ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ-ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2020

ΘΕΜΑ 1ο

Α. (i) Θεωρία στην παράγραφο 2.5 του σχολικού βιβλίου.

(ii) Θεωρία στην παράγραφο 1.8 του σχολικού βιβλίου.

Β. (i) Θεωρία στην παράγραφο 1.3 του σχολικού βιβλίου.

Η συνάρτηση $f(x)=x^2$ δεν είναι «1-1» στο $\Re$ αφού είναι άρτια, ενώ η $f(x)=x^2$ είναι «1-1» στο $[0,+\infty)\subset\Re$.

(ii) Θεωρία στην παράγραφο 2.1 του σχολικού βιβλίου.

Ο τύπος μιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το $\Re$ που να μην είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ είναι:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\ge 1 \\ -x^2+2, & x<1 \end{cases}$$

διότι έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-x^2+2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-x^2+1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x^2-1)}{x-1}=-\lim_{x\to 1^-}(x+1)=-2$$

και αφού $\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\ne\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Γ. α) Σωστό **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό **ε)** Λάθος

Δ. α) Ο ισχυρισμός:

«Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο $x_0\in[\alpha,\beta]$, τότε είναι παραγωγίσιμη στο x_0»

είναι Ψευδής (Ψ).

β) Αντιπαράδειγμα για τον χαρακτηρισμό ως Ψευδή (Ψ) του ισχυρισμού του α) ερωτήματος:

Η επόμενη συνάρτηση είναι συνεχής στο αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο αφού:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

Πράγματι:

Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, αφού:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = \lim_{x\to 0^-} x = 0 = f(0)$$

Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, αφού:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^{-+}} \frac{-x}{x} = -1$$

ΘΕΜΑ 2ο

A. **(i)** Στο διάστημα $[\alpha_1, b_1]$ η $P(x)$ έχει μια τουλάχιστον λύση διότι:

- Είναι συνεχής στο $[\alpha_1, b_1]$
- $P(\alpha_1) = 3(\alpha_1 - b_1)\cdots(\alpha_1 - b_\nu) = \nu$ το πλήθος αρνητικοί όροι (από τις δεδομένες ανισότητες).
- $P(b_1) = 2(b_1 - \alpha_1)\cdots(b_1 - \alpha_\nu) = \nu - 1$ το πλήθος αρνητικοί όροι (από τις δεδομένες ανισότητες).

  Άρα το γινόμενο $P(\alpha_1)\cdot P(b_1)$ περιέχει $\nu + (\nu - 1) = 2\nu - 1$ αρνητικούς όρους, δηλαδή περιττό πλήθος αρνητικών όρων άρα $P(\alpha_1)\cdot P(b_1) < 0$.

Επομένως η $P(x)$, σύμφωνα με το Θ.Bolzano έχει ένα, τουλάχιστον, $\xi_1 \in (\alpha, b) : P(\xi_1) = 0$.

Όμοια για κάθε διάστημα $[\alpha_i, b_i], i = 2, 3, ..., \nu$, εφαρμόζοντας το Θ.Bolzano έχει ένα, τουλάχιστον, $\xi_i \in (\alpha_i, b_i) : P(\xi i) = 0, \; i = 2, 3, ..., \nu$.

Επομένως η $P(x)$=0 έχει τουλάχιστον ν διαφορετικές ρίζες. Επειδή το $P(x)$ είναι πολυώνυμο ν-βαθμού η $P(x)$=0 θα έχει το πολύ ν πραγματικές ρίζες και άρα, τελικά, η εξίσωση $P(x)$=0 θα έχει ακριβώς ν λύσεις, τις $\xi_i \in (\alpha_i, b_i), \; i = 2, 3, ..., \nu$.

