ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 –ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1 (ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία. **Α2. α)** Θεωρία. **β)** Θεωρία.

Α3. α) Σωστό **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό **ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Εφαρμογή ορισμού μονοτονίας.

Β2. Εφαρμογή ορισμού γνησίως αύξουσας.

Β3. Χρησιμοποιήστε το «1-1» για τις f, g .

Β4. Χρησιμοποιήστε ότι η (fog) είναι γνησίως αύξουσα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $(0, +\infty)$

Γ2. Η f έχει ρίζα το 0.

Γ3. Εφαρμογή ορισμού μονοτονίας.

Γ4. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1». Θέτω $y = f(x) \Leftrightarrow ...x = f^{-1}(y)$.

Γ5. Θεωρήστε την διαφορά ως νέα συνάρτηση και βρείτε το σύνολο τιμών της

Γ6. $\dfrac{f(1)}{f(2)}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Εφαρμογή ορισμού «1-1».

Δ2. Θέτω $y = f(x) \Leftrightarrow ...x = f^{-1}(y)$

Δ3. Να βρείτε $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0) = 0$.

Δ4. Εφαρμογή ορισμού γνησίως αύξουσας.

Δ5. Εφαρμογή ορισμού συνέχειας $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 –ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2 (ΛΥΣΕΙΣ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία . **Α2.** Θεωρία .

Α3. α) Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος **ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η $g(x) = f(x) + ημx$, x $\in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως άθροισμα συνεχών στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεων) και επιπλέον $g(x) \neq 0$ διότι αν υπάρχει $g(x) \neq 0$ ώστε :

$$g(x_0)=0 \Rightarrow f(x_0)+\eta\mu x_0=0 \Rightarrow f(x_0)=-\eta\mu x_0$$

$$f^2(x_0)+2f(x_0)\eta\mu x_0=x_0^{\ 2}+\sigma\upsilon\nu x_0 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x_0-2\eta\mu^2 x_0+\eta\mu^2 x_0=x_0^{\ 2}+1$$

$$\Leftrightarrow x_0^{\ 2}=-1$$

Που είναι άτοπο. Άρα g συνεχής και χωρίς ρίζες στο $\mathbb{R}$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Β2. Από τηνδεδομένη σχέση για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε διαδοχικάκαι ισοδύναμα:

$$f^2(x)+2f(x)\eta\mu x=x^2+\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f^2(x)+2f(x)\eta\mu x+\eta\mu^2 x=x^2+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x)+\eta\mu x\right)^2=x^2+1 \Leftrightarrow g^2(x)=x^2+1$$

Και επειδή η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ με $g(0)=f(0)+0=1>0$ θα είναι $g(x)>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β3. α) Έχουμε:

$$g(x)=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)+\eta\mu x=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x,\ x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2+\sigma\upsilon\nu x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x-2+\sigma\upsilon\nu x}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}-\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right]=0-1+0=-1$$

β) Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1+\eta\mu^2 x}{\sqrt{x^2+1}+\eta\mu x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{\eta\mu x}{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{\eta\mu x}{x}\right)}=+\infty$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. α) Για να είναι η f συνεχής στο πεδίο ορισμού της πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_0=e$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to e^-} f(x)=3,\quad \lim_{x\to e^+} f(x)=ae,\quad f(e)=3$$

Άρα $\lim\limits_{x\to e^-} f(x) = \lim\limits_{x\to e^+} f(x) = f(e) \Leftrightarrow \alpha e = 3 \Leftrightarrow a = \dfrac{3}{e}$

β) Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για την $g(x) = f(x) - 6$ στο διάστημα $[1, 2e]$. Έχουμε:

- Η g είναι συνεχής στο $[1, 2e]$
- $g(1) = f(1) - 6 = -4 < 0$
  $g(2e) = f(2e) - 6 = \ln(e+1) > 0$

Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 6$

Γ2. α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow e^{f(x_1)} = e^{f(x_2)} \Leftrightarrow f(e^{f(x_1)}) = f(e^{f(x_2)}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\ln x_1 + 3 = 4\ln x_2 + 3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

β) Έχουμε λαμβάνοντας υπόψη μας ότι η f είναι «1-1»:

$$f\left(f(e^{f(x_1)})\right) = \ln(\ln x^4 + 3)^2 + 1 \Leftrightarrow f(4\ln x + 3) = \ln(4\ln x + 3)^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(4\ln x + 3) = 2\ln(4\ln x + 3) + 1,\ x > e^{-\frac{3}{4}}$$

Άρα αν θέσουμε:

$u = 4\ln x + 3$ έχουμε $f(u) = 2\ln u + 1,\ u > 0$ ή $f(x) = 2\ln x + 1,\ x > 0$

γ) Έχουμε λαμβάνοντας υπόψη μας ότι η f είναι «1-1»:

$$(fof)(x) = f(e^{x-2014}) \Leftrightarrow f(f(x)) = f(e^{x-2014}) \Leftrightarrow f(x) = e^{x-2014}$$

Θέτουμε $g(x) = f(x) = e^{x-2014},\ x \in \left[\dfrac{1}{e}, 1\right]$ και εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano.

- Η g είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{e}, 1\right]$ (ως άθροισμα και σύνθεση συνεχών)
- $g(1) = f(1) - e^{-2013} = 1 - \dfrac{1}{e^{2013}} = \dfrac{e^{2013} - 1}{e^{2013}} > 0$
  $g\left(\dfrac{1}{e}\right) = f\left(\dfrac{1}{e}\right) - e^{\frac{1}{e} - 2014} = -1 - e^{\frac{1}{e} - 2014} < 0$

Άρα υπάρχει ένα ,τουλάχιστον, $x_0 \in \left(\frac{1}{e},1\right)$: $f(x_0)=e^{x_0-2014}$ ή

$(fof)(x_0)=f(e^{x_0-2014})$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για $x>0$ είναι: $f(x)>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>-x$, που είναι προφανής

Για $x<0$ είναι: $f(x)>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>-x \Leftrightarrow x^2+1>x^2 \Leftrightarrow 1>0$

Για $x=0$ είναι: $f(0)=1>0$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)>0$

Δ2. Η είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}>0, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Έχουμε για κάθε $x\in\mathbb{R}$:

$$f(-x)=\sqrt{x^2+1}-x=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{f(x)}$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ (απ'ο το Δ2).

Δ4. Έχουμε, λαμβάνοντας υπόψη ότι η f είναι «1-1» στο $\mathbb{R}$ ως γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\left(\beta+\sqrt{\beta^2+1}\right)=1 \Leftrightarrow f(a)f(\beta)=1 \Leftrightarrow f(a)=\frac{1}{f(\beta)} \Leftrightarrow f(a)=f(-\beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha=-\beta \Leftrightarrow \alpha+\beta=0$$

Δ5. Η f έχει αντίστροφη αφού είναι»1-1». Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θέτουμε $f(x)=y$ και έχουμε:

Άρα:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2+1} = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = y - x \Leftrightarrow x^2 + 1 = y^2 - 2xy + x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2xy = 1 \Leftrightarrow x = \frac{y^2-1}{2y},\ y > 0$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2-1}{2x}, x > 0$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 –ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 3 (ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία **.** **Α2.** Θεωρία.

Α3. α) Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow$ **…** $f(x_1) < f(x_2)$

Β2. $x \in (0,1)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i) Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1». **ii)** Στην δεδομένη σχέση θέτω $x = 3$

Γ2. $x = 1,\ x = -2$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτω $x = y = 0$

Δ2. Για $x = y$ **....**Είναι $f(x) = 0$ **.**

Δ3. α) Αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ καταλήγω σε άτοπο.

β) $f(x) = 1,\ x \in \mathbb{R}$