

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

♦ η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ♦ $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 10

A2. α) Διατυπώστε το Θεώρημα του Bolzano για μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, $\alpha > \beta$.

Μονάδες 3

β) Πότε μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 2

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η εικόνα ενός διαστήματος μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

β. Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες.

γ. Μία συνάρτηση f είναι «1-1», αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

δ. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

ε. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{f(x)}{f^2(x) + 1}.$$

B1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f .

Μονάδες 5

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα και «1-1».

Μονάδες 5

B3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(g(x^3 + 1)) = f(g(4x^2 + 2x))$$

έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες και μια αρνητική ρίζα.

Μονάδες 10

B4. Να λύσετε την ανίσωση:

$$(f \circ g)(x^3 + 4) > (f \circ g)(3x^2).$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(e^x - 1) - x.$$

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 3

Γ2. Να βρείτε το πρόσημο της f .

Μονάδες 4

Γ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 5

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και βρείτε την $f^{-1}(x)$.

Μονάδες 4

Γ5. Αν είναι $h(x) = \ln \frac{1}{x}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0) = h(x_0).$$

Μονάδες 5

Γ6. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(1)x^2 + x^2 + 2}{f(2)x^2 - x + 1}.$$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$f^3(x) + 2f(x) = x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1».

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το \mathbb{R} και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφη της f .

Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης με το άξονα $x'x$.

Μονάδες 3

Δ4. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 4

Δ5. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = -1$.

Μονάδες 4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι για κάθε πολυώνυμο:

$$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ με $x_0 \in \mathbb{R}$.

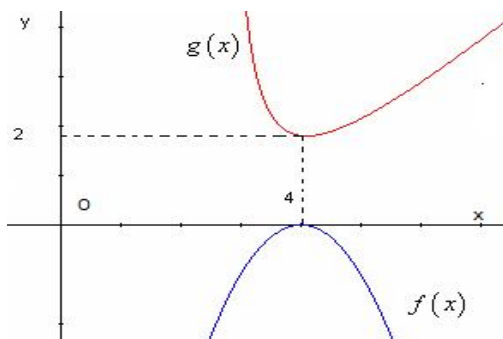
Μονάδες 10

A2. Πότε μία συνάρτηση λέγεται συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ του πεδίου ορισμού της ;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Δίνεται το παρακάτω σχήμα, τότε $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.



β. Αν η f δεν είναι αντιστρέψιμη, δεν είναι γνησίως μονότονη.

γ. Η f είναι «1-1» αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $y = f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .

δ. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο σύνολο $A = [1, 4]$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1, 4]$ και $f(3) = -2$. Τότε ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, 4]$.

ε. Δίνεται η συνεχής και αντιστρέψιμη συνάρτηση f στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει: $f^{-1}(-2015) = 4$, $f^{-1}(1949) = -1$, τότε δεν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) + 2f(x)\eta\mu x = x^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 1.$$

B1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) + \eta\mu x, x \in \mathbb{R},$$

διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Μονάδες 10

B2. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \eta\mu x.$$

Μονάδες 5

B3. Να βρείτε τα όρια: $\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2 + \sigma\upsilon\nu x}{x}$ και $\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \ln^2 x, & 0 < x \leq e \\ \alpha x + \ln(x - e + 1), & e < x \end{cases}$$

α. Να βρείτε τον αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

β. Αν $\alpha = \frac{3}{e}$, τότε η εξίσωση $f(x) = 6$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1, 2e)$.

Μονάδες 5

Γ2. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

$$f(e^{f(x)}) = 4\ln x + 3, \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και}$$

$$(f \circ f)(e^{f(x)}) = \ln(\ln x^4 + 3)^2 + 1, \text{ για κάθε } x > e^{-\frac{3}{4}}.$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».

Μονάδες 5

β. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Μονάδες 3

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$(f \circ f)(x) = f(e^{x-2014})$$

έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x, x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης f στο $[0, +\infty)$.

Μονάδες 3

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ (Μονάδες 2) και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Μονάδες 7

Δ4. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει:

$$\left(\sqrt{\alpha^2 + 1} + \alpha\right)\left(\sqrt{\beta^2 + 1} + \beta\right) = 1,$$

να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 0$.

Μονάδες 5

Δ5. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 3

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε μία συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση «1-1» ;

Μονάδες 8

A2. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ;

Μονάδες 7

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Μια συνάρτηση f που είναι «1-1» σε ένα διάστημα Δ είναι πάντα γνησίως μονότονη στο Δ .

β. Αν f^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της $f:A \rightarrow \mathbb{R}$, τότε το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών $f(A)$ της f .

γ. Αν μία συνάρτηση είναι «1-1» τότε δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

δ. Αν για μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $-2015 \leq f(x) \leq 2015$ για κάθε $x \in A$, τότε η f έχει μέγιστη τιμή το 2015 και ελάχιστη τιμή το -2015 .

ε. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$ των αξόνων $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση $g:(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι γνησίως φθίνουσα και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$. Αν για την συνάρτηση f ισχύει $f(x) = \ln x - g(x)$ για κάθε $x > 0$.

B1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 10

B2. Να λύσετε την ανίσωση: $2\ln x < 2 + g(x^2)$ στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(1 + f(x)) = 2x - 6 + f(x) \quad (1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: **i.** Η f αντιστρέφεται, **ii.** $f(3) = 2$

Μονάδες 8+7

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(1 + f(x^2 + x + 1)) = f(1 + f(3))$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(x - y) = f(x)f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ ή $f(0) = 1$.

Μονάδες 7

Δ2. Αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων να βρείτε την συνάρτηση f .

Μονάδες 8

Δ3. Αν $f(0) \neq 0$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Μονάδες 5