ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2019
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (10-06-2019)

ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΓΕΝΙΚΑ ΛΥΚΕΙΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. α) Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδα 15.

"Έστω Α ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. *Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α μια διαδικασία (κανόνα)* f, *με την οποία κάθε στοιχείο* $x \in A$ *αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y".*

β) i) Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδα 35:

«Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ *έχει αντίστροφη αν η συνάρτηση* f *είναι «1-1» (ένα προς ένα) στο Α.»*

ii) Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδα 36:

<u>1η Διατύπωση:</u> *«Μια συνάρτηση* $g: f(A) \to \mathbb{R}$ *με την οποία κάθε* $y \in f(A)$ *αντιστοιχίζεται στο μοναδικό* $x \in A$ *για το οποίο ισχύει* $f(x) = y$ *ονομάζεται αντίστροφη συνάρτηση της »*

Εναλακτικά μπορε΄να δοθεί και ο ορισμός:

<u>2η Διατύπωση:</u> «*Έστω μια συνάρτηση* g *με πεδίο ορισμού το* $f(A)$ *(δηλαδή το σύνολο τιμών της* f *) και* $x \in A, y \in f(A)$. *Αν η* f *αντιστοιχεί το y στο x και η g αντιστοιχίζει το x στο y και αντιστρόφως, τότε η* g *ονομάζεται αντίστροφη συνάρτηση της* f *και συμβολίζεται με* f^{-1}.»

<u>3η Διατύπωση:</u> *«Μια συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της* f *(* $f(A)$ *), που συμβολίζεται με* f^{-1}, *ονομάζεται αντίστροφη συνάρτηση της* f *αν ισχύει η ισοδυναμία:*

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \text{ για όλα τα } x \in A, y \in f(A) \text{»}$$

Η η λεκτική διατύπωση: « ισχύει $f(x) = y$ αν και μόνο αν $f^{-1}(y) = x$»

Α2. Διατύπωση θεωρήματος, σχολικό βιβλίο σελίδα 142. Θεώρημα του Fermat.

« Έστω μια συνάρτηση f *ορισμένη σ΄ένα διάστημα Δ και* x_0 *ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η* f *παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο* x_0 *και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε* $f'(x_0) = 0$.»

Α3. Απόδειξη Θεωρήματος σχολικό βιβλίο σελίδα 135.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

, οπότε έχουμε:

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$$

Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$,οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

A4. α) Λάθος .

Αιτιολόγηση (Σχόλιο σχολικού βιβλίου)

Η συνάρτηση:

$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$ αν και $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ δεν είναι σταθεή στο $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

β) Λάθος.

Αιτιολόγηση: (Σχόλιο σχολικού βιβλίου)

Η συνάρτηση:

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 3 & , x=1\end{cases}$ έχει $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$. Όμως $f(1)=2$

Εναλακτική αιτιολόγηση:

*Οποιαδήποτε συνάρτηση f της οποίας υπάρχει το όριο της στο $\mathbb{R}$ όταν $x\to x_0$ και **ΔΕΝ** είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Αυτό σημαίνει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.*

A5. Το (γ) είναι η σωστή απάντηση (Ερώτημα 10- Ερωτήσεις κατανόησης Κεφάλαιο 3^{ου}).

==

ΘΕΜΑ Β

B1. Για να έχει η f οριζόντια ασύμπτωστη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2$ πρέπει και αρκεί να είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=2\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}[e^{-x}+\lambda]=2\Leftrightarrow\lambda=2$$

B2. Θέτουμε ως συνάρτηση:

$$g(x)=f(x)-x=e^{-x}-x+2,\ x\in[2,3].$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano για τη συνάρτηση g στο διάστημα $[2,3]$. Έχουμε:

- Η g είναι συνεχής στο διάστημα $[2,3]$ (ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο $[2,3]$).

- $g(2) = e^{-2} > 0$
  $g(3) = e^{-3} - 1 = \dfrac{1-e^3}{e^3} < 0$

Δηλαδή $g(2)\cdot g(3) < 0$ και άρα υπάρχει, τουλάχιστον ένα, $x_0 \in (2,3)$, τέτοιο ώστε:

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 = 0.$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[2,3]$, ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο διάστημα $[2,3]$ με:

$$g'(\mathrm{x}) = -e^{-x} - 1 = -(e^{-x} - 1) < 0, \text{ για κάθε } x \in (2,3),$$

άρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(2,3)$.

