ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ΄ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το Α, παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f δεν είναι συνεχής στο x_0.

β. Αν η συνάρτηση f δεν είναι στο συνεχής x_0, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

γ. Αν δεν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f, g στο x_0, τότε δεν μπορεί να υπάρχει το όριο της $f+g$ στο x_0.

δ. Αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)$, τότε υπάρχει και το όριο της g στο x_0.

ε. Αν $f(x)=x^x$, $x>0$, τότε $f'(x)=x\cdot x^{x-1}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν,

$f(e)=0$ και $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x}-e^{\frac{f(x)}{x}}$, για κάθε $x\geq e$.

Β1. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι: $f(x)=-x\cdot\ln(\ln x)$.

Μονάδες 5

Β2. Να βρείτε τη μονοτονία της f και το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 8

Β3. Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$(\ln x)^x=\frac{1}{m},\ x\in(1,+\infty),$$

έχει ακριβώς μία λύση για κάθε $m>0$.

Μονάδες 5

Β4. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x^2+2)-f(3x)<3x-x^2-2.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}, & -1\leq x<0\\[2ex] \alpha^2\ln(x+e)+2\alpha+(\beta^2+\dfrac{1}{2})e^x, & x\geq 0\end{cases}$$

Γ1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$, να βρείτε τις τιμές των α και β .

Μονάδες 8

Γ2. Αν $\alpha=-1$ και $\beta=0$,
α. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσμη στο πεδίο ορισμού της και να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{f(x)+1}{x+1}$.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox σε ένα τουλάχιστον σημείο.

Μονάδες 6

γ. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\left(xf(x)\eta\mu\frac{1}{x}\right).$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$.

Δ1. **α.** Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)-1}{x}$$

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^2(2x)-1}{x}=4f'(0)$$

Μονάδες 4

Δ2. Αν επιπλέον για την f ισχύει:

$$f^2(x)-4f(x)=x^2-3 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 7

Δ3. Αν είναι:

$$f(x)=2-\sqrt{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$$

α. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτμένων της C_f, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $B\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

Μονάδες 6

β. Έστω σημείο M της $\mathrm{C_f}$ με θετική τετμημένη. Αν η τετμημένη του M απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων O με ταχύτητα $2m/s$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAM.

Μονάδες 6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 **ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα του Fermat για μια συνάρτηση f ορισμένη σ΄ένα διάστημα Δ.

Μονάδες 8

Α2. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος του Rolle**.**

Μονάδες 7

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$ με $\alpha<\beta$, τότε ορίζεται η $\dfrac{1}{f'(x)}$ στο $[\alpha,\beta]$.

β. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, τότε η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}^*$.

γ. Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη, τότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

δ. Για οποιαδήποτε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι γνησίως αύξουσα ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε. Αν για μια συνάρτηση f και για ένα σημείο $x_0\in D_f$ ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x,\ x\in\mathbb{R}.$$

Β1. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Μονάδες 13

Β2. Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x)\sqrt{x^2+1}+f(x)=0.$$

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση:

$$f(x)=x\ln x+2x-3,\ x\geq 1$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,e)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f για $x\geq 1$.

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,e)$ τέτοιο, ώστε:

$$(e-1)f'(\xi)+2=3e.$$

Μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2012$, έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $[1,+\infty)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=x^3+\lambda x^2-3x-1,\ x\in\mathbb{R}$$

Δ1. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=1$, να βρείτε την τιμή του λ.

Μονάδες 5

Για $\lambda = 0$

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 10

Δ3. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = 9x$.

Μονάδες 10

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 **ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 3**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α2. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- f συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο Δ.

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$, τότε $f'(x) = \alpha^x$ για κάθε $\alpha > 0$.

β. Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Αν $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)$, τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x = 0$ τοπικό μέγιστο.

δ. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης $f \cdot g$ στο σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε θα υπάρχουν και τα όρια των συναρτήσεων f και g στο σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$.

ε. Αν για μία παργωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$ με $\alpha < \beta$, τότε ορίζεται η $\dfrac{1}{f'(x)}$ στο $[\alpha, \beta]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = 3\ln\left(x \cdot e^{1-x}\right) + 2,\ x > 0.$$

Β1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 10

Β2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 8

Β3. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης: $3f(x) + 2011 = 0$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να δείξετε ότι:

$$\ln x + \frac{1}{x} \geq 1 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Μονάδες 7

Γ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2},$$

έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

Μονάδες 9

Γ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot \ln x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της καθώς και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \alpha^x - \ln(x+1),\ x > -1,$$

όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$.

Δ1. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \geq -1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

Μονάδες 6

Δ2. Για $\alpha = e$,

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι ησυνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Μονάδες 6

Δ3. Αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Μονάδες 8