ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2019
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο (έκδοση 2018) σελ. 76

Α2. α. Ψ

β. Σχολικό βιβλίο σελ. 134 ΣΧΟΛΙΟ): Πχ. για την συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$ ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in A=(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$ αλλά η f δεν είναι σταθερή στο Α

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 123

Α4. **α. Λάθος** (σελ 214)

β. Λάθος (σελ 165)

γ. Σωστό (σελ. 212)

δ. Σωστό (σελ. 77)

ε. Σωστό (σελ 157)

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Ισχύει $f(x)=xe^{-x}-1 \Rightarrow f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$, άρα

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		↗	max $e^{-1}-1$	↘	

$f''(x)=(e^{-x}(1-x))' =-e^{-x}(1-x) - e^{-x} = -e^{-x}(1-x+1)= e^{-x}(x-2)$, άρα

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		⌒	Σ.Κ. $2e^{-2}-1$	‿	

Β2.

Επειδή f συνεχής στο $\mathbb{R}$, η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}-\frac{1}{x}\right)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-x}-1\right)=-1 \quad \text{διότι} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{D'L}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}=0$$

Άρα η $y=-1$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x}-\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

Άρα η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$

Είναι $f(0)=-1$ άρα $(0, -1)\in C_f$ και $f(x)=0 \Leftrightarrow (x-e^{x})e^{-x}=0 \Leftrightarrow x=e^{x}$ αδύνατη διότι $e^{x}\geq x+1 > x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η C_f δεν τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$

B3.

Αφού η C_f δεν τέμνει τον άξονα x΄x το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_0^1 | f(x) | dx$$

και απ' το ερώτημα **B1** έχουμε $f(x) \le f(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$

άρα $$E = \int_0^1 - f(x)dx = \int_1^0 \left(xe^{-x} - 1\right)dx = \int_1^0 xe^{-x}dx - \int_1^0 1dx = \int_0^1 x\left(e^{-x}\right)'dx - \int_1^0 x'dx$$

$$= \left[xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{-x}dx - \left[x\right]_1^0 = e^{-1} + \left[e^{-x}\right]_0^1 + 1 = 2e^{-1} \quad \text{τ.μ.}$$

B4.

Επειδή $g(x)=f(x)+1$ η C_g προκύπτει απ' την C_f με κατακόρυφη μετατόπιση 1 μονάδα προς τα πάνω. Άρα και η οριζόντια ασύμπτωτη της C_f θα μετατοπιστεί και αυτή 1 μονάδα προς τα πάνω, δηλ. η C_g θα έχει οριζόντια ασύμπτωτη την οριζόντια ευθεία $y=-1+1=0$, δηλ. τον οριζόντιο άξονα x΄x

Σημείωση: Πιο αυστηρά αυτό αποδεικνύεται ως εξής:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) + 1 = -1 + 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

Ο πίνακας μεταβολών της g προκύπτει από αυτόν της f διότι οι θέσεις ακροτάτων και σημείων καμπής δεν επηρεάζονται από κατακόρυφες μετατοπίσεις γραφημάτων.

