ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΕΝΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ΄ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΓΕ.Λ.

26/05/2020

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία-απόδειξη , σχολικό βιβλίο.

Α2. Θεωρία-Ορισμός , σχολικό βιβλίο.

Α3. **α)** Σωστό **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος **ε)** Σωστό

Α4. **α)** Αληθής.

β) Παράδειγμα συνάρτησης f που το ερώτημα (α) είναι αληθής πρόταση (Σχολικό βιβλίο σχ΄λιο της παραγράφου 2.6)

Για την συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

με πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

Έχουμε $f'(x)=0$ για κάθε $x\in A$ εντούτοις η f δεν είναι σταθερή συνάρτηση στο Α (αυτό οφείλεται στο ότιπήραμε ένωση διαστημάτων και όχι διάστημα που απαιτεί το θεώρημα, ώστε η συνάρτηση να είναι σταθερή.

Έτσι με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να πάρουμε μια συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}a, & x<x_0\\ \beta, & x>x_0\end{cases}, \quad \alpha\neq\beta$$

με πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,x_0)\cup(x_0,+\infty)$. Έχουμε $f'(x)=0$ για κάθε $x\in A$ εντούτοις η f δεν είναισταθερή συνάρτηση στο Α.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Πρέπει να ισχύει: $e^x-2\geq 0 \Leftrightarrow e^x\geq 2 \Leftrightarrow x\geq \ln 2$. Επομένως $D_f=[\ln 2,\ +\infty)$.

Β2. Θα εξετάσουμε την μονοτονία της f. Εχουμε διαδοχικά:

$$x_1<x_2 \Leftrightarrow e^{x_1}<e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1}-2<e^{x_2}-2 \Leftrightarrow \sqrt{e^{x_1}-2}<\sqrt{e^{x_2}-2} \Leftrightarrow \sqrt{e^{x_1}-2}+3<\sqrt{e^{x_2}-2}+3$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\ln 2,\ +\infty)$.

<u>Σημείωση:</u> Μπορεί, πιο εύκολα, η μονοτονία της συνάρτησης f να προκύψει και ως εξής:

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη (ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$f'(x)=\frac{2e^x}{\sqrt{e^x-2}},\ x>\ln 2\ .$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\ln 2,\ +\infty)$.

Έτσι το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $\left[f(\ln 2), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$ με:

$$f(\ln 2)=3,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(4\sqrt{e^x-2}+3\right)=+\infty,$$

δηλαδή το σύνολο τιμών είναι το διάστημα $[3,\ +\infty)$.

Η f δεν έχει ρίζες αφού $f(x) \geq 3$, για κάθε $x \in [\ln 2, +\infty)$.

Β3. Για κάθε $y \in [3, +\infty)$ έχουμε διαδοχικά:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = 4\sqrt{e^x - 2} + 3 \Leftrightarrow \frac{y-3}{4} = \sqrt{e^x - 2} \Leftrightarrow \left(\frac{y-3}{4}\right)^2 = e^x - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = \left(\frac{y-3}{4}\right)^2 + 2 \Leftrightarrow x = \ln\left[\left(\frac{y-3}{4}\right)^2 + 2\right]$$

Επομένως:

$$f^{-1}(x) = \ln\left[\left(\frac{x-3}{4}\right)^2 + 2\right],\ x \in [3, +\infty)$$

Β4. Η συνάρτηση g είναι άρτια , αφού:

$$g(x) = g(-x) = \frac{1}{x^2} + 2\text{, για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

Άρα η g δεν είναι «1-1» και επομένως η g δεν είναι αντιστρέψιμη στο R. (Ακόμα και με ένα μόνο απλό παράδειγμα π.χ. $g(1) = g(-1) = 3$ δείχνουμε ότι η g δεν είναι «1-1» άρα δεν είναι αντιστρέψιμη στο R).

Β4. Για το πεδίο ορισμού της fog έχουμε:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \,/\, g(x) \in D_f\} = \left\{x \in \mathbb{R}^* \,/\, \frac{1}{x^2} + 2 \geq \ln 2\right\} = \mathbb{R}^*$$

(αφού $\frac{1}{x^2} + 2 > 1,\ \ln 2 < 1$ είναι πάντα αληθείς)

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = 4\sqrt{e^{\frac{1}{x^2}+3} - 2} + 2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε:

$$f(x) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)\ \text{, για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο (ολικό ελάχιστο) στο σημείο $x_1 = 0$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$.

