ΜΕΡΟΣ Β΄

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ-ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ

- **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
- **ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

1η Έκδοση, Ιανουάριος 2017

Γιάννης Καραγιάννης

Τηλ. 2241068945

e-mail: iokaragi@sch.gr

ΡΟΔΟΣ

Σελίδες:

ISSN:

© Copyright Γιάννης Καραγιάννης

Ιανουάριος 2017

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή μερική ή ολική έστω και μιας σελίδας του βιβλίου αυτού με οποιαδήποτε μέθοδο (μηχανική, ηλεκτρονική, φωτοτυπική κ.α. -Ν. 2121/93 και 2557/97). Οι παραβάτες διώκονται ποινικά.

Λίγα λόγια για τον αναγνώστη

Στο παρών e-book θα μπορέσετε να δείτε τις απαντήσεις, τις υποδείξεις καθώς και τις πλήρεις λύσεις επιλεγμένων θεμάτων που περιλαμβάνονται στο βιβλίο «Επανάληψη στα Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ΄Λυκείου» Συγκεκριμένα θα βρείτε:

Κεφάλαιο 1ο (Θέμα Α)

- Τις απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης του σχολικού βιβλίου με τις αιτιολογήσεις τους.
- Τις απαντήσεις στις ερωτήσεις Σωστού-Λάθους των Πανελλαδικών Εξετάσεων.
- Τον σύνδεσμο για τις απαντήσεις στις ερωτήσεις Σωστού-Λάθους του ΨΕΒ του Υπουργείου.

Κεφάλαιο 2ο -3ο -4ο (Θέμα Β, Γ και Δ)

- Τις παραπομπές για τις λύσεις των ασκήσεων του σχολικού βιβλίου (στο βιβλίο των λύσεων).
- Τον σύνδεσμο που οδηγεί στις λύσεις των ασκήσεων του ΨΕΒ.
- Τις απαντήσεις και υποδείξεις καθώς και παραπομπή στις πλήρεις λύσεις των προτεινόμενων θεμάτων.
- Τις απαντήσεις και υποδείξεις καθώς και παραπομπή στις πλήρεις λύσεις των θεμάτων των Πανελλαδικών Εξετάσεων.
- Τις παραπομπές για τις λύσεις των διαγωνισμάτων.

Κεφάλαιο 5ο

- Τις πλήρεις λύσεις των θεμάτων των προσομοιωμένων διαγωνισμάτων.
- Τις παραπομπές για τις λύσεις των διαγωνισμάτων του ΨΕΒ.
- Τις πλήρεις και υποδειγματικές λύσεις των θεμάτων των πανελλαδικών εξετάσεων όλων των τύπων Λυκείων του 2016 όπως πρέπει να γράφονται στις πανελλαδικές εξετάσεις.
- Τις παραπομπές για τις λύσεις των προτεινόμενων θεμάτων από την Ε.Μ.Ε..

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Β΄: ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ-ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ-ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ-ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ-ΛΥΣΕΙΣ

Τις απαντήσεις στις ερωτήσεις των παραγράφων **1.1, 1.2, 1.3** θα τις βρείτε στο **e-book της θεωρίας** σε μορφή ερώτησης-απάντησης.

1.4. Αντικειμενικού τύπου

α. Ερωτήσεις Κατανόησης του Σχολικού Βιβλίου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{o}: ΟΡΙΟ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

I.

Α/Α Ερώτησης	Απάντηση	Δικαιολόγηση
1α	**Ψ**	Είναι ψευδής, αφού: $D_f = (0,\ +\infty)$, $D_g = \mathbb{R}$, $D_{gof} = (0,\ +\infty)$
1β	**Α**	Είναι αληθής, αφού: $D_f = (0,\ +\infty)$, $D_g = \mathbb{R}$, $D_{fog} = \mathbb{R}$ και $(fog)(x) = f(g(x)) = \ln e^{-x} = -x$.
2	**Α**	$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{x-1} = l \in \mathbb{R}$ $\dfrac{f(x)}{x-1} = g(x),\ \lim\limits_{x\to 1} g(x) = l$ $f(x) = (x-1)g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) =$ $= \lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1)g(x)\right] = 0\cdot l = 0$
3	**Ψ**	Είναι Ψευδής, αφού $0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+x} = 0$ δεν είναι σωτό διότι έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $0\cdot(\pm\infty)$.
4	**Ψ**	Είναι Ψευδής, αφού μπορεί να ισχύει και $f(x) = 1$. Παράδειγμα: $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$. Είναι $f(x) > 1,\ x \in \mathbb{R}$ ενώ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

5α	**Α**	Αληθής αφού: $$\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=$$ $$\lim_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u}=1\left(\begin{array}{l}u=\frac{1}{x}\\ x\to+\infty\Rightarrow u\to0\end{array}\right)$$
5β	**Ψ**	Είναι Ψευδές αφού: $$\left\|\frac{\eta\mu x}{x}\right\|=\frac{\|\eta\mu x\|}{\|x\|}\le\frac{1}{\|x\|}\Rightarrow-\frac{1}{\|x\|}\le\left\|\frac{\eta\mu x}{x}\right\|\le\frac{1}{\|x\|}$$ $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{\|x\|}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\|x\|}=0$ και από το Κριτήριο της Παρεμβολής είναι $\lim_{x\to\infty}\left\|\frac{\eta\mu x}{x}\right\|=0$.
6	**Α**	Είναι Αληθής, αφού : $0\le f(x)\le1\Rightarrow0\le x^2f(x)\le x^2$ $\lim_{x\to0}x^2=0$ και από το κριτήριο της Παρεμβολής προκύπτει $\lim_{x\to0}\left(x^2f(x)\right)=0$.
7	**Ψ**	Είναι Ψευδής αφού το όριο της f μπορεί να μην υπάρχει στο $+\infty$.
8	**Ψ**	Είναι Ψευδής, αφού δεν γνωρίζουμε αν η συνάρτηση $f(x)\cdot g(x)$ είναι ή όχι συνεχής στο $x_0=6$.

9	**Ψ**	Είναι Ψευδής, αφού το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ μπορεί να μην υπάρχει. Παράδειγμα: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{\lvert x \rvert}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$. Είναι $\lim_{x \to x_0} \lvert f(x) \rvert = 1$ ενώ: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$
10	**Α**	Προκύπτει ακόμα και με χρήση του Κριτηρίου παρεμβολής, αφού: $-f(x) \leq \lvert f(x) \rvert \leq f(x)$ και $\lim_{x \to x_0}(-f(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x)$.
11	**Α**	Είναι Αληθής, αφού : $f(4) = \lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4} =$ $= \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)(x-3)}{x-4} = \lim_{x \to 4}(x-3) = 1$
12	**Α**	Είναι Αληθής, αφού : Η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και $f(-1) \neq f(1)$. Επομένως από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών υπάρχει $x_0 \in (-1, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \pi$.

II.

Α/Α Ερώτησης	Απάντηση
1	**Ε**
2	**Ε**
3	**Δ**
4	**Γ**

III.

Α/Α Ερώτησης	Απάντηση
1	**Γ**
2	**Α, Γ, Ε**
3	**Ε**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

I.

Α/Α Ερώτησης	Απάντηση	Δικαιολόγηση
1	**Α**	Αληθής, αφού αν ισχύει $f(0) = f(1)$ από το Θ. Rolle θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,\ 1)$: $f'(\xi) = 0$, που είναι άτοπο.
2	**Α**	Αληθής, αφού αν ισχύει $f'(x_0) \geq 0$ για κάθε $x_0 \in (a,\ \beta)$ η f
3	**Α**	Αληθής, αφού για τη συνάρτηση: $h(x) = f(x) - g(x),\ x \in [a, \beta]$ ισχύει το Θ. Rolle, δηλαδή υπάρχει $x_0 \in (a,\ \beta) : h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = g'(x_0)$, δηλαδή οι εφαπτομένες στα Α και Β είναι παράλληλες.
4α	**Ψ**	Είναι: $f \downarrow (-\infty,\ 1)$, $f \downarrow [1,\ 2]$, $f \uparrow (2,\ +\infty)$ και επομένως η f έχει τοπικό ελάχιστο στο 2 και δεν έχει τοπικό μέγιστο στο 1.
4β	**Α**	

5α	**Α**	Η f' θα είναι πολυώνυμο περιττού βαθμού, και άρα θα έχει μία ,τουλάχιστον, πραγματική ρίζα. Επομένως η C_f θα έχει μία, τουλάχιστον οριζόντια εφαπτομένη.
5β	**Ψ**	Η f' θα είναι πολυώνυμο άρτιου βαθμού, και άρα δεν θα έχει πάντα πραγματικές ρίζες επομένως και οριζόντιες εφαπτομένες.
6	**Α**	Η $f''(x) = 6ax + 2\beta,\ \alpha \neq 0$. Είναι: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\dfrac{\beta}{3\alpha}$, οπότε η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και επομένως έχει πάντα σημείο καμπής.
7	**Ψ**	Αντιπαράδειγμα: $f(x) = x^3,\ g(x) = x^5, x \in \mathbb{R}$. $f''(x) = 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $g''(x) = 20x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και f, g έχουν Σ.Κ. Ενώ $\begin{aligned} &h(x) = x^8 \\ &h''(x) = 56x^6 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$ και η h δεν έχει Σ.Κ.
8	**Α**	Προφανώς το σημείο Α βρίσκεται ψηλότερα (η χαμηλότερα) από τα υπόλοιπα σημεία του άξονα x και άρα η f (που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$) θα έχει ακρότατο στο x_0. Από το Θ. Fermat θα είναι $f(x_0) = 0$ και επομένως έχει οριζόντια εφαπτομένη στο Α.

9α	**Ψ**	Ψευδής , αφού**:** $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x-2) = -1$
9β	**Α**	Αληθής, αφού: $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-2}{x-1}$ $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$
10 i.	Ψ	Από το σχήμα προκύπτει ότι υπάρχει σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1,\ 4)$ το οποίο βρίσκεται ψηλότερα από τα άλλα σημεία της C_f και επειδή η f παραγωγίζεται στο $(1,\ 4)$, από το Θ. Fermat θα είναι $f'(x_0) = 0$. Επομένως το πεδίο ορισμού της $\dfrac{1}{f'}$ δεν είναι ούτε το $(1,\ 4)$ ούτε το $[1,\ 4]$.
10 ii.	**Ψ**	
10 iii.	**Ψ**	Ψευδής, αφού τότε η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,\ 4]$ που δεν είναι αληθές αφού η f είναι και γνησίως φθίνουσα (Σχήμα).
10 iv.	**Α**	Όπως το i.
11α	**Ψ**	Ψευδές, αφού $f'(x) > 0,\ x \in (0,1)$
11β	**Α**	Αληθές αφού ισχύει το Θ. Bolzano [$f(-1) = -1 < 0$ και $f(0) = 1 > 0$] και $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, δηλαδή η f γν. αύξουσα (άρα 1-1) οπότε μοναδική ρίζα στο $(-1,\ 0)$.
11γ	**Ψ**	Ψευδές, αφού $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε δηλαδή η f γν. αύξουσα (άρα 1-1) οπότε μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

12	**A**	$(fog)'(0) = f'(g(0)) \cdot g'(0) = f'(5) \cdot 1 = 6$ $(gof)'(0) = g'(f(0)) \cdot f'(0) = g'(4) \cdot 3 = 6$

II.

Α/Α Ερώτησης	**Απάντηση**
1	**Β**
2	**Γ**
3	**Ε**
4	**Γ**
5	**Γ**
6	**Γ**
7	**Ε**
8	**Γ**

III.

1. $\alpha \to \mathrm{E},\ \beta \to A,\ \gamma \to B,\ \delta \to \Delta$

2. $1 \to \delta,\ 2 \to \gamma,\ 3 \to \alpha$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Ι.

Α/Α Ερώτησης	Απάντηση	Δικαιολόγηση
1	**Α**	Αληθές , γνωστή ιδιότητα.
2	**Ψ**	Ψευδές, αφού δεν ισχύει π.χ $f(x)=g(x)=c\neq 0, x\in[a,\ \beta]$
3	**Α**	Αληθές , γνωστή ιδιότητα.
4	**Ψ**	Ψευδές, αφού δεν ισχύει π.χ για τη συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ και άκρα $a=0,\ \beta=2\pi$. Τότε $\int_0^{2\pi} f(x)dx=0$.
5	**Α**	Αληθές , γνωστή ιδιότητα.
6	**Ψ**	Ψευδές, αφού δεν ισχύει π.χ για τη συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ και άκρα $a=0,\ \beta=\frac{3\pi}{2}$. Τότε $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx=1>0$ και $f(x)<0, x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$.
7	**Α**	$f(x)=x^4+1<x^4+x^2+1=g(x)$ και οι f,g δεν είναι παντού ίσες στο $[-a,\ a],\ a>0$. Επομένως: $\int_{-a}^{a} f(x)dx<\int_{-a}^{a} g(x)dx$.
8	**Α**	$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1-\eta\mu^2x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\sigma\upsilon\nu^2x\right)dx=$ $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\ln\left(\sigma\upsilon\nu x\right)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\sigma\upsilon\nu x\right)dx$
9	**Α**	$\int_e^1\ln\frac{1}{t}dt=\int_e^1-\ln t dt=\int_1^e\ln t dt$.
10	**Ψ**	Ψευδές, αφού για να παριστάνει εμβαδόν

		θα έπρεπε να ισχύει $x^3 - x \geq 0,\ x \in [-1,\ 1]$ που δεν ισχύει σε όλο το διάστημα.