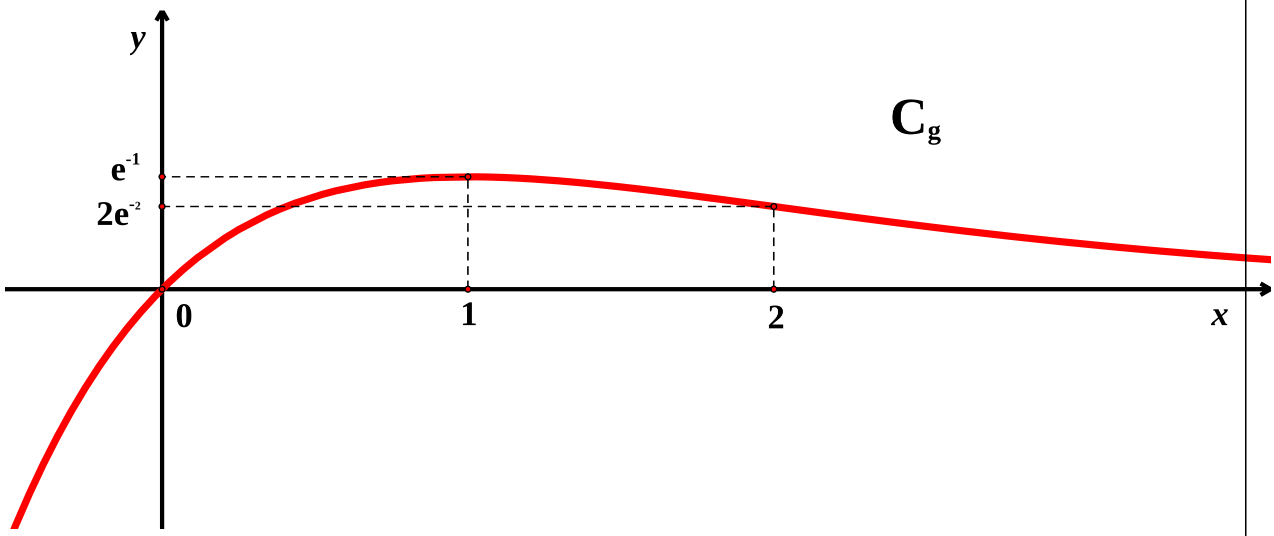
Σημείωση: Πιο αυστηρά αυτό αποδεικνύεται ως εξής:
Έστω x_o θέση μεγίστου της συνάρτησης $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ τότε $\forall\ x\in A$ ισχύει $f(x)\le f(x_o)$ $\Leftrightarrow$ $f(x)+1 \le f(x_o)+1$ $\Leftrightarrow$ $g(x) \le g(x_o)$ και παρόμοια απόδειξη για τα σημεία καμπής.

Τέλος, είναι $g(0)=f(0)+1=-1+1=0$ άρα $(0, 0)\in C_g$

Συμβουλή! Καλό είναι να τοποθετούμε τον αριθμό 0 στον πίνακα μεταβολών (άσχετα αν δεν υπήρχε προηγουμένως) και σε μια νοητή κατακόρυφη γραμμή κάτω απ' το 0 να σχεδιάζουμε τον κατακόρυφο άξονα των τεταγμένων y

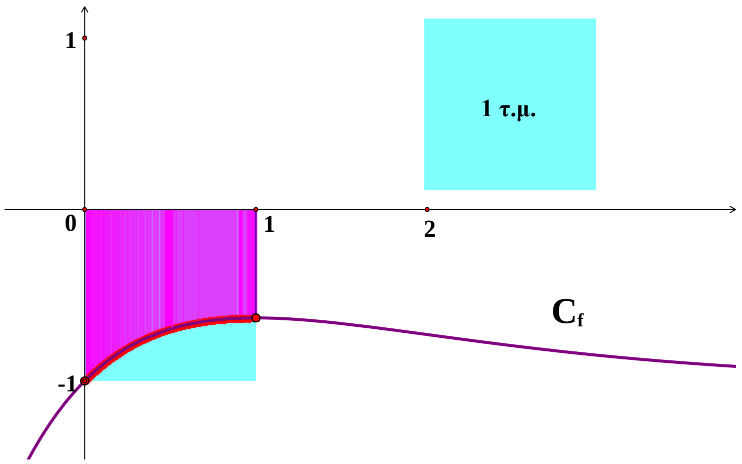
Έτσι, διευκολύνεται η χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

x	$-\infty$	0		1		2		$+\infty$
g'		+		0	−		−	
g''		−			−	0	+	
g		↗		max $e^{-1}-1+1=e^{-1}$	↘	Σ.Κ. $2e^{-2}-1+1=2e^{-2}$	↘	



Σημείωση: Είχαμε βρει στο εμβαδόν του ερωτήματος **Β3.** αποτέλεσμα Ε=$2e^{-1}$ τμ. και $2e^{-1}=\dfrac{2}{e}\cong\dfrac{2}{2,718}<1$

