ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1ου ΚΑΙ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ, 20/04/2020

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΣΕΛΙΔΩΝ: 4

Θ Ε Μ Α 1ο

Α.i) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του, σχεδιάζοντας μια πρόχειρη γραφική παράσταση.

Μονάδες 4

(ii) Να διατυπώστε το Θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών για μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του, σχεδιάζοντας μια πρόχειρη γραφική παράσταση.

Μονάδες 4

Β.i) Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α ονομάζεται «1-1»; Να γράψετε τον τύπο μιας συνάρτησης που να μην είναι «1-1» σε ένα σύνολο Α αλλά να είναι «1-1» σε ένα σύνολο $B \subseteq A$ με Β διαφορετικό από το Α.

Μονάδες 2

ii) Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της; Να γράψετε τον τύπο μιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το $\Re$ που δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Να αιτιολογίσετε όλους τους παραπάνω ισχυρισμού σας.

Μονάδες 2

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

(α) Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

(β) Αν για οποιαδήποτε συνάρτηση $f: A \to \Re$ ισχύει: $-2020 \le f(x) \le 2020$ για κάθε $x \in A$, τότε η f έχει μέγιστη τιμή το 2020 και ελάχιστη τιμή το -2020.

(γ) Έστω η συνεχής και αντιστρέψιμη συνάρτηση f στο $\Re$ για την οποία ισχύουν τα επόμενα:

$$f^{-1}(-2020) = 4, \quad f^{-1}(2019) = 1,$$

τότε υπάρχει $x_0 \in \Re$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

(δ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

(ε) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και αντιστρέψιμη στο $\Re$, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle.

Μονάδες 10

Δ. Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο $x_0 \in [\alpha, \beta]$, τότε είναι παραγωγίσιμη στο x_0»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

Μονάδες 1

β) Αν ο ισχυρισμός στο ερώτημα (α) είναι αληθής (Α) να το αποδείξετε, ενώ αν είναι Ψευδής (Ψ) να δώσετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

Μονάδες 2

Θ Ε Μ Α 2ο

Α. Έστω $\alpha_1 < b_1 < \alpha_2 < b_2 < \ldots < \alpha_\nu < b_\nu$ και $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_\nu \in \Re$ καθώς και οι πολυωνυμικές συναρτήσεις:

$$P(x) = 2(x-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_\nu) + 3(x-b_1)\ldots\cdot(x-b_\nu)$$

$$Q(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_\nu x^\nu \quad \text{με} \quad c_0 \cdot c_\nu < 0$$

Να αποδείξετε ότι:

i) Η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει ακριβώς ν πραγματικές λύσεις.

Μονάδες 7

ii) Η εξίσωση $Q(x) = 0$ έχει, τουλάχιστον μία, θετική λύση .

Μονάδες 6

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \ldots + \frac{1}{x-2021} = 0$$

έχει ακριβώς 2020 διαφορετικές λύσεις.

Μονάδες 6

Γ. Έστω $f : [-1, 1] \to \Re$ με:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x^2}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν υπάρχει $c \in \Re$ τέτοιο, ώστε η f να είναι συνεχής στο $\Re$.

Μονάδες 6

Θ Ε Μ Α 3ο

Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει:

$$\frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x$$

Μονάδες 8

Β. Έστω $p \ge 1$ πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, b \ge 0$ ισχύουν:

(i) $(\alpha + b)^p \ge \alpha^p + b^p$ **(ii)** $(\alpha + b)^p \le 2^{p-1}\left(\alpha^p + b^p\right)$

Μονάδες 8

Γ. Έστω $f: \Re \to \Re$ μια συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in \Re$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \xi$.

Μονάδες 9

Θ Ε Μ Α 4ο

Έστω $f, g: [\alpha, \beta] \to \Re$ δύο συναρτήσεις που η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και η g δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Α.i) Αν για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

- $(g'(x))^2 < g(x)\, g''(x)$
- $g(x) > 0$

Να αποδείξετε ότι:

$$g\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) < \sqrt{g(\alpha) \cdot g(\beta)}$$

Μονάδες 7

ii) Έστω ένα οποιοδήποτε διάστημα I και $x_1, x_2, \ldots, x_\nu \in I$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in I$ τέτοιο, ώστε:

$$g(x_0) = \frac{g(x_1) + g(x_2) + \ldots g(x_\nu)}{\nu}$$

Μονάδες 5

Β) Αν $g'(x) \ne 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Μονάδες 5

Γ) **(i)** Έστω $f'(x) \ge C > 0$ για κάποιο C και για κάθε $x \ge 1$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Μονάδες 4

(ii) Δώστε ένα παράδειγμα παραγωγίσιμης συνάρτησης $f: [1, +\infty) \to \Re$ τέτοιας, ώστε να ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \ge 1$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \ne +\infty$.

Μονάδες 4

Ευχόμαστε επιτυχία

Καραγιάννης Ιωάννης, Συντονιστής Εκπαιδευτικού Έργου, 2ο ΠΕ.ΚΕ.Σ. Ν. Αιγαίου