Επομένως το $x_0 \in (2,3)$ είναι μοναδικό, διότι η συνάρτηση g ως γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(2,3)$ είναι και συνάρτηση «1-1» στο $(2,3)$.

B3. Για την απόδειξη του «1-1» στο $\mathbb{R}$.

Α΄τρόπος:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με $f'(x) = -e^{-x} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα είναι συνάρτηση «1-1» στο $\mathbb{R}$.

Β΄τρόπος (με την βοήθεια του ορισμού)

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{-x_1} + 2 = e^{-x_2} + 2 \Rightarrow e^{-x_1} = e^{-x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

άρα η f είναι συνάρτηση «1-1».

Για την εύρεση της αντίστροφης f^{-1}:

Αφού η f είναι συνάρτηση «1-1» υπάρχει η αντίστροφή της συνάρτηση f^{-1}:

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $y > 2$ θέτουμε $f(x) = y$ και έχουμε ισοδύναμα:

$$f(x) = y \Leftrightarrow e^{-x} + 2 = y \Leftrightarrow e^{-x} = y - 2 \Leftrightarrow -x = \ln(y-2) \Leftrightarrow x = -\ln(y-2)$$

Άρα η αντίστροφη της f είναι: $f^{-1}(x) = -\ln(x-2), x > 2$

B4.

Κατακόρηφη ασύμπτωση θα αναζητήσουμε μόνο στο $x = 2$

Έχουμε:

Θα βρούμε το $\lim\limits_{x\to 2^+} f^{-1}(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(-\ln(x-2)\right)$. Θέτουμε $x - 2 = u$ και έχουμε $x \to 2^+ \Leftrightarrow u \to 0^+$.

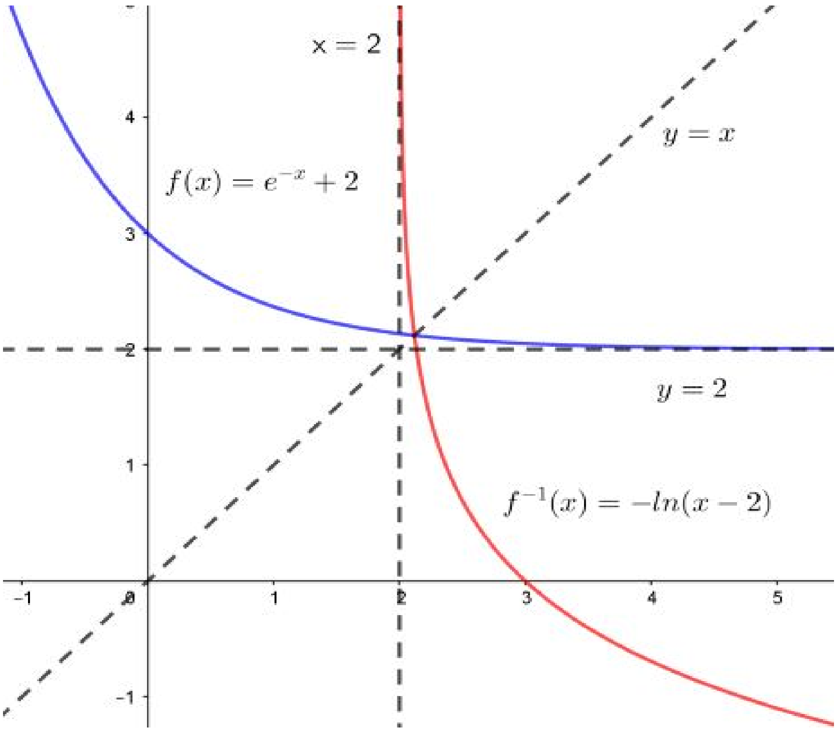
Επομένως είναι: $\lim\limits_{x\to 2^+} f^{-1}(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(-\ln(x-2)\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}(-\ln u) = -\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln u) = +\infty$

Άρα η κατακόρυφη ασύμπτωτη της f^{-1} είναι η ευθεία $x=2$.

Για τη γραφική παράσταση $C_f, C_{f^{-1}}$ των f και f^{-1}:

Οι γραφικές παραστάσεις $C_f, C_{f^{-1}}$ των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την διχοτόμο των γωνιών του 1ου και 3ου τεταρτημορίου στο σύστημα συντεταγμένων.

