Gamma$  ώστε  $BE = EZ$ .



- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AZ\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραpezίου  $AZ\Gamma\Delta$ .
- Αν  $M$  το μέσο του  $B\Delta$ , να αποδείξετε ότι  $EM = \frac{A\Gamma}{2}$ .

**313 Θέμα 1791**

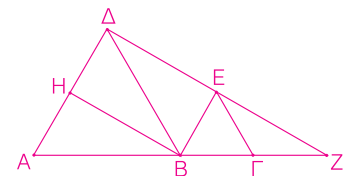
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$  και  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ . Φέρουμε το ύψος του  $A\Delta$  και τη διάμεσό του  $AM$ . Από το  $\Gamma$  φέρουμε κάθετη στην ευθεία  $AM$ , η οποία την τέμνει στο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:



- Το τρίγωνο  $AMB$  είναι ισόπλευρο.
- $ME = M\Delta = \frac{B\Gamma}{4}$
- Το  $A\Delta E\Gamma$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**314 Θέμα 1829**

Σε μια ευθεία  $\varepsilon$  θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία  $A, B, \Gamma$  έτσι ώστε  $AB = 2B\Gamma$  και στο ίδιο ημιεπίπεδο θεωρούμε ισόπλευρα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $B\Gamma E$ . Αν  $H$  είναι το μέσο του  $A\Delta$  και η ευθεία  $\Delta E$  τέμνει την ευθεία  $\varepsilon$  στο σημείο  $Z$  να αποδείξετε ότι:

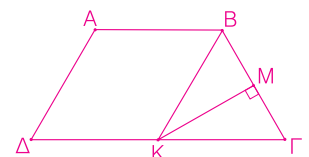


- Το τετράπλευρο  $BH\Delta E$  είναι ορθογώνιο.
- Το τρίγωνο  $\Gamma Z E$  είναι ισοσκελές.
- Το τετράπλευρο  $HE\Gamma A$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**315 Θέμα 1853**

Έστω ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Delta\Gamma$ ) με  $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$  και  $AB = B\Gamma = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ .

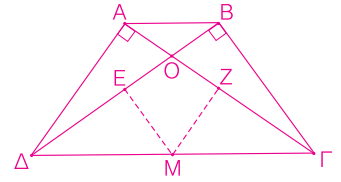
Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας  $\hat{B}$ , η οποία τέμνει το  $\Delta\Gamma$  στο  $K$  και η κάθετη από το  $K$  προς το  $B\Gamma$  το τέμνει στο  $M$ .



- Να υπολογίσετε τις γωνίες του  $AB\Gamma\Delta$ .
- Να αποδείξετε ότι:
  - Το τετράπλευρο  $ABK\Delta$  είναι ρόμβος.
  - Το σημείο  $M$  είναι το μέσο του  $B\Gamma$ .

**316 Θέμα 1867**

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) και  $O$  το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η  $AG$  είναι κάθετη στην  $AD$  και η  $BD$  είναι κάθετη στην  $B\Gamma$ . Θεωρούμε τα μέσα  $M$ ,  $E$  και  $Z$  των  $\Gamma\Delta$ ,  $B\Delta$  και  $AG$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



- α.  $ME = MZ$
- β. Η  $MZ$  είναι κάθετη στην  $AG$ .
- γ. Τα τρίγωνα  $\triangle M\Delta E$  και  $\triangle MZ\Gamma$  είναι ίσα.
- δ. Η  $OM$  είναι μεσοκάθετος του  $EZ$ .

**317 Θέμα 1893**

Έστω  $AB\Gamma\Delta$  ορθογώνιο με  $AB > B\Gamma$  τέτοιο ώστε οι διαγωνίοί του να σχηματίζουν γωνία  $60^\circ$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε  $\Delta M$  κάθετη στην  $AG$ .

- α. Να αποδείξετε ότι:
  - i. το σημείο  $M$  είναι μέσο του  $AO$  όπου  $O$  το κέντρο του ορθογωνίου.
  - ii.  $AM = \frac{1}{4}AG$
- β. Αν από το  $\Gamma$  φέρουμε  $\Gamma N$  κάθετη στη  $B\Delta$ , να αποδείξετε ότι το  $M\Gamma N\Delta$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**318 Θέμα 1722**

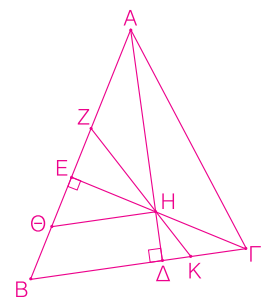
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και η διχοτόμος του  $B\Delta$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε  $\Delta E \perp B\Gamma$  και ονομάζουμε  $Z$  το σημείο στο οποίο η ευθεία  $E\Delta$  τέμνει την προέκταση της  $BA$ . Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο  $ABE$  είναι ισοσκελές.
- β. Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $BEZ$  είναι ίσα.
- γ. Η ευθεία  $B\Delta$  είναι μεσοκάθετη των τμημάτων  $AE$  και  $Z\Gamma$ .
- δ. Το τετράπλευρο  $AE\Gamma Z$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**319 Θέμα 1845**

