ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα. $[\alpha, \beta]$. Αν:

♦ η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ♦ $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 10

Α2. α) Διατυπώστε το Θεώρημα του Bolzano για μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, $\alpha > \beta$.

Μονάδες 3

β) Πότε μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 2

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος*** *αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Η εικόνα ενός διαστήματος μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

β. Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες.

γ. Μία συνάρτηση f είναι «1-1», αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

δ. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$.

ε. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{f(x)}{f^2(x)+1}.$$

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f.

Μονάδες 5

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση fog είναι γνησίως αύξουσα και «1-1».

Μονάδες 5

Β3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f\left(g\left(x^3+1\right)\right) = f\left(g\left(4x^2+2x\right)\right)$$

έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες και μια αρνητική ρίζα.

Μονάδες 10

Β4. Να λύσετε την ανίσωση:

$$(fog)\left(x^3+4\right) > (fog)\left(3x^2\right).$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln\left(e^x-1\right) - x.$$

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 3

Γ2. Να βρείτε το πρόσημο της f.

Μονάδες 4

Γ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 5

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και βρείτε την $f^{-1}(x)$.

Μονάδες 4

Γ5. Αν είναι $h(x)=\ln\frac{1}{x}$, να αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0>0$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0)=h(x_0).$$

Μονάδες 5

Γ6. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(1)x^2+x+2}{f(2)x^2-x+1}$$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$f^3(x)+2f(x)=x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1».

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της f.

Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης με το άξονα $x'x$.

Μονάδες 3

Δ4. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 4

Δ5. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to-1}f(x)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=-1$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για κάθε πολυώνυμο:

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

ισχύει: $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$ με $x_0 \in \mathbb{R}$.

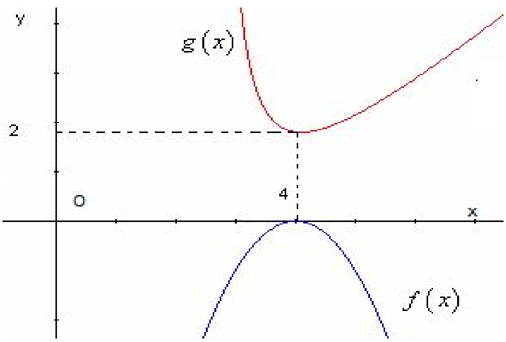
Μονάδες 10

Α2. Πότε μία συνάρτηση λέγεται συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της ;

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή,ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Δίνεται το παρακάτω σχήμα, τότε $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.



β. Αν η f δεν είναι αντιστρέψιμη, δεν είναι γνησίως μονότονη.

γ. Η f είναι «1-1» αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $y = f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

δ. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο σύνολο $A=[1,4]$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,\ 4]$ και $f(3)=-2$. Τότε ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in[1,\ 4]$.

ε. Δίνεται η συνεχής και αντιστρέψιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^{-1}(-2015)=4$, $f^{-1}(1949)=-1$, τότε δεν υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x)+2f(x)\eta\mu x=x^2+\sigma\upsilon\nu^2 x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } f(0)=1 .$$

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x)=f(x)+\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R},$$

διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Μονάδες 10

Β2. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x .$$

Μονάδες 5

Β3. Να βρείτε τα όρια: **α)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2+\sigma\upsilon\nu x}{x}$ και **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}2+\ln^2 x, & 0<x\le e\\ \alpha x+\ln(x-e+1), & e<x\end{cases}$$

α. Να βρείτε τον αριθμό $\alpha\in\mathbb{R}$ έτσι, ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

β. Αν $\alpha = \frac{3}{e}$, τότε η εξίσωση $f(x) = 6$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1, 2e)$.

Μονάδες 5

Γ2. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

$$f\left(e^{f(x)}\right) = 4\ln x + 3 \text{ , για κάθε } x > 0 \text{ και}$$

$$(f\circ f)\left(e^{f(x)}\right) = \ln\left(\ln x^4 + 3\right)^2 + 1, \text{ για κάθε } x > e^{-\frac{3}{4}}.$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».

Μονάδες 5

β. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Μονάδες 3

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$(f\circ f)(x) = f\left(e^{x-2014}\right)$$

έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x, \; x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης f στο R.

Μονάδες 3

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ (Μονάδες 2) και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Δ4. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει:

$$\left(\sqrt{\alpha^2+1}+\alpha\right)\left(\sqrt{\beta^2+1}+\beta\right)=1,$$

να αποδείξετε ότι $\alpha+\beta=0$.

Μονάδες 5

Δ5. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε μία συνάρτηση $f{:}A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση «1-1» ;

Μονάδες 8

Α2. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ;

Μονάδες 7

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Μια συνάρτηση f που είναι «1-1» σε ένα διάστημα Δ είναι πάντα γνησίως μονότονη στο Δ.

β. Αν f^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της $f{:}A \to \mathbb{R}$, τότε το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών $f\left(A\right)$ της f.

γ. Αν μία συνάρτηση είναι «1-1» τότε δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

δ. Αν για μια συνάρτηση $f{:}A \to \mathbb{R}$ ισχύει $-2015 \le f(x) \le 2015$ για κάθε $x \in A$, τότε η f έχει μέγιστη τιμή το 2015 και ελάχιστη τιμή το -2015.

ε. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$ των αξόνων $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση $g{:}\left(0, +\infty\right) \to \mathbb{R}$ που είναι γνησίως φθίνουσα και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(1, -2\right)$. Αν για την συνάρτηση f ισχύει $f(x) = \ln x - g(x)$ για κάθε $x > 0$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 10

Β2. Να λύσετε την ανίσωση: $2\ln x < 2 + g(x^2)$ στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(1+f(x)) = 2x - 6 + f(x) \ (1) \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: **i.** Η f αντιστρέφεται, **ii.** $f(3) = 2$

Μονάδες 8+7

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(1+f\left(x^2+x+1\right)\right) = f(1+f(3))$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(x-y) = f(x)f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ ή $f(0) = 1$.

Μονάδες 7

Δ2. Αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων να βρείτε την συνάρτηση f.

Μονάδες 8

Δ3. Αν $f(0) \neq 0$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Μονάδες 5