ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 –ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1 (ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία. **Α2.** Θεωρία **.**

Α3. α) Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Λάθος **δ)** Σωστό **ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$\frac{f(x)-xf'(\mathrm{x})}{x^2 e^{\frac{f(x)}{x}}}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{e^{\frac{f(x)}{x}}}\right)'=(\ln x)'\Leftrightarrow \ldots f(x)=x\ln\left(\frac{1}{\ln x}\right)=-x\ln(\ln x),\, x>1$$

Β2. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[e,+\infty\right)$. Το σύνολο τιμών της f είναι: $f\left(\left[e,+\infty\right)\right)=\left(-\infty,0\right]$.

Β3. Να διακρίνετε περιπτώσεις αν $m\le 1,\ m>1$

Β4. Να μετασχηματίσετε την ανίσωση και να πάρετε την βοηθητική συνάρτηση:

$$g(x)=f(x)+x,\ x>0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\alpha=-1, \beta=0$

Γ2. α) Δεν είναι παραγωίσιμη και το ζητούμενο όριο είναι $+\infty$ **.**

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ρίζα της f

γ) 0

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α) 0 **β)** θέτω u=2x….

Δ2. $f(x)=2-\sqrt{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$

Δ3. α) Έστω $M(x_1, f(x_1))$ το σημείο επαφής και $(\varepsilon)\ y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$ η εφαπτομένη στο Μ. Αφού η (ε) διέρχεται από το σημείο Β θα την επαληθεύει και έτσι θα βρείτε τις συντεταγμένες του Μ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 –ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2 (ΛΥΣΕΙΣ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία **Α2.** Θεωρία **Α3**. **α)**Λάθος **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

Β2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με :

$$f'(\mathrm{x})=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(\mathrm{x})\sqrt{x^2+1}+f(x)=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}-x=0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για την f στο διάστημα $[1,e]$. ‘Εχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $[1,e]$ (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο $[1,e]$)
- $f(1)=-1<0$
  $f(e)=3(e-1)>0$

Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον , $x_0\in(1,e)$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0)=0$

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\geq 1$ με $f'(x)=\ln x+3$.

Για $x\geq 1$ είναι $f'(x)>0$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο$[1,+\infty)$. Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f([1,+\infty))=\left[f(1),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=[-1,+\infty) \quad .$$

Γ3. Εφαρμόζουμε το Θ.Bolzano για την συνάρτηση:

$$g(x)=(e-1)f'(x)+2-3e$$

στο διάστημα $[1,e]$. ‘Εχουμε:

- Η g είναι συνεχής στο $[1,e]$ (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο $[1,e]$)
- $g(1)=-1<0$
  $g(e)=e-2>0$

Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi\in(1,e)$, τέτοιο, ώστε:

$$g(\xi)=0\Leftrightarrow(e-1)f'(\xi)+2-3e$$

Γ4. Επειδή $2012\in f([1,+\infty))=[-1,+\infty)$, υπάρχει $x_1\in[1,+\infty)$ τέτοιο, ώστε: $f(x_1)=2012$. Αφού η f είναι «1-1» (ως γνησίως μονότονη) έπεται ότι το x_1 είναι μοναδικό.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με:

$$f'(x)=3x^2+2\lambda x-3, x\in\mathbb{R}$$

Αφού η f παρουσιάζει ακρότατ στο $x_0=1$ θα είναι:

$$f'(1)=0\Leftrightarrow 3+2\lambda-3=0\Leftrightarrow\lambda=0$$

Δ2. Για $\lambda=0$ η f γίνεται $f(x)=x^3-3x-1,\ x\in\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2-3, x\in\mathbb{R}$. Είναι:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm 1.$$

Άρα:

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,-1\right]$, $\left[1,+\infty\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[-1,1\right]$ (κατασκευάστε πίνακα προσήμου της f').

Η f έχει μέγιστο στο -1 το $f(-1)=1$ και ελάχιστο στο 1 το $f(1)=-4$.

Δ3. Αν $M\left(x_0, f(x_0)\right)$ το σημείο επαφής ης εφαπτομένης με την C_f θα είναι $f'(x_0)=9$. Έχουμε:

$$f'(x_0)=0 \Leftrightarrow 3x_0^{\ 2}-3=9 \Leftrightarrow x_0=\pm 2$$

Για $x_0=2$ η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f είναι:

$$(\varepsilon_1): y-f(2)=f'(2)(x-2) \Rightarrow y=9x-17$$

Για $x_0=-2$ η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f είναι:

$$(\varepsilon_2): y-f(-2)=f'(-2)(x+2) \Rightarrow y=9x+15$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 –ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 3 (ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία. **Α2.** Θεωρία.

Α3. α) Λάθος **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος **ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[1,+\infty\right)$.

Έχει μέγιστο στο 1, το $f(1)=2$.

Β2. $\left(-\infty,2\right]$

Β3. Μοναδική λύση.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Μελετήσετε την μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης

$$h(x)=x\ln x-x+1,\ x>0$$

Γ2. Θ. Bolzano και μονοτονία της g.

Γ3. Είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ διότι (λόγω και του Γ1 ερωτήματος):

$$f'(x)=\frac{e^x(x\ln x+1)}{x}\geq\frac{xe^x}{x}=e^x>0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θ. Fermat … $\alpha=1$.

Δ2. α) $f''(x)>0, x>-1$.

β) $f'(x)>0, x\in(-1,1)$ και $f'(x)<0, x\in\left[0,+\infty\right)$