

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2019-06-10
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (10-06-2019)
ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΓΕΝΙΚΑ ΛΥΚΕΙΑ

ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΓΕΝΙΚΑ ΛΥΚΕΙΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. α) Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδα 15.

“Έστω A ένα υποσύνολο του \mathbb{R} . Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y ”.

β) i) Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδα 35:

«Μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη αν η συνάρτηση f είναι «1-1» (ένα προς ένα) στο A .»

ii) Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδα 36:

1^η Διατύπωση: «Μια συνάρτηση $g : f(A) \rightarrow \mathbb{R}$ με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$ ονομάζεται αντίστροφη συνάρτηση της »

Εναλλακτικά μπορεί να δοθεί και ο ορισμός:

2^η Διατύπωση: «Έστω μια συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το $f(A)$ (δηλαδή το σύνολο τιμών της f) και $x \in A, y \in f(A)$. Αν η f αντιστοιχεί το y στο x και η g αντιστοιχίζει το x στο y και αντιστρόφως, τότε η g ονομάζεται αντίστροφη συνάρτηση της f και συμβολίζεται με f^{-1} .»

3^η Διατύπωση: «Μια συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f ($f(A)$), που συμβολίζεται με f^{-1} , ονομάζεται αντίστροφη συνάρτηση της f αν ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \text{ για όλα τα } x \in A, y \in f(A) \text{ »}$$

Η η λεκτική διατύπωση: « ισχύει $f(x) = y$ αν και μόνο αν $f^{-1}(y) = x$ »

A2. Διατύπωση θεωρήματος, σχολικό βιβλίο σελίδα 142. Θεώρημα του Fermat.

« Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ'ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$. »

A3. Απόδειξη Θεωρήματος σχολικό βιβλίο σελίδα 135.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

, οπότε έχουμε:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

A4. α) Λάθος.

Αιτιολόγηση (Σχόλιο σχολικού βιβλίου)

Η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \text{ αν και } f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \text{ δεν είναι σταθερή στο}$$

$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

β) Λάθος.

Αιτιολόγηση: (Σχόλιο σχολικού βιβλίου)

Η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases} \text{ έχει } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2. \text{ Όμως } f(1) = 2$$

Ενναλακτική αιτιολόγηση:

Οποιαδήποτε συνάρτηση f της οποίας υπάρχει το όριο της στο \mathbb{R} όταν $x \rightarrow x_0$ και ΔEN είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Αυτό σημαίνει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

ΘΕΜΑ Β

B1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{1\}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Έχουμε ισοδύναμα:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_1 - 1} = \frac{x_2}{x_2 - 1} \Leftrightarrow x_1 x_2 - x_1 = x_1 x_2 - x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι συνάρτηση «1-1» και επομένως υπάρχει η αντίστροφη της:

Ένρεση αντίστροφης f^{-1} :

Για κάθε $x \neq 1$ θέτουμε $f(x) = y$ και έχουμε ισοδύναμα:

$$f(x) = y \Leftrightarrow y = \frac{x}{x-1} \Leftrightarrow yx + y = x \Leftrightarrow yx - x = -y \Leftrightarrow x = \frac{y}{y-1} \text{ με } y \neq 1$$

Επομένως η αντίστροφη είναι:

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{x-1}, x \neq 1$$

(δηλαδή $f^{-1}(x) = f(x), x \neq 1$)

B2. Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$ με:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

Άρα $f'(2) = -1$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(2, f(2))$ είναι:

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - 2 = -(x - 2) \Leftrightarrow y = -x + 4$$

B3. Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$ με:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ είναι:

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} - \{1\} : f(x) \geq 2\} = \{x \in \mathbb{R} - \{1\} : x^2 + 1 \geq 2\} = \{x \in \mathbb{R} - \{1\} : x^2 \geq 1\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) = A$$

Για κάθε $x \in D_{g \circ f}$ έχουμε:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1} - 2 = \sqrt{x^2 - 1}, x \in A$$

Γ2. Η ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$ που $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$ έχει την μορφή $y = \lambda x + b$, όπου:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x]$$

Έχουμε:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 1, b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 1} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0$$

Άρα η $y = x$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$ (η διχοτόμος της γωνίας του $1^{\text{ου}}$ και $3^{\text{ου}}$ τεταρτημορίου των αξονων).

Γ3. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x) - \sqrt{3}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{3}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το \mathbb{R} . Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} θα είναι και συνεχής στο f . Επομένως θα είναι και συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$.

Άρα έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + a) = 1 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-(x-1)^4 + \beta x) = \beta$$

$$f(1) = 1 + a$$

Πρέπει $\beta = 1 + a$ (1)

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ θα έχουμε ότι τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ και

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ υπάρχουν στο \mathbb{R} και ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + a - 1 - a}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)^4 + \beta x - 1 - a}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)^4 + \beta x - 1 - (\beta - 1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)^4 + \beta x - \beta}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)[-(x-1)^3 + \beta]}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} [-(x-1)^3 + \beta] = \beta \end{aligned}$$

Άρα $\beta = 2$ και από την (1) $\alpha = 1$

$$\Delta 2. f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 1 \\ -4(x-1)^3 + 2, & x < 1 \end{cases}$$

$f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

$f(x) > 0$ για κάθε $(-\infty, 1)$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1)$.

Επειδή η f είναι παντού συνεχής άρα και στο σημείο $x_0 = 1$ θα είναι γνησίως αύξουσα στο

$$(-\infty, 1) \cup [1, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το:

$$f[(-\infty, 1)] = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right) = (-\infty, 2)$$

$$f[[1, +\infty)) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [2, +\infty)$$

$$f[(-\infty, 1)] \cup f[[1, +\infty)] = (-\infty, 2) \cup [2, +\infty) = \mathbb{R}$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το \mathbb{R} .

Δ3. Εύρεση ρίζας της $f(x)$

Α' τρόπος

Το $0 \in f[(0, +\infty)] = (\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = (-1, +\infty)$ και άρα υπάρχει, τουλάχιστον ένα,

$x_0 \in (0, +\infty)$ -δηλαδή θετικό x_0 , τέτοιο, ώστε: $f(x_0) = 0$. Το x_0 είναι μοναδικό διότι η f , ως γνησίως αύξουσα είναι και συνάρτηση «1-1».

Β' τρόπος

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano για την συνάρτηση f στο διάστημα $[0, 1]$.

Έχουμε:

- ♦ Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ (αφού είναι συνεχής στο \mathbb{R})
- ♦ $f(0) = -1 < 0$
 $f(1) = 2 > 0$ άρα $f(0) \cdot f(1) < 0$ και άρα υπάρχει, τουλάχιστον ένα, $x_0 \in (0, 1)$
 τέτοιο, ώστε: $f(x_0) = 0$.

Το x_0 είναι μοναδικό διότι η f , ως γνησίως αύξουσα είναι και συνάρτηση «1-1».

Δ4. Έχουμε:

$$f^2(x) + x_0 f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot [f(x) + x_0] = 0$$

Τώρα: Για κάθε $x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \Rightarrow f(x) > 0$

Ακόμα: $f(x) > -x_0$, αφού $f(x) > 0$ και $-x_0 < 0$.

Επομένως :

$$f(x) \cdot [f(x) + x_0] > 0 \Leftrightarrow f^2(x) + x_0 f(x) > 0$$

και άρα η εξίσωση $f^2(x) + x_0 f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$.

Καραγιάννης Ιωάννης,

Συντονιστής Εκπαιδευτικού Έργου, 2^ο ΠΕ.Κ.Ε.Σ. Ν. Αιγαίου