(ii) Αρχικά βλέπουμε ότι $c_0 \neq 0, \; c_\nu \neq 0$ αφού $c_0 \cdot c_\nu < 0$. Τώρα έχουμε:

$$\lim_{x\to +\infty} Q(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } c_\nu > 0 \\ -\infty, & \text{αν } c_\nu < 0 \end{cases}$$

Ακόμα $Q(0) = c_0$

Διακρίνουμε τις επόμενες περιπτώσεις:

- Αν $c_\nu > 0$, τότε $\lim_{x\to +\infty} Q(x) = +\infty$, άρα υπάρχει $x_1 > 0 : Q(x_1) > 0$

  Αφού $c_0 \cdot c_\nu < 0$, θα είναι $c_0 < 0$ και άρα $Q(0) = c_0 < 0$

Επιπλέον η $Q(x)$ είναι συνεχής στο $[0, x_1]$ (ως πολυωνυμική συνάρτηση)

Άρα από το Θ. Bolzano, στο διάστημα $(0, x_1)$ υπάρχει, τουλάχιστον ένα, $\xi_1 > 0$ τέτοιο, ώστε: $Q(\xi_1) = 0$.

- Αν $c_\nu < 0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} Q(x) = -\infty$, άρα υπάρχει $x_2 > 0$: $Q(x_2) < 0$

  Αφού $c_0 \cdot c_\nu < 0$ θα είναι $c_0 > 0$ και άρα $Q(0) = c_0 > 0$

  Επιπλέον η $Q(x)$ είναι συνεχής στο $[0, x_2]$ (ως πολυωνυμική συνάρτηση)

  Άρα από το Θ. Bolzano στο διάστημα $(0,\ x_2)$ υπάρχει, τουλάχιστον ένα, $\xi_2 > 0$ τέτοιο, ώστε: $Q(\xi_2) = 0$

Άρα, σε κάθε περίπτωση, υπάρχει τουλάχιστον μία θετική λύση της εξίσωσης $Q(x) = 0$.

Β. Η δοθείσα εξίσωση γράφεται**:**

$Q(x) = (x-2)(x-3)...(x-2020) + (x-1)(x-3)...(x-2013) + ... + (x-1)(x-2)...(x-2020) = 0$

(Το $Q(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού 2019).

Παρατηρούμε ότι $Q(x) = P'(x)$**,** όπου:

$$P(x) = (x-1)(x-2)...(x-2020)$$

το οποίο είναι πολυώνυμο βαθμού 2020 και έχει 2020 ρίζες τις 1, 2,…, 2020.

Τότε, στα διαστήματα $[1,\ 2], [2,\ 3], ..., [2019,\ 2020]$, εφαρμόζουμε το Θ. Rolle (αφού η $P(x)$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε ένα από αυτά) και επομένως υπάρχουν:

$$\xi_1 \in (1,\ 2),\ \ \xi_2 \in (2,\ 3), ..., \xi_{2019} \in (2019,\ 2020)$$

τέτοια, ώστε:

$$P'(\xi_1) = P'(\xi_2) = ...P'(\xi_{2019}) = 0$$

δηλαδή οι $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{2019}$ είναι 2019 διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες (αφού ανήκουν σε διαστήματα ξένα μεταξύ τους) της εξίσωσης $Q(x) = P'(x) = 0$.

Γ. Για να είναι η f συνεχής στο 0 πρέπει και αρκεί να ισχύει:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = c$$

Έχουμε (με διαδοχική εφαρμογή του κανόνα του D΄ L Hospital, αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του)[1]:

[1] Το όριο αυτό μπορεί να βρεθεί και χωρίς τον κανόνα του D΄ L Hospital (αφού τυπικά είναι εκτός της εξεταστέας ύλης) με «σπάσιμο του 2=1+1 και κατόπιν με συζυγή παράσταση σε κάθε ένα από τα δύο όρια που προκύπτουν.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2-(1+x)^{\frac{1}{2}}-(1-x)^{\frac{1}{2}}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}(1-x)^{-\frac{3}{2}}}{2} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{4}$$

Άρα $c = \frac{1}{4}$

ΘΕΜΑ 3ο

A. Η $\sin x \le x$ για $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι φανερή (γνωστή), διότι ισχύει $|\sin x| \le |x|,\ x \in R$ και επειδή για $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι $\sin x \ge 0,\ x > 0$ θα είναι $\sin x \le x$.

