ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2018-2019/ 10-06-2019

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΕΡΓΟΥ , 2^{Ο} ΠΕ.ΚΕ.Σ. ΝΟΤΙΟΥ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$.

α) Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A;

(Μονάδες 2)

β) **i.** Πότε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη;

(Μονάδα 1)

ii. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του **(i),** πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f;

(Μονάδες 3)

Μονάδες 6

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat που αφορά τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης.

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 5

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. **Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.***

α) Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο A.

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

β) Για κάθε συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_o \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_o.

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

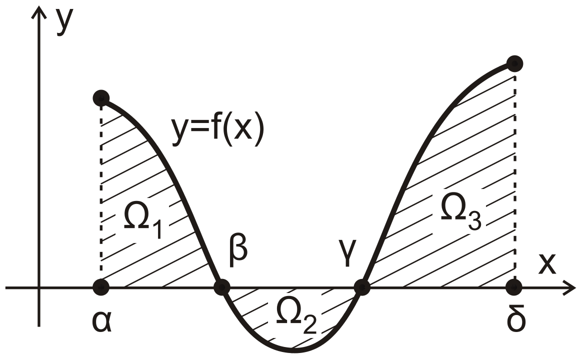
Μονάδες 8

Α5. Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος.

Αν για τα εμβαδά των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3 ισχύει ότι

$E(\Omega_1)=2$, $E(\Omega_2)=1$ και $E(\Omega_3)=3$,

τότε το $\int_{\alpha}^{\delta} f(x)dx$ είναι ίσο με:



α) 6 **β)** -4 **γ)** 4 **δ)** 0 **ε)** 2

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^{-x}+\lambda$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\lambda=2$.

Μονάδες 3

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)-x=0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2,3)$.

Μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Β4. Έστω $f^{-1}(x)=-\ell n(x-2),\ \ x>2$. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης (μονάδες 3) και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (μονάδες 6).

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha, & x\ge 1 \\ e^{x-1}+\beta x, & x<1. \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=1$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

Γ3. **i.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_o, η οποία είναι αρνητική.

(Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)-x_o f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_o,+\infty)$.

(Μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Ένα σημείο $M(x,y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, $x\ge 1$.

Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $A(3,10)$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $M\overset{\Delta}{O}K$ τη χρονική στιγμή t_0, όπου $K(x,0)$ και $O(0,0)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=(x-1)\,\ell n(x^2-2x+2)+\alpha x+\beta$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και η ευθεία $(\varepsilon): y=-x+2$, η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1,1)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$ και $\beta=2$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία (ε) και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

Μονάδες 5

Δ3. **i.** Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 3)

ii. Να αποδείξετε ότι $f(\lambda + \frac{1}{2}) + \lambda \geq (\lambda - 1)\ell n(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -x^3 - x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρείτε την εξίσωσή της.

Μονάδες 8

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2019
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (10-06-2019)

ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΓΕΝΙΚΑ ΛΥΚΕΙΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. α) Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδα 15.

"Έστω Α ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. *Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α μια διαδικασία (κανόνα)* f, *με την οποία κάθε στοιχείο* $x \in A$ *αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y".*

β) i) Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδα 35:

«Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ *έχει αντίστροφη αν η συνάρτηση* f *είναι «1-1» (ένα προς ένα) στο Α.»*

ii) Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδα 36:

<u>1η Διατύπωση:</u> *«Μια συνάρτηση* $g: f(A) \to \mathbb{R}$ *με την οποία κάθε* $y \in f(A)$ *αντιστοιχίζεται στο μοναδικό* $x \in A$ *για το οποίο ισχύει* $f(x) = y$ *ονομάζεται αντίστροφη συνάρτηση της »*

Εναλακτικά μπορε΄να δοθεί και ο ορισμός:

<u>2η Διατύπωση:</u> «*Έστω μια συνάρτηση* g *με πεδίο ορισμού το* $f(A)$ *(δηλαδή το σύνολο τιμών της* f *) και* $x \in A, y \in f(A)$. *Αν η* f *αντιστοιχεί το y στο x και η g αντιστοιχίζει το x στο y και αντιστρόφως, τότε η* g *ονομάζεται αντίστροφη συνάρτηση της* f *και συμβολίζεται με* f^{-1}.*»*

<u>3η Διατύπωση:</u> *«Μια συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της* f ($f(A)$), *που συμβολίζεται με* f^{-1}, *ονομάζεται αντίστροφη συνάρτηση της* f *αν ισχύει η ισοδυναμία:*

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \text{ για όλα τα } x \in A, y \in f(A) \text{»}$$

Η η λεκτική διατύπωση: « ισχύει $f(x) = y$ αν και μόνο αν $f^{-1}(y) = x$»

Α2. Διατύπωση θεωρήματος, σχολικό βιβλίο σελίδα 142. Θεώρημα του Fermat.

