ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΠΑΛ 2019

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολ. βιβλίο, σελ. 28.

Α2. α. Σχολ. βιβλίο, σελ. 59.

β. Σχολ. βιβλίο, σελ. 59.

Α3 α.Λ, **β.**Σ, **γ.**Λ, **δ.**Λ, **γ.**Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Κατ' αρχάς, είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$.

Οπότε $CV = 20\% \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}} = \frac{20}{100} \Leftrightarrow \frac{2}{\bar{x}} = \frac{2}{10} \Leftrightarrow 2\bar{x} = 20 \Leftrightarrow \bar{x} = 10$.

Β2. $\bar{x} = 10 \Leftrightarrow \frac{11+7+k+13+11+10}{6} = 10 \Leftrightarrow \frac{k+52}{6} = 10 \Leftrightarrow k+52 = 60 \Leftrightarrow k = 60-52 = 8$.

Β3. Οι τιμές, σε διάταξη, είναι: 7, 8, 10, 11, 11, 13. Έχουμε 2 μεσαίες τιμές (το πλήθος είναι άρτιο), το 10 και το 11, οπότε $\delta = \frac{10+11}{2} = 10{,}5$. Το εύρος είναι $R = x_{\max} - x_{\min} = 13 - 7 = 6$.

Β4. Αν όλες οι τιμές ελαττωθούν κατά 2, τότε, σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή του βιβλίου, η μέση τιμή θα ελαττωθεί επίσης κατά 2 και θα γίνει 8, ενώ η τυπική απόκλιση θα παραμείνει ίδια $s = 2$. Οπότε, ο συντελεστής μεταβλητότητας θα γίνει $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{8} = 0{,}25 > 10\%$, άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-2x+10}} \cdot \left(x^2-2x+10\right)' = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+10}} = \frac{\cancel{2}(x-1)}{\cancel{2}\sqrt{x^2-2x+10}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}$ (σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης). Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2-2x+10$ είναι $\Delta = (-2)^2 - 4.1.10 = -36 < 0$, άρα το τριώνυμο δεν έχει ρίζες και είναι παντού θετικό (ομόσημο του α=1). Επομένως, τόσο η f, όσο και η f', ορίζονται για κάθε $x \in \Re$.

Γ2. $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$. Επίσης,

$f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}>0 \Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1$ και $f'(x)<0 \Leftrightarrow x<1$, αφού, όπως εξηγήσαμε στο ερώτημα Γ1, ο παρονομαστής είναι πάντα θετικός. Ο πίνακας μονοτονίας της f είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		-	0	+	
f		$\searrow$	ελ.	$\nearrow$	

Άρα η f θα είναι φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,1)$, αύξουσα στο διάστημα $(1,+\infty)$, ενώ στο σημείο $x=1$ θα παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο, ίσο με $f(1)=\sqrt{1^2-2\cdot1+10}=\sqrt{9}=3$. Συνεπώς, για κάθε $x\in\Re$, θα είναι $f(x)\geq 3$.

Γ3. Είναι $f(5)=\sqrt{5^2-2\cdot5+10}=\sqrt{25}=5$ και $f'(5)=\dfrac{5-1}{\sqrt{5^2-2\cdot5+10}}=\dfrac{4}{5}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι $\varepsilon:\psi=\lambda x+\beta$, όπου $\lambda=f'(5)=\dfrac{4}{5}$, άρα, κατ' αρχάς, είναι $\varepsilon:\psi=\dfrac{4}{5}x+\beta$. Η τεταγμένη του Μ είναι $f(5)=5$, οπότε, για να ανήκει στην ε, θα πρέπει $\dfrac{4}{\cancel{5}}\cdot\cancel{5}+\beta=5 \Leftrightarrow \beta+4=5 \Leftrightarrow \beta=1$ και τελικά, η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι $\varepsilon:\psi=\dfrac{4}{5}x+1$.

