ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

1Ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΘΕΜΑΤΑ
[Κεφάλαιο 1 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου]

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρούμε τη ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0)\neq 0$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

(Μονάδες 3)

Α2.

i) Έστω A είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A;

(Μονάδες 2)

ii) Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

(Μονάδες 2)

iii) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

(Μονάδες 2)

iv) Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- « *Αν μια συνάρτηση είναι 1-1, τότε είναι γνησίως μονότονη* ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

(Μονάδες 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

(Μονάδες 2)

v) Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- « *Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0* ».

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

(Μονάδες 1)

2) Γράψτε παράδειγμα σχετικό με την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

(Μονάδες 2)

Α3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με **Σωστό (Σ),** αν είναι σωστή ή με **Λάθος (Λ),** αν είναι λανθασμένη :

α) Μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)<0$ και υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(\xi)=0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta)>0$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f .

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

ε) Έστω μία συνάρτηση ορισμένη σ΄ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ και l ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:
$\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=0$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι άρτια, συνεχής στο $\mathbb{R}$ και γνησίως μονότονη στο $[0,+\infty)$ με $f(0)=4$, $f(4)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Β1. Να βρείτε τη μονοτονία της σε όλο το $\mathbb{R}$ και το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 5)

Β2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η $f\circ f$ στο $\mathbb{R}$ και να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία στο $[-4,4]$.

(Μονάδες 5)

Β3. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{1}{f(x)}$.

(Μονάδες 5)

Β4. Αν $g(x)=f(x+1)-f(x)+1$, τότε:

i) Αποδείξτε ότι $g(0)+g(1)+g(2)+g(3)=0$.

(Μονάδες 3)

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\mu\in[0,3]$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(\mu+1)=f(\mu)-1$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+2f(x)=2\eta\mu x-3x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.

(Μονάδες 2)

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)<0$.

(Μονάδες 5)

Γ3. Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια στο $x_o = 0$.

(Μονάδες 3)

Γ4. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

(Μονάδες 5)

Γ5. Αν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής σε $x_0\neq 0$ αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής και στο $-x_0$.

(Μονάδες 5)

Γ6. Αν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x-1$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (0,1).

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+2x+1$

Δ1. Αποδείξτε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

(Μονάδες 4)

Δ2. Ισχύει $-1<f^{-1}(0)<0$.

(Μονάδες 2)

Δ3. Για κάθε $x, x_0 \in \mathbb{R}$ αποδείξτε ότι ισχύει: $\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)\right| \le \frac{1}{2}|x-x_0|$.

(Μονάδες 4)

Δ4. Αποδείξτε ότι η f^{-1} είναι συνεχής.

(Μονάδες 3)

Δ5. Γνωρίζοντας ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x)+x^3+1=0$ έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 3)

Δ6. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f^{-1}(x)-x$.

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \ne x_2$: $-\frac{3}{2} \le \frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} \le -\frac{1}{2}$

(Μονάδες 3)

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει το πολύ μία λύση.

(Μονάδες 3)

iii) Αν ξ είναι η μοναδική λύση στο ερώτημα (Δ5), να επιλυθεί η ανίσωση $f^{-1}\left(-1+\xi-g\left(2x+1-\eta\mu x\right)\right)<-\xi^3-1$.

(Μονάδες 3)

Καλή επιτυχία

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:
Το Θέμα Β΄ επιμελήθηκε ο **Ρουσσάλης Ηλίας**, Μαθηματικός του Γυμνασίου & Λυκείου Λεωνιδίου.
Το Θέμα Γ΄ επιμελήθηκε ο **Χήτος Γεώργιος**, Μαθηματικός από το Ρέθυμνο.
Το Θέμα Δ΄ επιμελήθηκε ο **Παντερής Ανδρέας**, Μαθηματικός-MSc του 2ου ΓΕΛ Ηρακλείου Κρήτης.
Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο και Μοτσάκο Βασίλειο.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ 1ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ –ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδα 49.