« Έστω μια συνάρτηση f *ορισμένη σ΄ένα διάστημα Δ και* x_0 *ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η* f *παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο* x_0 *και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε* $f'(x_0) = 0$.*»*

Α3. Απόδειξη Θεωρήματος σχολικό βιβλίο σελίδα 135.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

, οπότε έχουμε:

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)\left(x_2-x_1\right)$$

Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$,οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

Α4. α) Λάθος .

Αιτιολόγηση (Σχόλιο σχολικού βιβλίου)

Η συνάρτηση:

$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$ αν και $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ δεν είναι σταθερή στο $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

β) Λάθος.

Αιτιολόγηση: (Σχόλιο σχολικού βιβλίου)

Η συνάρτηση:

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 3 & , x=1\end{cases}$ έχει $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$. Όμως $f(1)=2$

Εναλλακτική αιτιολόγηση:

*Οποιαδήποτε συνάρτηση f της οποίας υπάρχει το όριο της στο $\mathbb{R}$ όταν $x\to x_0$ και **ΔΕΝ** είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Αυτό σημαίνει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.*

Α5. Το (γ) είναι η σωστή απάντηση (Ερώτημα 10- Ερωτήσεις κατανόησης Κεφάλαιο 3^ου^).

===

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για να έχει η f οριζόντια ασύμπτωστη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2$ πρέπει και αρκεί να είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=2\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left[e^{-x}+\lambda\right]=2\Leftrightarrow\lambda=2$$

Β2. Θέτουμε ως συνάρτηση:

$$g(x)=f(x)-x=e^{-x}-x+2,\ x\in[2,3].$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano για τη συνάρτηση g στο διάστημα $[2,3]$. Έχουμε:

- Η g είναι συνεχής στο διάστημα $[2,3]$ (ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο $[2,3]$).

- $g(2)=e^{-2}>0$
  $g(3)=e^{-3}-1=\dfrac{1-e^3}{e^3}<0$

Δηλαδή $g(2)\cdot g(3)<0$ και άρα υπάρχει, τουλάχιστον ένα, $x_0\in(2,3)$, τέτοιο ώστε:

$$g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)-x_0=0.$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[2,3]$, ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο διάστημα $[2,3]$ με:

$$g'(\mathrm{x})=-e^{-x}-1=-(e^{-x}-1)<0, \text{ για κάθε } x\in(2,3),$$

άρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(2,3)$.

Επομένως το $x_0\in(2,3)$ είναι μοναδικό, διότι η συνάρτηση g ως γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(2,3)$ είναι και συνάρτηση «1-1» στο $(2,3)$.

B3. Για την απόδειξη του «1-1» στο $\mathbb{R}$.

<u>Α΄τρόπος:</u>

Η f είναι παραγωγίσμη στο $\mathbb{R}$ (ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με $f'(x)=-e^{-x}<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα είναι συνάρτηση «1-1» στο $\mathbb{R}$.

<u>Β΄τρόπος (με την βοήθεια του ορισμού)</u>

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow e^{-x_1}+2=e^{-x_2}+2\Rightarrow e^{-x_1}=e^{-x_2}\Rightarrow x_1=x_2$$

άρα η f είναι συνάρτηση «1-1».

Για την εύρεση της αντίστροφης f^{-1}:

Αφού η f είναι συνάρτηση «1-1» υπάρχει η αντίστροφή της συνάρτηση f^{-1}:

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $y>2$ θέτουμε $f(x)=y$ και έχουμε ισοδύναμα:

$$f(x)=y\Leftrightarrow e^{-x}+2=y\Leftrightarrow e^{-x}=y-2\Leftrightarrow -x=\ln(y-2)\Leftrightarrow x=-\ln(y-2)$$

Άρα η αντίστροφη της f είναι: $f^{-1}(x)=-\ln(x-2), x>2$

B4.