Δίνεται το τρίγωνο  $AB\Gamma$  με γωνία  $B = 60^\circ$ . Φέρνουμε τα ύψη  $AD$  και  $GE$  που τέμνονται στο  $H$ . Φέρνουμε  $KZ$  διχοτόμο της γωνίας  $EHA$  και  $\Theta H$  κάθετο στο ύψος  $AD$ . Να αποδείξετε ότι:

- α. Για το τμήμα  $ZE$  ισχύει  $ZH = 2EZ$ .
- β. Το τρίγωνο  $\Theta ZH$  είναι ισόπλευρο.
- γ. Το τετράπλευρο  $\Theta HKB$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.



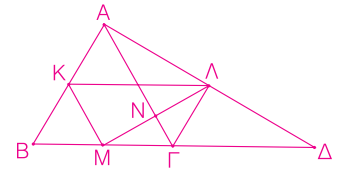
**320 Θέμα 1755**

Σε ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) είναι  $AB = A\Delta$ .

- α. Να αποδείξετε ότι η  $B\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\Delta$ .
- β. Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου  $E$ , ώστε το τετράπλευρο  $ABE\Delta$  να είναι ρόμβος.
- γ. Αν επιπλέον είναι γωνία  $BAD = 120^\circ$  και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο  $O$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου  $EOB\Gamma$ .

**321 Θέμα 1863**

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Στην προέκταση του  $B\Gamma$  (προς το  $\Gamma$ ) θεωρούμε τμήμα  $\Gamma\Delta = B\Gamma$ . Αν  $M$ ,  $K$  και  $\Lambda$  είναι τα μέσα των πλευρών  $B\Gamma$ ,  $AB$  και  $A\Delta$  αντίστοιχα τότε:



- α.** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $BA\Delta$ .
- β.** Να αποδείξετε ότι:
  - i.** Το τετράπλευρο  $K\Lambda\Gamma M$  είναι ισοσκελές τραπέζιο με τη μεγάλη βάση διπλάσια από τη μικρή.
  - ii.** Το τρίγωνο  $KM\Lambda$  είναι ορθογώνιο.

**322 Θέμα 1884**

Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $\hat{A}B\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και  $A\Delta$  διάμεσος. Στο τμήμα  $A\Delta$  θεωρούμε τυχαίο σημείο  $K$  από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα  $KZ$  και  $KE$  κάθετα στις  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.

- α.** Να αποδείξετε ότι:
  - i.**  $\hat{A}BK = \hat{A}\Gamma K$ .
  - ii.** Το τρίγωνο  $\hat{Z}KE$  είναι ισοσκελές.
  - iii.** Το τετράπλευρο  $Z\epsilon\Gamma B$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- β.** Ένας μαθητής στο **αi.** ερώτημα έδωσε την εξής απάντηση:

«Το τμήμα  $A\Delta$  είναι διάμεσος στη βάση ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος του τριγώνου  $\hat{A}B\Gamma$  και μεσοκάθετος του  $B\Gamma$ . Οπότε και το τρίγωνο  $\hat{B}K\Gamma$  είναι ισοσκελές.

Τα τρίγωνα  $\hat{A}BK$ ,  $\hat{A}\Gamma K$  έχουν

- $BK = K\Gamma$
- $\hat{B}AK = \hat{\Gamma}AK$  επειδή  $AK$  διχοτόμος της  $\hat{A}$
- $\hat{A}BK = \hat{A}\Gamma K$  ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.

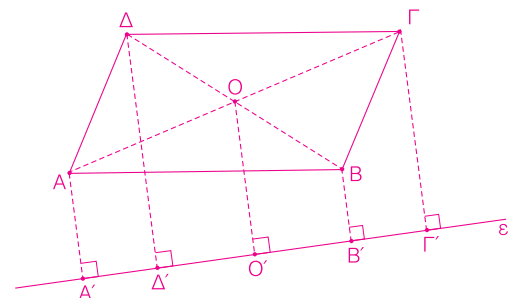
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου Γωνία Πλευρά Γωνία.»

Ο καθηγητής είπε ότι η απάντηση του είναι ελλιπής. Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γωνία – Πλευρά – Γωνία διατηρώντας τις πλευρές  $BK$  και  $K\Gamma$ .

**323 Θέμα 1718**

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και τις προβολές  $A'$ ,  $B'$ ,  $\Gamma'$ ,  $\Delta'$  των κορυφών του  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ ,  $\Delta$  αντίστοιχα, σε μια ευθεία  $\epsilon$ .