Οι γραφικές παραστάσεις των $C_f, C_{f^{-1}}$ των f και f^{-1} φαίνονται στο επόμενο σχήμα:



Στο σχήμα διακρίνονται οι ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων και τα σημεία τομής τους με τους άξονες.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $x_0=1$. Επομένως στο σημείο $x_0=1$ είναι και συνεχής. Άρα έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$$

Είναι:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(e^{x-1}+\beta x) = 1+\beta$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2+a) = 1+a$$

$$f(1) = 1+a$$

Άρα: $1+a=1+\beta \Leftrightarrow \alpha=\beta$

- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $x_0=1$. Άρα, σύμφωνα με τον ορισμό της παραγωγισιμότητας σε ένα σημείο $x_0=1$ του πεδίου ορισμού της, υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}, \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ στο $\mathbb{R}$ και είναι ίσα:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \quad (1)$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+a-1-a}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-a}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+ax-1-a}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\left[\frac{e^{x-1}-1}{x-1}+a\right]=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}+a=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}}{1}+a=1+a$$

Άρα: $1+a=2 \Leftrightarrow a=1, \beta=1$.

Γ2. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσμη στο $\mathbb{R}$ με:

- $f'(x)=2x>0$, για κάθε $x\geq 1$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty]$.
- $f'(x)=e^{x-1}+1>0$ για κάθε $x<1$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,1)$.

και αφού η f είναι συνεχής και στο $x_0=1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1)\cup[1,+\infty]=\mathbb{R}$

Για το σύνολο τιμών της f έχουμε (αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$):

$$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x), \lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

διότι:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^{x-1}+x)=0+(-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty$$

Γ3. i) Η εικόνα του διαστήματος $(-\infty,0)$ (του αρνητικού ημιάξονα) είναι:

$f\left((-\infty,0)\right)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x), \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\right)=(-\infty,e^{-1})$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και στο $(-\infty,0)$.

Αφού $0 \in \left(-\infty, e^{-1}\right) = f\left((-\infty, 0)\right)$ υπάρχει, τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(-\infty, 0\right)$, τέτοιο ώστε: $f(x_0) = 0$. Το x_0 είναι προφανώς αρνητικό και μοναδικό, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και συνάρτηση «1-1».

ii) Για κάθε $x \in (x_0, +\infty)$ έχουμε:

$$f^2(x) - x_0 f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)\left(f(x) - x_0\right) = 0$$

Όμως:

- $x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) = 0$, άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_0, +\infty)$
- $f(x) > 0 > x_0 \Rightarrow f(x) - x_0 > 0$ για κάθε $x \in (x_0, +\infty)$

Άρα $f(x)\left(f(x) - x_0\right) > 0$ για κάθε $x \in (x_0, +\infty)$ και επομένως η εξίσωση;

$$f(x)\left(f(x) - x_0\right) = 0$$

είναι αδύνατη στο διάστημα $(x_0, +\infty)$.

Γ4. Το εμβαδόν Ε του τριγώνου MOK είναι:

$$E = \frac{1}{2}(OK)\cdot(KM) = \frac{1}{2}x_K \cdot y_M \quad (1)$$

όπου x_K η τετμημένη του σημείου Κ και y_M η τεταγμένη του σημείου Μ.

Αφού $x_K = x \geq 1,\ y_M = x^2 + 1$ η (1) γίνεται:

$$E = \frac{1}{2}x(x^2+1),\ x \geq 1$$

Επειδή το $x_K = x$ είναι συνάρτηση του χρόνου t έχουμε:

$$E(t) = \frac{1}{2}x(t)(x^2(t)+1),\ x(t) \geq 1$$

Ο ρυθμός μεταβολής του $E(t)$ είναι η παράγωγος ως προς t:

$$E'(t) = \frac{1}{2}\left(3x^2(t)x'(\mathrm{t}) + x'(\mathrm{t})\right)$$

Για $t = t_0$ είναι $x'(\mathrm{t}) = 2, x(t_0) = 3$ και άρα:

$$E'(t_0) = \frac{1}{2}\left(3\cdot 3^2 \cdot 2 + 2\right) = 28 \text{ τετραγωγικές μονάδες ανά δευτερόλεπτο.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από τα δεδομένα προκύπτει ότι: $f(1)=1,\ f'(1)=-1$. Άρα $f(1)=\alpha+\beta=1$ (1).

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(\mathrm{x})=\ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}+a,\ x\in\mathbb{R}$$

Άρα:

$$f'(1)=-1\Leftrightarrow \ln 1+0+a=-1\Leftrightarrow a=-1$$

και από την (1) προκύπτει $\beta=2$.