Κατακόρηφη ασύμπτωση θα αναζητήσουμε μόνο στο $x=2$

Έχουμε:

Θα βρούμε το $\lim\limits_{x\to 2^+} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(-\ln(x-2)\right)$. Θέτουμε $x-2=u$ και έχουμε $x\to 2^+\Leftrightarrow u\to 0^+$.

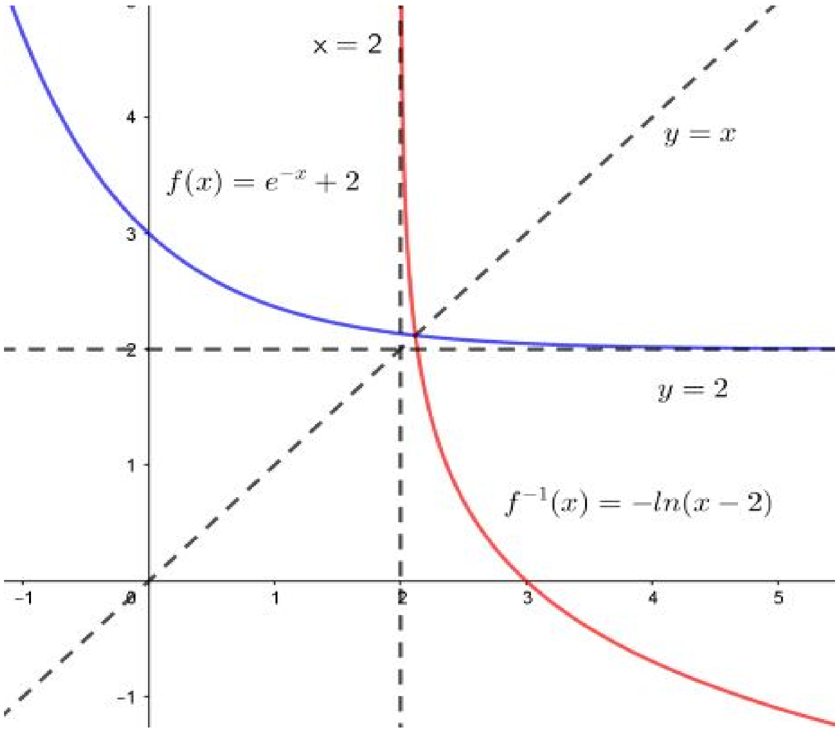
Επομένως είναι: $\lim\limits_{x\to 2^+} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(-\ln(x-2)\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-\ln u)=-\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln u)=+\infty$

Άρα η κατακόρυφη ασύμπτωτη της f^{-1} είναι η ευθεία $x = 2$.

Για τη γραφική παράσταση $C_f, C_{f^{-1}}$ των f και f^{-1}:

Οι γραφικές παραστάσεις $C_f, C_{f^{-1}}$ των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την διχοτόμο των γωνιών του $1^{ου}$ και $3^{ου}$ τεταρτημορίου στο σύστημα συντεταγμένων.

Οι γραφικές παραστάσεις των $C_f, C_{f^{-1}}$ των f και f^{-1} φαίνονται στο επόμενο σχήμα:



Στο σχήμα διακρίνονται οι ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων και τα σημεία τομής τους με τους άξονες.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $x_0 = 1$. Επομένως στο σημείο $x_0 = 1$ είναι και συνεχής. Άρα έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$$

Είναι:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(e^{x-1} + \beta x) = 1 + \beta$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2 + a) = 1 + a$$

$$f(1) = 1 + a$$

Άρα: $1 + a = 1 + \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$

- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $x_0=1$. Άρα, σύμφωνα με τον ορισμό της παραγωγισιμότητας σε ένα σημείο $x_0=1$ του πεδίου ορισμού της, υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}, \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ στο $\mathbb{R}$ και είναι ίσα:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \quad (1)$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+a-1-a}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-a}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+ax-1-a}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\left[\frac{e^{x-1}-1}{x-1}+a\right]=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}+a=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}}{1}+a=1+a$$

Άρα: $1+a=2\Leftrightarrow a=1, \beta=1$.

Γ2. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσμη στο $\mathbb{R}$ με:

- $f'(x)=2x>0$, για κάθε $x\geq 1$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty]$.
- $f'(x)=e^{x-1}+1>0$ για κάθε $x<1$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,1)$.