- α.** Αν η ευθεία  $\epsilon$  αφήνει τις κορυφές του παραλληλογράμμου στο ίδιο ημιεπίπεδο και είναι  $AA' = 3$ ,  $BB' = 2$ ,  $\Gamma\Gamma' = 5$ , τότε:
  - i.** Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του παραλληλογράμμου από την  $\epsilon$  είναι ίση με 4.
  - ii.** Να βρείτε την απόσταση  $\Delta\Delta'$ .
- β.** Αν η ευθεία  $\epsilon$  διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου και είναι παράλληλη προς δύο απέναντι πλευρές του, τι παρατηρείτε για τις αποστάσεις  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $\Gamma\Gamma'$ ,  $\Delta\Delta'$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



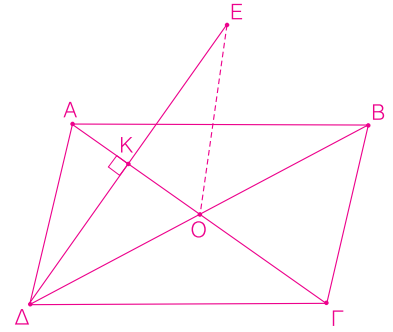
**324 Θέμα 1770**

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $O$  το κέντρο του. Από την κορυφή  $\Delta$  φέρουμε το τμήμα  $\Delta K$  κάθετο στην  $A\Gamma$  και στην προέκτασή του προς το  $K$  θεωρούμε σημείο  $E$ , ώστε  $KE = \Delta K$ . Να αποδείξετε ότι:

**α.**  $EO = \frac{B\Delta}{2}$

**β.** Η γωνία  $\hat{\Delta EB}$  είναι ορθή.

**γ.** Το τετράπλευρο  $AEB\Gamma$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.



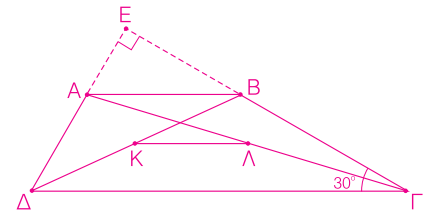
**325 Θέμα 1736**

Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με τη γωνία  $\Gamma$  ίση με  $30^\circ$  και έστω  $K, \Lambda$  τα μέσα των διαγωνίων του. Οι μη παράλληλες πλευρές του  $\Delta A$  και  $\Gamma B$  προεκτείνόμενες τέμνονται κάθετα στο σημείο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:

**α.**  $AB = 2AE$

**β.**  $K\Lambda = A\Delta$

**γ.** Σε ποια περίπτωση το  $AB\Lambda K$  είναι παραλληλόγραμμο;  
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



**326 Θέμα 1876**

Δίνονται δυο ίσα ισοσκελή τρίγωνα  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και  $AB\Delta$  ( $BA = B\Delta$ ), τέτοια ώστε οι πλευρές τους  $A\Gamma$  και  $B\Delta$  να τέμνονται κάθετα στο σημείο  $E$ , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

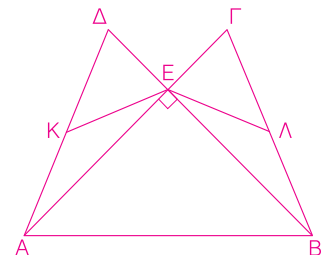
Τα σημεία  $K$  και  $\Lambda$  είναι τα μέσα των τμημάτων  $A\Delta$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

**α.**  $E\Delta = E\Gamma$

**β.**  $\Delta\Gamma \parallel AB$

**γ.** Το τρίγωνο  $EK\Lambda$  είναι ισοσκελές και  $K\Lambda \parallel AB$ .



**327 Θέμα 1856**

Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB > B\Gamma$  και  $B < 90^\circ$  θεωρούμε σημείο  $Z$  στην προέκταση της  $B\Gamma$  (προς το  $\Gamma$ ) τέτοιο ώστε  $\Gamma Z = B\Gamma$ . Αν  $E$  είναι σημείο της  $AB$ , τέτοιο ώστε  $E\Gamma = \Gamma B$ , να αποδείξετε ότι:

**α.** Η γωνία  $BEZ$  είναι ορθή.

**β.** Το τετράπλευρο  $AE\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**γ.** Το τετράπλευρο  $A\Gamma Z\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.

**328 Θέμα 1786**

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB = 2B\Gamma$  και τη γωνία  $B$  αμβλεία. Από την κορυφή  $A$  φέρουμε την  $AE$  κάθετη στην ευθεία  $B\Gamma$  και έστω  $M, N$  τα μέσα των  $AB, \Delta\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

**α.** Το τετράπλευρο  $MB\Gamma N$  είναι ρόμβος.

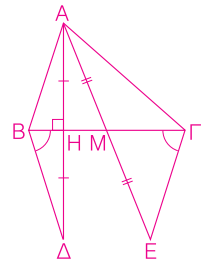
**β.** Το τετράπλευρο  $ME\Gamma N$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**γ.** Η  $EN$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{ME\Gamma}$ .