Α2.

i) Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδα 15.

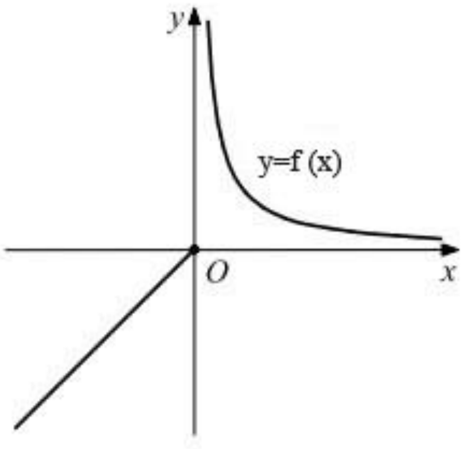
ii) Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδα 51.

iii) Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδα 32.

iv) α) Ψ.

β) Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδα 35. Ως παράδειγμα έχουμε τη συνάρτηση

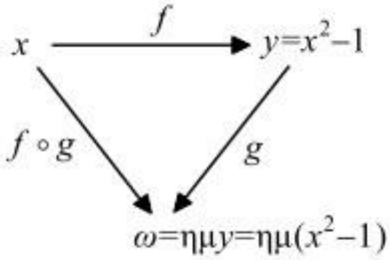
$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$, η οποία είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.



v) α) Α.

β) Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδα 72.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση φ(x) = ημ(x^2 −1) είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων f(x) = x^2 −1 και g(x) = ημx.



Α3. **α)** (σελ.74-75) Σ, **β)** (σελ.74) Λ, **γ)** (σελ.18) Σ, **δ)** (σελ.60) Σ, **ε)** (σελ.43) Λ.

ΘΕΜΑ Β

Β1.

- Έχουμε $0<4$ και $f(0)>f(4)$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο $[0,+\infty)$ τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.
- Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in (-\infty,0]$ με $x_1<x_2\le 0$, έχουμε :

  $x_1<x_2\le 0 \Leftrightarrow -x_1>-x_2\ge 0 \overset{f\downarrow[0,+\infty)}{\Leftrightarrow} f(-x_1)<f(-x_2) \overset{f:\text{άρτια}}{\Leftrightarrow} f(x_1)<f(x_2)$.

  Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$.
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_1=(-\infty,0]$. Τότε το $f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(0)\right]=(-\infty,4]$, αφού

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \overset{u=-x}{=} \lim\limits_{u\to+\infty} f(-u) \overset{f:\text{άρτια}}{=} \lim\limits_{u\to+\infty} f(u) \overset{\text{υπόθεση}}{=} -\infty$ και $f(0)=4$.
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_2=[0,+\infty)$. Τότε το $f(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(0)\right]=(-\infty,4]$,
- Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:
  $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=(-\infty,4]$.

Β2.

Είναι $D_f=A=\mathbb{R}$, οπότε $D_{f\circ f}=\{x\in D_f \,/\, f(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R} \,/\, f(x)\in\mathbb{R}\}$.
Προφανώς $f(x)\in\mathbb{R}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα $D_{f\circ f}=\mathbb{R}$.

- Έχουμε: $-4\le x_1<x_2\le 0 \overset{f\text{γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f(-4)\le f(x_1)<f(x_2)\le f(0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0\le f(x_1)<f(x_2)\le 4 \overset{f\text{γν.φθίνουσα}[0,4]}{\Leftrightarrow} f(f(x_1))>f(f(x_2)) \Leftrightarrow (f\circ f)(x_1)>(f\circ f)(x_2)$. Άρα η $f\circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-4,0]$.

- Όμοια αποδεικνύεται ότι η $f\circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,4]$.

Β3.

Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R θα είναι συνεχής και στο 4, οπότε θα ισχύει:
$\lim\limits_{x\to4^-} f(x)=f(4)=0$. Όμως αν $x<4 \overset{f\text{γν.φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} f(x)>f(4)=0$. Δηλαδή έχουμε:
$\lim\limits_{x\to4^-} f(x)=0$ και $f(x)>0$ για $0<x<4$. Τότε $\lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$.

Β4.

i) Έχουμε:
$g(0)+g(1)+g(2)+g(3)=\cancel{f(1)}-f(0)+1+\cancel{f(2)}-\cancel{f(1)}+1+\cancel{f(3)}-\cancel{f(2)}+1+f(4)-\cancel{f(3)}+1=$
$=-4+4+0=0$.

ii) Είναι $f(\mu+1)=f(\mu)-1 \Leftrightarrow f(\mu+1)-f(\mu)+1=0 \Leftrightarrow g(\mu)=0$.

Επειδή $g(0)+g(1)+g(2)+g(3)=0$, (1) συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί $g(0), g(1), g(2), g(3)$ δεν μπορεί να είναι ομόσημοι και οι τέσσερις (αφού τότε το άθροισμά τους θα είναι είτε θετικό, είτε αρνητικό, άτοπο).

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $g(0)$ ή $g(1)$ ή $g(2)$ ή $g(3)=0$, τότε είναι προφανές το ζητούμενο.
- Αν $g(0)\cdot g(1)\cdot g(2)\cdot g(3)\neq 0$, δηλαδή κανένας από τους όρους του γινομένου δεν είναι μηδέν, προκύπτει ότι δύο τουλάχιστον όροι του αθροίσματος της (1) είναι ετερόσημοι.

Έτσι αν $g(0)>0$,τότε κάποιος/οι από τους $g(1), g(2), g(3)$ είναι αρνητικός/οί. Αν $g(0)\cdot g(1)<0$ εφαρμόζοντας το Θ. Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)\subseteq[0,3]$ ώστε $g(x_0)=0$.

Ομοίως αν $g(0)\cdot g(2)<0$ ή $g(0)\cdot g(3)<0$ ή $g(1)\cdot g(2)<0$ ή $g(1)\cdot g(3)<0$ ή $g(2)\cdot g(3)<0$.

Άρα υπάρχει $\mu\in[0,3]$ ώστε $g(\mu)=0 \Leftrightarrow f(\mu+1)=f(\mu)-1$.

Θέμα Γ

Γ1. Για x=0 η αρχική σχέση γίνεται :

$f^3(0)+2f(0) = 2\eta\mu 0 - 0 \Leftrightarrow f(0)[f^2(0)+2]=0 \Leftrightarrow f(0)=0$ ή $f^2(0) = -2$ (αδύνατο), άρα $f(0)=0$.

Γ2. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η αρχική σχέση γίνεται :

$$f(x)\left[f^2(x)+2\right]=2\eta\mu x-3x \Leftrightarrow \left\{f^2(x)+2>0, \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}\right\}$$

$$f(x)=\frac{2\eta\mu x-3x}{f^2(x)+2}, \quad \text{ομόσημη του αριθμητή.}$$

$$\text{Όμως για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ ισχύει ότι}: |\eta\mu x|\leq|x| \text{ και αν } x>0 \text{ τότε } |\eta\mu x|<x \Leftrightarrow -x<\eta\mu x<x \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}$$

$$-2x<2\eta\mu x<2x \overset{-3x}{\Leftrightarrow}$$

$$-5x<2\eta\mu x-3x<-x$$

$$\text{όπου } -x<0 \text{ άρα και } f(x)<0 \text{ για κάθε } x>0.$$

Γ3.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{2\eta\mu x-3x}{f^2(x)+2} \Leftrightarrow |f(x)|=\left|\frac{2\eta\mu x-3x}{f^2(x)+2}\right| \Leftrightarrow \qquad \left\{f^2(x)+2>1 \Leftrightarrow \frac{1}{f^2(x)+2}<1\right\}$$

$$\Leftrightarrow |f(x)|<|2\eta\mu x-3x| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -|2\eta\mu x-3x|<f(x)<|2\eta\mu x-3x|$$

$$\text{Αλλά } \lim_{x\to 0}\left(-|2\eta\mu x-3x|\right)=0=\lim_{x\to 0}|2\eta\mu x-3x|$$

$$\text{Άρα από κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι } \lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0), \text{ οπότε f συνεχής στο } x_0=0.$$