και αφού η f είναι συνεχής και στο $x_0=1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1)\cup[1,+\infty]=\mathbb{R}$

Για το σύνολο τιμών της f έχουμε (αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$):

$$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x), \lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

διότι:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}+x\right)=0+(-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty$$

Γ3. i) Η εικόνα του διαστήματος $(-\infty,0)$ (του αρνητικού ημιάξονα) είναι:

$f\left((-\infty,0)\right)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x), \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\right)=\left(-\infty,e^{-1}\right)$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και στο $(-\infty,0)$.

Αφού $0 \in (-\infty, e^{-1}) = f((-\infty, 0))$ υπάρχει, τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-\infty, 0)$, τέτοιο ώστε: $f(x_0) = 0$. Το x_0 είναι προφανώς αρνητικό και μοναδικό, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και συνάρτηση «1-1».

ii) Για κάθε $x \in (x_0, +\infty)$ έχουμε:

$$f^2(x) - x_0 f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)\left(f(x) - x_0\right) = 0$$

Όμως:

- $x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) = 0$, άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_0, +\infty)$
- $f(x) > 0 > x_0 \Rightarrow f(x) - x_0 > 0$ για κάθε $x \in (x_0, +\infty)$

Άρα $f(x)\left(f(x) - x_0\right) > 0$ για κάθε $x \in (x_0, +\infty)$ και επομένως η εξίσωση;

$$f(x)\left(f(x) - x_0\right) = 0$$

είναι αδύνατη στο διάστημα $(x_0, +\infty)$.

Γ4. Το εμβαδόν Ε του τριγώνου MOK είναι:

$$E = \frac{1}{2}(OK)\cdot(KM) = \frac{1}{2}x_K \cdot y_M \quad (1)$$

όπου x_K η τετμημένη του σημείου Κ και y_M η τεταγμένη του σημείου Μ.

Αφού $x_K = x \geq 1,\ y_M = x^2 + 1$ η (1) γίνεται:

$$E = \frac{1}{2}x(x^2+1),\ x \geq 1$$

Επειδή το $x_K = x$ είναι συνάρτηση του χρόνου t έχουμε:

$$E(t) = \frac{1}{2}x(t)(x^2(t)+1),\ x(t) \geq 1$$

Ο ρυθμός μεταβολής του $E(t)$ είναι η παράγωγος ως προς t:

$$E'(t) = \frac{1}{2}\left(3x^2(t)x'(\mathrm{t}) + x'(\mathrm{t})\right)$$

Για $t = t_0$ είναι $x'(\mathrm{t}) = 2, x(t_0) = 3$ και άρα:

$$E'(t_0) = \frac{1}{2}(3\cdot 3^2 \cdot 2 + 2) = 28 \text{ τετραγωγικές μονάδες ανά δευτερόλεπτο.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από τα δεδομένα προκύπτει ότι: $f(1)=1,\ f'(1)=-1$. Άρα $f(1)=\alpha+\beta=1$ (1).

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(\mathrm{x})=\ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}+a,\ x\in\mathbb{R}$$

Άρα:

$$f'(1)=-1\Leftrightarrow \ln 1+0+a=-1\Leftrightarrow a=-1$$

και από την (1) προκύπτει $\beta=2$.

Δ2. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\mathrm{E}=\int_1^2\left|f(x)-(-x+2)\right|dx=\int_1^2\left|f(x)+x-2\right|dx=\int_1^2\left|(x-1)\ln(x^2-2x+2)-x+2+x-2\right|dx=$$

$$=\int_1^2\left|(x-1)\ln(x^2-2x+2)\right|dx\ \ (2)$$

Επειδή για κάθε $x\in[1,2]$ είναι $(x-1)\ln(x^2-2x+2)>0$ διότι:

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x^2-2x+2>1\Leftrightarrow x^2-2x+1>0\Leftrightarrow (x-1)^2>0 \end{cases}$$

Το εμβαδόν Ε γίνεται λόγω της (2):

$$E=\int_1^2(x-1)\ln(x^2-2x+2)=\frac{1}{2}\int_1^2(x^2-2x+2)'\ln(x^2-2x+2)dx$$

Θέτουμε: $u=x^2-2x+2$ και άρα $du=\left(x^2-2x+2\right)'\mathrm{d}x$ και για $\begin{matrix} x=1\Leftrightarrow u=1 \\ x=2\Leftrightarrow u=2 \end{matrix}$. Άρα:

$$E=\frac{1}{2}\int_1^2\ln u du=\frac{1}{2}\int_1^2(u)'\ln u du=\frac{1}{2}[u\ln u]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2u(\ln u)'du=\ln 2-\frac{1}{2}\int_1^2 1du=\ln 2-\frac{1}{2}[u]_1^2=\ln 2-\frac{1}{2}\ \text{τ.μ.}$$