II.

Α/Α Ερώτησης	**Απάντηση**
1	**Δ**
2	**Α**
3	**Β**
4	**Δ**
5	**Β**
6	**Γ**

III.

Α/Α Ερώτησης	**Απάντηση**
1	**Β, Ζ**
2	Η αντικατάσταση $x = \frac{1}{u}$ δεν είναι σωστή διότι όταν $x = 0$ δεν υπάρχει αντίστοιχο u.

β. Ερωτήσεις Θεωρίας κλειστού τύπου –Ψηφιακό Σχολείο του Υπουργείου

Τις πλήρεις απαντήσεις θα τις βρείτε στο δικτυακό τόπο:

http://www.study4exams.gr/math_k/course/view.php?id=68

1.5. Το Θέμα Α των Πανελλαδικών Εξετάσεων

Οι ερωτήσεις θεωρίας απαντώνται αναλυτικά στο e-book «Θεωρία: Ερωτήσεις-Απαντήσεις» σε μορφή ερώτησης-απάντησης.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ-ΛΑΘΟΥΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ[1]

Αρ. Ερώτησης	Απάντηση	Αρ. Ερώτησης	Απάντηση	Αρ. Ερώτησης	Απάντηση
1	Λ	37	Λ	73	Σ
2	Λ	38	Σ	74	Λ
3	Σ	39	Σ	75	Σ
4	Λ	40	Λ	76	Σ
5	Σ	41	Λ	77	Σ
6	Σ	42	Σ	78	Λ
7	Λ	43	Λ	79	Λ
8	Λ	44	Σ	80	Λ
9	Σ	45	Λ	81	Λ
10	Σ	46	Σ	82	Σ
11	Σ	47	Λ	83	Λ
12	Λ	48	Σ	84	Σ
13	Σ	49	Λ	85	Σ
14	Σ	50	Σ	86	Λ
15	Σ	51	Λ	87	Σ
16	Λ	52	Λ	88	Σ
17	Σ	53	Λ	89	Σ

[1] Ελεγξτε την αρίθμηση από την ερώτηση 20 και μετά να είναι η ορθή στο βιβλίο (έχει διορθωθεί σε νεότερη έκδοση-2η και 3η).

18	**Σ**	**54**	**Σ**	**90**	**Λ**
19	**Λ**	**55**	**Σ**	**91**	**Σ**
20	**Σ**	**56**	**Σ**		
21	**Λ**	**57**	**Λ**		
22	**Σ**	**58**	**Σ**		
23	**Σ**	**59**	**Λ**		
24	**Σ**	**60**	**Σ**		
25	**Σ**	**61**	**Σ**		
26	**Λ**	**62**	**Σ**		
27	**Σ**	**63**	**Σ**		
28	**Σ**	**64**	**Λ**		
29	**Σ**	**65**	**Λ**		
30	**Λ**	**66**	**Λ**		
31	**Σ**	**67**	**Σ**		
32	**Σ**	**68**	**Σ**		
33	**Λ**	**69**	**Σ**		
34	**Λ**	**70**	**Λ**		
35	**Σ**	**71**	**Λ**		
36	**Σ**	**72**	**Λ**		

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{o} : ΘΕΜΑ Β

2.1. Σχολικού βιβλίου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{O} (Όριο-Συνέχεια συνάρτησης)

Άσκηση	Στο σχολικό βιβλίο	Παράγραφος
1	1A	1.2
2	6A	1.2
3	2A	1.2
4	3A	1.2
5	5B	1.2
6	1B	1.2
7	7A	1.2
8	8A	1.2
9	9A	1.2
10	10A	1.2
11	11A	1.2
12	7B	1.2
13	6B	1.2
14	8B	1.2
15	3B	1.2
16	4B	1.2
17	4A	1.2
18	5A	1.2
19	9B	1.2
20	2	1.3
21	3	1.3
22	1	1.4
23	4	1.4
24	2	1.4
25	3	1.4
26	3B	1.5
27	2B	1.7
28	3B	1.7
29	4B	1.7
30	1A	1.8
31	3B	1.8

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο} (Διαφορικός Λογισμός)

Άσκηση	**Στο σχολικό βιβλίο**	**Παράγραφος**
1	5Β	2.1
2	8Β	2.1
3	9Β	2.1
4	4Β	2.2
5	14^{Α}	2.3
6	5Β	2.3
7	7Β	2.3
8	9Β	2.3
9	10Β	2.3
10	11Β	2.3
11	8Β	2.4
12	3Β	2.5
13	4Β	2.5
14	5Β	2.5
15	6Β	2.5
16	7Β	2.5
17	5Β	2.6
18	7Β	2.6
19	8Β	2.6
20	1Β	2.7
21	2Β	2.7
22	3Β	2.7
23	5Β	2.7
24	8Β	2.7
25	4Β	2.8
26	5Β	2.8
27	4Β	2.8
28	5Β	2.8
29	5Β	2.9
30	6Β	2.9
31	1Α	2.10
32	2Α	2.10
33	2Γ	Γενικές
34	7Γ	Γενικές

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο} (Ολοκληρωτικός Λογισμός)

Άσκηση	Στο σχολικό βιβλίο	Παράγραφος
1	3	3.4
2	1Α	3.5
3	2Α	3.5
4	3Α	3.5
5	4Α	3.5
6	6Α	3.5
7	7Β	3.5
8	8Β	3.5
9	9Β	3.5
10	10Β	3.5
11	11Β	3.5
12	12Β	3.5
13	1Β	3.7
14	4Β	3.7
15	5Β	3.7
16	6Β	3.7
17	7Β	3.7
18	8Β	3.7
19	9Β	3.7
20	10Β	3.7
21	11Β	3.7
22	12Β	3.7

2.2. Ψηφιακού βοηθήματος

Τις πλήρεις λύσεις θα τις βρείτε στο δικτυακό τόπο:

http://www.study4exams.gr/math_k/course/view.php?id=68

2.3. Προτεινόμενα

Θέμα	Απάντηση-Υπόδειξη
1	Προσομοίωση 4, θέμα Β
2	**Β1.** Θεωρούμε την $g(x)=e^x+x$ η οποία είναι «1-1». $g\big(f(x)\big)=g(x)\Rightarrow f(x)=x$ κλπ. **Β2**. $x=1$ μοναδική. **Β3**. Βλέπε Β1 **Β4.** $x\in(-\infty,\ 0)\cup(1,\ +\infty)$.
3	Προσομοίωση 2, θέμα Β.
4	Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha,\ \beta]$ Εφαρμογή ορισμού της μονοτονίας της f'.
5	Προσομοίωση 1, θέμα Β.
6	**Β1.** f γνησίως μονότονη. **Β2.** $x=2$. **Β3.** $x<e$.
7	**Β1.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **Β2**. 3. **Β3.** Δεν είναι συνεχής στο $x_0=1$.
8	**Β1.** Γνησίως αύξουσα στο $\big(0,\ +\infty\big)$. **Β2.** Είναι κοίλη χωρίς Σ.Κ.. **Β4.** Μοναδική λύση για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.
9	**Β1. i.** $-\frac{1}{2}$ **ii.** 3 **Β2.** $\alpha=9,\ \beta=-11$. **Β3.** $\lim_{x\to1} f(x)=\lambda-1$ αν $\lambda\neq1$. Δεν υπάρχει αν λ=1. $\lim_{x\to0} g(x)=2$ αν $\mu=0$. Δεν υπάρχει αν $\mu\neq0$.
10	**Β1.** f «1-1» **Β2**. Θέτω $f^{-1}(x)=u$. **Β3**. $\frac{1}{3}$ τ.μ.

2.4. Πανελλαδικών Εξετάσεων

1. B1. $\alpha = 2$ **B2.** $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$.

2. B1. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = f(3) \Leftrightarrow 9a = -1 \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{9}$.

B2. $y = -x + 5 - e$. **B3.** $\dfrac{7}{27}$ τ.μ.

3. B1. $(0,3),\ (1,0),\ (3,0)$ **B2.** $y = 2x - 6$ **B3.** $\begin{matrix} f \downarrow (-\infty,\ 2] \\ f \uparrow [2,\ +\infty) \end{matrix}$.

4. B1. $\kappa = 2$. **B2.** $y = -17x + 1$.

5. B1. f «1-1» με $f^{-1}(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1,\ 1)$.

B2. $x = 0$, μοναδική αφού f^{-1} «1-1».

B3. θέτουμε $e^x = u$ κ.λ.π.

6. B1. $\dfrac{3}{2}$ **B2.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x) - (x-1)\right] = 0$ **B3.** $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 6}{(x-2)^2} > 0,\ x \neq 2$

7.

$D_f = (0,\ +\infty)$

B1. $f'(x) = 2x\ln x + x,\ x > 0,\ f \downarrow \left(0,\ \dfrac{1}{e}\right],\ f \uparrow \left[\dfrac{1}{e},\ +\infty\right)$

Τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = \dfrac{1}{e}$, $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{1}{e^2}$.

B2. $f \cap \left(0,\ -\dfrac{3}{2}\right]$, $f \cup \left[-\dfrac{3}{2},\ +\infty\right)$, Σ.Κ. το $M\left(e^{-\frac{3}{2}},\ -\dfrac{3}{2e^3}\right)$.

B3. Σ.Τ.$=\left[-\dfrac{1}{e^2},\ +\infty\right)$.

8. B1. m=10 **B2.** $E = \int_0^1 f(x)dx$.

9. B1. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 7 = 6 + \kappa \Leftrightarrow \kappa = 1$.

B2. $y = -8x - 1$. **B3.**

10. B1. $f(1)=1 \Leftrightarrow \kappa=-1$ **B2.** $f'(x)=3x^2-2x+1>0,\ x\in\mathbb{R}$.

B3. Bolzano και $f\uparrow$.

11. B1. f συνεχής στο $\mathbb{R}$. **B2.** $f\downarrow(-\infty,\ 1]$, $f\uparrow[1,\ +\infty)$

B3. Όχι , δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

12. B1. Χρήση του ορισμού. **B2.** $f^{-1}(x)=2+\sqrt{x-2},\ x\geq 2$.

13. B1. $f'(x)=\dfrac{e^x(1-e)}{(1+e^{x+1})^2}<0$ **B2.** $e^x=u$ **B3.**

14. B1. f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0=2$ **B2.** $y=\dfrac{1}{2}$

B3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-\left(\dfrac{1}{2}x+2\right)\right]$

15. B1. α. f συνεχής στο $x_0=1$ **β.** όχι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

B2. $y=2x-3$.

16. B1. Πρέπει $f'(2)=-3$, $\alpha=1$.

B2. α. $f\uparrow(-\infty,\ -1]$ και στο $[3,\ +\infty)$, $f\downarrow[-1,\ 1)$ και στο $(1,\ 3]$.

Τοπικό μέγιστο στο $x_1=-1$, το $f(-1)=-3$, τοπικό ελάχιστο στο $x_2=3$, το $f(3)=5$.

β. $x=1,\ y=1$.

γ. $\dfrac{3}{2}$.

17. B1. $f'(x)=\dfrac{2(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x^3},\ x\in(0,\ +\infty)$

$f\downarrow\Delta_1=(0,\ 1]$

$f\uparrow\Delta_2=[1,\ +\infty)$

$f((0,\ +\infty))=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=[2,\ +\infty)$

B2. Πρέπει $f(x)\geq 2$. Έχουμε:

$$x > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 2$$

$$x < 1 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 2$$

$$x = 1 \Leftrightarrow f(1) = 2$$

άρα $D_f = \mathbb{R}$.

(ή αλλιώς η f έχει ολικό ελάχιστο στο 1, το $f(1) = 2$ άρα για κάθε $x \in (0, \ +\infty)$ έχουμε $f(x) \geq 2$ άρα $D_f = \mathbb{R}$).

B3.

$$f\left(f(x) - \frac{3}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow f\left(f(x) - \frac{3}{2}\right) = f(1) \Leftrightarrow f(x) - \frac{3}{2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{4} \Leftrightarrow f(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

B4. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = xf'(x) - f(x) + \frac{5}{2}, x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \ 1\right]$$

και εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano στο $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \ 1\right]$ αφού $h(x)$ συνεχής στο $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \ 1\right]$ και

$$h(1) = \frac{1}{2} > 0$$

$$h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{2}} < 0$$

18-21: Τα θέματα αυτά είναι από τις πανελλαδικές εξετάσεις Ημερησίων και Εσπερινών Γενικών Λυκείων 2016 και μπορείτε να δείτε τις πλήρεις αναλυτικές-υποδειγματικές λύσεις τους στο κεφάλαιο 5^{ο}.