Θα αποδείξουμε και ότι:

$$\frac{2}{\pi}x \le \sin x \ \text{ για } \ x \ge 0$$

- Για $x = 0$ είναι προφανής η ισότητα.
- Για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ έχουμε:

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x \Leftrightarrow \frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x},\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ με παράγωγο:

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2},$$

όπου:

$$g(x) = x\cos x - \sin x,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ με παράγωγο:

$$g'(x) = -x\sin x < 0,\ x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right].$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ και επομένως έχουμε:

$$x > 0 \Rightarrow g(x) < g(0) \Rightarrow g(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0.$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ και επομένως έχουμε:

$$0 < x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) \ge f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{\sin x}{x} \ge \frac{2}{\pi}$$

B. **(i)** (θα βρούμε βοηθητική συνάρτηση):

- Αν $\alpha = 0$ είναι προφανής η ισότητα $b = b$
- Αν $\alpha \ne 0$ έχουμε ισοδύναμα:

$$(\alpha + b)^p \ge \alpha^p + b^p \Leftrightarrow \frac{(\alpha+b)^p}{\alpha^p} \ge 1 + \left(\frac{b}{\alpha}\right)^p \Leftrightarrow \left(1 + \frac{b}{\alpha}\right)^p \ge 1 + \left(\frac{b}{\alpha}\right)^p$$

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = (1+x)^p - x^p - 1,\ x \ge 0.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη για $x \ge 0$ με παράγωγο:

$$f'(x) = p(1+x)^{p-1} - px^{p-1} = p\left[(1+x)^{p-1} - x^{p-1}\right] > 0,$$

διότι:

$$p \ge 1 > 0 \qquad \text{και}$$

$$1 + x > x \Rightarrow (1+x)^{p-1} > x^{p-1} \Rightarrow (1+x)^{p-1} - x^{p-1} > 0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα για $x \ge 0$ και επομένως έχουμε:

$$x \ge 0 \Rightarrow f(x) \ge f(0) \Rightarrow f(x) \ge 0$$

Άρα και για:

$$x = \frac{b}{\alpha} \ge 0 \Rightarrow f\left(\frac{b}{\alpha}\right) \ge 0 \Rightarrow \left(1 + \frac{b}{\alpha}\right)^p \ge 1 + \left(\frac{b}{\alpha}\right)$$

(ii) Έχουμε ισοδύναμα:

$$(\alpha + b)^p \le 2^{p-1}\left(\alpha^p + b^p\right) \Leftrightarrow \frac{(\alpha+b)^p}{2^p} \le \frac{\alpha^p + b^p}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha+b}{2}\right)^p \le \frac{\alpha^p + b^p}{2}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = x^p,\ x \ge 0$$

$$f'(x) = px^{p-1} \text{ και } f''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0$$

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη για $x \geq 0$ με:

$$f'(x) = px^{p-1} \text{ και } f''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0$$

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα για $x \geq 0$.

Εφαρμόζω το Θ. Μ. Τ. του Διαφορικού Λογισμού για την f στα διαστήματα $\left[\alpha, \dfrac{\alpha+b}{2}\right]$ και $\left[\dfrac{\alpha+b}{2}, b\right]$ (Ισχύουν οι προϋποθέσεις αφού η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε ένα από αυτά). Άρα υπάρχουν:

$$\begin{cases} \xi_1 \in \left(\alpha, \dfrac{\alpha+b}{2}\right) : f'(\xi_1) = 2\dfrac{f\left(\dfrac{\alpha+b}{2}\right) - f(\alpha)}{b-\alpha} \\ \xi_2 \in \left(\dfrac{\alpha+b}{2}, b\right) : f'(\xi_2) = 2\dfrac{f(b) - f\left(\dfrac{\alpha+b}{2}\right)}{b-\alpha} \end{cases}$$

Έχουμε:

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) \Rightarrow 2\frac{f\left(\dfrac{\alpha+b}{2}\right) - f(\alpha)}{b-\alpha} \leq 2\frac{f(b) - f\left(\dfrac{\alpha+b}{2}\right)}{b-\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha+b}{2}\right) - f(\alpha) \leq f(b) - f\left(\frac{\alpha+b}{2}\right) \Leftrightarrow 2f\left(\frac{\alpha+b}{2}\right) \leq f(\alpha) + f(b) \Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha+b}{2}\right) \leq \frac{f(\alpha)+f(b)}{2}$$

Άρα έχουμε τελικά:

$$\left(\frac{\alpha+b}{2}\right)^p \leq \frac{\alpha^p + b^p}{2} \Leftrightarrow (\alpha+b)^p \leq 2^{p-1}(\alpha^p + b^p)$$

Γ. Έστω ότι δεν υπάρχει $\xi \in \Re$ τέτοιο, ώστε: $f(\xi) = \xi$. Επομένως για κάθε $x \in \Re$ ισχύει $f(x) \neq x$. Δηλαδή η συνάρτηση $f(x) - x$ δεν έχει ρίζα στο $\Re$ και επιπλέον είναι και συνεχής στο $\Re$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\Re$.

Διακρίνουμε τις επόμενες περιπτώσεις:

- Αν $f(x) > x$, για κάθε $x \in \Re$, τότε έχουμε:

  $f(0) > 0$ και ταυτόχρονα $f(f(0)) < f(0)$ (I) (αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα).

  Όμως ισχύει και $f(f(0)) > f(0)$ (II) (αφού είναι $f(x) > x$ για κάθε $x \in \Re$, άρα και για $x = f(0) \in \Re$). Οι σχέσεις (I) και (II) συνιστούν άτοπο.

- Αν $f(x) < x$ για κάθε $x \in \Re$, τότε έχουμε:

$f(0)<0$ και ταυτόχρονα $f(f(0))>f(0)$ (III) (αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα).

Όμως ισχύει και $f(f(0))<f(0)$ (IV) (αφού είναι $f(x)<x$ για κάθε $x\in\Re$, άρα και για $x=f(0)\in\Re$). Οι σχέσεις (III) και (IV) συνιστούν άτοπο.

Επομένως υπάρχει $\xi\in\Re$ τέτοιο, ώστε: $f(\xi)=\xi$ το οποίο είναι και μοναδικό, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα (άρα και συνάρτηση «1-1»).

ΘΕΜΑ 4ο

A. **(i)** Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$h(x)=\ln g(x),\ \ x\in[\alpha,\beta]$$

η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$(ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[\alpha,\beta]$) με:

$$h''(x)=\frac{g''(x)g(x)-[g'(x)]^2}{g^2(x)}>0,\ x\in[\alpha,\beta]$$

δηλαδή η $h'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$.

Εφαρμόζουμε για την $h(x)$το Θ. Μ. Τ. του Διαφορικού Λογισμού στα διαστήματα $\left[\alpha,\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right],\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\ \beta\right]$, στα οποία ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις αφού η $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$.

Άρα υπάρχουν, αντίστοιχα, $\xi_1\in\left(\alpha,\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right),\xi_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \beta\right)$ τέτοια, ώστε:

$$h'(\xi_1)=2\frac{h\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-h(\alpha)}{\alpha+\beta},\quad h'(\xi_2)=2\frac{h(\beta)-h\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\alpha+\beta}$$

Έχουμε:

$$\xi_1<\xi_2\Rightarrow h(\xi_1)<h(\xi_2)\Rightarrow 2\frac{h\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-h(\alpha)}{\alpha+\beta}<2\frac{h(\beta)-h\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\alpha+\beta}\Rightarrow 2h\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<h(\alpha)+h(\beta)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\ln g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<\ln g(\alpha)+\ln g(\beta)\Rightarrow \ln g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2<\ln(g(\alpha)\cdot g(\beta))\Rightarrow g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2<g(\alpha)\cdot g(\beta)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<\sqrt{g(\alpha)\cdot g(\beta)}$$