Δ3. **i)** Από το Δ1 ερώτημα έχουμε:

$$f'(\mathrm{x})=\ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1,\ x\in\mathbb{R}$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

$$f'(\mathrm{x})\geq -1\Leftrightarrow \ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1\geq -1\Leftrightarrow \ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}\geq 0$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Έχουμε για κάθε $x\in\mathbb{R}$:

$$x^2-2x+2>1 \Leftrightarrow x^2-2x+1>0 \Leftrightarrow (x-1)^2>0$$

$$\ln(x^2-2x+2)>\ln 1 \Leftrightarrow \ln(x^2-2x+2)$$

$$\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}>0$$

Άρα $f'(\mathrm{x})\geq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) **<u>Α΄τρόπος</u>**

Η προς απόδειξη ανισότητα γίνεται διαδοχικά:

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq(\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)+\frac{3}{2}\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq(\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)-\lambda+2-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq f(\lambda)-\frac{1}{2}\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\geq-\frac{1}{2}\ \text{(I)}$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφοικού Λογισμού για την συνάρτηση f στο διάστημα $\left[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right]$ αφού:

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right]$(ως συνεχής στο $\mathbb{R}$)
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$(ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$)

Επομένως υπάρχει

$$\xi\in\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right): f'(\xi)=\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}\Rightarrow f'(\xi)=2\left[f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\right]\ \text{(II)}$$

Όμως $f'(\mathrm{x})\geq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα και :

$f'(\xi)\geq-1\Leftrightarrow 2\left[f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\right]\geq-1\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\geq-\frac{1}{2}$ που είναι η ισοδύναμη (I)

Β΄τρόπος:

Έχουμε: $f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)=\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+1\right)-\lambda+\frac{3}{2},\ \lambda\in\mathbb{R}$

Η ζητούμενη σχέση γίνεται διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq(\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)+\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+1\Leftrightarrow\right)-\lambda+\frac{3}{2}\geq(\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)+\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+1\Leftrightarrow\right)-\lambda\geq(\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)\ \text{(I)}$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=x\ln(x^2+1),\ x\in\mathbb{R}$ και η σχέση (I) γίνεται ισοδύναμα:

$$h\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\geq h(\lambda-1)\ \ (\text{II})$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε την σχέση (ΙΙ). Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως γινόμενο και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$h'(x)=\ln(x^2+1)+\frac{2x^2}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$$

Έχουμε: $h'(x)=\ln(x^2+1)+\dfrac{2x^2}{x^2+1}\geq 0$ (το = ισχύει μόνο για $x=0$).

Άρα:

- $h'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$ και άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$
- $h'(x)>0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$ και άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

και επειδή η h είναι συνεχής και στο 0 η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επομένως για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$-1<-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\lambda-1<\lambda-\frac{1}{2}\Leftrightarrow h(\lambda-1)<h\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)$$

(προφανώς ισχύει και το $h(\lambda-1)\leq h\left(\lambda-\dfrac{1}{2}\right)$ αν και αυτό που αποδείχθηκε είναι πιο ισχυρό)

Επομένως αποδείξαμε την ισοδύναμη ζητούμενη σχέση.

Δ4. **<u>Α΄τρόπος</u>**

Έστω $A(x_1,f(x_1)),\ B(x_2,g(x_2))$ τα σημεία επαφής των C_f,C_g με τις εφαπτομένες τους αντίστοιχα. Πρέπει $f'(x_1)=g'(x_2)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο A είναι:

$$(\varepsilon_1)\ y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)\Leftrightarrow y=f'(x_1)(x-x_1)+f(x_1)\Leftrightarrow y=f'(x_1)x-f'(x_1)x_1+f(x_1)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο B είναι:

$$(\varepsilon_2)\ y-g(x_2)=g'(x_2)(x-x_2)\Leftrightarrow y=g'(x_2)(x-x_2)+g(x_2)\Leftrightarrow y=g'(x_2)x-g'(x_2)x_2+g(x_2)$$

Οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) συμπίπτουν (αφού δέχονται κοινή εφαπτομένη) και άρα έχουμε:

$$f'(x_1)=g'(x_2)$$
$$f(x_1)-f'(x_1)x_1=g(x_2)-g'(x_2)x_2$$

Ισχύουν:

$$f'(x_1)=g'(x_2)\Leftrightarrow f'(x_1)=-3x_2^2-1$$
$$f'(x_1)\geq-1\Leftrightarrow -3x_2^2-1\geq-1\Leftrightarrow -3x_2^2\geq 0\Leftrightarrow x_2=0$$