Γ4. Στη σχέση $f^3(x)+2f(x)=2\eta\mu x-3x$ (1) ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε θέτουμε όπου $x\to -x$ και βρίσκουμε $f^3(-x)+2f(-x)=-2\eta\mu x+3x$ (2).

Προσθέτοντας τις (1) και (2) έχουμε:

$$f^3(x)+2f(x)+f^3(-x)+2f(-x)=0\Leftrightarrow f^3(x)+f^3(-x)+2\left[f(x)+f(-x)\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[f(x)+f(-x)\right]\left[f^2(x)-f(x)f(-x)+f^2(-x)\right]+2\left[f(x)+f(-x)\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\left[f(x)+f(-x)\right]\left[\underbrace{f^2(x)-f(x)f(-x)+f^2(-x)+2}_{>0}\right]=0\overset{(*)}{\Leftrightarrow}f(x)+f(-x)=0\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$$

(*) $f^2(x)-f(x)f(-x)+f^2(-x)+2>0$, (τριώνυμο ως προς $f(x)$) ομόσημο του α=1 αφού $\Delta=f^2(-x)-4\left[f^2(-x)+2\right]=-3f^2(-x)-8<0$

Άρα $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f είναι περιττή.

Γ5. Θα αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to -x_0} f(x)=f(-x_0)$.

$$\lim_{x\to -x_0} f(x)\overset{(\Gamma_4)}{=}\lim_{x\to -x_0}\left[-f(-x)\right]=-\lim_{-x\to x_0} f(-x)\overset{-x=u}{=}-\lim_{u\to x_0} f(u)\overset{f\,\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\,\sigma\tau o\,x_0}{=}-f(x_0)\overset{(\Gamma_4)}{=}f(-x_0).$$

Γ6. Η εξίσωση γίνεται :

$$f(x)=x-1\Leftrightarrow f(x)-x+1=0$$

Θεωρώ συνάρτηση $g(x)=f(x)-x+1$, $x\in\mathbb{R}$ συνεχής στο [0,1], ως πράξεις συνεχών, με

g(0) = f(0) -0+ 1 = 1 > 0

g(1) = f(1) < 0 αφού για κάθε x>0 είναι f(x) < 0 (Γ_2. Ερώτημα)

ή αλλιώς

$$f(1)=\frac{2\eta\mu 1-3}{f^2(1)+2}<2\eta\mu 1-3<0\qquad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{f^2(x)+2}<1\;\kappa\alpha\iota\;\sigma\tau o\;(0,1)\subset\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\;\eta\mu x<x\Rightarrow\\ \eta\mu 1<1\Rightarrow 2\eta\mu 1<2\Rightarrow\\ 2\eta\mu 1-3<-1<0\end{array}\right.$$

Από θεώρημα Bolzano για την g έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ∈(0,1) ώστε g(ξ) = 0. Επομένως η αρχική εξίσωση $f(x)=x-1$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο (0,1).

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}x_1^3<x_2^3\\ 2x_1+1<2x_2+1\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}x_1^3+2x_1+1<x_2^3+2x_2+1\Rightarrow f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right),$$

Αυτό σημαίνει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε θα είναι και "1−1" , άρα αντιστρέψιμη.

Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχουμε

$$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)\overset{(*)}{=}(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

$(*)$ Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3\right)=+\infty$

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το R που είναι σύνολο τιμών της f.

Δ2.