Αυτό σημαίνει ότι το ζητούμενο εμβαδόν είναι κάτι λιγότερο από μια τετραγωνική μονάδα των αξόνων, όπως βλέπουμε και παρακάτω:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

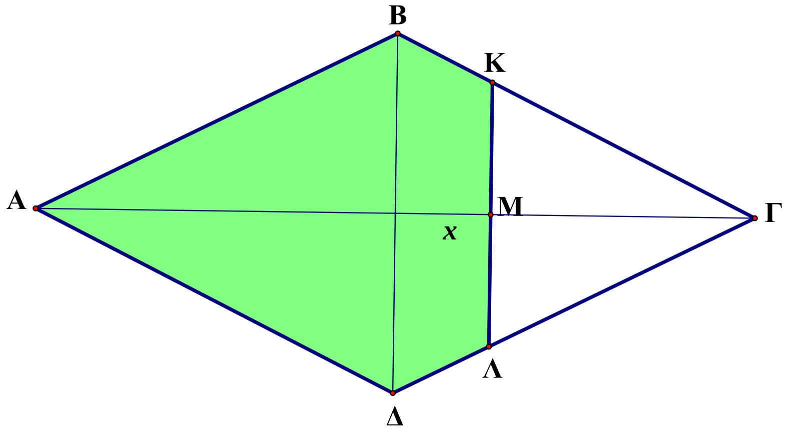
- Αν $0<x\leq 1$ τότε $f(x)$ = (ΑΚΛ) $=\dfrac{x(\text{ΚΛ})}{2}$

1$^{\text{ος}}$ τρόπος: Απ’ την ομοιότητα των τριγώνων ΑΚΛ και ΑΒΔ έχουμε (ΚΛ):(ΒΔ)=x:(ΑΓ/2) ⇔ (ΚΛ):1=x:1⇔ (ΚΛ)=x

2$^{\text{ος}}$ τρόπος: $\text{εφ}\text{Κ}\hat{\text{Α}}\text{Μ}=\dfrac{(\text{ΚΜ})}{x}=\dfrac{(\text{ΒΔ}):2}{(\text{ΑΓ}):2}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=2(\text{ΚΜ})=(\text{ΚΛ})$

Άρα, $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$

- Αν $1<x\leq 2$ τότε έχουμε το παρακάτω σχήμα:



1$^{\text{ος}}$ τρόπος: $f(x)$=(ΑΒΔ)+(ΒΚΛΔ)= $\dfrac{1\cdot 1}{2}+\dfrac{1+(\text{ΚΛ})}{2}\cdot(x-1)$ (1)

Απ’ την ομοιότητα των τριγώνων ΚΓΛ και ΒΓΔ έχουμε

(ΚΛ):(ΒΔ)=(2–x):(ΑΓ/2) ⇔ (ΚΛ):1=(2–x):1⇔ (ΚΛ)= 2–x (2)

Από (1) και (2) έχουμε

$f(x)$= $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1+2-x}{2}\cdot(x-1)=\dfrac{1+3(x-1)-x(x-1)}{2}\overset{\text{πράξεις}}{=}1-\dfrac{(2-x)^2}{2}$

2$^{\text{ος}}$ τρόπος:

$f(x)$ = (ΑΒΓΔ) – (ΚΓΛ) = $\dfrac{2\cdot 1}{2}-\dfrac{(\text{ΚΛ})\cdot(2-x)}{2}\overset{\text{συμμετρία}}{=}1-\dfrac{(2-x)^2}{2}$

Γ2. Είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)+\sigma\upsilon\nu x-1+x}{f(x)+\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)+\sigma\upsilon\nu x-1+x}{\frac{1}{2}x^2+\eta\mu x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}+1}{\frac{1}{2}x+\frac{\eta\mu x}{x}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 0+0+1}{0+1}=1$$

Γ3.