Για $x_2 = 0$ έχουμε:

$$f'(x_1) = -1 \Leftrightarrow \ln(x_1^2 - 2x_1 + 2) + \frac{2(x_1-1)^2}{x_1^2 - 2x_1 + 2} - 1 = -1 \Leftrightarrow ln(x_1^2 - 2x_1 + 2) + \frac{2(x_1-1)^2}{x_1^2 - 2x_1 + 2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ln(x_1^2 - 2x_1 + 2) = 0 \\ \dfrac{2(x_1-1)^2}{x_1^2 - 2x_1 + 2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = 1$$

Για τις τιμές $x_1 = 0$ και $x_2 = 0$ επαληθεύεται και η σχέση: $f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g'(x_2)x_2$

(αφού τότε $f'(1) - f(1) = g(0) \Leftrightarrow -1 = -1$).

Άρα οι τιμές $x_1 = 0$ και $x_2 = 0$ είναι δεκτές αφού επαληθεύουν όλες τις σχέσεις και άρα η κοινή εφαπτομένη είναι:

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) \Leftrightarrow y = -(x-1) + 1 \Leftrightarrow y = -x + 2$$

Οι τιμές των $x_1 = 0$ και $x_2 = 0$ που επαληθεύουν το παραπάνω σύστημα εξισώσεων είναι μοναδικές και άρα η κοινή εφαπτομένη είναι μοναδική.

<u>Β΄τρόπος:</u>

Η συνάρτηση g είναι παραγωίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = -3x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Έστω $A(x_1, f(x_1)),\ B(x_2, g(x_2))$ τα σημεία επαφής των C_f, C_g με τις εφαπτομένες τους αντίστοιχα. Πρέπει $f'(x_1) = g'(x_2)$.

Από το ερώτημα Δ3i) έχουμε $f'(x_1) \geq -1$ και το = ισχύει μόνο για $x_1 = 1$ (η f είναι «1-1»)

Επίσης $g'(x_2) = -3x_2^2 - 1 \leq -1$ και το - ισχύει μόνο για $x_2 = 0$

Άρα τα σημεία επαφής είναι $A(1, f(1))$ και $B(0, g(0))$ τα οποία είναι μοναδικά αφού τα $x_1 = 0$ και $x_2 = 0$ είναι μοναδικά.

Η εξίσωση επομένως της κοινής εφαπτομένης τους είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - 1 = -(x-1) \Leftrightarrow y = -x + 2 \text{ ή}$$

$$y - g(0) = g'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 2 = -x \Leftrightarrow y = -x + 2$$

Καραγιάννης Ιωάννης,

Συντονιστής Εκπαιδευτικού Έργου Μαθηματικών Ν. Δωδεκανήσου, 2ο ΠΕ.Κ.Ε.Σ. Ν. Αιγαίου

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$.

α) Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A;

(Μονάδες 2)

β) i. Πότε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη;

(Μονάδα 1)

ii. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του **(i),** πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f;

(Μονάδες 3)

Μονάδες 6

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat που αφορά τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης.

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.* ***Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.***

α) Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο A.

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

β) Για κάθε συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_o \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_o.

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x-1},\ x\in\mathbb{R}-\{1\}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

Μονάδες 10

Β2. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(2,f(2))$.

Μονάδες 8

Β3. Να μελετήσετε τη μονοτονία της f σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+1,\ x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\sqrt{x-2},\ x\geq 2$.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης $g\circ f$.

Μονάδες 10

Γ2. Έστω ότι $h(x)=(g\circ f)(x)=\sqrt{x^2-1},\ x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$.

Μονάδες 10

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{h(x)-\sqrt{3}}{x-2}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha, & x\geq 1\\ -(x-1)^4+\beta x, & x<1. \end{cases}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=2$.

Μονάδες 7

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία είναι θετική.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)+x_0 f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$, όπου x_0 είναι η ρίζα του ερωτήματος Δ3.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2019-06-10
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (10-06-2019)
ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΓΕΝΙΚΑ ΛΥΚΕΙΑ

ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΓΕΝΙΚΑ ΛΥΚΕΙΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. α) Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδα 15.