Επιπλέον, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x) = 2x + a - 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat, θα είναι:

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

<u>**Παρατήρηση:**</u> Θα πρέπει να επαληθεύσουμε την ευρεθείσα τιμή, αφού το αντίστροφο του Θεώρηματος του Fermat δεν ισχύει. Έχουμε:

Για $\alpha = 1$ η συνάρτηση f γίνεται:

$$f(x) = x(x+1) - x + 1 = x^2 + x - x + 1 = x^2 + 1,\ x \in \mathbb{R}$$

Παρατηρούμε ότι $f(x) = x^2 + 1 \geq 1 = f(0)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η τιμή $a = 1$ είναι δεκτή.

Γ2. Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ έχουμε διαδοχικά:

$$g'(x)\ln x = \frac{2g(x)}{x} \Rightarrow g'(x)\ln x - \frac{2g(x)}{x} = 0 \Rightarrow g'(x)\ln^2 x - 2\ln x \cdot \frac{1}{x} g(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x)\ln^2 x - \left(\ln^2 x\right)' g(x) = 0 \Rightarrow \frac{g'(x)\ln^2 x - \left(\ln^2 x\right)' g(x)}{\ln^4 x} = 0 \Rightarrow \left(\frac{g(x)}{\ln^2 x}\right)' = 0$$

Επομένως, υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

$$\frac{g(x)}{\ln^2 x} = c\,,\ x \in (1,\ +\infty)$$

Για $x = e$ είναι:

$$x = e \Rightarrow \frac{g(e)}{\ln^2 e} = c \Rightarrow c = -1$$

Επομένως:

$$\frac{g(x)}{\ln^2 x} = -1 \Leftrightarrow g(x) = -\ln^2 x,\ x \in (1,\ +\infty)$$

Γ3. α) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$K(x) = f(x) - g(x) = x^2 + 1 + \ln^2 x,\ x \in (0,\ +\infty)\ ,$$

η οποία είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$. Θα βρούμε το ελάχιστο της $K(x)$.

Η συνάρτηση $K(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ (ώς άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0, +\infty)$) με:

$$K'(x) = 2x + 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = 2\frac{x^2 + \ln x}{x},\ x > 0$$

Θεωρούμε, επίσης, τη συνάρτηση:

$$\Phi(x) = x^2 + \ln x,\ x > 0$$

η οποία είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ (Οι ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης $K(x)$ είναι όμοια με τις ρίζες και το πρόσημο αντίστοιχα της συνάρτησης $\Phi(x)$).

Η συνάρτηση $\Phi(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$(ώς άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0, +\infty)$) με $\Phi'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$, για κάθε $x \in (0,\ +\infty)$. Άρα η συνάρτηση $\Phi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα και στο διάστημα $(0,1)$, οπότε:

$$\Phi((0,1)) = \left(\lim_{x\to 0^+}\Phi(x),\ \lim_{x\to 1^-}\Phi(x)\right) = (-\infty, 1)\ \text{, αφού}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\Phi(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x^2 + \ln x\right) = -\infty,\quad \lim_{x\to 1^-}\Phi(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(x^2 + \ln x\right) = 1$$

Επειδή $0 \in (-\infty, 1) = \Phi((0,1))$ υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $\Phi(x_0) = 0 \Leftrightarrow K'(x_0) = 0$.

Έχουμε:

$$x > x_0 \Rightarrow \Phi(x) > \Phi(x_0) \Rightarrow \Phi(x) > 0 \Leftrightarrow K'(x) > 0$$

$$0 < x < x_0 \Rightarrow \Phi(x) < \Phi(x_0) \Rightarrow \Phi(x) < 0 \Leftrightarrow K'(x) < 0$$

Άρα η συνάρτηση $K(x)$ είναι:

- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,\ x_0]$ (στο x_0 είναι συνεχής) και
- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[x_0, +\infty)$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης Κ φαίνονται στον επόμενο πίνακα μεταβολών.

0	x_0	$+\infty$
K΄(x)	-	+
K(x)	↓	↑

Ολ. Ελ

Επομένως, η συνάρτηση:

παρουσιάζει ένα μόνο ελάχιστο (ολικό) στο $x_0 \in (0,1)$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,\ +\infty)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = g'(\xi)$.