Η f παριστάνει το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου, το οποίο συνεχώς αυξάνεται, καθώς το Μ διατρέχει τη διαγώνιο απ' το Α στο Γ

Επομένως f $\uparrow$ (0, 2] άρα 1-1 και συνεπώς αντιστρέφεται.

Σημείωση: Πιο αυστηρά, η μονοτονία της f δείχνεται ως εξής:

Η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική σε κάθε ένα απ' τα διαστήματα [0, 1) και (1, 2]

Στο σημείο αλλαγής του τύπου έχουμε

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}=\lim_{x\to 1^+}\left(-\frac{1}{2}(x-2)^2+1\right)=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}=\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$$

άρα f συνεχής.

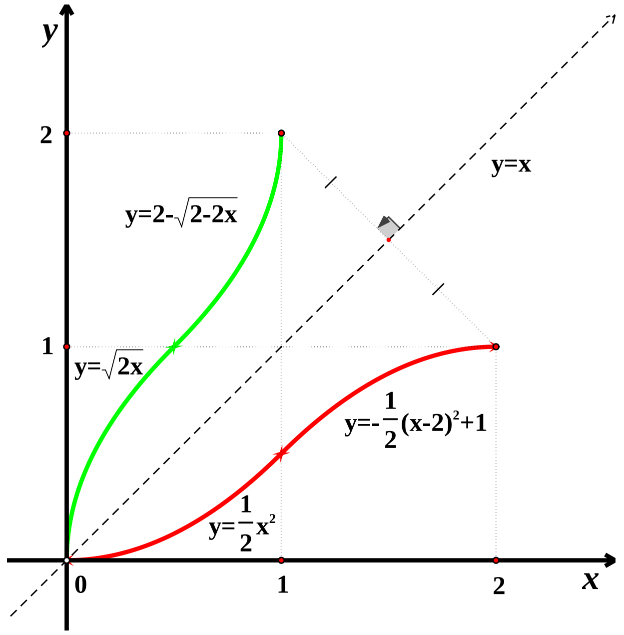
Είναι $f'(x)=\begin{cases} x>0 & \text{για κάθε } 0<x<1\\ -(x-2)>0 & \text{για κάθε } 1<x<2\end{cases}$

Άρα f $\uparrow$ σε κάθε ένα απ' τα διαστήματα (0, 1] και [1, 2] και επειδή είναι συνεχής στο 1 έπεται ότι f $\uparrow$ (0, 2]

Η C_f αποτελείται από δύο παραβολικά τμήματα, άρα μπορούμε να τα σχεδιάσουμε χωρίς μελέτη. Αλλιώς, με μελέτη έχουμε:

$f''(x)=\begin{cases} 1 & \text{για κάθε } 0<x<1\\ -1 & \text{για κάθε } 1<x<2\end{cases}$ και αφού f συνεχής στο 1, η f είναι κυρτή στο διάστημα (0, 1] και κοίλη στο διάστημα [1, 2]. Ακόμη $\lim_{x\to 0^-}f(x)=0$, f(1)=1/2 και f(2)=1

Επειδή, οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x έχουμε:



Σημείωση: Ο τύπος της αντίστροφης (αν και δεν χρειάζεται) βρίσκεται ως εξής:

- Αν $0<x\leq 1$ τότε $y=\frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow x^2=2y \Leftrightarrow |x|=\sqrt{2y} \overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow} x=\sqrt{2y}$

  με $0<\sqrt{2y}\leq 1 \Leftrightarrow 0<2y\leq 1 \Leftrightarrow 0<y\leq \frac{1}{2}$

- Αν $1<x\leq 2$ τότε

  $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+1 \Leftrightarrow (x-2)^2=2-2y$

  $\Leftrightarrow |x-2|=\sqrt{2-2y} \overset{x\leq 2}{\Leftrightarrow} 2-x=\sqrt{2-2y} \Leftrightarrow x=2-\sqrt{2-2y}$

με

$1<2-\sqrt{2-2y}\leq 2 \Leftrightarrow -1<-\sqrt{2-2y}\leq 0 \Leftrightarrow 1>\sqrt{2-2y}\geq 0$

$\Leftrightarrow 1>2-2y\geq 0 \Leftrightarrow -1>-2y\geq -2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<y\leq 1$

Άρα,

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} \sqrt{2x}, & 0<x\leq \frac{1}{2} \\ 2-\sqrt{2-2x}, & \frac{1}{2}<x\leq 1 \end{cases}$$

Γ4.

