

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ (ΝΕΑ ΎΛΗ)**

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 22/05/2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι:

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει ότι:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Μονάδες 5

A2. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 3

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και g είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες \widehat{xoy} και $\widehat{x'oy'}$.

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 6 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

β. Κάθε συνάρτηση f που είναι «1-1» στο διάστημα Δ είναι και γνησίως μονότονη στο Δ .

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

δ. Για οποιαδήποτε παραγωγίσιμη συνάρτηση f που είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ , η παράγωγος της f είναι υποχρεωτικά θετική.

ε. Ισχύει: $(x^{-\nu})' = -\nu x^{-(\nu+1)}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$

Μονάδες 10

A4. α. Να χαρακτηρίσετε την επόμενη πρόταση ως Αληθή ή Ψευδή:

«Υπάρχει συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής σ' ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$, με $f'(x) = 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του A , η οποία δεν είναι σταθερή συνάρτηση στο σύνολο A ».

Μονάδες 3

β. Αν η πρόταση στο ερώτημα (α) είναι αληθής να δώσετε ένα παράδειγμα, ενώ αν είναι ψευδής να το αποδείξετε.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = 4\sqrt{e^x - 2} + 3 \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{x^2} + 2$$

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 4

B2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f καθώς και το πλήθος των ριζών της.

Μονάδες 6

B3. Να ορίσετε την αντίστροφη της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

B4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι αντιστρέψιμη.

Μονάδες 4

B5. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με g παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ και για τις οποίες ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$f(x) = x(x + \alpha) - x + 1 \quad \text{με } \alpha, x \in \mathbb{R},$$

$$f(x) - 1 \geq 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$g'(x) \ln x = \frac{2g(x)}{x} \quad \text{για κάθε } x > 1$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

Μονάδες 3

Γ2. Αν $g(e) = -1$, να αποδείξετε ότι:

$$g(x) = -\ln^2 x \quad \text{για κάθε } x \in (1, +\infty)$$

Μονάδες 5

Γ3. Αν $g(x) = -(\ln x)^2$ σε όλο το διάστημα $(0, +\infty)$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική τιμή $x_0 \in (0, 1)$, για την οποία η διαφορά $f(x) - g(x)$ γίνεται ελάχιστη.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ζεύγος σημείων M, N με $M(\xi, f(\xi))$ σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f και

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

$N(\xi, g(\xi))$ σημείο της γραφικής παράστασης C_g της g με $\xi \in (0, +\infty)$ στα οποία οι C_f και C_g δέχονται παράλληλες εφαπτομένες στα σημεία M και N αντίστοιχα.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{(x-1)^x}{\eta\mu(x-1) + \frac{g(x)}{f(x)}} \right]$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $(1, +\infty)$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 1$, που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1+x \ln x}{x \ln x}, \text{ για κάθε } x > 1 \text{ με } f(e) = e^e$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = e^x \cdot \ln x, \quad x > 1$$

καθώς και ότι οι συναρτήσεις:

$$g(x) = e^x, \quad h(x) = \ln x$$

δεν έχουν κοινό σημείο στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Μονάδες 4

Δ2. α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία της και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

β. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$f(x) = \frac{\lambda}{x} \quad \text{με } \lambda \in \mathbb{R}, \quad x > 1$$

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(e, f(e))$.

Μονάδες 4

Δ4. Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

για κάθε $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$

Μονάδες 5

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Ο Δ Η Γ Ι Ε Σ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμο σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν . **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 1 ώρα μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Επιστημονική επιμέλεια: Καραγιάννης Ιωάννης

Συντονιστής Εκπαιδευτικό Έργου Μαθηματικών

2^ο ΠΕΚΕΣ Ν. ΑΙΓΑΙΟΥ