Η συνάρτηση $K(x) = f(x) - g(x)$ έχει ακρότατο στο $x_0 \in (0,1)$ και είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$(ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,1)$) με:

$$K'(x) = f'(x) - g'(x)\ ,\ x \in (0,1).$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, θα είναι:

$$K'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = g'(x_0)$$

Το $x_0=\xi$ είναι μοναδικό, ως μοναδική ρίζα της συνάρτησης Φ του ερωτήματος (Γ3α) (αφού η Φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$), άρα και μοναδική ρίζα της συνάρτησης K' .

Γ4. Έχουμε διαδοχικά:

$$I=\lim_{x\to1^+}\left[\frac{(x-1)^x}{\eta\mu(x-1)+\dfrac{g(x)}{f(x)}}\right]=\lim_{x\to1^+}\left[\frac{(x-1)^x}{\eta\mu(x-1)-\dfrac{\ln^2x}{x^2+1}}\right]=\lim_{x\to1^+}\left[\frac{\dfrac{(x-1)^x}{x-1}}{\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}-\dfrac{\ln^2x}{(x-1)(x^2+1)}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to1^+}\left[\frac{(x-1)^{x-1}}{\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}-\dfrac{\ln^2x}{(x-1)(x^2+1)}}\right]$$

Θα βρούμε ξεχωριστά τα παραπάνω όρια. Με χρήση του κανόνα του de l' Hospital για τα παραπάνω όρια έχουμε:

Επομένως:

$$I=\frac{\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)^{x-1}}{\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2x}{(x-1)(x^2+1)}}=\frac{1}{1-0}=1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1+x\ln x}{x\ln x}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x\ln x}+1\Leftrightarrow\ln|f(x)|=[\ln(\ln x)]'+(x)'\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow[\ln|f(x)|]'=[\ln(\ln x)+x]'\Leftrightarrow\ln|f(x)|=\ln(\ln x)+x+c$$

Για $x=e$ έχουμε:

$$\ln|f(e)|=\ln(\ln e)+e+c\Rightarrow\ln e^e=e+c\Rightarrow e=e+c\Rightarrow c=0$$

Επομένως:

$$\ln|f(x)|=\ln(\ln x)+x\quad(1).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(1,\ +\infty)$ (ως παραγωγίσιμη στο $(1,\ +\infty)$) και δεν έχει ρίζες αφού $f(x)\neq0$, για κάθε $x\in(1,\ +\infty)$, η συνάρτηση f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(1,\ +\infty)$ και αφού $f(e)=e^e>0$ θα είναι $f(x)>0$, για κάθε $x\in(1,\ +\infty)$.

Άρα από την σχέση (1) έχουμε:

$$\ln f(x)=\ln(\ln x)+x\Leftrightarrow\ln f(x)=\ln(\ln x)+\ln e^x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ln f(x)=\ln\left(e^x\cdot\ln x\right)\Leftrightarrow f(x)=e^x\cdot\ln x,\ x>1$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι οι συναρτήσεις:

$$g(x)=e^x,\ h(x)=\ln x$$

δεν έχουν κοινό σημείο, δηλαδή ότι η εξίσωση:

$$g(x)=h(x)\Leftrightarrow e^x=\ln x\Leftrightarrow e^x-\ln x=0\quad\text{δεν έχει ρίζα στο }(1,\ +\infty)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$K(x)=e^x-\ln x,\ x\geq1\ ,$$

η οποία είναι παραγωγίσιμηστο $[1,\ +\infty)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[1,\ +\infty)$) με:

$$K'(x)=e^x-\frac{1}{x},\ x\geq1\ .$$

Η συνάρτηση $K'(x)$ είναι επίσης παραγωγίσιμη στο $[1,\ +\infty)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[1,\ +\infty)$) με:

$$K''(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0,\ x\geq1\ .$$

Άρα η $K'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Άρα:

$$x > 1 \Rightarrow K'(x) > K'(1) = e - 1 \Rightarrow K'(x) > 0, \ x > 1$$

Επομένως η συνάρτηση $K(x)$ είναι είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Άρα:

$$x > 1 \Rightarrow K(x) > K(1) = e > 0 \Rightarrow K(x) > 0, \ x > 1$$

Οπότε η συνάρτηση $K(x)$ δεν έχει ρίζα στο $(1, +\infty)$, δηλαδή ισοδύναμα οι συναρτήσεις $g(x) = e^x$, $h(x) = \ln x$ δεν έχουν κοινό σημείο στο $(1, +\infty)$.