$1^{ος}$ τρόπος:

$\ln^2 x + (x-2)^2 = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\ln^2 x = -\dfrac{1}{2}(x-2)^2 + 1$ (1)

Είναι $1<x<2 \overset{\ln\uparrow}{\Rightarrow} \ln 1<\ln x<\ln 2<\ln e=1$ επομένως $0<\ln x<1$

Άρα η (1) γράφεται ισοδύναμα $f(\ln x)=f(x) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} \ln x = x$ (2)

Για κάθε $x>1$ ισχύει $\ln x<x-1$ και έτσι αν έχει λύση η (2) θα πρέπει $x<x-1 \Leftrightarrow 0<-1$ άτοπο, άρα η δοθείσα εξίσωση είναι αδύνατη στο διάστημα (1, 2)

$2^{ος}$ τρόπος:

$\ln^2 x+(x-2)^2=2 \Leftrightarrow \ln^2 x = 2-(x-2)^2 = 2-x^2+4x-4 = -x^2+4x-2 \geq 0$ για κάθε $x\in(1, 2)$ (πρόσημο τριωνύμου) και παίρνοντας τις τετραγωνικές ρίζες:

$$\sqrt{\ln^2 x} = \sqrt{-x^2+4x-2} \Leftrightarrow |\ln x| = \sqrt{-x^2+4x-2} \underset{x>1}{\overset{\ln x>0}{\Longleftrightarrow}} \ln x = \sqrt{-x^2+4x-2}$$

Για κάθε $x>1$ ισχύει $\ln x<x-1$ άρα

$$\sqrt{-x^2+4x-2} < x-1 \overset{x-1>0}{\Longleftrightarrow} -x^2+4x-2 < x^2-2x+1 \Leftrightarrow 2x^2-6x+3>0$$

άτοπο διότι το τριώνυμο $2x^2-6x-3$ γίνεται αρνητικό για κάθε $x\in(1, 2)$ (πρόσημο τριωνύμου).

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ με $f'(x)=\dfrac{\alpha}{x}-2(x-2)$ και αφού παρουσιάζει ακρότατο στο εσωτερικό σημείο x_o του διαστήματος Δ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, θα έχουμε απ' το Θ. Fermat ότι $f'(x_o)=0$ άρα

$$0=\frac{\alpha}{1+\sqrt{\frac{3}{2}}}-2\left(1+\sqrt{\frac{3}{2}}-2\right)\Leftrightarrow\frac{\alpha}{1+\sqrt{\frac{3}{2}}}=2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-1\right)$$

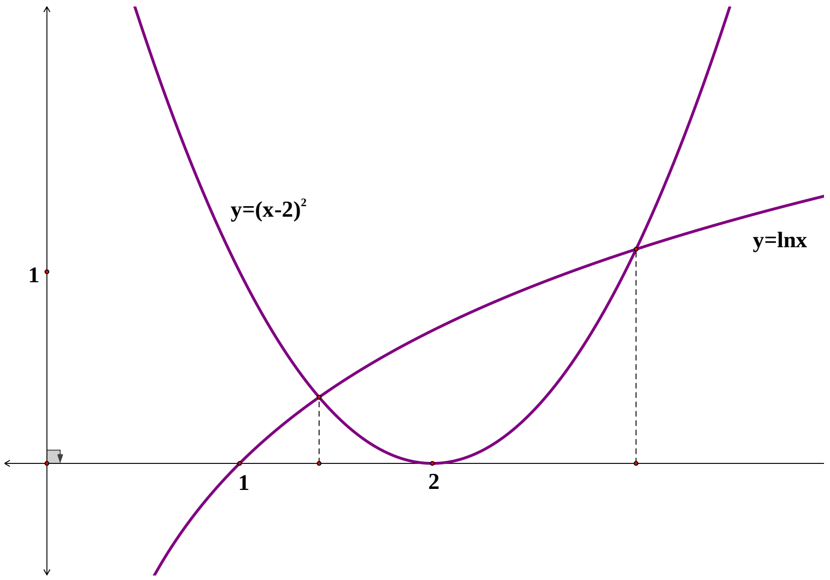
$$\Leftrightarrow\alpha=2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-1\right)\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+1\right)=2\left[\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2-1^2\right]=2\left(\frac{3}{2}-1\right)=1$$

