

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1ου ΚΑΙ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ,  
20/04/2020

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ

ΑΡΙΘΜΟΣ ΣΕΛΙΔΩΝ: 4

**Θ Ε Μ Α 1ο**

**A.i)** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[α, β]$ . Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του, σχεδιάζοντας μια πρόχειρη γραφική παράσταση.

**Μονάδες 4**

**(ii)** Να διατυπώστε το Θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών για μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[α, β]$ . Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του, σχεδιάζοντας μια πρόχειρη γραφική παράσταση.

**Μονάδες 4**

**B.i)** Πότε μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού ένα σύνολο  $A$  ονομάζεται «1-1»; Να γράψετε τον τύπο μιας συνάρτησης που να μην είναι «1-1» σε ένα σύνολο  $A$  αλλά να είναι «1-1» σε ένα σύνολο  $B \subset A$ .

**Μονάδες 2**

**ii)** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της; Να γράψετε τον τύπο μιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  που δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$ .

Να αιτιολογήσετε όλους τους παραπάνω ισχυρισμούς σας.

**Μονάδες 2**

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**(α)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .

**(β)** Αν για οποιαδήποτε συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει:  $-2020 \leq f(x) \leq 2020$  για κάθε  $x \in A$ , τότε η  $f$  έχει μέγιστη τιμή το 2020 και ελάχιστη τιμή το  $-2020$ .

**(γ)** Έστω η συνεχής και αντιστρέψιμη συνάρτηση  $f$  στο  $\mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν τα επόμενα:

$$f^{-1}(-2020) = 4, \quad f^{-1}(2019) = 1,$$

τότε υπάρχει  $x_0 \in \mathbb{R}$  τέτοιο, ώστε  $f(x_0) = 0$ .

**(δ)** Αν μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

(ε) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη και αντιστρέψιμη στο  $\mathfrak{R}$ , τότε υπάρχει κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , στο οποίο η  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle.

**Μονάδες 10**

Δ. Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο  $x_0 \in [\alpha, \beta]$ , τότε είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ »

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

**Μονάδες 1**

β) Αν ο ισχυρισμός στο ερώτημα (α) είναι αληθής (Α) να το αποδείξετε, ενώ αν είναι Ψευδής (Ψ) να δώσετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

**Μονάδες 2**

### Θ Ε Μ Α 2ο

Α. Έστω  $\alpha_1 < b_1 < \alpha_2 < b_2 < \dots < \alpha_n < b_n$  και  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathfrak{R}$  καθώς και οι πολυωνυμικές συναρτήσεις:

$$P(x) = 2(x - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n) + 3(x - b_1) \cdot \dots \cdot (x - b_n)$$

$$Q(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n \quad \text{με} \quad c_0 \cdot c_n < 0$$

Να αποδείξετε ότι:

i) Η εξίσωση  $P(x) = 0$  έχει ακριβώς  $n$  πραγματικές λύσεις.

**Μονάδες 7**

ii) Η εξίσωση  $Q(x) = 0$  έχει, τουλάχιστον μία, θετική λύση .

**Μονάδες 6**

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \dots + \frac{1}{x-2021} = 0$$

έχει ακριβώς 2020 διαφορετικές λύσεις.

**Μονάδες 6**

Γ. Έστω  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathfrak{R}$  με:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 - \sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{x^2}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν υπάρχει  $c \in \mathfrak{R}$  τέτοιο, ώστε η  $f$  να είναι συνεχής στο  $\mathfrak{R}$ .

**Μονάδες 6**

## Θ Ε Μ Α 3ο

**A.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  ισχύει:

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$

Μονάδες 8

**B.** Έστω  $p \geq 1$  πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $a, b \geq 0$  ισχύουν:

**(i)**  $(a+b)^p \geq a^p + b^p$

**(ii)**  $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$

Μονάδες 8

**Γ.** Έστω  $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  μια συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $\xi \in \mathcal{R}$  τέτοιο, ώστε  $f(\xi) = \xi$ .

Μονάδες 9

## Θ Ε Μ Α 4ο

Έστω  $f, g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathcal{R}$  δύο συναρτήσεις που η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  και η  $g$  δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$ .

**A.i)** Αν για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$  ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

- $(g'(x))^2 < g(x)g''(x)$
- $g(x) > 0$

Να αποδείξετε ότι:

$$g\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) < \sqrt{g(\alpha) \cdot g(\beta)}$$

Μονάδες 7

**ii)** Έστω ένα οποιοδήποτε διάστημα  $I$  και  $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in I$  τέτοιο, ώστε:

$$g(x_0) = \frac{g(x_1) + g(x_2) + \dots + g(x_n)}{n}$$

Μονάδες 5

**B)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε:

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Μονάδες 5

**Γ) (i)** Έστω  $f'(x) \geq C > 0$  για κάποιο  $C$  και για κάθε  $x \geq 1$ . Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Μονάδες 4

**(ii)** Δώστε ένα παράδειγμα παραγωγίσιμης συνάρτησης  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathcal{R}$  τέτοιας, ώστε να ισχύει  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \geq 1$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq +\infty$ .

Μονάδες 4

*Ευχόμαστε επιτυχία*

*Καραγιάννης Ιωάννης, Συντονιστής Εκπαιδευτικού Έργου, 2<sup>ο</sup> ΠΕ.ΚΕ.Σ. Ν. Αιγαίου*