Δ2. α) Η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x \cdot \ln x, \ x > 1$$

είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ (ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(1, +\infty)$) με:

$$f'(x) = e^x \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} > 0 \ \text{, για κάθε} \ x > 1$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα $(1, +\infty)$. Για το σύνολο τιμών της έχουμε:

$$f\left((1, +\infty)\right) = \left(\lim_{x \to 1^+} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right),$$

αφού η f είναι γνησίως αύξουσα $(1, +\infty)$.

Είναι:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+}\left(e^x \cdot \ln x\right) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(e^x \cdot \ln x\right) = +\infty$$

Αρα: $f\left((1, +\infty)\right) = (0, +\infty)$

β) Έχουμε:

$$f(x) = \frac{\lambda}{x} \Leftrightarrow xf(x) = \lambda \Leftrightarrow \varphi(x) = \lambda \ , \quad x > 1 \ ,$$

όπου $\varphi(x) = xf(x), \ x > 1$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ (ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(1, +\infty)$) με:

$$\varphi'(x) = f(x) + xf'(x) = e^x \ln x + x\left(e^x \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x}\right) =$$

$$= e^x \ln x + xe^x \ln x + e^x = e^x\left(\ln x + x\ln x + 1\right) > 0$$

για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

Άρα η συνάρτηση $\varphi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$ και επομένως το σύνολο τιμών της είναι

$$\varphi\left((1, +\infty)\right) = \left(\lim_{x \to 1^+} \varphi(x), \lim_{x \to +\infty} \varphi(x)\right) = (0, +\infty)$$

, αφού:

$$\lim_{x \to 1^+} \varphi(x) = \lim_{x \to 1^+}\left(xf(x)\right) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(xf(x)\right) = +\infty$$

Άρα:

- Αν $\lambda \le 0$ η εξίσωση $f(x) = \dfrac{\lambda}{x}$ δεν έχει ρίζα στο $(1, +\infty)$
- Αν $\lambda > 0$ η εξίσωση $f(x) = \dfrac{\lambda}{x}$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1, +\infty)$, αφού είναι «1-1» στο $(1, +\infty)$ (ως γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$).

Δ3. Η συνάρτηση $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(1, +\infty)$) με:

$$f''(x) = e^x \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} + e^x \cdot \frac{1}{x} - e^x \frac{1}{x^2} = e^x \ln x + 2e^x \cdot \frac{1}{x} - e^x \frac{1}{x^2} =$$

$$e^x\left(\ln x + 2\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = e^x\left(\frac{x^2 \ln x + 2x - 1}{x^2}\right) > 0, \ x > 1$$

Αφού για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι :

$$e^x > 0$$

$$x^2 > 0$$

$$x^2 \ln x + 2x - 1 > 0\left(x^2 \ln x > 0, \ 2x - 1 > 0\right)$$

Επομένως η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,\ +\infty)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(e,\ f(e))$ είναι:

$$y-e^e=\left(e^e+e^{e-1}\right)(x-e)\Leftrightarrow y=\left(e^e+e^{e-1}\right)x-e^{e+1}-e^e+e^e\Leftrightarrow y=\left(e^e+e^{e-1}\right)x-e^{e+1}$$

, αφού $f'(e)=e^e+e^{e-1}$.

Δ4. Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,\ +\infty)$. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού στα διαστήματα $\left[x_1,\ \frac{x_1+x_2}{2}\right]$ και $\left[\frac{x_1+x_2}{2},\ x_2\right]$, αντίστοιχα, αφού πληρούνται οι προϋποθέσεις (η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στα $\left[x_1,\ \frac{x_1+x_2}{2}\right]$ και $\left[\frac{x_1+x_2}{2},\ x_2\right]$).

Επομένως υπάρχουν $\xi_1\in\left(x_1,\ \frac{x_1+x_2}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ x_2\right)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1)=2\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$f'(\xi_2)=2\frac{f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2-x_1}$$

$$\xi_1<\xi_2\Rightarrow f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Rightarrow 2\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)}{x_2-x_1}<2\frac{f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2-x_1}\Rightarrow$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)<f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\Rightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

Καραγιάννης Ιωάννης, ΣΕΕ Μαθηματικών, 2ο ΠΕΚΕΣ Ν. Αιγαίου