Θα αποδείξουμε ότι: $-1<f^{-1}(0)<0 \underset{(f(\mathbb{R})=\mathbb{R})}{\overset{(f\uparrow)}{\Leftrightarrow}} f(-1)<f\left(f^{-1}(0)\right)<f(0)\Leftrightarrow-2<0<1$ (ισχύει).

Δ3.

Για κάθε $x,x_0\in\mathbb{R}$ θα αποδείξουμε ότι ισχύει: $\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)\right|\le\frac{1}{2}|x-x_0| \qquad (1)$

- Αν $x=x_0$ τότε προφανώς η (1) ισχύει σαν ισότητα.

- Αν $x\neq x_0$ θέτουμε όπου x το $f(x)$ και όπου x_0 τό $f(x_0)$ και η σχέση (1) γράφεται.

$$\left|f^{-1}(f(x))-f^{-1}(f(x_0))\right|\le\frac{1}{2}\left|f(x)-f(x_0)\right|\Leftrightarrow|x-x_0|\le\frac{1}{2}\left|f(x)-f(x_0)\right|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow|x-x_0|\le\frac{1}{2}\left|x^3+2x+1-x_0^3-2x_0-1\right|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow2|x-x_0|\le\left|(x-x_0)\left(x^2+xx_0+x_0^2\right)+2(x-x_0)\right|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow2|x-x_0|\le|x-x_0|\left|\left(x^2+xx_0+x_0^2\right)+2\right|\overset{(x\neq x_0)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow2\le\left|\underbrace{x^2+xx_0+x_0^2}_{(A)}+2\right| \qquad (2)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $A=x^2+xx_0+x_0^2>0$ (τριώνυμο ως προς x) για κάθε $x,x_0\in\mathbb{R}$ με $x\neq x_0$

Είναι

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=x_0^2-4x_0^2=-3x_0^2\le0$

Οπότε το τριώνυμο A είναι ομόσημο του α=1>0. Άρα A>0

Επομένως η σχέση (2) ισχύει.

Δ4.

Θα δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f^{-1}(x) = f^{-1}(x_0)$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$

Από το ($Δ_3$) ερώτημα έχουμε:

$$\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)\right| \le \frac{1}{2}|x-x_0| \Leftrightarrow -\frac{1}{2}|x-x_0| \le f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0) \le \frac{1}{2}|x-x_0|$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-\frac{1}{2}|x-x_0|\right) = \lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{1}{2}|x-x_0|\right) = 0$ από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε

$$\lim_{x\to x_0}\left(f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f^{-1}(x) = f^{-1}(x_0).$$

Δ5.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f^{-1}(x) + x^3 + 1$

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2) \\ x_1^3 + 1 < x_2^3 + 1 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} f^{-1}(x_1) + x_1^3 + 1 < f^{-1}(x_2) + x_2^3 + 1 \Rightarrow h(x_1) < h(x_2)$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών με

- $h(0) = f^{-1}(0) + 1 > 0$, από το $Δ_2$.
- $h(-1) = f^{-1}(-1) < f^{-1}(0) < 0$, από το $Δ_2$.

Οπότε $h(-1)\cdot h(0) < 0$,άρα από Θ.Bolzano υπάρχει $\xi \in (-1,0)$ τέτοιο ώστε $h(\xi) = 0$ το οποίο είναι και μοναδικό αφού η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ6.

i) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \ne x_2$ από το ερώτημα ($Δ_3$) ισχύει:

$$\left|f^{-1}(x_1)-f^{-1}(x_2)\right| \le \frac{1}{2}|x_1-x_2| \Leftrightarrow |g(x_1)+x_1-g(x_2)-x_2| \le \frac{1}{2}|x_1-x_2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |g(x_1)-g(x_2)+(x_1-x_2)| \le \frac{1}{2}|x_1-x_2| \Leftrightarrow \frac{|g(x_1)-g(x_2)+(x_1-x_2)|}{|x_1-x_2|} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}+1\right| \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le \frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}+1 \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \le \frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} \le -\frac{1}{2}\ .$$

ii) Αφού $-\frac{3}{2} \le \frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} \le -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} < 0$, για κάθε $x_1 \ne x_2$.