Γ4. Από την εξίσωση $\varepsilon:\psi=\dfrac{4}{5}x+1$, για $x=0$, έχουμε $\psi=\dfrac{4}{5}\cdot0+1=1$, ενώ για $\psi=0$, έχουμε $0=\dfrac{4}{5}x+1 \Leftrightarrow \cancel{5}\cdot\dfrac{4}{\cancel{5}}x+5\cdot1=5\cdot0 \Leftrightarrow 4x+5=0 \Leftrightarrow 4x=-5 \Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{4}$. Άρα, τα σημεία είναι $A\left(-\dfrac{5}{4},0\right)$ και $B(0,1)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για $\lambda=3$, η f γίνεται $f(x)=x^3-3x^2+3x$, οπότε $f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$.

α. $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3(x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$ (διπλή ρίζα). Η f', ως τετράγωνο, είναι παντού θετική, εκτός από το 1, όπου μηδενίζεται, συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$ και δεν έχει ακρότατα. (Για το πρόσημο της f', θα μπορούσαμε εναλλακτικά να βρούμε την διακρίνουσα του τριωνύμου $3x^2-6x+3$, η οποία είναι $\Delta=(-6)^2-4\cdot 3\cdot 3=36-36=0$, οπότε το τριώνυμο έχει μία ρίζα διπλή, την $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}=-\dfrac{-6}{2\cdot 3}=\dfrac{6}{6}=1$. Άρα θα είναι παντού ομόσημο του α=3, δηλαδή θετικό, εκτός από το 1, όπου μηδενίζεται). Ο πίνακας μονοτονίας της f θα έχει την εξής μορφή:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	+	0	+
f	$\nearrow$		$\nearrow$

β. Συγκρίνουμε τους αριθμούς $\dfrac{3}{8}$ και $\dfrac{5}{6}$, μετατρέποντας τα κλάσματα σε ομώνυμα $\dfrac{3}{8}=\dfrac{9}{24}<\dfrac{20}{24}=\dfrac{5}{6}$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$, θα ισχύει $\dfrac{3}{8}<\dfrac{5}{6}\Leftrightarrow f\left(\dfrac{3}{8}\right)<f\left(\dfrac{5}{6}\right)$.

Δ2. $$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)^2}{x(\sqrt{x}-1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)}{x(\sqrt{x}-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x\left(\sqrt{x}^2-1^2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{3(\sqrt{x}+1)}{x}=\frac{3(\sqrt{1}+1)}{1}=3(1+1)=6.$$

Δ3. Ο συντελεστής διεύθυνσης εκφράζεται από την παράγωγο $f'(x)=3(x-1)^2$ η οποία, όπως δείξαμε στο ερώτημα Δ1 είναι θετική παντού, εκτός από το σημείο $x=1$, όπου μηδενίζεται, δηλαδή παίρνει την ελάχιστη τιμή της και όπου η f έχει τιμή $f(1)=1^3-3\cdot 1^2+3\cdot 1=1-3+3=1$.

Επομένως, το ζητούμενο σημείο είναι το Α(1,1).

Δ4. Η παράγωγος της f είναι $f'(x)=3x^2-6x+\lambda$. Η f, ως πολυωνυμική, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε όλο το $\Re$, επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα των ακροτάτων, αν σε κάποιο σημείο παρουσιάζει ακρότατο, τότε η παράγωγος θα μηδενίζεται. Συνεπώς, για να μην έχει ακρότατα, θα πρέπει η παράγωγος, είτε να μην μηδενίζεται πουθενά, είτε, αν μηδενίζεται, να διατηρεί το πρόσημό της, όπως, για παράδειγμα, στην περίπτωση λ=3, που αναλύσαμε στο ερώτημα Δ1. Άρα θα πρέπει η διακρίνουσα του τριωνύμου $3x^2-6x+\lambda$ να είναι μικρότερη ή ίση του μηδενός, ώστε η f' να μην έχει ρίζες ή να έχει μία ρίζα διπλή και να διατηρεί το θετικό της πρόσημο. Είναι $\Delta=(-6)^2-4\cdot 3\cdot\lambda=36-12\lambda$, οπότε $\Delta\le 0\Leftrightarrow 36-12\lambda\le 0\Leftrightarrow -12\lambda\le -36\Leftrightarrow \lambda\ge 3$.

Θανάσης Οικονόμου, μαθηματικός του ΕΠΑΛ Κω