Δ2. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\mathrm{E}=\int_1^2\left|f(x)-(-x+2)\right|dx=\int_1^2\left|f(x)+x-2\right|dx=\int_1^2\left|(x-1)\ln(x^2-2x+2)-x+2+x-2\right|dx=$$

$$=\int_1^2\left|(x-1)\ln(x^2-2x+2)\right|dx\quad(2)$$

Επειδή για κάθε $x\in[1,2]$ είναι $(x-1)\ln(x^2-2x+2)>0$ διότι:

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x^2-2x+2>1\Leftrightarrow x^2-2x+1>0\Leftrightarrow (x-1)^2>0 \end{cases}$$

Το εμβαδόν Ε γίνεται λόγω της (2):

$$E=\int_1^2(x-1)\ln(x^2-2x+2)=\frac{1}{2}\int_1^2(x^2-2x+2)'\ln(x^2-2x+2)dx$$

Θέτουμε: $u=x^2-2x+2$ και άρα $du=\left(x^2-2x+2\right)'\mathrm{dx}$ και για $\begin{matrix} x=1\Leftrightarrow u=1 \\ x=2\Leftrightarrow u=2 \end{matrix}$. Άρα:

$$E=\frac{1}{2}\int_1^2\ln u du=\frac{1}{2}\int_1^2(u)'\ln u du=\frac{1}{2}[u\ln u]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 u(\ln u)'du=\ln 2-\frac{1}{2}\int_1^2 1du=\ln 2-\frac{1}{2}[u]_1^2=\ln 2-\frac{1}{2}\ \text{τ.μ.}$$

Δ3. **i)** Από το Δ1 ερώτημα έχουμε:

$$f'(\mathrm{x})=\ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1,\ x\in\mathbb{R}$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

$$f'(\mathrm{x})\geq -1\Leftrightarrow \ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1\geq -1\Leftrightarrow \ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}\geq 0$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Έχουμε για κάθε $x\in\mathbb{R}$:

$$x^2-2x+2>1 \Leftrightarrow x^2-2x+1>0 \Leftrightarrow (x-1)^2>0$$
$$\ln(x^2-2x+2)>\ln 1 \Leftrightarrow \ln(x^2-2x+2)$$
$$\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}>0$$

Άρα $f'(\mathrm{x})\geq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) **<u>Α΄τρόπος</u>**

Η προς απόδειξη ανισότητα γίνεται διαδοχικά:

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq(\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)+\frac{3}{2}\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq(\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)-\lambda+2-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq f(\lambda)-\frac{1}{2}\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\geq-\frac{1}{2}\ (\mathrm{I})$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφοικού Λογισμού για την συνάρτηση f στο διάστημα $\left[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right]$ αφού:

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right]$(ως συνεχής στο $\mathbb{R}$)
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$(ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$)

Επομένως υπάρχει

$$\xi\in\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right):\ f'(\xi)=\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}\Rightarrow f'(\xi)=2\left[f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\right]\ (\mathrm{II})$$

Όμως $f'(\mathrm{x})\geq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα και :

$$f'(\xi)\geq-1\Leftrightarrow 2\left[f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\right]\geq-1\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\geq-\frac{1}{2}$$ που είναι η ισοδύναμη (I)

Β΄τρόπος:

Έχουμε: $f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)=\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+1\right)-\lambda+\frac{3}{2},\ \lambda\in\mathbb{R}$

Η ζητούμενη σχέση γίνεται διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq(\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)+\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+1\Leftrightarrow\right)-\lambda+\frac{3}{2}\geq(\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)+\frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+1\Leftrightarrow\right)-\lambda\geq(\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)\ (\mathrm{I})$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=x\ln(x^2+1),\ x\in\mathbb{R}$ και η σχέση (I) γίνεται ισοδύναμα:

$$h\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\geq h(\lambda-1) \quad \text{(II)}$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε την σχέση (II). Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως γινόμενο και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$h'(x)=\ln(x^2+1)+\frac{2x^2}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$$

Έχουμε: $h'(x)=\ln(x^2+1)+\dfrac{2x^2}{x^2+1}\geq 0$ (το = ισχύει μόνο για $x=0$).

Άρα:

- $h'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$ και άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$
- $h'(x)>0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$ και άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

  και επειδή η h είναι συνεχής και στο 0 η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επομένως για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$-1<-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \lambda-1<\lambda-\frac{1}{2}\Leftrightarrow h(\lambda-1)<h\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)$$

(προφανώς ισχύει και το $h(\lambda-1)\leq h\left(\lambda-\dfrac{1}{2}\right)$ αν και αυτό που αποδείχθηκε είναι πιο ισχυρό)

Επομένως αποδείξαμε την ισοδύναμη ζητούμενη σχέση.