Αν $x_1 < x_2$, τότε $g(x_1)-g(x_2) > 0 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$ που σημαίνει ότι η συνεχής συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο R άρα και 1-1, οπότε η εξίσωση $g(x)=0$ θα έχει το πολύ μία λύση.

iii) Έχουμε από το (Δ5) ότι $f^{-1}(\xi)+\xi^3+1=0$,οπότε η ανίσωση γίνεται:

$$f^{-1}\left(-1+\xi-g\left(2x+1-\eta\mu x\right)\right) < -\xi^3-1 \Leftrightarrow f^{-1}\left(-1+\xi-g\left(2x+1-\eta\mu x\right)\right) < f^{-1}(\xi) \overset{f^{-1}\uparrow}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow -1+\xi-g\left(2x+1-\eta\mu x\right) < \xi \Leftrightarrow g\left(2x+1-\eta\mu x\right) > -1 \underset{(*)}{\overset{g(1)=-1}{\Leftrightarrow}} g\left(2x+1-\eta\mu x\right) > g(1) \overset{g:\gamma\nu.\varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 2x+1-\eta\mu x < 1 \Leftrightarrow \eta\mu x - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

Γιατί:

Για κάθε $x \ne 0$ έχουμε $|\eta\mu x| < |x| \Leftrightarrow -|x| < \eta\mu x < |x| \qquad (1)$

Αν $x > 0$ τότε η (1) γράφεται $-x < \eta\mu x < x < 2x$, άρα $\eta\mu x - 2x < 0$.

Αν $x < 0$ τότε η (1) γράφεται $x < \eta\mu x < -x$ και αφού $2x < x$, θα είναι $2x < x < \eta\mu x < -x$, άρα $\eta\mu x - 2x > 0$.

(*) Για $x=0 \Rightarrow f(0)=1 \Leftrightarrow f^{-1}(1)=0$ και $g(1)=f^{-1}(1)-1=-1$.

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:
Το Θέμα Β΄ επιμελήθηκε ο **Ρουσσάλης Ηλίας**, Μαθηματικός του Γυμνασίου & Λυκείου Λεωνιδίου.
Το Θέμα Γ΄ επιμελήθηκε ο **Χήτος Γεώργιος**, Μαθηματικός από το Ρέθυμνο.
Το Θέμα Δ΄ επιμελήθηκε ο **Παντερής Ανδρέας**, Μαθηματικός-MSc του 2ου ΓΕΛ Ηρακλείου Κρήτης.
Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο**.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

2Ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΘΕΜΑΤΑ (Κεφάλαια 2) [Κεφάλαιο 1 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου]

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=$ **η**.

(Μονάδες 10)

Α2.

1) Διατυπώστε το Θεώρημα του Bolzano για μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$.

(Μονάδες 3)

2) Πότε μια συνάρτηση f **<u>δεν είναι συνεχής</u>** σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 2)

Α3. *Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με* ***Σωστό*** *(Σ), αν είναι σωστή, ή με* ***Λάθος*** *(Λ), αν είναι λανθασμένη:*

α) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

β) Αν f,g,h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h\circ(g\circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h\circ g)\circ f$ και αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες.

γ) Μία συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

δ) Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\leq g(x)$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $0<f(x)<1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{f^2(x)+1}$.

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f.

(Μονάδες 5)

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση fog είναι γνησίως αύξουσα και 1-1.

(Μονάδες 5)

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(g(x^3+1)) = f(g(4x^2+2x))$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες και μια αρνητική ρίζα.

(Μονάδες 10)

4. Να επιλυθεί η ανίσωση $(f \circ g)(x^3+4) > (f \circ g)(3x^2)$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1) - x$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 3)

2. Να βρείτε το πρόσημο της f.