Έτσι, $f(x)=\ln x-(x-2)^2\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x}-2(x-2)\Rightarrow f''(x)=\dfrac{-1}{x^2}-2x<0$

για κάθε x>0 άρα f΄ $\downarrow$ και f κοίλη στο Δ

Δ2.

$1^{ος}$ τρόπος (με Bolzano και Rolle): $f(x)=0 \Leftrightarrow \ln x = (x-2)^2$



Παρατηρούμε ότι:

- $f(1) = \ln 1-(1-2)^2 = -1 < 0$, $f(2)= \ln 2 - (2-2)^2 = \ln 2 > 0$ και επειδή f συνεχής στο [1, 2] έπεται απ’ το θ. Bolzano ότι η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1, 2)

- $f(4) = \ln 4-(4-2)^2 = \ln 4 - 4 < 0$ διότι $4<e^4$ και επειδή f συνεχής στο [2, 4] έπεται απ’ το θ. Bolzano ότι η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (2, 4)

Άρα η f έχει δύο τουλάχιστον ρίζες. Υποθέτουμε ότι η f έχει 3 τουλάχιστον ρίζες $\rho_1<\rho_2<\rho_3$ τότε σε κάθε ένα απ’ τα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$, $[\rho_2, \rho_3]$ ικανοποιεί το θ. Rolle άρα η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες· άτοπο διότι $f' \downarrow$

Άρα η f έχει ακριβώς δύο ρίζες.

Σχόλιο: Η δυσκολία του ερωτήματος Δ2 είναι η εύρεση των διαστημάτων που ανήκουν οι ρίζες αλλά αυτό πετυχαίνεται απ’ την γραφική επίλυση της $f(x)=0$ ισοδύναμα της εξίσωσης $\ln x = (x-2)^2$ αλλιώς καταφεύγουμε σε άλλο τρόπο όπως πχ. με το σύνολο τιμών, που ακολουθεί στη συνέχεια.

$2^{ος}$ τρόπος (με σύνολο τιμών): Είναι $\Delta=(0,x_o]\cup[x_o, +\infty)$

-Έστω $0 < x < x_o \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_o) = 0 \Rightarrow f \uparrow (0, x_o]$

$$\underset{f \text{ συνεχής}}{\Rightarrow} f\left((0, x_o]\right) = \left(\lim_{x\to 0^+} f(x), f(x_o)\right] = \left(-\infty,\ f(x_o)\right]$$

διότι $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln x - (x-2)^2\right) = -\infty - \infty = -\infty$

-Έστω $x > x_o \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_o) = 0 \Rightarrow f \downarrow [x_o, +\infty)$

$$\underset{f \text{ συνεχής}}{\Rightarrow} f\left([x_o, +\infty)\right) = \left(\lim_{x\to +\infty} f(x), f(x_o)\right] = \left(-\infty,\ f(x_o)\right]$$

διότι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln x - (x-2)^2\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln x\left(1 - \frac{(x-2)^2}{\ln x}\right)\right) = +\infty\cdot(-\infty) = -\infty$$