**329 Θέμα 1732**

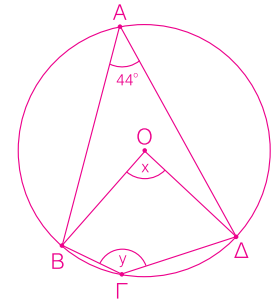
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Προεκτείνουμε το ύψος του  $AH$  κατά τμήμα  $HD = AH$  και τη διάμεσό του  $AM$  κατά τμήμα  $ME = AM$ . Να αποδείξετε ότι:

- $AB = BD = GE$
- $\hat{\Gamma B\Delta} = \hat{B\Gamma E}$
- Το τετράπλευρο  $B\Gamma E\Delta$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

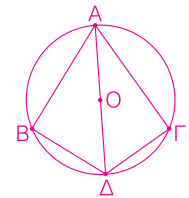
**25. Εγγεγραμμένη γωνία****Θέμα 2****330 Θέμα 1581**

Σε κύκλο κέντρου  $O$  δίνονται οι χορδές  $AB$  και  $AD$  τέτοιες ώστε η γωνία  $\hat{B\Delta\Delta}$  να είναι  $44^\circ$ . Θεωρούμε τυχαίο σημείο  $\Gamma$  του κύκλου και σχηματίζουμε το τετράπλευρο  $B\Gamma\Delta O$ .

- Να υπολογίσετε τη γωνία  $x$ .
- Να αποδείξετε ότι η γωνία  $y$  είναι  $136^\circ$ .

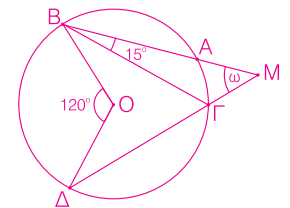
**331 Θέμα 1663**

Έστω κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$ . Αν η διάμετρος  $AD$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B\Delta\Gamma}$ , να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma\Delta$  είναι ίσα.

**332 Θέμα 1580**

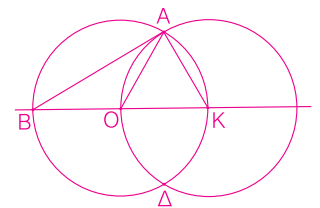
Στο διπλανό σχήμα η επίκεντρη γωνία  $\hat{B\Delta O}$  είναι  $120^\circ$  και η γωνία  $\hat{\Gamma B\Delta}$  είναι  $15^\circ$ .

- Να υπολογίσετε τη γωνία  $B\Gamma\Delta$ .
- Να αποδείξετε ότι η γωνία  $\omega$  είναι  $45^\circ$ .

**333 Θέμα 1673**

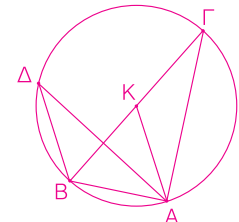
Δίνονται δυο ίσοι κύκλοι  $(O, \rho)$  και  $(K, \rho)$  με  $OK = \rho$ , οι οποίοι τέμνονται στα σημεία  $A$  και  $\Delta$ .

- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $OAK$  είναι ισόπλευρο.
- Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $BAK$ .

**334 Θέμα 1696**

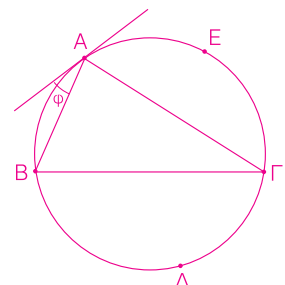
Έστω κύκλος κέντρου  $K$ , μια διάμετρος του  $B\Gamma$  και σημείο  $A$  του κύκλου τέτοιο ώστε  $BA = K\Gamma$ . Αν  $\Delta$  τυχαίο σημείο του κύκλου διαφορετικό των  $B$  και  $\Gamma$ ,

- να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $BKA$  είναι ισόπλευρο
- να υπολογίσετε την γωνία  $\hat{B\Delta A}$
- να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

**335 Θέμα 1561**

Στο διπλανό σχήμα, η εφαπτομένη του κύκλου στην κορυφή  $A$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  σχηματίζει γωνία  $\phi = 30^\circ$  με την πλευρά  $AB$ . Αν το μέτρο του τόξου  $\widehat{B\Delta\Gamma}$  είναι  $160^\circ$ ,

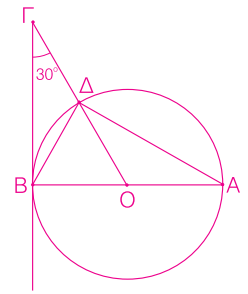
- να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$
- να βρείτε το μέτρο του τόξου  $\widehat{A\Gamma E}$ .