(Μονάδες 4)

3. Μελετήστε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 5)

4. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και βρείτε την $f^{-1}(x)$.

(Μονάδες 4)

5. Αν $h(x) = \ln\dfrac{1}{x}$, αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = h(x_0)$.

(Μονάδες 5)

6. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(1)x^3 + x^2 + 2}{f(2)x^2 - x + 1}$.

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει $f^3(x) + 2f(x) = x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1.

(Μονάδες 3)

2. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της.

(Μονάδες 5)

3. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης με το άξονα $x'x$.

(Μονάδες 3)

4. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 4)

5. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = -1$.

(Μονάδες 4)

6. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

Καλή επιτυχία

Η επιμέλεια των θεμάτων πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο.**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

3ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΘΕΜΑΤΑ (Κεφάλαιο 2)

[Κεφάλαιο 1 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου]

ΘΕΜΑ Α

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$, με $x_0\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 10

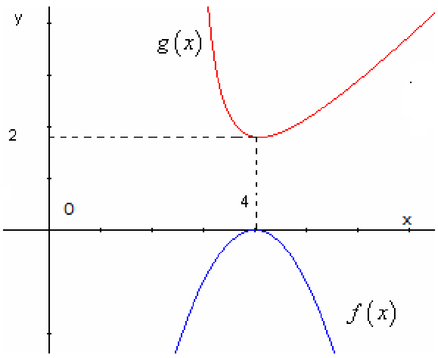
2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

3. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως **Σωστή (Σ)** ή **Λάθος (Λ)**:

α) Δίνεται το παρακάτω σχήμα τότε $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{g(x)}{f(x)}=+\infty$.

Μονάδες 2



β) Αν η f δεν είναι αντιστρέψιμη τότε η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

Μονάδες 2

γ) Η f είναι 1-1 αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $y=f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

Μονάδες 2

δ) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο σύνολο $A=[1,4]$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,4]$ και $f(3)=-2$. Τότε ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in[1,4]$.

Μονάδες 2

ε) Δίνεται η συνεχής και αντιστρέψιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^{-1}(-2015)=4,\ f^{-1}(1949)=-1$. Τότε δεν υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει
$f^2(x)+2f(x)\eta\mu x = x^2+\sigma\upsilon\nu^2 x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$.

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)+\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$ διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Μονάδες 10

2. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x$.

Μονάδες 5

3. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2+\sigma\upsilon\nu x}{x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2+\ln^2 x, & 0<x\le e \\ \alpha x+\ln(x-e+1), & e<x \end{cases}$

α) Να βρείτε τον αριθμό $\alpha\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

β) Αν $\alpha=\dfrac{3}{e}$, τότε η εξίσωση $f(x)=6$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1,2e)$.

Μονάδες 5

2. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν: $f\left(e^{f(x)}\right)=4\ln x+3$, για κάθε $x>0$ και $(f\circ f)\left(e^{f(x)}\right)=\ln\left(\ln x^4+3\right)^2+1$ για κάθε $x>e^{-3/4}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

Μονάδες 5

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Μονάδες 3

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(f \circ f)(x) = f\left(e^{x-2014} + \frac{3}{2}\right)$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(1, e)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x,\ x \in \mathbb{R}$

1. Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

2. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης f στο $[0, +\infty)$.

Μονάδες 3

3. Να δείξετε ότι $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ (Μονάδες 2) και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ (Μονάδες 5).

Μονάδες 7

4. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\left(\sqrt{\alpha^2+1}+\alpha\right)\left(\sqrt{\beta^2+1}+\beta\right) = 1$ να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 0$.

Μονάδες 5

5. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Το θέμα Δ επιμελήθηκε ο **Συγκελάκης Αλέξανδρος, Μαθηματικός του Πρότυπου Πειραματικού Γενικού Λυκείου Ηρακλείου.**

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο, Μοτσάκο Βασίλειο και Σούγελα Ελένη.**