Δ4. **<u>Α΄τρόπος</u>**

Έστω $A(x_1, f(x_1)),\ B(x_2, g(x_2))$ τα σημεία επαφής των C_f, C_g με τις εφαπτομένες τους αντίστοιχα. Πρέπει $f'(x_1)=g'(x_2)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο Α είναι:

$$(\varepsilon_1)\ y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)\Leftrightarrow y=f'(x_1)(x-x_1)+f(x_1)\Leftrightarrow y=f'(x_1)x-f'(x_1)x_1+f(x_1)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο Β είναι:

$$(\varepsilon_2)\ y-g(x_2)=g'(x_2)(x-x_2)\Leftrightarrow y=g'(x_2)(x-x_2)+g(x_2)\Leftrightarrow y=g'(x_2)x-g'(x_2)x_2+g(x_2)$$

Οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) συμπίπτουν (αφού δέχονται κοινή εφαπτομένη) και άρα έχουμε:

$$\begin{aligned}&f'(x_1)=g'(x_2)\\&f(x_1)-f'(x_1)x_1=g(x_2)-g'(x_2)x_2\end{aligned}$$

Ισχύουν:

$$\begin{aligned}&f'(x_1)=g'(x_2)\Leftrightarrow f'(x_1)=-3x_2^2-1\\&f'(x_1)\geq -1\Leftrightarrow -3x_2^2-1\geq -1\Leftrightarrow -3x_2^2\geq 0\Leftrightarrow x_2=0\end{aligned}$$

Για $x_2 = 0$ έχουμε:

$$f'(x_1) = -1 \Leftrightarrow \ln(x_1^2 - 2x_1 + 2) + \frac{2(x_1-1)^2}{x_1^2 - 2x_1 + 2} - 1 = -1 \Leftrightarrow ln(x_1^2 - 2x_1 + 2) + \frac{2(x_1-1)^2}{x_1^2 - 2x_1 + 2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ln(x_1^2 - 2x_1 + 2) = 0 \\ \dfrac{2(x_1-1)^2}{x_1^2 - 2x_1 + 2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = 1$$

Για τις τιμές $x_1 = 0$ και $x_2 = 0$ επαληθεύεται και η σχέση: $f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g'(x_2)x_2$ (αφού τότε $f'(1) - f(1) = g(0) \Leftrightarrow -1 = -1$).

Άρα οι τιμές $x_1 = 0$ και $x_2 = 0$ είναι δεκτές αφού επαληθεύουν όλες τις σχέσεις και άρα η κοινή εφαπτομένη είναι:

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) \Leftrightarrow y = -(x-1) + 1 \Leftrightarrow y = -x + 2$$

Οι τιμές των $x_1 = 0$ και $x_2 = 0$ που επαληθεύουν το παραπάνω σύστημα εξισώσεων είναι μοναδικές και άρα η κοινή εφαπτομένη είναι μοναδική.

<u>Β΄τρόπος:</u>

Η συνάρτηση g είναι παραγωίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = -3x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Έστω $A(x_1, f(x_1)),\ B(x_2, g(x_2))$ τα σημεία επαφής των C_f, C_g με τις εφαπτομένες τους αντίστοιχα. Πρέπει $f'(x_1) = g'(x_2)$.

Από το ερώτημα Δ3i) έχουμε $f'(x_1) \geq -1$ και το = ισχύει μόνο για $x_1 = 1$ (η f είναι «1-1»)

Επίσης $g'(x_2) = -3x_2^2 - 1 \leq -1$ και το - ισχύει μόνο για $x_2 = 0$

Άρα τα σημεία επαφής είναι $A(1, f(1))$ και $B(0, g(0))$ τα οποία είναι μοναδικά αφού τα $x_1 = 0$ και $x_2 = 0$ είναι μοναδικά.

Η εξίσωση επομένως της κοινής εφαπτομένης τους είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - 1 = -(x-1) \Leftrightarrow y = -x + 2 \text{ ή}$$

$$y - g(0) = g'(0)(x-0) \Leftrightarrow y - 2 = -x \Leftrightarrow y = -x + 2$$

Καραγιάννης Ιωάννης,

Συντονιστής Εκπαιδευτικού Έργου Μαθηματικών Ν. Δωδεκανήσου, 2ο ΠΕ.Κ.Ε.Σ. Ν. Αιγαίου