**336 Θέμα 1665**

Θεωρούμε κύκλο  $(O, \rho)$  και διάμετρό του  $AB$ . Στην εφαπτομένη του κύκλου στο  $B$  θεωρούμε σημείο  $\Gamma$  τέτοιο ώστε, η γωνία  $BGO$  να είναι ίση με  $30^\circ$ . Αν η  $OG$  τέμνει τον κύκλο στο  $\Delta$  να αποδείξετε ότι:

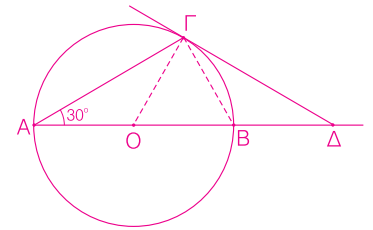
- α.  $OG = 2OA$
- β.  $B\Gamma = A\Delta$



**337 Θέμα 1626**

Δίνεται κύκλος  $(O, R)$  διαμέτρου  $AB$ , και χορδή  $AG$  τέτοια ώστε  $\hat{BAG} = 30^\circ$ . Στο σημείο  $\Gamma$  φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου  $AB$  (προς το  $B$ ) στο σημείο  $\Delta$ .

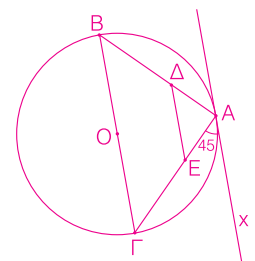
- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $O\Gamma\Delta$ .
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $B\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές.



**338 Θέμα 1672**

Σε σημείο  $A$  ενός κύκλου, φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου  $Ax$  και τη χορδή  $AG$  που σχηματίζει με την εφαπτομένη γωνία  $45^\circ$ . Φέρουμε τη διάμετρο  $GB$  και μία παράλληλη ευθεία στη  $B\Gamma$  που τέμνει την  $AB$  στο  $\Delta$  και την  $AG$  στο  $E$ .

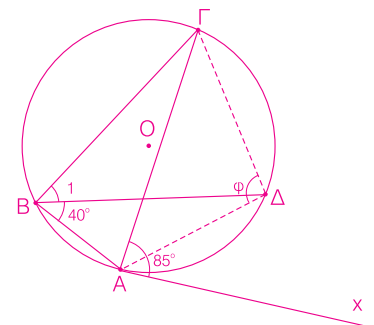
- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $BA\Gamma$ .
- β. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $B\Gamma E\Delta$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.



**339 Θέμα 1530**

Στο διπλανό σχήμα, η  $Ax$  είναι εφαπτομένη του κύκλου  $(O, \rho)$  σε σημείο του  $A$  και επιπλέον ισχύουν  $\hat{\Gamma Ax} = 85^\circ$  και  $\hat{\Delta BA} = 40^\circ$ .

- α. Να αποδείξετε ότι  $\hat{B_1} = 45^\circ$ .
- β. Να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{\phi}$ .

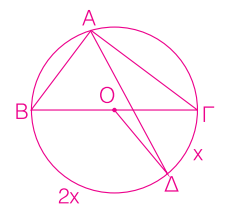


**340 Θέμα 1703**

Έστω κύκλος κέντρου  $O$  και διαμέτρου  $B\Gamma$ . Θεωρούμε τα σημεία  $A$  και  $\Delta$  του κύκλου εκατέρωθεν της  $B\Gamma$ , τέτοια ώστε το τόξο  $B\Delta$  να είναι διπλάσιο του τόξου  $\Delta\Gamma$ .

Να υπολογίσετε:

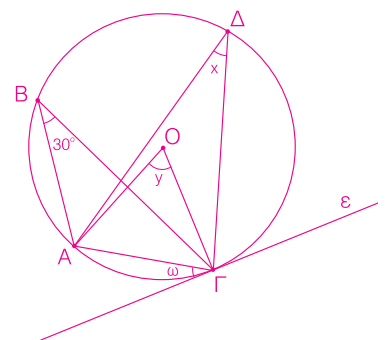
- α. το μέτρο  $x$  του τόξου  $\Gamma\Delta$ ,
- β. τη γωνία  $BO\Delta$ ,
- γ. τη γωνία  $BA\Delta$ .



**341 Θέμα 1695**

Στο διπλανό σχήμα η ευθεία  $\epsilon$  εφάπτεται του κύκλου  $(O, \rho)$  στο σημείο  $\Gamma$ .