2.5. Διαγωνίσματα επιπέδου θέματος Β

Διαγώνισμα 1^{ο}	ΘΕΜΑ 1^{ο}: Θέμα 4 της § 2.2 (Κεφάλαιο 2^{ο})
	ΘΕΜΑ 1^{ο}: Θέμα 4 της § 2.2 (Κεφάλαιο 3^{ο}).
	ΘΕΜΑ 1^{ο}: Θέμα 19 της § 2.2 (Κεφάλαιο 3^{ο}).
Διαγώνισμα 2^{ο}	ΘΕΜΑ 1^{ο}: Θέμα 3 της § 2.3
	ΘΕΜΑ 2^{ο}: Θέμα 15 της § 2.4
	ΘΕΜΑ[2] 3^{ο}: Θέμα 18 της § 2.4
Διαγώνισμα 3^{ο}	ΘΕΜΑ 1^{ο}: Θέμα 9 της § 2.2
	ΘΕΜΑ 2^{ο}: Θέμα 5 της § 2.3
	ΘΕΜΑ 3^{ο}: Θέμα 19 της § 2.4.

[2] Το θέμα στην παλαιότερη έκδοση έχει αντικατασταθεί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο : ΘΕΜΑ Γ

3.1. Σχολικού βιβλίου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο (Όριο-Συνέχεια συνάρτησης)

Άσκηση	Στο σχολικό βιβλίο	Παράγραφος
1	7Β	1.8
2	8Β	1.8
3	9Β	1.8

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο (Διαφορικός Λογισμός)

Άσκηση	Στο σχολικό βιβλίο	Παράγραφος
1	6	Γενικές
2	8	Γενικές
3	9	Γενικές
4	10	Γενικές
5	11	Γενικές

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο (Ολοκληρωτικός Λογισμός)

Άσκηση	Στο σχολικό βιβλίο	Παράγραφος
1	1Γ	Γενικές
2	4Γ	Γενικές
3	9Γ	Γενικές
4	10Γ	Γενικές

3.2. Ψηφιακού βοηθήματος

Τις πλήρεις λύσεις θα τις βρείτε στο δικτυακό τόπο του Ψηφιακού Εκπαιδευτικού Βοηθήματος του ΥΠ.Π.Ε.Θ:

http://www.study4exams.gr/math_k/course/view.php?id=68

3.3. Προτεινόμενα

Θέμα	Απάντηση-Υπόδειξη
1ο	Προσομοίωση 1, θέμα Γ
3ο	Προσομοίωση 2, θέμα Γ
5ο	Προσομοίωση 3, θέμα Γ
7ο	Προσομοίωση 4, θέμα Γ
9ο	Προσομοίωση 5, θέμα Γ

Θέμα 2ο (Πλήρης Λύση).

Γ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x + 2x + 1,\ x \in [-1,\ 0]$.

Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για την g στο $[-1,\ 0]$

- Η g είναι συνεχής στο $[-1,\ 0]$ (ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων στο $[-1,\ 0]$).
- $g(0) = 2 > 0$
- $g(-1) = \dfrac{1}{e} - 1 < 0$

Άρα υπάρχει $a \in (-1,\ 0)$ τέτοιο, ώστε $g(a) = 0 \Leftrightarrow e^a + 2a + 1 = 0$.

Η g είναι είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με $g'(x) = e^x + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και «1-1» , δηλαδή η η g έχει μοναδική ρίζα την $x = a$.

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με $f'(x) = e^x + 2x + 1,\ x \in \mathbb{R}$. Άρα $f'(x) = g(x)$ και η g έχει μοναδική ρίζα την $x = a$. Έχουμε:

$$x < a \Rightarrow g(x) < g(a) \Rightarrow f'(x) < 0$$

$$x > a \Rightarrow g(x) > g(a) \Rightarrow f'(x) > 0$$

Δηλαδή η $\begin{matrix} f \downarrow (-\infty,\ a] \\ f \uparrow [a,\ +\infty) \end{matrix}$ και επειδή είναι συνεχής παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = \alpha$, το $f(a) = e^a + a^2 + \alpha$ (1). Όμως έχουμε:

$$g(a) = 0 \Leftrightarrow e^a + 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow e^a = -2a - 1\ (2)$$

Άρα η (1) δίνει:

$$f(a) = e^{a} + \alpha^2 + \alpha = -2a - 1 + \alpha^2 + \alpha = \alpha^2 - \alpha - 1$$

Άρα έχουμε:

$$f(x) \geq f(a) \Rightarrow f(x) \geq \alpha^2 - \alpha - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Γ3. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^x + x^2 + x\right) = +\infty \text{ και } \lim_{x\to-\infty}\left(e^x + x^2 + x\right) = +\infty.$$

Αν $\Delta_1 = \left(-\infty,\ \alpha\right]$, $\Delta_2 = \left[\alpha, +\infty\right)$ θα έχουμε:

$$f(\Delta_1) = \left[\alpha^2 - \alpha - 1,\ +\infty\right)$$
$$f(\Delta_1) = \left[\alpha^2 - \alpha - 1,\ +\infty\right)$$

Είναι:

$$\alpha \in (-1,\ 0) \Rightarrow -1 < \alpha < 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 < \alpha^2 < 1 \\ 0 < -\alpha < 1 \end{cases} \Rightarrow -1 < \alpha^2 - \alpha - 1 < 1 \text{ και } \frac{2017}{2016} > 1.$$

Επομένως:

- $\frac{2017}{2016} \in f(\Delta_1)$, άρα υπάρχει $\rho_1 \in \Delta_1$ τέτοιος, ώστε $f(\rho_1) = \frac{2017}{2016}$ και είναι μοναδικός αφού η f ως γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 είναι και «1-1».
- $\frac{2017}{2016} \in f(\Delta_2)$, άρα υπάρχει $\rho_2 \in \Delta_2$ τέτοιος, ώστε $f(\rho_2) = \frac{2017}{2016}$ και είναι μοναδικός αφού η f ως γνησίως φθίνουσα στο Δ_2 είναι και «1-1».

Επομένως η f έχει δύο ακριβώς ρίζες, τις ρ_1, ρ_2.

Γ4. Η σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε γράφεται διαδοχικά:

$$f(x^2+1) + f(x^2+2) < f(x^2) + f(x^2+3) \Leftrightarrow f(x^2+1) - f(x^2) < f(x^2+3) - f(x^2+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x^2+1) - f(x^2)}{(x^2+1) - x^2} < \frac{f(x^2+3) - f(x^2+2)}{(x^2+3) - (x^2+2)} \quad (1)$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f στα διαστήματα $\left[x^2,\ x^2+1\right]$ και $\left[x^2+2,\ x^2+2\right], x \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι υπάχουμε αντίστοιχα $\xi_1 \in \left(x^2, x^2+1\right),\ \xi_2 \in \left(x^2+2,\ x^2+2\right)$ με:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x^2+1) - f(x^2)}{(x^2+1) - x^2} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(x^2+3) - f(x^2+2)}{(x^2+3) - (x^2+2)}$$

Έτσι η προς απόδειξη σχέση (1) γίνεται $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, η οποία είναι αληθής αφού:

$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα με $f''(x) = e^x > 0$

Γ5. Έχουμε ότι $y(t) = e^{x(t)} + x^2(t) + x(t),\ t \geq 0$ (2). Τα μέλη της σχέσης (2) είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις για κάθε $t \geq 0$ (ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων για κάθε $t \geq 0$). Επομένως έχουμε:

$$y'(t) = e^{x(t)} \cdot x'(t) + 2x(t) \cdot x'(t) + x'(t) \Leftrightarrow y'(t) = x'(t)\left(e^{x(t)} + 2x(t) + 1\right) (3)$$

Για $t = t_0 \Rightarrow x(t_0) = a \in (-1,\ 0)$.

Η σχέση (3) για $t = t_0$ γίνεται:

$$y'(t_0) = x'(t_0)\left(e^{x(t_0)} + 2x(t_0) + 1\right)$$

Ισχύει ακόμα ότι $e^{x(t_0)} + 2x(t_0) + 1 = e^a + 2a + 1 = 0$ (4). Η σχέση (3) , λόγω της σχέσης (4) γίνεται $y'(t_0) = x'(t_0) \cdot 0 = 0$.

Επομένως $y'(t_0) = 0$ και άρα υπάρχει χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής μηδενίζεται.

<u>Θέμα 4ο (Υπόδειξη)</u>

Γ1. Για $x = 0 \Rightarrow e^{f(0)} - ef(0) = 0$.Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x - ex,\ x \in \mathbb{R}$ και μελετούμε την μονοτονία και τα ακρότατα οπότε $f(0) = 1$.

Γ2. Με άτοπο. Έστω ότι η f έχει ακρότατο στο ρ άρα $f'(\rho) = 0$. Παραγωγίζοντας τη δοθείσα σχέση ... $\rho = 0$.

Γ3. Είναι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.Η $f'(x)$ έχει σταθερό πρόσημο και από το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού στο $[0,\ x]$ έχουμε $f'(\xi) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x} > 0,\ \xi \in (0,\ x)$.

Άρα $f'(x) > 0$ και επομένως $f \uparrow$.

Γ4.

$$f(x^2) - f(1 + 2\ln x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x^2) \geq f(1 + 2\ln x) \Leftrightarrow x^2 \geq 1 + 2\ln x \Leftrightarrow x^2 - 1 - 2\ln x \geq 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2 - 1 - 2\ln x, x > 0$ και μελετούμε την μονοτονία και τα ακρότατα.

Θέμα 6ο (Πλήρης Λύση)

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με $f'(x) = 2x + \eta\mu x,\ x \in \mathbb{R}$.

Ακόμα:

$f''(x) = 2 + \sigma\upsilon\nu x > 0,\ x \in \mathbb{R}$ και άρα f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με $f'(0)=0$.

Άρα:

$$x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) \Rightarrow f'(x) > 0$$

$$x < 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) \Rightarrow f'(x) < 0$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = [0,\ +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = (-\infty,\ 0]$ και επειδή είναι συνεχής έχει ολικό ελάχιστο στο $f(0) = g(a) - 1$.

Γ2. Θα μελετήσουμε την συνάρτηση g για να βρούμε τις πιθανές ρίζες της παράστασης $g(a) - 1$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ με $g'(x) = -\dfrac{\ln x}{x^2}$, $x > 0$.

Ο επόμενος πίνακας είναι ο πίνακας μεταβολών της g:

x	**0** **1**	$+\infty$
$g'(x)$	+	−
$g(x)$	↑	↓

Επειδή η g είναι συνεχής στο 1 παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 1 ,το $g(1) = 1$ και άρα έχουμε:

$$g(x) \le g(1) \Rightarrow g(x) \le 1 \Rightarrow g(x) - 1 \le 0,\ x > 0$$

Για $x = a \Rightarrow g(a) - 1 \le 0$.

Θα βρούμε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f:

- Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_1 θα είναι:

$$f(\Delta_1) = [f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = [g(a) - 1, +\infty),$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}+\dfrac{g(a)}{x^2}\right) = +\infty$, διότι:

$\left|\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\right| \le \dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x^2} \le \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2} \le \dfrac{1}{x^2}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$ και σύμφωνα με το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2} = 0$. Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(a)}{x^2} = 0$.

- Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_2 θα είναι:

$$f(\Delta_2) = [f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = [g(a)-1, +\infty)$$

αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2\left(1-\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}+\dfrac{g(a)}{x^2}\right) = +\infty$, διότι:

$\left|\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\right| \le \dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x^2} \le \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2} \le \dfrac{1}{x^2}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$ και σύμφωνα με το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2} = 0$. Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(a)}{x^2} = 0$.

Επομένως διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Για $\alpha = 1 \Rightarrow g(a)-1 = 0 \Rightarrow g(a) = 1$, τότε:

$$f(\Delta_1) = [0,\ +\infty) \text{ και } f(\Delta_2) = (0,\ +\infty).$$

Είναι $0 \in f(\Delta_1)$ και επομένως υπάρχει $x_0 \in \Delta_1$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$ το οποίο είναι μοναδικό αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 άρα και «1-1».

Για $a \neq 1$, τότε $g(a)-1<0$, τότε $0 \in f(\Delta_1)$ και $0 \in f(\Delta_2)$ και επομένως υπάρχει $x_1 \in \Delta_1$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$ και $x_2 \in \Delta_2$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 0$ τα οποία σε κάθε περίπτωση είναι μοναδικά , αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2 άρα και «1-1». Επομένως έχουμε ακριβώς 2 ρίζες.

Γ3. i. Αν $\alpha = 1$, τότε $f(x) = x^2 - \sigma\upsilon\nu x + 1,\ x \in \mathbb{R}$. Έστω $\Lambda(x_0,\ y_0)$ το σημείο επαφής. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο Μ είναι:

$$(\varepsilon):\ y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Αφού το σημείο $M(0,\ -2)$ ανήκει στην (ε) είναι:

$$-2 - f(x_0) = f'(x_0)(-x_0) \Rightarrow x_0^2 + \sigma\upsilon\nu x_0 + x_0\eta\mu x_0 - 3 = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x)=x^2+\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x-3,\ x\in\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων $\mathbb{R}$). Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $K(x)$ έχει δύο ρίζες.

Η $K(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων). με $K'(x)=x(2-\sigma\upsilon\nu x),\ x\in\mathbb{R}$. Επειδή ισχύει $2-\sigma\upsilon\nu x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

- $x>0\Leftrightarrow K'(x)>0$, οπότε η $K(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1=(-\infty,\ 0]$ και
- $x<0\Leftrightarrow K'(x)<0$, οπότε η $K(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=(0,\ +\infty)$.