"Έστω Α ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. *Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α μια διαδικασία (κανόνα)* f, *με την οποία κάθε στοιχείο* $x \in A$ *αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y".*

β) i) Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδα 35:

«Μια συνάρτηση $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ *έχει αντίστροφη αν η συνάρτηση* f *είναι «1-1» (ένα προς ένα) στο Α.»*

ii) Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδα 36:

1η Διατύπωση: *«Μια συνάρτηση* $g: f(A) \to \mathbb{R}$ *με την οποία κάθε* $y \in f(A)$ *αντιστοιχίζεται στο μοναδικό* $x \in A$ *για το οποίο ισχύει* $f(x) = y$ *ονομάζεται αντίστροφη συνάρτηση της »*

Εναλακτικά μπορε΄να δοθεί και ο ορισμός:

2η Διατύπωση: *«Έστω μια συνάρτηση* g *με πεδίο ορισμού το* $f(A)$ *(δηλαδή το σύνολο τιμών της* f *) και* $x \in A, y \in f(A)$. *Αν η* f *αντιστοιχεί το y στο x και η g αντιστοιχίζει το x στο y και αντιστρόφως, τότε η* g *ονομάζεται αντίστροφη συνάρτηση της* f *και συμβολίζεται με* f^{-1}.*»*

3η Διατύπωση: *«Μια συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της* f *(* $f(A)$ *), που συμβολίζεται με* f^{-1}, *ονομάζεται αντίστροφη συνάρτηση της* f *αν ισχύει η ισοδυναμία:*

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \text{ για όλα τα } x \in A, y \in f(A) \text{»}$$

Η η λεκτική διατύπωση: « ισχύει $f(x) = y$ αν και μόνο αν $f^{-1}(y) = x$ »

Α2. Διατύπωση θεωρήματος, σχολικό βιβλίο σελίδα 142. Θεώρημα του Fermat.

« Έστω μια συνάρτηση f *ορισμένη σ΄ένα διάστημα Δ και* x_0 *ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η* f *παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο* x_0 *και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε* $f'(x_0) = 0$.*»*

Α3. Απόδειξη Θεωρήματος σχολικό βιβλίο σελίδα 135.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$.Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

, οπότε έχουμε:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$,οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

Α4. α) Λάθος .

Αιτιολόγηση (Σχόλιο σχολικού βιβλίου)

Η συνάρτηση:

$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ αν και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ δεν είναι σταθεή στο $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

β) Λάθος.

Αιτιολόγηση: (Σχόλιο σχολικού βιβλίου)

Η συνάρτηση:

$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 3 & , x = 1 \end{cases}$ έχει $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x + 1) = 2$. Όμως $f(1) = 2$

Εναλακτική αιτιολόγηση:

*Οποιαδήποτε συνάρτηση f της οποίας υπάρχει το όριο της στο $\mathbb{R}$ όταν $x \to x_0$ και **ΔΕΝ** είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Αυτό σημαίνει ότι* $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\text{-}\{1\}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Έχουμε ισοδύναμα:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_1 - 1} = \frac{x_2}{x_2 - 1} \Leftrightarrow x_1x_2 - x_1 = x_1x_2 - x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι συνάρτηση «1-1» και επομένως υπάρχει η αντίστροφή της:

<u>Έυρεση αντίστροφης</u> f^{-1} :

Για κάθε $x \neq 1$ θέτουμε $f(x) = y$ και έχουμε ισοδύναμα:

$$f(x) = y \Leftrightarrow y = \frac{x}{x - 1} \Leftrightarrow yx + y = x \Leftrightarrow yx - x = -y \Leftrightarrow x = \frac{y}{y - 1} \text{ με } y \neq 1$$

Επομένως η αντίστροφη είναι:

$$f^{-1}(x)=\frac{x}{x-1}, x\neq 1$$

(δηλαδή $f^{-1}(x)=f(x)\,, x\neq 1$)

B2. Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$ με:

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2},\ x\in\mathbb{R}\text{-}\{1\}$$

Άρα $f'(2)=-1$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A\big(2,f(2)\big)$ είναι:

$$y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y-2=-(x-2)\Leftrightarrow y=-x+4$$

B3. Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$ με:

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2},\ x\in\mathbb{R}\text{-}\{1\}$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το πεδίο ορισμού της gof είναι:

$$D_{gof}=\left\{x\in\mathbb{R}\text{-}\{1\}:\mathrm{f(x)}\geq 2\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\text{-}\{1\}:\mathrm{x}^2+1\geq 2\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\text{-}\{1\}:\mathrm{x}^2\geq 1\right\}=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)=\mathrm{A}$$