και $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2)^2}{\ln x} \underset{D'L}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{2(x-2)}{\frac{1}{x}} = 2\lim_{x\to+\infty} x(x-2) = 2(+\infty) = +\infty$

Επειδή $f \uparrow (0, x_o]$ και $f \downarrow [x_o, +\infty)$ αν δείξω ότι $0\in(-\infty,\ f(x_o)) \Leftrightarrow f(x_o)>0$ τότε σε κάθε ένα απ' τα υποδιαστήματα $(0,x_o]$, $[x_o, +\infty)$ του Δ η f θα' χει από μια ακριβώς ρίζα και άρα το ζητούμενο.

$$f(x_o) = \ln\left(1+\sqrt{\frac{3}{2}}\right) - \left(1+\sqrt{\frac{3}{2}} - 2\right)^2 \overset{\text{πράξεις}}{=} \ln\left(2+\sqrt{6}\right) - \ln 2 + \sqrt{6} - \frac{5}{2}$$

Για την συνάρτηση $h(x)=\ln x$ εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο διάστημα $\left[2, 2+\sqrt{6}\right]$ οπότε υπάρχει $\xi\in\left(2, 2+\sqrt{6}\right)$:

$$h'(\xi) = \frac{h\left(2+\sqrt{6}\right) - h(2)}{2+\sqrt{6}-2} \Rightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln\left(2+\sqrt{6}\right) - \ln 2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \ln\left(2+\sqrt{6}\right) - \ln 2 = \frac{\sqrt{6}}{\xi} \quad (1)$$

Αλλά $2 < \xi < 2+\sqrt{6} \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{2+\sqrt{6}} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{2} > \frac{\sqrt{6}}{\xi} > \frac{\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}}$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \ln\left(2+\sqrt{6}\right) - \ln 2 > \frac{\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}} \Rightarrow f(x_o) > \frac{\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}} + \sqrt{6} - \frac{5}{2} > 0$$

διότι $\frac{\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}} + \sqrt{6} - \frac{5}{2} > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{6} + 2\sqrt{6}\left(2+\sqrt{6}\right) - 5\left(2+\sqrt{6}\right) > 0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{6} + 4\sqrt{6} + 12 - 10 - 5\sqrt{6} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{6} + 2 > 0$ που ισχύει.

Δ3.

$1^{ος}$ τρόπος: Αφού f κοίλη η C_f είναι κάτω από κάθε εφαπτομένη της εκτός απ' το σημείο επαφής, άρα για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f(x) \le f'(1)(x-1) + f(1) = 3(x-1)-1 = 3x - 4$

$2^{ος}$ τρόπος: Έστω η συνάρτηση διαφοράς $g(x)=f(x)-3x+4,\ x>0$

τότε $g'(x)=f'(x)-3=\dfrac{1}{x}-2(x-2)-3=\dfrac{1}{x}-2x+1 \overset{\text{πράξεις}}{=} \dfrac{-2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x-1)}{x}$

Επομένως:

x	$-\infty$		$-1/2$		0		1		$+\infty$
g'		–	○	+		+	○	–	
g						$\nearrow$		$\searrow$	

Παρατηρούμε ότι η g παρουσιάζει μέγιστο στο 1 άρα ισχύει $g(x)\le g(1)=f(1)-3+4=0 \Leftrightarrow f(x)-3x+4\le 0 \Leftrightarrow f(x)\le 3x-4$ για κάθε $x\in\Delta$

Δ4.