Άρα η συνεχής συνάρτηση $K(x)$ έχει ολικό ελάχιστο στο 0, το $K(0)=-2$.

Είναι $K(\Delta_1)=[-2,\ +\infty)$ και $K(\Delta_2)=(-2,\ +\infty)$.

Επειδή $0\in K(\Delta_1)$ και $0\in K(\Delta_2)$ θα έχουμε 2 ρίζες $x_1\in\Delta_1,\ x_2\in\Delta_2$ οι οποίες είναι μοναδικές αφού η $K(x)$ είναι γνησίως μονότονη στα Δ_1 και Δ_2.

Επομένως υπάρχουν δύο εφαπτομένες.

ii. Είναι $f(x)=x^2-\sigma\upsilon\nu x+1,\ x\in\mathbb{R}$. Αφού το $N(x(t),\ y(t))$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f είναι $y(t)=x^2(t)-\sigma\upsilon\nu x(t)+1,\ x(t)\in(0,\ 1),\ t\geq 0$ (Ι). Τα μέλη της σχέσης (Ι) είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις του t, οπότε έχουμε:

$$y'(t)=2x(t)\cdot x'(t)+\eta\mu x(t)\cdot x'(t),\ t\geq 0$$

Για $t=t_0$ έχουμε:

$$y'(t_0)=2x(t_0)\cdot x'(t_0)+\eta\mu x(t_0)\cdot x'(t_0)\Rightarrow 2x'(t_0)=2x(t_0)\cdot x'(t_0)+\eta\mu x(t_0)\cdot x'(t_0)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2=2x(t_0)+\eta\mu x(t_0)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\eta\mu x+2x-2,\ x\in[0,1]$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano και έχουμε:

- Η h είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ (ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$).
- $h(0)=-2<0$
  $h(1)=\eta\mu 1>0$

Επομένως υπάρχει ένα,τουλάχιστον, $x_0\in(0,\ 1)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0)=0$. Όμως επειδή η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με $h'(x) = συνx + 2 > 0$, δηλαδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και συνάρτηση «1-1», οπότε η ρίζα της $x_0 \in (0,\ 1)$ είναι μοναδική.

Γ4. Θεωρούμε το διάστημα $[x,\ x+1],\ x > 0$. Με εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού για τη συνάρτηση g στο διάστημα $[x,\ x+1],\ x > 0$ έχουμε:

- Η g είναι συνεχής στο $[x,\ x+1],\ x > 0$,
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(x,\ x+1), x > 0$

Άρα υπάρχει ένα,τουλάχιστον, $\xi \in (x,\ x+1)$ τέτοιο[1], ώστε:

$$g'(\xi) = \frac{g(x+1) - g(x)}{x+1-x} \Rightarrow -\frac{\ln \xi}{\xi^2} = g(x+1) - g(x)$$

Έχουμε: $x < \xi < x+1$ με $x \to +\infty,\ x+1 \to +\infty$ και από το κριτήριο της παρεμβολής θα είναι $\xi \to +\infty$.

Επομένως:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[g(x+1) - g(x)\right] = \lim_{\xi\to+\infty}\left(-\frac{\ln \xi}{\xi^2}\right) = \lim_{\xi\to+\infty}\frac{-\frac{1}{\xi}}{2\xi} = -\lim_{\xi\to\infty}\frac{1}{2\xi^2} = 0$$

Θέμα 8ο (Υπόδειξη)

Γ1.

$$\left((f(x))^2 - xf(x) + x^2 - 3\right)' = 0 \Rightarrow 2f(x)f'(x) - f(x) - xf'(x) + 2x = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(x)\left(2f(x) - x\right) - f(x) + 2x = 0 \ (1)$$

Η f έχει ακρότατο στο $x = a$ και άρα $f'(a) = 0$, οπότε η (1) δίνει $f(a) = 2a$.

Για $x = a$ η δοσμένη σχέση δίνει:

$$f(a))^2 - af(a) + a^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow ...a = 1$$

Γ2. Παραγωγίζοντας την σχέση (1) και υποθέτοντας ότι η f έχει Σ.Κ. στο $x = \rho \in (-2,\ 2)$ καταλήγουμε σε άτοπο.

Γ3. i. Ισχύει $f''(x) \neq 0,\ x \in [-2,\ 2]$ και η $f''(x)$ συνεχής στο $[-2,\ 2]$ οπότε η $f''(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[-2,\ 2]$ και η f' είναι γνησίως μονότονη, οπότε η f είναι «1-1». Αν υπάρχει $\lambda \in [-2,\ 2]$ με:

[1] Στην πραγματικότητα $\xi = \xi(x),\ x > 0$.

$$2f\left(\frac{\lambda}{2}\right)=f\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)+f\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)\Leftrightarrow f\left(\frac{\lambda}{2}\right)-f\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)=f\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)-f\left(\frac{\lambda}{2}\right),$$

Τότε από την εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. για την f στα $\left[\frac{\lambda-1}{2},\ \frac{\lambda}{2}\right]$ και $\left[\frac{\lambda}{2},\ \frac{\lambda+1}{2}\right]$ καταλήγουμε σε άτοπο.

ii. Αφού η η f' είναι γνησίως μονότονη, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $f'\uparrow$ και $\begin{matrix} x>1\Rightarrow f'(x)>f'(1)\Rightarrow f'(x)>0 \\ x<1\Rightarrow f'(x)<f'(1)\Rightarrow f'(x)<0 \end{matrix}$. Ολικό έλαχιστο στο 1 ..και έχουμε

  $f(x)\geq 2$, $x\in[-2,\ 2]$. Όμως $f(2)=1$, άτοπο.

- $f'\downarrow$ … στο 1 ολικό μέγιστο άρα:

$$f(x)\leq 2\Rightarrow f(x)-2\leq 0\Rightarrow\int_0^2(f(x)-2)dx<0\Rightarrow\ldots\int_0^2 f(x)dx<4.$$

Θέμα 10 (Πλήρης Λύση)

Γ1. α. Αφού το σύνολο τιμών της συνεχούς συνάρτησης f είναι το $[-1,\ 4]$ η f θα έχει μέγιστη τιμή το 4 και ελάχιστη τιμή το -1. Επομένως υπάρχουν[2] αντίστοιχα $\kappa,\ \lambda\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε: $f(\kappa)=4,\ f(\lambda)=-1$. Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και τα $\kappa,\ \lambda\in\mathbb{R}$ (εσωτερικά σημεία του $\mathbb{R}$), σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα έχουμε $f'(\kappa)=0,\ f'(\lambda)=0$. Επομένως η $f'(x)=0$ έχει τουλάχιστον 2 ρίζες, τις $\kappa,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

β. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα,τουλάχιστον, $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε:

$$f''(\xi)+f'(\xi)=0\Leftrightarrow f''(\xi)e^{\xi}+f'(\xi)e^{\xi}=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathrm{K}(x)=f'(x)e^{x}$, $x\in\mathbb{R}$ (παρατηρώ ότι

$\mathrm{K}'(\xi)=f''(\xi)e^{\xi}+f'(\xi)e^{\xi}$).

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την K στο διάστημα $[\kappa,\ \lambda]$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\kappa<\lambda$)[3]. Έχουμε:

- Η Κ είναι συνεχής στο $[\kappa,\ \lambda]$ (ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[\kappa,\ \lambda]$).
- Η Κ είναι παραγωγίσιμη στο $(\kappa,\ \lambda)$ (ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $(\kappa,\ \lambda)$) με $\mathrm{K}'(x)=f''(x)e^{x}+f'(x)e^{x}$.

---

[2] Όχι απαραίτητα μοναδικά.

[3] Μπορούμε, για λόγους πληρότητας, να επαναλάβουμε ολόκληρη τη διαδικασία στο διάστημα $[\lambda,\ \kappa]$.

Άρα υπάρχει ένα,τουλάχιστον, $\xi \in (\kappa,\ \lambda)$ τέτοιο, ώστε:

$$K'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi)e^{\xi} + f'(\xi)e^{\xi} = 0 \Leftrightarrow e^{\xi}\left(f''(\xi) + f'(\xi)\right) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) + f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) = -f'(\xi)$$

Γ2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(x) = f'(x) - (e^x + x^2) f(x),\ x \in \mathbb{R}$.

Η Φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$).
Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα του Bolzano για την Φ στο διάστημα $[\kappa,\ \lambda]$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\kappa < \lambda$).

- Η Φ είναι συνεχής στο διάστημα $[\kappa,\ \lambda]$ (ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$, άρα και στο διάστημα $[\kappa,\ \lambda]$).
- $\Phi(\kappa) = f'(\kappa) - (e^{\kappa} + \kappa^2) f(\kappa) = -(e^{\kappa} + \kappa^2) f(\kappa) = -4(e^{\kappa} + \kappa^2) < 0$ (αφού $f'(\kappa) = 0$ και $f(\kappa) = 4$).
- $\Phi(\lambda) = f'(\lambda) - (e^{\lambda} + \lambda^2) f(\lambda) = -(e^{\lambda} + \lambda^2) f(\lambda) = (e^{\lambda} + \lambda^2) > 0$ (αφού $f'(\lambda) = 0$ και $f(\lambda) = -1$).

Επομένως υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi_1 \in (\kappa,\ \lambda)$ τέτοιο, ώστε:

$$\Phi(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_1) - (e^{\xi_1} + \xi_1^2) f(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_1) = (e^{\xi_1} + \xi_1^2) f(\xi_1)$$

, δηλαδή η εξίσωση $f'(x) = (e^x + x^2) f(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

3.4. Πανελλαδικών Εξετάσεων

1. Γ1. $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 1, \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = a^2 + \beta^2 + 2\alpha + 2$ **Γ2.** $\alpha = -1,\ \beta = 0$.

Γ3. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Γ1. $\alpha = 4$ **Γ2.** $a = 0$

Γ3. Είναι $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x-a)^2},\ x \neq a$, όπου $g(x) = x^2 - 2ax + 3a - 2,\ x \in \mathbb{R}$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Bolzano για την g στο διάστημα $[1,\ 2]$ αφού η g είναι συνεχής στο $[1,\ 2]$ (ως πολυωνυμική) και $g(1) = a - 1 > 0$, $g(2) = 2 - a < 0$.

Επομένως υπάρχει $x_0 \in (1,\ 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$$

3[4]. Γ1. Από το Θ.Ε.Τ. έχουμε: $3 \in (2,\ 4)$ και η είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\ 1]$ (ως παραγωγίσιμη στο $[0,\ 1]$).

Γ2. Έστω μ, M το ελάχιστο και το μέγιστο της f στο $[0,\ 1]$ (υπάρχουν αφού η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0,\ 1]$). Τότε $\mu = 2, M = 4$ (αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\ 1]$). Έχουμε:

$$2 < f\left(\frac{1}{5}\right) < 4$$

$$2 < f\left(\frac{2}{5}\right) < 4$$

$$2 < f\left(\frac{3}{5}\right) < 4$$

$$2 < f\left(\frac{4}{5}\right) < 4$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των προηγούμενων σχέσων έχουμε:

$$2 < \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4} < 4$$

[4] Έχει υπάρξει διόρθωση σε νεότερη έκδοση: «... $f(1) = 4$ ...»

, δηλαδή η= $\dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4} \in (2,\ 4)$.

Επομένως υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_1 \in (0,\ 1)$ τέτοιο, ώστε :

$$f(x_1) = \eta = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$$

Γ3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_2 \in (0,\ 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_2) = \lambda = 2$ (αφού ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $y = 2x + 2000$ είναι $\lambda = 2$).

Από το Θ.Μ.Τ. (ελέγχουμε τις προϋποθέσεις) υπάρχει $x_2 \in (0,\ 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_2) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{4-2}{1} = 2$$

Όμως η ευθεία

4. Γ1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ **Γ3.** $f'(0)=h'(0)$

5. Γ1. Αν υποθέσουμε ότι η f έχει ακρότατο στο $x_0 \Rightarrow f'(x_0)=0$. Παραγωγίζοντας τη δοσμένη σχέση καταλήγουμε σε άτοπο.

Γ2. $f'(x) > 0,\ x \in \mathbb{R}$.

Γ3. $f(0) < 0,\ f(1) > 0$ εφαρμογή θεωρήματος Bolzano και f γνησίως μονότονη.

6. Γ1. 1 (de΄Hospital)

Γ2. Βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$ και είναι:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a+1 = 0 \Leftrightarrow a = -1$$

Γ3. Θεώρημα Rolle για την f στο $[1,\ 2]$

7. Γ1. Εφαρμογή των ορισμών της «1-1».

Γ2. Βρίσκουμε τη μονοτονία και το σύνολο τιμών της $h(x) = x^3 - 3x + 1$

8. Γ1. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και f «1-1».

Είναι $f \cap (-\infty,\ 0)$ και $f \cup (0,\ +\infty)$.

Γ2. $f(e^x) \geq f(1+x) \Leftrightarrow e^x \geq 1+x \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0$. Θέτουμε $g(x) = e^x - x - 1,\ x \in \mathbb{R}$

αποδεικνύουμε ότι $g(x) \geq 0$, αφού μελετάμε μονοτονία-ακρότατα.