Για κάθε $x\in D_{gof}$ έχουμε:

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\mathrm{x}^2+1)=\sqrt{\mathrm{x}^2+1-2}=\sqrt{x^2-1}, x\in\mathrm{A}$$

Γ2. Η ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$ που $h(x)=\sqrt{x^2-1}, x\in\mathbb{R}\text{-}\{1\}$ έχει την μορφή $y=\lambda x+b$, όπου:

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\ b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda\mathrm{x}\right]$$

Έχουμε:

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=1,\ b=\lim_{x\to+\infty}\left[h(x)-\lambda\mathrm{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-1}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$$

Άρα η $y=x$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$ (η διχοτόμος της γωνίας του $1^{ου}$ και $3^{ου}$ τεταρτημορίου των αξονων).

Γ3. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{h(x)-\sqrt{3}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{1}=\lim_{x\to 2}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ θα είναι και συνεχής στο f. Επομένως θα είναι και συνεχης στο σημείο $x_0=1$.

Άρα έχουμε: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

Είναι:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2 + a) = 1 + a$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(-(x-1)^4 + \beta x) = \beta$$
$$f(1) = 1 + a$$

Πρέπει $\beta = 1 + \alpha$ (1)

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ θα έχουμε ότι τα όρια $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+a-1-a}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}(x+1) = 2$$
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)^4+\beta x-1-\alpha}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)^4+\beta x-1-(\beta-1)}{x-1} =$$
$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)^4+\beta x-\beta}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)\left[-(x-1)^3+\beta\right]}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\left[-(x-1)^3+\beta\right] = \beta$$

Άρα $\beta = 2$ και από την (1) $\alpha = 1$

Δ2. $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 1 \\ -4(x-1)^3 + 2, & x < 1 \end{cases}$

$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

$f'(x) > 0$ για κάθε $(-\infty, 1)$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1)$.

Επειδή η f είναι παντού συνεχής άρα και στο σημείο $x_0 = 1$ θα είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1) \cup [1, +\infty) = \mathbb{R}$.

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το:

$$f\left[(-\infty, 1)\right] = \left(\lim_{x\to -\infty} f(x), \lim_{x\to 1^-} f(x)\right) = (-\infty, 2)$$

$$f\left[[1, +\infty)\right] = \left[f(1), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right) = [2, +\infty)$$

$$f\left[(-\infty,1)\right]\cup f\left[[1,+\infty)\right]=(-\infty,2)\cup[2,+\infty)=\mathbb{R}$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

Δ3. Εύρεση ρίζας της $f(x)$

<u>Α΄τρόπος</u>

Το $0\in f\left[(0,+\infty)\right]=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-1,+\infty)$ και άρα υπάρχει, τουλάχιστον ένα, $x_0\in(0,+\infty)$-δηλαδή θετικό x_0, τέτοιο, ώστε: $f(x_0)=0$. Το x_0 είναι μοναδικό διότι η f, ως γνησίως αύξουσα είναι και συνάρτηση «1-1».

<u>Β΄τρόπος</u>

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano για την συνάρτηση f στο διάστημα $[0,1]$.

Έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ (αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$)
- $\begin{matrix} f(0)=-1<0 \\ f(1)=2>0 \end{matrix}$ άρα $f(0)\cdot f(1)<0$ και άρα άρα υπάρχει, τουλάχιστον ένα, $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0)=0$.

Το x_0 είναι μοναδικό διότι η f, ως γνησίως αύξουσα είναι και συνάρτηση «1-1».

Δ4. Έχουμε:

$$f^2(x)+x_0 f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)\cdot\left[f(x)+x_0\right]=0$$

Τώρα: Για κάθε $x>x_0 \Rightarrow f(x)>f(x_0)\Rightarrow f(x)>0$

Ακόμα: $f(x)>-x_0$, αφού $f(x)>0$ και $-x_0<0$.

Επομένως :

$$f(x)\cdot\left[f(x)+x_0\right]>0 \Leftrightarrow f^2(x)+x_0 f(x)>0$$

και άρα η εξίσωση $f^2(x)+x_0 f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$.

Καραγιάννης Ιωάννης,

Συντονιστής Εκπαιδευτικού Έργου, 2ο ΠΕ.Κ.Ε.Σ. Ν. Αιγαίου