Β. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$H(x)=[f(\beta)-f(\alpha)]\cdot g(x)-[g(\beta)-g(\alpha)]\cdot f(x),\ x\in[\alpha,\beta]$$

Η $H(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[\alpha,\beta]$) με:

$$H'(x)=[f(\beta)-f(\alpha)]\cdot g'(x)-[g(\beta)-g(\alpha)]\cdot f'(x),\ x\in[\alpha,\beta]$$

και επιπλέον:

$$H(\alpha)=[f(\beta)-f(\alpha)]\cdot g(\alpha)-[g(\beta)-g(\alpha)]\cdot f(\alpha)=f(\beta)g(\alpha)-g(\beta)f(\alpha)$$

$$H(\beta)=[f(\beta)-f(\alpha)]\cdot g(\beta)-[g(\beta)-g(\alpha)]\cdot f(\beta)=f(\beta)g(\alpha)-g(\beta)f(\alpha)$$

Επομένως $H(\alpha)=H(\beta)$ και σύμφωνα με το Θεώρημα του Rolle, υπάρχει, ένα τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $H'(\xi)=0$, δηλαδή:

$$[f(\beta)-f(\alpha)]\cdot g'(\alpha)-[g(\beta)-g(\alpha)]f'(\beta)=0\Leftrightarrow\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Θέτουμε:

$$\max\{x_1,x_2,x_3,\dots,x_\nu\}=\beta,\quad \min\{x_1,x_2,x_3,\dots,x_\nu\}=\alpha$$

και άρα $[\alpha,\beta]\subseteq I$

Επειδή η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ θα έχει μέγιστο και ελάχιστο, έστω Μ και m αντίστοιχα. Άρα ισχύει:

$$m\le g(x)\le M \text{ για κάθε } x\in[\alpha,\beta]$$

Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned} m&\le g(x_1)\le M\\ m&\le g(x_2)\le M \qquad\qquad (\mathrm{I})\\ m&\le g(x_3)\le M\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\\ m&\le g(x_\nu)\le M \end{aligned}$$

Άρα, με πρόσθεση των ανισοτήτων (Ι) κατά μέλη, έχουμε:

$$\nu m\le g(x_1)+g(x_2)+\dots+g(x_\nu)\le \nu M\Leftrightarrow m\le\frac{g(x_1)+g(x_2)+\dots+g(x_\nu)}{\nu}\le M$$

Από το Θεώρημα των Ενδιαμέσων Τιμών έχουμε ότι υπάρχει, ένα τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)\subseteq I$ τέτοιο, ώστε:

$$g(x_0)=\frac{g(x_1)+g(x_2)+\dots g(x_\nu)}{\nu}$$

Γ. **(i)** Εφαρμόζουμε Θ. Μ. Τ. του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα $[1,\ x]$, $x>1$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1,\ x]$, $x>1$ και άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Μ. Τ. του Διαφορικού Λογισμού. Επομένως υπάρχει[2]:

$$\xi_x\in(1,\ x):\ f'(\xi_x)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\Rightarrow f(x)\ =f'(\xi_x)(x-1)+f(1)\geq(x-1)c+f(1)$$

Άρα:

$$f(x)\geq(x-1)c+f(1)$$

και από το κριτήριο σύγκρισης επειδή:

$$\lim_{x\to+\infty}[(x-1)c+f(1)]=+\infty$$

θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\ =+\infty$

(ii) Η $f(x)=-\dfrac{1}{x+1},\ x\geq1$. Είναι:

$$f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}>0,\ x\geq1 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x+1}\right)=0$$

Καραγιάννης Ιωάννης, Συντονιστής Εκπαιδευτικού Έργου, 2ο ΠΕ.ΚΕ.Σ. Ν. Αιγαίου

[2] Ο συμβολισμός ξ_x φανερώνει την εξάρτηση του ξ από το άκρο x του διαστήματος $[1,\ x]$, $x>1$.