Γ3. $y = x$

9. Γ1.

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0.$$

Γ2. $y = 2x$ **Γ3.** $f'(x) = \dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

Γ4. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = -\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \left[-\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = -\ln\sqrt{2}$

10. Γ1. $\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^+} f(x) = f(5) = 25$

Γ2. $f'(5)=10$. **Γ3.** $y = 10x - 25$ **Γ4.** Τοπικό ελάχιστο στο 0, το $f(0) = 0$.

11. Γ1. Θεώρημα Rolle για την g στο $\left[0,\ \frac{3}{2}\right]$.

Γ2. $\mathrm{I}(\alpha) = -2\alpha^2 e^a + 7ae^a - 7e^a + 4$

Γ3. 0

12. Γ1. Θεώρημα Fermat $f'(-2) = 0$.

Γ2. $f \uparrow (-\infty,\ -2)$, $f \uparrow (2,\ +\infty)$, $f \downarrow (-2,\ 2)$.

Γ3. Τ.Ελάχιστο στο -2 και Τ. Μέγιστο στο 3.

Γ4. Θεώρημα Bolzano για την f στο $[-1,\ 2]$ και f ”1-1”.

13. Γ1. $f'(x) = \lambda e^{\lambda x},\ x \in \mathbb{R}$

Γ2. Η εξίσωση $y - e^{\lambda x_0} = \lambda e^{\lambda x_0}(x - x_0)$ επαληθεύεται για $x = 0,\ y = 0$ όπου $M\left(x_0,\ f(x_0)\right)$ το σημείο επαφής. Είναι $M\left(\frac{1}{\lambda},\ e\right)$.

Γ3. $\mathrm{E} = \int_0^{\frac{1}{\lambda}}\left(e^{\lambda x} - \lambda ex\right)dx = \frac{1}{\lambda}\left[e^{\lambda x}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}} - \lambda e\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}} = \ldots$

Γ4. $I = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{\lambda(e-2)}{2(2+\eta\mu\lambda)} = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{e-2}{\dfrac{4}{\lambda} + 2\dfrac{\eta\mu\lambda}{\lambda}} = +\infty$

14. Γ1. Έστω ότι η συνάρτηση f δεν είναι «1-1». Τότε υπάρχουν $a,\ \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$, ώστε $f(a) = f(\beta)$. Εφαρμόζοντας το Θ. Rolle για την f στο $[\alpha, \beta]$ έχουμε:

- f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ (ως παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$)
- f παραγωγίσιμη στο (α,β) (ως παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$)
- $f(a) = f(\beta)$

Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$ το οποίο είναι άτοπο αφού από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η f είναι «1-1».

Γ2. Είναι $\begin{matrix} f(1) = 2005 \\ f(-2) = 1 \end{matrix}$

Έχουμε διαδοχικά και ιοδύναμα (η f^{-1} υπάρχει διότι η f είναι «1-1»)

$$f^{-1}\left(-2004 + f(x^2-8)\right) = -2 \Leftrightarrow -2004 + f(x^2-8) = f(-2) \Leftrightarrow f(x^2-8) = 2005 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x^2-8) = f(1) \Leftrightarrow x^2 - 8 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \left(x = 3 \text{ ή } x = -3\right)$$

Γ3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_0)\cdot\lambda_\varepsilon = -1 \ (f'(x_0) = \lambda_{\varepsilon\varphi}), \text{ δηλαδή } f'(x_0) = 668$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την f στο διάστημα $[-2,\ 1]$:

- Η f είναι συνεχής στο $[-2,\ 1]$ (διότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$)
- Η f είναι είναι παραγωγίσιμη στο $(-2,\ 1)$ (διότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$)

Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (-2,\ 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_0) = \frac{f(1) - f(-2)}{1+2} \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{2005-1}{3} \Leftrightarrow f'(x_0) = 668$$

Επομένως υπάρχει σημείο Μ της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f στο Μ να είναι κάθετη στην ευθεία (ε)

15. Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,\ +\infty)$) με $f'(x)=2x-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2x^2-2}{x},\ x>0$.

Έχουμε:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-2}{x}=0 \Leftrightarrow x=1$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-2}{x}>0 \Leftrightarrow x>1$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-2}{x}<0 \Leftrightarrow x<1$$

Ο πίνακας μεταβολών της f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$ 0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$		↘	↗
		Τ.Ε.	

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,\ +\infty)$ και γνησιως φθίνουσα στο $(-\infty,\ 1]$ και επειδή είναι και συνεχής στο $x_0=1$ θα έχει ολικό ελάχιστο. Άρα:

$$f(x)\geq f(1) \Rightarrow f(x)\geq 1,\ x\in(0,\ +\infty)$$

Γ2. Η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα $y'y$ $(x=0)$ αφού:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2-2\ln x)=+\infty$$

Δεν έχει πλάγιες και οριζόντες ασύμπτωτες αφού:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[x-2\frac{\ln x}{x}\right]=+\infty$$

Γ3. i. Για να είναι η g συνεχής στο $(0,\ +\infty)$ αρκεί να είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$ (αφού στα άλλα σημεία η η g συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων στο $(0,\ +\infty)$). Άρα πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)=\kappa \ \ (1)$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{f(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^2 - 2\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{2x - \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x^2 - 2} = -\frac{1}{2}$$

Επομένως $\kappa = -\frac{1}{2}$.

ii. Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano για την g στο διάστημα $[0,\ e]$:

- Η g είναι συνεχής στο $[0,\ e]$ (αφού για κάθε $0 < x \le e$ είναι συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων και στο $x_0 = 0$ είναι συνεχής όπου $\kappa = -\frac{1}{2}$ από το ερώτημα Γ3 i.).
- $g(0) = -\frac{1}{2} < 0$
  $g(e) = \frac{1}{e^2 - 2} > 0$

Επομένως υπάρχει ένα ,τουλάχιστον, $x_0 \in (0,\ e)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0$.

16. Γ1. Ισχύει $f(x) \ge 1 = f(0)$ για κάθε $x > 1$. Δηλαδή η f έχει ακρότατο στο $x_0 = 0$ και $f'(x) = \alpha^x \ln a - \frac{1}{x+1}$, $x > -1$. Από το θεώρημα του Fermat (αφού ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του) θα είναι $f'(0)=0 \Leftrightarrow \ln a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = e$.

Γ2. α. Για $a = e$ είναι:

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1},\ x > -1$$

$$f''(\mathrm{x}) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0,\ x > -1$$

β. Η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα και $f'(0)=0$:

$$\begin{gathered} -1 < x < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x) < 0 \\ x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0 \end{gathered}.$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,\ 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,\ +\infty)$.

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=(x-2)(f(\beta)-1)+(x-1)(f(\gamma)-1),\ x\in[1,\ 2]$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano για την g στο $[1,\ 2]$:

- Η g συνεχής (αποτέλεσμα πράξεων συνεχών στο $[1,\ 2]$)
- $\begin{matrix} g(1)=1-f(\beta)<0 \\ g(2)=f(\gamma)-1>0 \end{matrix}$ διότι $f(\beta)>1$ και $f(\gamma)>1$

  αφού ισχύει $f(x)>f(0)=1$ για κάθε $x\neq 0$.

Άρα η δοθείσα εξίσωση έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(1,\ 2)$.

17. Γ1. Έχουμε:

$$f(x)=\ln\frac{(\lambda+1)x^2+x+1}{x+2}=\ln\left[x\cdot\frac{(\lambda+1)+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}\right]$$

Άρα:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\lambda+1)x=+\infty,\ \lambda>-1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x+1}{x+2}=0,\ \lambda=-1\end{cases}$$

Επομένως $\lambda=-1$.

Γ2. α. Είναι:

$$f(x)=\ln(x+1)-\ln(x+2),\ x\in A=(-1,\ +\infty)$$

και

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}>0,\ x\in A$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α. Επομένως:

$$f(A)=(\lim_{x\to-1^+}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x))$$

με $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=-\infty,\ \ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x+1}{x+2}=0$.

Άρα $f(A)=(-\infty,\ 0)$.

β. Η $y=0$ (άξονας $x'x$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$) και η $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f (διότι $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=-\infty$).

γ. Η εξίσωση $f(x) = -a^2$ έχει μοναδική λύση, διότι:

$$f(x) = -a^2 \in (-\infty,\ 0) = f(A) \text{ για κάθε } a \neq 0$$

και επιπλέον η f είναι γνησίως μονότονη άρα και «1-1».

18. Γ1. $f'(x) = 3x^2 + (3 - \eta\mu x) > 0,\ x \in \mathbb{R}$. Άρα f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Θεώρημα Bolzano στο $[0,\ \pi]$.

Γ3. $x = 2,\ x = 4$

Γ4. $2 + \sigma\upsilon\nu 1$

19. Γ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$e^x\left(f'(x) + f''(x) - 1\right) = f'(x) + xf''(x) \Leftrightarrow e^x f'(x) + e^x f''(x) - e^x = f'(x) + xf''(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(e^x f'(x) - e^x\right)' = \left(xf'(x)\right)' \Leftrightarrow e^x f'(x) - e^x = xf'(x) + c \ (1)$$

Για $x = 0$ είναι $0 - 1 = 0 + c \Leftrightarrow c = -1$. Επομένως από την σχέση (1) έχουμε:

$$e^x f'(x) - e^x = xf'(x) - 1 \Leftrightarrow e^x f'(x) - xf'(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow \left(e^x - x\right) f'(x) = e^x - 1,\ x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Θα εξετάσουμε το πρόσημο της συνάρτησης $h(x) = e^x - x,\ x \in \mathbb{R}$. Η $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη για $x \in \mathbb{R}$ (ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων για $x \in \mathbb{R}$) με $h'(x) = e^x - 1,\ x \in \mathbb{R}$. Είναι:

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$$
$$h'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Επειδή η συνάρτηση $h(x)$ είναι και συνεχής στο $x_0 = 0$ είναι :

- Γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, 0\right]$ και
- Γνησίως αύξουσα στο $\left[0, +\infty\right)$
- Η $h(x)$ είναι συνεχής στο 0.

Επομένως η $h(x)$ έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$, δηλαδή $h(x) \geq h(0) = 1 > 0,\ x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $e^x - x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα από τη σχέση (2) έχουμε $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x},\ x\in\mathbb{R}$.

Τώρα έχουμε διαδοχικά:

$$f'(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{\left(e^x-x\right)'}{e^x-x}\Leftrightarrow f'(x)=\left(\ln\left|e^x-x\right|\right)'\Leftrightarrow f(x)=\ln\left|e^x-x\right|+c_1,\ x\in\mathbb{R}$$

Για $x=0$ είναι $0=0+c_1\Leftrightarrow c_1=0$. Επομένως από την σχέση (2) έχουμε $f(x)=\ln\left|e^x-x\right|$ ή $f(x)=\ln\left(e^x-x\right),\ x\in\mathbb{R}$, αφού $e^x-x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x},\ x\in\mathbb{R}$. Είναι:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow e^x-1=0\Leftrightarrow x=0$$
$$f'(x)>0\Leftrightarrow e^x-1>0\Leftrightarrow x>0$$
$$f'(x)<0\Leftrightarrow e^x-1<0\Leftrightarrow x<0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,\ +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,\ 0\right]$. Έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο $x_0=0$, το $f(0)=0$ (επειδή η f είναι και συνεχής στο 0).

Γ3. Η f' είναι παραγωγίσμη στο $\mathbb{R}$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $f''(x)=\dfrac{(2-x)e^x-1}{\left(e^x-x\right)^2},\ x\in\mathbb{R}$. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $(2-x)e^x-1$ έχει ακριβώς δύο ρίζες. Θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση $K(x)=(2-x)e^x-1,\ x\in\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$K'(x)=-e^x+(2-x)e^x=e^x\left(1-x\right),\ x\in\mathbb{R}.$$

Έχουμε:

$$K'(x)=0\Leftrightarrow x=1$$
$$K'(x)>0\Leftrightarrow x<1$$
$$K'(x)<0\Leftrightarrow x>1$$

Άρα η $K(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty,\ 1\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[1,\ +\infty\right)$. Έχει ολικό μέγιστο στο σημείο $x_1 = 1$ το $K(1) = e - 1 > 0$.