Για κάθε $x\in[1, 2]$ ισχύει $0<1\le x\le 2<\pi$ άρα ημx>0 για κάθε $x\in[1, 2]$ οπότε πολλαπλασιάζοντας την ανισότητα $f(x) \le 3x-4$ με ημx παίρνουμε $f(x)ημx \le (3x-4)ημx$ και ολοκληρώνοντας την τελευταία έχουμε

$$\int_1^2 f(x)ημx dx < \int_1^2 (3x-4)ημx dx = \int_1^{4/3}(3x-4)ημx dx + \int_{4/3}^2 (3x-4)ημx dx \quad (1)$$

Είναι:

- $\int_1^{4/3}(3x-4)ημx dx < 0$ (2) διότι $(3x-4)ημx<0 \quad \forall\ x\in[1, 4/3)$ αφού $x<4/3 \Leftrightarrow 3x<4 \Leftrightarrow 3x-4<0$ και ημx>0 $\forall\ x\in[1, 4/3)$ και
- $\int_{4/3}^2 (3x-4)ημx dx < \int_{4/3}^2 (3x-4)dx$ (3) διότι $0<ημx<1$ $\forall x\in[4/3, 2]$ και $3x-4\ge 0$ $\forall x\in[4/3, 2]$

Έτσι η (1) λόγω των (2) και (3) γίνεται

$$\int_1^2 f(x)ημx dx < 0 + \int_{4/3}^2 (3x-4)dx = \left[\frac{3}{2}x^2 - 4x\right]_{4/3}^2 = \frac{2}{3} < 1$$

Σχόλιο: Η δυσκολία αυτού του θέματος βρίσκεται στο μη σταθερό πρόσημο της f ή της 'μεγαλύτερης' της 3x–4 στο διάστημα ολοκλήρωσης [1, 2] οπότε και σπάσαμε το ολοκλήρωμα ακριβώς στην ρίζα της γραμμικής συνάρτησης 3x–4

Δύο συμπληρωματικά ερωτήματα που προέκυψαν απ' την κατασκευή του Δ θέματος είναι τα εξής:

Δ5 Αν g(x)=ημx, $x\in(0, \pi)$ να προσδιορίσετε τη σύνθεση fog και έπειτα τη σχετική θέση των C_g και $C_{f\circ g}$ στο διάστημα $(0, \pi)$

Λύση:

Είναι $D_{fog}=\{x\in D_g:\ g(x)\in D_f\}=\{x\in(0, \pi) : ημx>0\}=(0, \pi)$ και $f(g(x))=\ln(ημx)-(ημx-2)^2 \le ημx-1-(ημx-2)^2 < ημx = g(x)$ άρα η C_{fog} βρίσκεται κάτω απ' την C_g

Δ6. Αν α, β∈Δ με $\alpha^2+\beta^2=\alpha+\beta$ τότε $\alpha\beta \le 1$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση:

1^{ος} τρόπος (με ανάλυση): Από το **Δ3.** για κάθε x∈Δ ισχύει
$f(x)\le 3x-4 \Leftrightarrow \ln x-(x-2)^2\le 3x-4 \Leftrightarrow \ln x\le (x-2)^2+3x-4 \Leftrightarrow \ln x\le x^2-x$ (1)
με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=1
Θέτοντας στην σχέση (1) όπου x τους αριθμούς α και β και προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε:
$\ln\alpha+\ln\beta\le \alpha^2-\alpha+\beta^2-\beta=0 \Rightarrow \ln\alpha\beta\le \ln 1 \Rightarrow \alpha\beta\le 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο αν α=β=1

2^{ος} τρόπος (με άλγεβρα): Ισχύει $(\alpha+\beta)^2 \le 2(\alpha^2+\beta^2)$ με την ισότητα μόνο αν α=β και επειδή $\alpha^2+\beta^2=\alpha+\beta$ έχουμε
$(\alpha+\beta)^2 \le 2(\alpha+\beta) \overset{:(\alpha+\beta)>0}{\Leftrightarrow} \alpha+\beta \le 2$ (1)
Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου έχουμε
$\alpha+\beta \ge 2\sqrt{\alpha\beta}$ (2)
Από (1) και (2) λαμβάνουμε $2\sqrt{\alpha\beta} \le \alpha+\beta \le 2$ άρα $\sqrt{\alpha\beta}\le 1 \Leftrightarrow \alpha\beta\le 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο αν α=β=1

Κατασκευή των θεμάτων και επιμέλεια των λύσεων:
Χρήστος Ε. Ηρακλείδης