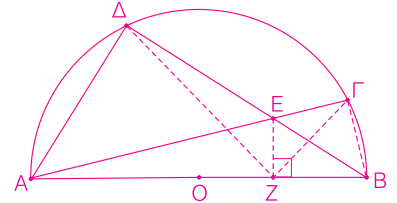
- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες  $x$ ,  $y$  και  $\omega$  δικαιολογώντας σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.
- β. Να βρείτε το είδος του τριγώνου  $OAG$  ως προς τις πλευρές.



**342 Θέμα 1769**

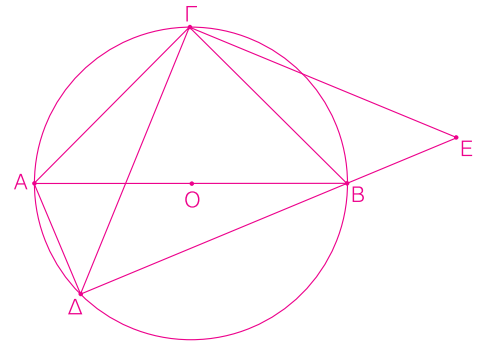
Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου  $AB$  και δύο χορδές του  $AG$  και  $BD$ , οι οποίες τέμνονται στο σημείο  $E$ . Φέρουμε  $EZ \perp AB$ . Να αποδείξετε ότι:

- α. Οι γωνίες  $\hat{\Delta AG}$  και  $\hat{\Delta BG}$  είναι ίσες.
- β. Τα τετράπλευρα  $ADEZ$  και  $EZBG$  είναι εγγράψιμα.
- γ. Η  $EZ$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{\Delta ZG}$ .

**343 Θέμα 1712**

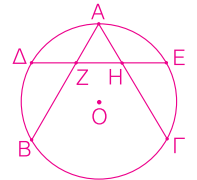
Δίνεται κύκλος με κέντρο  $O$ , και έστω  $AB$  μια διάμετρος του,  $\Gamma$  το μέσο του ενός ημικυκλίου του και  $\Delta$  τυχαίο σημείο του άλλου. Στην προέκταση της  $\Delta B$  (προς το  $B$ ) θεωρούμε σημείο  $E$  ώστε  $BE = AD$ .

- α. Να αποδείξετε ότι:
  - i. Τα τρίγωνα  $A\Delta\Gamma$  και  $BE\Gamma$  είναι ίσα.
  - ii. Η  $\Gamma\Delta$  είναι κάθετη στην  $\Gamma E$ .
- β. Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο  $\Delta$  είναι το αντιδιαμετρικό του  $\Gamma$ , η  $\Gamma E$  είναι εφαπτομένη του κύκλου.

**Θέμα 4****344 Θέμα 1739**

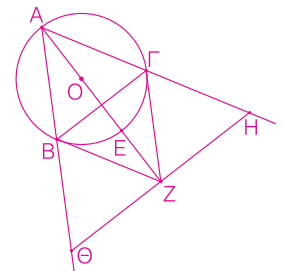
Σε κύκλο κέντρου  $O$  θεωρούμε τα ίσα τόξα  $AB$  και  $AG$ , το καθένα ίσο με  $120^\circ$ . Έστω  $\Delta$  και  $E$  τα μέσα των τόξων  $AB$  και  $AG$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισόπλευρο.
- β. Τα τρίγωνα  $AZ\Delta$  και  $AHE$  είναι ίσα και να υπολογίσετε τις γωνίες τους.
- γ. Η χορδή  $\Delta E$  τριχοτομείται από τις χορδές  $AB$  και  $AG$ .

**345 Θέμα 1720**

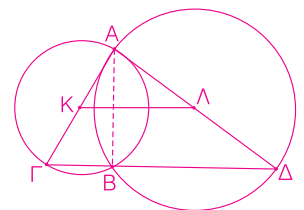
Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$ . Τα τμήματα  $\Gamma Z$  και  $BZ$  είναι τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου στα σημεία  $\Gamma$  και  $B$  αντίστοιχα. Αν το τμήμα  $\Theta H$  είναι κάθετο στο τμήμα  $AZ$  στο  $Z$ , να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο  $ZB\Gamma$  είναι ισόπλευρο.
- β. Το τετράπλευρο  $AGZB$  είναι ρόμβος.
- γ. Το τετράπλευρο  $B\Gamma H\Theta$  είναι τραπέζιο, με  $B\Theta = BZ$  και  $\Theta H = 2B\Gamma$ .

**346 Θέμα 1717**

Δύο κύκλοι  $(K, \rho)$ ,  $(\Lambda, R)$  τέμνονται σε δύο σημεία  $A$ ,  $B$ . Αν  $\Gamma$  και  $\Delta$  είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του  $A$  στους δύο κύκλους, τότε να αποδείξετε ότι:

- α.  $\hat{AB\Gamma} = 90^\circ$
- β. τα σημεία  $\Gamma$ ,  $B$ ,  $\Delta$  είναι συνευθειακά.
- γ. το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία  $K$ ,  $\Lambda$ ,  $\Gamma$ ,  $\Delta$  είναι τραπέζιο.