Θα βρούμε τις εικόνες $K\left((-\infty,1]\right)$, $K\left([1,+\infty)\right)$.Έχουμε:

$$K\left((-\infty,1]\right) = \left(\lim_{x\to-\infty} K(x),\ K(1)\right] = \left(-1,\ e-1\right]$$
$$K\left([1,+\infty)\right) = \left(\lim_{x\to+\infty} K(x),\ K(1)\right] = \left(-\infty, e-1\right]$$

αφού:

$$\lim_{x\to-\infty} K(x) = -1$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left[(2-x)e^x\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{2-x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-x}} = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} K(x) = -\infty$$

Επειδή $0 \in \left(-1,\ e-1\right]$ και $0 \in \left(-\infty, e-1\right]$ η $K(x)$ έχει μία ρίζα ξ_1 στο $(-\infty,1]$ και μία ρίζα ξ_2 στο $[1,+\infty)$, οι οποίες είναι μοναδικές, επειδή η $K(x)$ είναι «1-1» στα διαστήματα αυτά (ως γνησίως μονότονη στα διαστήματα $\left(-\infty,\ 1\right]$ και $\left[1,\ +\infty\right)$ αντίστοιχα). Για να αποδείξουμε όμως ότι τα σημεία $A\left(\xi_1, f(\xi_1)\right)$ και $B\left(\xi_2, f(\xi_2)\right)$ είναι σημεία καμπής της C_f πρέπει να αποδείξουμε ότι η $f''(x)$ (ισοδύναμα η $K(x)$) αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν των ξ_1, ξ_2. Έχουμε:

$$1 > x > \xi_1 \Rightarrow K(x) > K(\xi_1) \Rightarrow K(x) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$$
$$x < \xi_1 \Rightarrow K(x) < K(\xi_1) \Rightarrow K(x) < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$$
$$x > \xi_2 \Rightarrow K(x) < K(\xi_2) \Rightarrow K(x) < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$$
$$1 < x < \xi_2 \Rightarrow K(x) > K(\xi_2) \Rightarrow K(x) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$$

Επομένως η f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής τα $\xi_1 \in \left(-\infty,\ 1\right]$ και $\xi_2\left[1,\ +\infty\right)$.

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \ln\left(e^x - x\right) - \sigma\upsilon\nu x,\ x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$. Από το θεώρημα του Bolzano έχουμε:

Η $h(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ (ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων).

- $h(0) = -1 < 0$
- $h\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) > 0$ (διότι $\dfrac{\pi}{2} > 0 \Rightarrow f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) > f(0) = 0$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\ +\infty)$). Άρα $h(0)\cdot h\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < 0$.
- Επομένως υπάρχει, τουλάχιστον ένα, $x_0 \in \left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(e^{x_0} - x_0\right) - \sigma\upsilon\nu x_0$. Για τη μοναδικότητα του x_0 θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως μονότονη (ή «1-1» με τον ορισμό). Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $h'(x) = f'(x) + \eta\mu x,\ x \in \mathbb{R}$.

Είναι $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, διότι είναι $f'(x) > 0$ και $\eta\mu x > 0$ για κάθε $x \in \left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$. Άρα το x_0 είναι μοναδικό.

20. **Γ1.** $x'(t) = 16$, οπότε $x(t) = 16t + c$. Όμως $x(0) = 0 \Rightarrow c = 0$.

Γ2. Έστω $A\left(x_0,\ y_0\right)$. Είναι $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ και (ΠA): $y - \sqrt{x_0} = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0)$ (Ι)

Η εξίσωση (Ι) αληθεύει για $x = 0,\ y = 1$ άρα:

$$1 - \sqrt{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(-x_0) \Leftrightarrow 1 - \sqrt{x_0} = -\frac{\sqrt{x_0}}{2} \Leftrightarrow \ldots x_0 = 4$$

$$x(t) = 4 \Leftrightarrow 16t = 4 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}\min = 15\sec$$

Γ3. $E(\Omega) = \int_0^4 \left(\dfrac{1}{4}x + 1 - \sqrt{x}\right)dx = \ldots \dfrac{2}{3}\ \tau.\mu.$

Γ4. Είναι $M(x, y) = M(16t,\ 4\sqrt{t})$, οπότε έχουμε:

$$d(t) = \sqrt{256t^2 + (4\sqrt{t} - 1)^2},\ t \geq 0 \text{ και } d'(t) = 0 \Leftrightarrow 256t + 8 - \frac{2}{\sqrt{t}},\ t > 0$$

Θέτουμε $g(t) = 256t + 8 - \dfrac{2}{\sqrt{t}}$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano στο $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{64}\right]$

αφού $g\left(\dfrac{1}{64}\right) = -4 < 0,\ g\left(\dfrac{1}{4}\right) = 68 > 0$. Άρα υπάρχει $t_0 \in \left(\dfrac{1}{64}, \dfrac{1}{4}\right) : g(t_0) = 0$ και

$g'(t) = 256 + \dfrac{1}{t\sqrt{t}} > 0 \Rightarrow g \uparrow$ και συνεχής στο t_0. Είναι:

$$t > t_0 \Rightarrow g(t) > g(t_0) = 0 \Rightarrow d'(t_0) > 0$$
$$t < t_0 \Rightarrow g(t) < g(t_0) = 0 \Rightarrow d'(t_0) < 0$$

Άρα η $d(t)$ έχει ελάχιστο στο $t_0 \in \left(\dfrac{1}{64}, \dfrac{1}{4}\right) \subseteq \left(0, \dfrac{1}{4}\right)$

21. Γ1. Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$2(f(x)+x)\cdot(f(x)+x)' = (x^2)' \Leftrightarrow \left[(f(x)+x)^2\right]' = (x^2)' \Leftrightarrow (f(x)+x)^2 = x^2 + c$$

Για $x = 0 \Rightarrow c = 1$ και άρα $(f(x)+x)^2 = x^2 + 1$.

Θέτουμε $h(x) = f(x) + x, x \in \mathbb{R}$ και έχουμε $h^2(x) = x^2 + 1,\ x \in \mathbb{R}$. Η $h(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) και δεν έχει ρίζες αφού $h^2(x) = x^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επειδή $h(0) = f(0) = 1 > 0$ θα είναι $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$h(x) = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) + x = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2+1} - x,\ x \in \mathbb{R}$$

Γ2. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων-σύνθεσης παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$f'(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (αφού $x - \sqrt{x^2+1} < 0$ και $\sqrt{x^2+1} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$) διότι έχουμε διαδοχικά:

$$\sqrt{x^2+1} - x > \sqrt{x^2} - x = |x| - x \geq x - x = 0 \text{ άρα } \sqrt{x^2+1} - x > 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2+1} < 0.$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και «1-1», οπότε:

$$f(g(x)) = f(0) \Leftrightarrow g(x) = 0$$

Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με:

$$g'(x) = 3x^2 + 3x = 3x(x+1)\,,\ x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$g'(x) > 0 \Rightarrow (x < -1,\ x > 0)$$

$$g'(x) < 0 \Rightarrow -1 < x < 0$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[0,\ +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,\ 0]$. Έχουμε:

$$g\big((-\infty,-1)\big) = \Big(\lim_{x\to-\infty} g(x),\ g(-1)\Big) = \left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right)$$

$$g\big((0,\ +\infty)\big) = \Big(g(0),\ \lim_{x\to+\infty} g(x)\Big) = (-1,\ +\infty)$$

$$g\big([-1,\ 0]\big) = \big[g(0),\ g(-1)\big] = \left[-1,\ -\frac{1}{2}\right]$$

Επειδή μόνο $0 \in g\big([0,\ +\infty)\big)$ η g έχει μία ρίζα στο $(0,\ +\infty)$ και είναι μοναδική αφού η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\ +\infty)$ άρα και «1-1».

22. Γ1. Η δοθείσα γράφεται:

$$(x^2+1)f'(x) + 2xf(x) = 3x^2 \Leftrightarrow \big[(x^2+1)f(x)\big]' = (x^3)' \Leftrightarrow (x^2+1)f(x) = x^3 + c,\ c = 0$$

Άρα $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1},\ x \in \mathbb{R}$.

Γ2. Η ευθεία $y = x$ στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Γ3. Η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε η ανίσωση δίνει:

$$5(x^2+1)^3 - 8 \le 8(x^2+1)^2 \Leftrightarrow 5y^3 - 8y^2 - 8 \le 0\ \ (y = x^2+1)$$

Τελικά $x \in [-1,\ 1]$

23. Γ1. Είναι:

$$f'(x) = -\frac{4}{(x-1)^2} + a,\ x \neq 1 \text{ και } f'(2)\cdot\frac{1}{3} = -1 \Leftrightarrow f'(2) = -3 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \alpha = 1$$

Γ2. i. Για $\alpha = 1$ έχουμε $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2},\ x \neq 1$.

Μονοτονία: $f \uparrow (-\infty,\ -1]$ και στο $[3,\ +\infty)$ ενώ $f \downarrow [-1,\ 3]$.

Ακρότατα: Τοπικό μέγιστο στο -1, το $f(-1) = 3$ και τοπικό ελάχιστο στο 3, το $f(3) = 5$

ii. $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ κατακόρυφη ασύμπτωτη $x = 1$.

$y = x$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και στο $-\infty$

iii. $\dfrac{3}{2}$

24. Γ1.

$h'(\mathrm{x})=\dfrac{1}{e^x+1}$, $h''(\mathrm{x})=\dfrac{-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}<0,\ x\in\mathbb{R}$. Άρα η h είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Αφού η h είναι γνησιώς αύξουσα έχομε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$h\left(2h'(x)\right)<\ln\frac{e}{e+1}=h(1)\Leftrightarrow 2h'(x)<1\Leftrightarrow h'(x)<\frac{1}{2}=h'(0)\Leftrightarrow x>0\ (h'\downarrow)$$

Γ3.

- Η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ αφού:

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{e^x}{e^x+1}=0$$

- Η $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ αφού:

$$\lambda=\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\ldots=1$$

$$\beta=\lim_{x\to-\infty}\left[h(x)-x\right]=\ldots=0$$

25. Γ1. Για να είναι η συνάρτηση f συνεχής στο σημείο $x_0=0$ θα πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)=0.$$

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{\ln x}{x}}$ (1) και θέτουμε $u=\dfrac{\ln x}{x}$. Έτσι όταν $x\to0^+$ τότε

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x\cdot\dfrac{1}{x}\right)=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$. Άρα $u\to-\infty$ και το όριο (1) γίνεται:

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{u\to-\infty}e^u=0$$

και άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Γ2. Η συνάρτηση $f(x)=e^{\frac{\ln x}{x}}, x>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\infty)$ με παράγωγο:

$$f'(x)=e^{\frac{\ln x}{x}}\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=e^{\frac{\ln x}{x}}\frac{1-\ln x}{x^2},\ x>0.$$

Τώρα έχουμε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 1-\ln x=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow x=e$$

και έτσι:

$$x>e\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow \eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha\ \sigma\tau o\ [e,\infty)$$
$$0<x<e\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow \eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \text{αύξουσα}\ \sigma\tau o\ (0,e]$$

Ο πίνακας προσήμου της $f'(x)$ είναι:

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	−
$f(x)$		↗	↘

Άρα[5] η f έχει ολικό μέγιστο στο $x_1=e$, το $f(e)=e^{\frac{1}{e}}$, και ολικό ελάχιστο στο 0, το $f(0)=0$, (αφού η f είναι συνεχής και στο 0).

Άρα $f(0)\le f(x)\le f(e)=e^{\frac{1}{e}}$ για κάθε $x>0$ ή $0\le f(x)\le e^{\frac{1}{e}}$ για κάθε $x>0$ και άρα το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[0,e^{\frac{1}{e}}]$.

Γ3.

i) Έχουμε τις διαδοχικές ισοδυμαμίες:

$$f(x)=f(4)\Leftrightarrow e^{\frac{\ln x}{x}}=e^{\frac{\ln 4}{4}}\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}=\frac{\ln 4}{4}\Leftrightarrow 4\ln x=x\ln 4\Leftrightarrow \ln x^4=\ln 4^x\Leftrightarrow x^4=4^x$$

ii) Η εξίσωση $x^4=4^x$ έχει προφανώς ρίζες το 2 και το 4 (αφού αντίστοιχα: $2^4=4^2=16$ και $4^4=4^4$). Αν τώρα υποθέσουμε ότι έχει και άλλη ρίζα, έστω $x_3>0$ με $x_3\neq 2$, $x_3\neq 4$, τότε αυτή θα είναι ρίζα και της ισοδύναμής της εξίσωσης $f(x)=f(4)$, δηλαδή της συνάρτησης $g(x)=f(x)-f(4), x>0$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω

---

[5] Μπορώ και με την μονοτονία της συνάρτησης να βρώ το σύνολο τιμών(αφού η f είναι συνεχής), δηλαδή $[f(0),\ f(e)]\cup(\lim\limits_{x\to\infty} f(x),\ f(e)]=[0,\ e^{\frac{1}{e}}]\cup(1,\ e^{\frac{1}{e}}]=[0,\ e^{\frac{1}{e}}]$

$x_3 > 4$. Όμοια και γιατις άλλες περιπτώσεις). Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Rolle στα διαστήματα [2,4] και [4, x_3] ,αφού σε κάθε ένα από αυτά η $g(x)$ είναι προφανώς παραγωγίσιμη, θα έχουμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (2,4)$, τέτοιο ώστε $g'(\xi_1) = 0$ και τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (4, x_3)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi_2) = 0$.

Άρα έχουμε:

$$g'(\xi_1) = 0 \Rightarrow f'(\xi_1) = 0 \Rightarrow e^{\frac{\ln \xi_1}{\xi_1}} \frac{1 - \ln \xi_1}{\xi_1^{\,2}} = 0 \Rightarrow \xi_1 = e$$

$$g'(\xi_2) = 0 \Rightarrow f'(\xi_2) = 0 \Rightarrow e^{\frac{\ln \xi_2}{\xi_2}} \frac{1 - \ln \xi_2}{\xi_2^{\,2}} = 0 \Rightarrow \xi_2 = e$$

δηλαδή $\xi_1 = \xi_2$ που είναι άτοπο (αφού έχουμε $\xi_2 > \xi_1$) και άρα η δοθείσα εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες τις 2 και 4.