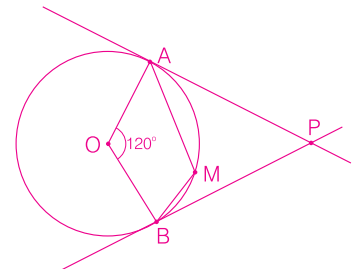




**352 Θέμα 1768**

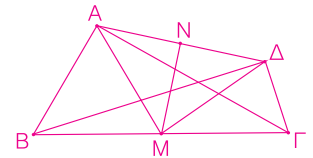
Δίνεται κύκλος  $(O, R)$  και μια επίκεντρη γωνία του  $\widehat{AOB}$  ίση με  $120^\circ$ . Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία  $A$  και  $B$  τέμνονται στο σημείο  $P$ . Θεωρούμε σημείο  $M$  του τόξου  $AB$  και φέρουμε τις χορδές  $AM$  και  $BM$ . Να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο  $APB$  είναι ισόπλευρο.
- $\widehat{MAB} + \widehat{MBA} = 60^\circ$
- Για ποια θέση του  $M$  είναι  $AM \perp BP$ ;

**26. Εγγεγραμμένα και Εγγράψιμα τετράπλευρα****Θέμα 4****353 Θέμα 1807**

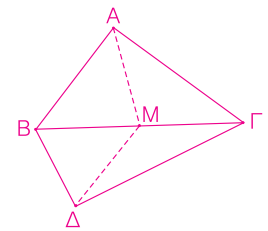
Δίνονται ορθογώνια τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta B\Gamma$  με  $\widehat{A} = 90^\circ$ ,  $\widehat{\Delta} = 90^\circ$  και  $M, N$  τα μέσα των  $B\Gamma$  και  $A\Delta$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- $AM = M\Delta$
- Η  $MN$  είναι κάθετη στην  $A\Delta$ .
- $\widehat{GB\Delta} = \widehat{GA\Delta}$

**354 Θέμα 1886**

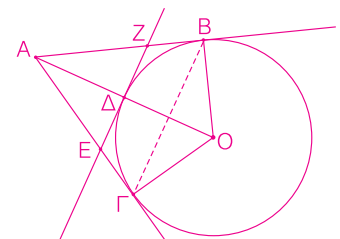
Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα  $AB\Gamma$  ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ) και  $\Delta B\Gamma$  ( $\widehat{\Delta} = 90^\circ$ ) (όπου  $A$  και  $\Delta$  εκατέρωθεν της  $B\Gamma$ ) και το μέσο  $M$  της  $B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

- το τρίγωνο  $AM\Delta$  είναι ισοσκελές
- $\widehat{AM\Delta} = 2 \cdot \widehat{A\Gamma\Delta}$
- $\widehat{GB\Delta} = \widehat{GA\Delta}$

**355 Θέμα 1847**

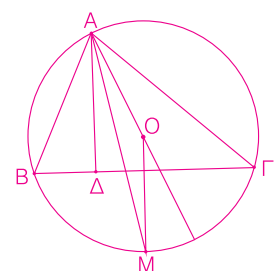
Δίνεται κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$ . Έστω σημείο  $A$  εξωτερικό του κύκλου και τα εφαπτόμενα τμήματα  $AB$  και  $A\Gamma$  ώστε να ισχύει  $\widehat{BAG} = 60^\circ$ . Το  $OA$  τέμνει τον κύκλο στο σημείο  $\Delta$ . Η εφαπτομένη του κύκλου στο  $\Delta$ , τέμνει τις  $AB$  και  $A\Gamma$  στα  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο  $ABO\Gamma$  είναι εγγράψιμο με  $OA = 2OB$ .
- Το τρίγωνο  $AEZ$  είναι ισόπλευρο.
- $2ZB = AZ$
- Το τετράπλευρο  $EZB\Gamma$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**356 Θέμα 1892**

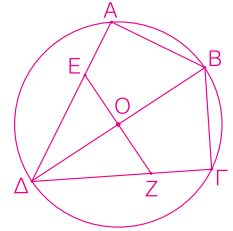
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ , εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο  $O$ . Θεωρούμε το μέσο  $M$  του κυρτογώνιου τόξου  $B\Gamma$  και το ύψος  $A\Delta$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

- $AM$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\Delta AO$ .
- $\widehat{OAG} = \widehat{\Delta AB}$
- $\widehat{\Delta AO} = \widehat{B} - \widehat{\Gamma}$



**357 Θέμα 1864**

Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  και ο περιγεγραμμένος του κύκλος  $(O, \rho)$  ώστε η διαγώνιος του  $\Delta B$  να είναι διάμετρος του κύκλου. Η γωνία  $B$  είναι διπλάσια της γωνίας  $\Delta$  και οι πλευρές  $AB$  και  $B\Gamma$  είναι ίσες. Φέρουμε κάθετη στη  $B\Delta$  στο  $O$ , η οποία τέμνει τις πλευρές  $A\Delta$  και  $\Gamma\Delta$  στα  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα.