26. **Γ1.** $f'(x) = (x-3)(3x-5),\ x \in \mathbb{R}$. Είναι $f \uparrow \left(-\infty,\ \frac{5}{3}\right]$ και στο $[3,\ +\infty)$ και $f \downarrow \left[\frac{5}{3},\ 3\right]$.

Γ2. Αν $K\left(x_0,\ f(x_0)\right)$ το σημείο επαφής πρέπει:

$$f'(x_0) = 4 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 14x_0 + 11 = 0 \Leftrightarrow \left(x_0 = 1 \text{ ή } x_0 = \frac{11}{3}\right).$$

Δεκτή τιμή (λόγω του περιορισμού (β) είναι η $x_0 = 1$ και η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y = 4x - 4$$

Γ3. Θέσεις τοπικών ελεχίστων $x_1 = 1,\ x_2 = 3$ και θέση τοπικού μεγίστου $x_3 = 2$.

27. **Γ1.** Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για $x \in \mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2 e^x}{(x^2+1)^2},\ x \in \mathbb{R}$$

Είναι $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2 e^x}{(x^2+1)^2} > 0$ για $x \neq 1$ ($x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ και η f είναι συνεχής στο 1).

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το:

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (0,\ +\infty)$$

αφού:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^x \cdot \frac{1}{x^2+1}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2} = +\infty$$

Γ2. Η δοθείσα εξίσωση γράφεται:

$$f\left(e^{3-x}(x^2+1)\right) = f(2) \Leftrightarrow e^{3-x}(x^2+1) = 2 \Leftrightarrow e^3 \cdot e^{-x}(x^2+1) = 2 \Leftrightarrow \frac{e^x}{x^2+1} = \frac{e^3}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^3}{2} \quad (1)$$

Όμως $\frac{e^3}{2} \in f(\mathbb{R}) = (0,\ +\infty)$, οπότε η (1) (άρα και η ισοδύναμή της δοθείσα εξίσωση) έχει μία λύση η οποία είναι και μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και «1-1».

28.

Γ1. Η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - \ln x,\ x \in (0,\ +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,\ +\infty)$) με:

$$f'(x) = \frac{xe^{x-1}-1}{x}, x \in (0,\ +\infty).$$

Αρκεί να εξετάσουμε το πρόσημο της συνάρτησης $\varphi(x) = xe^{x-1} - 1,\ (0,\ +\infty)$.

Η συνάρτηση $\varphi(x) = xe^{x-1} - 1,\ (0,\ +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $\varphi'(x) = e^{x-1}(x+1) > 0, x \in (0,\ +\infty)$ και άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης η φ έχει ρίζα το 1 αφού $\varphi(1) = 0$ Τώρα έχουμε:

- $x > 1 \Leftrightarrow \varphi(x) > \varphi(1) \Leftrightarrow \varphi(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$ και άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.
- $0 < x < 1 \Leftrightarrow \varphi(x) < \varphi(1) \Leftrightarrow \varphi(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$ και άρα η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,\ 1]$.

Για το σύνολο τιμών της Α έχουμε $A = f\left([1, +\infty)\right) \cup f\left((0,\ 1]\right)$. Είναι:

- $f\left(\left[1,+\infty\right)\right)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\right)=\left[1,+\infty\right)$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[1,+\infty\right)$ και έχουμε:

$$f(1)=0$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(e^{x-1}-\ln x\right)=\lim_{x\to\infty}\left[e^{x-1}\left(1-\frac{\ln x}{e^{x-1}}\right)\right]$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{e^{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{e^{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{xe^{x-1}}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty\cdot 1=\infty$$

(χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα του De l΄ Hospital)

- $f\left(\left(0,\ 1\right]\right)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\right)=\left[1,+\infty\right)$, αφού η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,\ 1\right]$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{x-1}-\ln x\right)=+\infty$.

Επομένως το σύνολο τομών της f είναι $A=\left[1,+\infty\right)$.

Γ2. Η συνάρτηση $K(t)=\sqrt{t^2-1}$ ορίζεται όταν $t\in\left(-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right)$. Το πεδίο ορισμού της $h(x)$ είναι το $\mathbb{R}$.

Επειδή $1\in\left[1,+\infty\right)$ θα πρέπει:

$$h(x)\geq 1\Leftrightarrow f(x^2+1)-f(2)+1\geq 1\Leftrightarrow f(x^2+1)\geq f(2)\Leftrightarrow x^2+1\geq 2\Leftrightarrow x^2\geq 1\Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right)$$

(αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[1,+\infty\right)$ και $x^2+1,\ 2\in\left[1,+\infty\right)$)

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $A=\left(-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right)$.

Γ3. Επειδή η συνάρτηση η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,\ 1\right]$ και γνησίως γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[1,+\infty\right)$ θα είναι και «1-1» στα διαστήματα αυτά. Επομένως έχουμε διαδοχικά:

$$f\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)=1\Leftrightarrow f\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)=f(1)\Leftrightarrow f(x)-\frac{1}{2}=1\Leftrightarrow f(x)=\frac{3}{2}$$

Όμως:

- $\frac{3}{2} \in [1,+\infty) = f([1,+\infty))$ και άρα υπάρχει $x_1 \in [1,+\infty)$ (μοναδικό) τέτοιο, ώστε $f(x_1) = \frac{3}{2}$.
- $\frac{3}{2} \in [1,+\infty) = f((0,\ 1])$ και άρα υπάρχει $x_2 \in (0,\ 1]$ (μοναδικό) τέτοιο, ώστε $f(x_2) = \frac{3}{2}$.

Επομένως υπάρχουν $x_1, x_2 > 0$ που να είναι ρίζες της δοθείσας εξίσωσης.

Γ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι $y - f(\xi) = f'(\xi)(x-\xi)$ και αφού αυτή διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$ θα έχουμε:

$$\frac{3}{2} - f(\xi) = f'(\xi)(0-\xi) \Leftrightarrow \frac{3}{2} - f(\xi) = -\xi f'(\xi)$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση:

$\Pi(x) = xf'(x) - f(x) + \frac{3}{2},\ x \in [x_1, 1]$ έχει μονάδική ρίζα $\xi \in (x_1, 1)$.

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα του Bolzano για τη συνάρτηση $\Pi(x)$ στο διάστημα $[x_1, 1]$:

Έχουμε:

- Η $\Pi(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, 1]$ (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων).
- $\Pi(1) = 1f'(1) - f(1) + \frac{3}{2} = 1\cdot 0 - 1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} > 0$
- $\Pi(x_1) = x_1 f'(x_1) - f(x_1) + \frac{3}{2} = x_1 f'(x_1) - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = x_1 f'(x_1) < 0$ (αφού η f' $0 < x_1 < 1 \Leftrightarrow f'(x_1) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x_1) < 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1)).

[<u>Σημείωση:</u> Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με:

$$f''(x) = \frac{x^2 e^{x-1} + 1}{x^2} > 0,\ x \in (0,1).]$$

Άρα η $\Pi(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\xi \in (x_1, 1)$ και επειδή η $\Pi(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(x_1, 1)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$\Pi'(x) = f''(x) + xf'''(x) - f''(x) = xf'''(x) > 0, x \in [x_1, 1],$$

η $\Pi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα άρα και «1-1» . Επομένως η ρίζα $\xi \in (x_1,\ 1)$ είναι μοναδική.

29. Γ1. $f'(x) = \dfrac{2(x^4 - 1)}{x^3},\ x > 0$.

Μονοτονία: $f \downarrow (0,\ 1],\ f \uparrow [1,\ +\infty)$

Σύνολο τιμών: $f((0,\ +\infty)) = [2,\ +\infty)$

Γ2. Πρέπει $f(x) \geq 2$ που ισχύει για κάθε $x > 0$, αφού η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$, άρα ισχύει $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 2$. Επομένως το πεδίο ορισμού της g είναι $D_g = (0,\ +\infty)$.

Γ3. Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα (Η f είναι «1-1» ως γνησίως μονότονη):

$$f\left(f(x) - \frac{3}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow f\left(f(x) - \frac{3}{2}\right) = f(1) \Leftrightarrow f(x) - \frac{3}{2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow f(x) = f\left(\sqrt{2})\right) \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \in (0,\ +\infty)$$

Γ4. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης στο $K(\xi,\ f(\xi))$, δηλαδή η $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$ επαληθεύεται από σημείο $M\left(0,\ \dfrac{5}{2}\right)$.

Έχουμε:

$$\frac{5}{2} - f(\xi) = -\xi f'(\xi) \Leftrightarrow f(\xi) - \xi f'(\xi) - \frac{5}{2} = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(x) = f(x) - xf'(x) - \dfrac{5}{2},\ x \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 1\right]$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano (ελέγχουμε τις προϋποθέσεις) αφού $\Phi\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$ και $\Phi(1) < 0$.

30. Βλέπε Θέμα Γ-Λυμένο, Πανελλαδικές Ημερησίων 2016.

31. Βλέπε Θέμα Γ-Λυμένο, Πανελλαδικές επαναληπτικές Ημερησίων 2016.

32. Βλέπε Θέμα Γ-Λυμένο, Πανελλαδικές Εσπερινών 2016.

33. Βλέπε Θέμα Γ-Λυμένο, Πανελλαδικές Επαναληπτικών Εσπερινών 2016.

34. Βλέπε Θέμα Γ-Λυμένο, Εξετάσεις τέκνων εξωτερικού , 2016.

35.

Γ1. Είναι $f'(x) = \ln x + \dfrac{x-1}{x},\ x > 0$ με $f'(1) = 0$ και $f''(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} > 0,\ x > 0$.

Άρα $f' \uparrow (0,\ +\infty)$. Έχουμε:

$$x > 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) = 0$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) = 0$$

Άρα:

Το σύνολο τιμών είναι:

$$f((0,\ +\infty) = f\left(\Delta_1\right) \cup f\left(\Delta_2\right) = [-1,\ +\infty)$$

$$f \downarrow \Delta_1 = \left(0,\ 1\right]$$

$$f \uparrow \Delta_2 = \left[1,\ +\infty\right)$$, όπου:

$$f\left(\Delta_1\right) = \left[\ f(1),\ \lim_{x \to 0^+} f(x)\right) = [-1,\ +\infty)$$

$$f\left(\Delta_2\right) = \left[\ f(1),\ \lim_{x \to +\infty} f(x)\right) = [-1,\ +\infty)$$

Γ2. Η δοθείσα εξίσωση για κάθε $x > 0$ γράφεται:

$$x^{x-1} = e^{2013} \Leftrightarrow (x-1)\ln x = 2013 \Leftrightarrow (x-1)\ln x - 1 = 2012 \Leftrightarrow f(x) = 2012$$

Όμως $2012 \in f\left(\Delta_1\right)$ και $2012 \in f\left(\Delta_2\right)$.

Άρα υπάρχουν αντίστοιχα $x_1 \in \Delta_1$ και $x_2 \in \Delta_2$ τέτοια, ώστε:

$$f(x_1) = 2012 \text{ και } f(x_2) = 2012.$$

Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στα Δ_1 και Δ_2 είναι και «1-1» άρα τα x_1 και x_2 είναι μοναδικά.

Επομένως η δοθείσα εξίσωση έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f'(x) + f(x) - 2012,\ x > 0$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano για τη συνάρτηση g στο $[x_1,\ x_2]$:

- Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $[x_1,\ x_2]$(αφού είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1,\ x_2]$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων στο $[x_1,\ x_2]$).
- $g(x_1) = f'(x_1) + f(x_1) - 2012 = f'(x_1) < 0$ (αφού $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,\ 1)$)

$g(x_2) = f'(x_2) + f(x_2) - 2012 = f'(x_2) > 0$ (αφού $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1,\ +\infty)$)

Άρα υπάρχει ένα ,τουλάχιστον, $x_0 \in \left(x_1,\ x_2\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) + f(x_0) - 2012 = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) + f(x_0) = 2012$$

__Β΄τρόπος__: Μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα του Rolle στην συνάρτηση $h(x) = e^x(f(x) - 2012)$ στο $[x_1,\ x_2]$.

Γ4. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \int_1^e |g(x)|\,dx = \int_1^e g(x)dx = \int_1^e (x-1)\ln x dx = \int_1^e \ln x \cdot \left(\frac{x^2}{2} - x\right)' dx =$$

$$= \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\ln x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\cdot\frac{1}{x}dx = \left(\frac{e^2}{2} - e\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e + [x]_1^e = \frac{e^2-3}{4} \text{ τ.μ.}$$

36.

Γ1. $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x},\ x \neq 0$ και $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ldots = 1$.

Γ2. $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2}, & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$

Θέτουμε $g(x) > 0 = xe^x - e^x + 1,\ x \in \mathbb{R}$ και την μελετάμε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατά της και βρισκουμε $g(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$.

Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι $D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = (0,\ +\infty)$.

Γ3. Εξίσωση εφαπτομένης της f στο $A\left(0,\ f(0)\right)$: $y = \dfrac{1}{2}x + 1$. Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Άρα:

$$f(x) > \frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow 2f(x) > x + 2 \text{ για κάθε } x \neq 0$$

Γ4. Είναι $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ και $\lim_{x\to 0}(x\ln x) = 0$, οπότε $A = 0$.