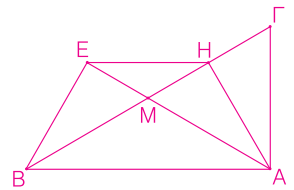


- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$ .
- β. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα  $\Delta AB$  και  $\Delta \Gamma B$ .
- γ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AB\Gamma O$  είναι ρόμβος.
- δ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $ABOE$  είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

**358 Θέμα 1896**

Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) έχουμε ότι  $\hat{B} = 30^\circ$ . Φέρουμε το ύψος  $AH$  και τη διάμεσο  $AM$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Από την κορυφή  $B$  φέρνουμε κάθετη στη διάμεσο  $AM$ , η οποία την τέμνει στο σημείο  $E$  όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

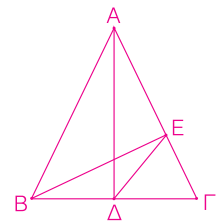


- α.  $BE = \frac{AB}{2}$
- β.  $AH = BE$
- γ. το τετράπλευρο  $AHEB$  είναι εγγράψιμο
- δ.  $EH \parallel AB$

**359 Θέμα 1799**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $A\Delta$ ,  $BE$  τα ύψη του. Να αποδείξετε ότι:

- α.  $B\Gamma = 2E\Delta$
- β.  $\hat{BE\Delta} = \frac{\hat{A}}{2}$
- γ. Το τετράπλευρο  $AE\Delta B$  είναι εγγράψιμο.
- δ.  $\hat{ABE} = \hat{A\Delta E}$



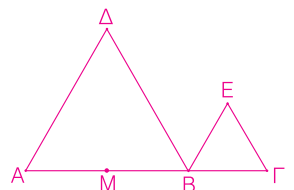
**360 Θέμα 1774**

Έστω  $A, B, \Gamma$  συνευθειακά σημεία με  $AB = 2B\Gamma$ . Θεωρούμε το μέσο  $M$  της  $AB$ .

Προς το ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα  $A\Delta B, BE\Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι:

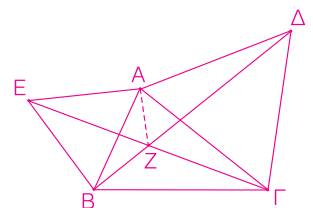
- α. Το τετράπλευρο  $A\Delta EB$  είναι τραπέζιο ( $A\Delta \parallel BE$ ).
- β. Τα τρίγωνα  $\Delta MB, \Delta EB$  είναι ίσα.
- γ. Το τετράπλευρο  $\Delta MBE$  είναι εγγράψιμο.



**361 Θέμα 1776**

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα ισόπλευρα τρίγωνα  $AEB, A\Gamma\Delta$ . Ονομάζουμε  $Z$  το σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων  $B\Delta, \Gamma E$ . Να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα  $A\Gamma Z$  και  $AB\Delta$  είναι ίσα και να γράψετε τα ζεύγη των ίσων γωνιών.
- β. Τα τετράπλευρα  $AZ\Gamma\Delta, AZBE$  είναι εγγράψιμα.
- γ. Η γωνία  $\hat{BZ\Gamma}$  είναι  $120^\circ$ .



**362 Θέμα 1779**

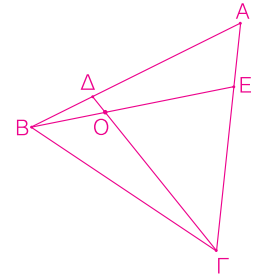
Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα, ώστε να είναι  $A\Delta = \Gamma E$ . Έστω  $O$  το σημείο τομής των  $\Gamma\Delta$  και  $BE$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι:

**i.**  $\widehat{B\epsilon\Gamma} = \widehat{\Gamma\Delta A}$

**ii.**  $\widehat{B\omicron\Gamma} = 120^\circ$

**β.** Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο  $AEO\Delta$  είναι εγγράψιμο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**363 Θέμα 1753**

Δίνεται κύκλος  $(O, \rho)$  και σημείο  $M$  εξωτερικό του.

Από το  $M$  φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα  $MA$  και  $MB$  του κύκλου και έστω ότι το σημείο  $\Gamma$  είναι το συμμετρικό του  $O$  ως προς την ευθεία  $MB$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AMBO$  είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

**β.** Να προσδιορίσετε το κέντρο  $\Lambda$  του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου  $AMBO$  και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**γ.** Να αποδείξετε ότι  $B\Lambda \parallel M\Gamma$ .