37. Γ1. $x = 0$

Γ2. $f'(x) = \ln x + 2 - \frac{2}{x},\ x > 0,\ f'(1) = 0\ \ f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} > 0$, $x > 0$.

Έχουμε:

$$x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0$$
$$x < 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) = 0$$

Άρα $f \uparrow [1,\ +\infty)$ και $f \downarrow (0,\ 1]$.

Γ3. Επειδή $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty,\ \ \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ και $f(1) = -2 < 0$. Είναι:

$$f\left([1,\ +\infty)\right) = [-2,\ +\infty)$$
$$f\left((0,\ 1]\right) = [-2,\ +\infty)$$
$$0 \in [-2,\ +\infty)$$

Άρα η f έχει μία ρίζα στο $(0,\ 1)$ και μία στο $(1,\ +\infty)$ οι οποίες είναι μοναδικές αφού η f στα διαστήματα αυτά είναι γνησίως μονότονη.

Γ4. Θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x},\ x \in [x_1, x_2]$

Η εφαπτομένη στο $M\left(\xi,\ f(\xi)\right)$ είναι:

$$\varepsilon : y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$$

Η ε περνάει από το O(0,0) αν και μόνο αν:

$$0 - f(\xi) = f'(\xi)(0 - \xi) \Leftrightarrow \xi f(\xi) - f(\xi) = 0 \text{ που ισχύει.}$$

38.

Γ1. $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x\ln x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0 = f(0)$, άρα f συνεχής στο $x_0 = 0$.

Γ2. $f'(x) = \ln x + 1,\ x > 0$ και $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

$$f \downarrow \left(0,\ \frac{1}{e}\right] \text{ και } f \uparrow \left[\frac{1}{e},\ +\infty\right)$$

Το σύνολο τιμών της f είναι:

$$f\left((0,\ +\infty)\right) = \left[-\frac{1}{e},\ +\infty\right)$$

Γ3. Έχουμε ισοδύναμα:

$$x = e^{\frac{a}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \frac{a}{x} \Leftrightarrow x\ln x = a \Leftrightarrow f(x) = a\,,\, x > 0$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $a > -\frac{1}{e}$, τότε $a \in f\left(\left(0,\ \frac{1}{e}\right]\right) = \left[-\frac{1}{e},\ 0\right)$ και

  $a \in f\left(\left[\frac{1}{e},\ +\infty\right)\right) = \left[-\frac{1}{e},\ +\infty\right)$ επομένως η εξίσωση έχει 2 ακριβώς λύσεις, μία στο διάστημα $\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$ και μία στο διάστημα $\left[\frac{1}{e},\ +\infty\right)$, αφού η f είναι και γνησίως μονότονη στα $\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$ και $\left[\frac{1}{e},\ +\infty\right)$ άρα και «1-1».

- Αν $a < -\frac{1}{e}$, τότε η δοθείσα εξίσωση δεν έχει καμία λύση αφού

  $a \notin f\left(\left(0,\ \frac{1}{e}\right]\right) = \left[-\frac{1}{e},\ 0\right)$ και $a \notin f\left(\left[\frac{1}{e},\ +\infty\right)\right) = \left[-\frac{1}{e},\ +\infty\right)$.

- Αν $a = -\frac{1}{e} \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{e} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$.

Γ4. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής (ελέγχουμε τις προϋποθέσεις) για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[x,\ x+1],\ x > 0$ και εξασφαλίζουμε ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (x+1,\ x)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f(x+1) - f(x)$$

Όμως η f είναι δύο φορές παραγωγίσμιμη στο $(0,\ +\infty)$ με $f''(x)=\dfrac{1}{x}>0,\ x>0$.

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\ +\infty)$ (άρα και στο $[x,\ x+1],\ x>0$).

Επομένως:

$0<\xi<x+1 \Leftrightarrow f'(\xi)<f'(x+1) \Leftrightarrow f(x+1)-f(x)<f'(x+1) \Leftrightarrow f'(x+1)>f(x+1)-f(x)$

για κάθε $x>0$.

39. Γ1. Η συνάρτηση $f(x)=e^x-e\ln x$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,\ +\infty)$) με:

$$f'(x)=e^x-\frac{e}{x},\ x>0,\ f'(1)=0$$

Ακόμα η συνάρτηση $f(x)=e^x-e\ln x$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,\ +\infty)$) με:

$$f''(x)=e^x+\frac{e}{x^2}>0,\ x>0$$

Επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\ +\infty)$. Έχουμε:

$$x>1 \Rightarrow f'(x)>f'(1) \Rightarrow f'(x)>0$$
$$0<x<1 \Rightarrow f'(x)<f'(1) \Rightarrow f'(x)<0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,\ +\infty)$ και επομένως και στο διάστημα $(1,\ +\infty)$.

Ο πίνακας προσήμου της f' είναι ο επόμενος :

x	0 $\qquad$ 1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Γ2. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,\ +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,\ 1]$ και στο 1 παρουσιάζει ολικό ελάχιστο ,το $f(1)=e$. Άρα για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$f(x)\geq f(1) \Rightarrow f(x)\geq e,\ x>0$$

40. Γ1.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική στο $\mathbb{R}$) με $f'(x) = 3x^2 - 3,\ x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική στο $\mathbb{R}$) με $f''(x) = 6x,\ x \in \mathbb{R}$. Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left(x = 1 \text{ ή } x = -1\right)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ο πίνακας προσήμων των f και f'' είναι :

x	$-\infty$	-1	0 1	$+\infty$
$f'(x)$	+	−	−	+
$f''(x)$	−	−	+	+
$f(x)$	$\uparrow \cap$	$\downarrow \cap$	$\downarrow \cup$	$\uparrow \cup$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -1$, το και τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 1$ το ενώ παρουσιάζει καμπή στο $x_3 = 0$.

Γ2. Αν $\Delta_1 = \left(-\infty,\ 1\right],\ \Delta_2 = \left[-1,\ 1\right],\ \Delta_3 = \left[1, +\infty\right]$ έχουμε:

$$0 \in f\left(\Delta_1\right) = \left(\lim_{x \to -\infty} f(x),\ f(1)\right) = \left(-\infty,\ -2(1 + \text{ημ}^2\theta)\right)$$

$$0 \in f\left(\Delta_2\right) = \left[f(1), f(-1)\right] = \left[-2(1 + \text{ημ}^2\theta),\ 2(1 - \text{ημ}^2\theta)\right]$$

$$0 \in f\left(\Delta_3\right) = \left[f(1), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right) = \left[-2(1 + \text{ημ}^2\theta),\ +\infty\right)$$

Επειδή $2(1 - \text{ημ}^2\theta) > 0$ και $-2(1 + \text{ημ}^2\theta) < 0$ αφού $\theta \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}$ ε ίναι:

$0 \in f\left(\Delta_1\right)$ και $0 \in f\left(\Delta_2\right)$ και $0 \in f\left(\Delta_3\right)$ άρα η f έχει τρεις ρίζες οι οποίες είναι μοναδικές διότι η f είναι γνησίως μονότονη στα διαστήματα $\Delta_1,\ \Delta_2, \Delta_3$ αντίστοιχα.

Γ3. Τα σημεία $\mathrm{A}\left(-1,\ 2(1-\etaμ^2\theta)\right)$, $\mathrm{B}\left(1,\ -2(1+\etaμ^2\theta)\right)$, $\Gamma\left(0, f(0)\right)=\Gamma(0, -\eta\mu^2\theta)$ επαληθεύουν τη δοθείσα εξίσωση αφού:

$$2(1-\eta\mu^2\theta)=2-2\eta\mu^2\theta$$
$$-2(1+\eta\mu^2\theta)=-2-2\eta\mu^2\theta$$
$$-2\eta\mu^2\theta=0-2\eta\mu^2\theta$$

Γ4[6]. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\mathrm{E}=\int_{-1}^{1}\left|f(x)-y\right|dx$$

Θα εξετάσουμε το πρόσημο της $g(x)=f(x)-y=x^3-x$ στο [0, 1]. Είναι :

$$g(x)\geq 0,\ x\in[-1,\ 0]$$
$$g(x)\leq 0,\ x\in[0,\ 1]$$

Άρα:

$$\mathrm{E}=\int_{-1}^{1}=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx-\int_{0}^{1}(x^3-x)dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}=\frac{1}{2}\ \tau.\mu.$$

41. Γ1. $f'(x)=\dfrac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$, $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

Γ2.

$$x>0\Rightarrow f(x)>f(0)\Rightarrow f(x)>1\Rightarrow f(f(x))>f(1)\Rightarrow f(f(x))>\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x<0\Rightarrow f(x)<f(0)\Rightarrow f(x)<1\Rightarrow f(f(x))>f(1)\Rightarrow f(f(x))>\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x=0\Rightarrow f(f(0))=f(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Γ3[7]. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

---

[6] Το ερώτημα αυτό έχει προστεθεί σε νεότερη έκδοση: «Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και την ευθεία $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$ ».

[7] Έχει υπάρξει διόρθωση σε νεότερη έκδοση: «Να βρείτε το $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x-1}$ »

Γ4. Αν $\mathrm{M}\left(x_0,\ f(x_0)\right)$ το σημείο επαφής τότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο Μ είναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Αφού διέρχονται από το σημείο (3, 0) θα είναι:

$$0 - \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + 1}} = \frac{-x_0}{(x_0^2+1)\sqrt{x_0^2+1}}(3 - x_0) \Leftrightarrow \ldots 2x_0^2 - 3x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x_0 = 1 \text{ ή } x_0 = \frac{1}{2}\right)$$

Άρα τα σημεία επαφής είναι:

$$A(1,\ f(1)), B\left(\frac{1}{2},\ f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

Άρα οι ζητούμενες εφαπτομένες είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$y - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right)(x - \frac{1}{2}) \Rightarrow y - \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{4\sqrt{5}}{25}(x - \frac{1}{2}) \Rightarrow y = -\frac{4\sqrt{5}}{25}x + \frac{2\sqrt{5}}{25}$$

42. Γ1. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \ldots \beta^2 - 2\beta = \alpha$ (1), $\alpha \geq -1$.

Γ2. Θεώρημα Bolzano στο $[-1,\ 1]$.

Γ3. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} \Leftrightarrow \ldots 2 - 2\beta = 3$ (2) και

$\beta^2 - 2\beta = \alpha$ (1). Παίρνουμε $\beta = -\dfrac{1}{3}$ και $\alpha = \dfrac{5}{4},\ \beta = -\dfrac{1}{2}$.

Γ4. $y = 3x - \dfrac{3}{4}$.

43. Γ1. $f'(x) = \dfrac{2(x^3-1)}{x^2},\ x \neq 0$ και

$f \downarrow (-\infty,\ 0)$ και στο $(0,\ 1]$, $f \uparrow [1,\ +\infty)$. Τ.Ε στο 1, το $f(1) = 3$.

Γ2[8]. $y = 3$

44. Γ1. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \ldots \alpha + \beta = 5$.

[8] Έχει υπάρξει διόρθωση σε νεότερη έκδοση: « ...στο σημείο $A(1,\ f(1))$ »

Γ2. $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\Leftrightarrow ...2\alpha=2\Leftrightarrow \alpha=1,\ \beta=4$.

Γ3. $y=x$ στο $+\infty,\ -\infty$.

45. Γ1. α. Συνεχής στο $x_0=1$ **β.** Μη παραγωγίσιμη στο $x_0=1$

Γ2. $y=2x-3$

46. Γ1. Η f συνεχής στο $x_0=2$, αφού $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=f(2)=0$

Η f παραγωγίσιμη στο $x_0=2$ με $f'(2)=-\dfrac{1}{2}$

Γ2. $y=\dfrac{1}{2}$

Γ3. $\lambda=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-5x+6}{2x^2-2x}=\dfrac{1}{2}$ και $\beta=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\dfrac{1}{2}x\right]=-2$ ή

αλλιώς $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-\left(\dfrac{1}{2}x-2\right)\right]=0$

47. Γ1. i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)}=0$ **ii.** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{xf(x)}{(x-2)^2}=+\infty$

Γ2. Αν $M\left(a,\ \dfrac{4}{a}\right)$, $\alpha>0$ το ζητούμενο σημείο η απόστασή του από την

αρχή των αξόνων είναι:

$$d^2(a)=a^2+\frac{16}{a^2},\ a>0 \quad (1)$$

Η συνάρτηση (1) έχει ελάχιστο (ολικό) στο $a=2$. Άρα $M(2,\ 2)$.

Γ3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει σημείο $K\left(x_0,\ f(x_0)\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=-2$.

Προκύπτει $x_0=\sqrt{2}$ και $K\left(\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\right)$.

48. Γ1. $\lambda=0$ **Γ2.** i. Παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ **ii.** $y=\dfrac{1}{4}x-2$

49. Γ1. Η f συνεχής στο $x_0=1$ **Γ2.** $f\downarrow(-\infty,\ 1]$, $f\uparrow[1,\ +\infty)$

Γ3. Όχι, αφού η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$

50. Γ1. $f(1) = 1 \Leftrightarrow ...k = -1$

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 - 2x + 3 > 0,\ x \in \mathbb{R}$,

δηλαδή γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ3. Θεώρημα Bolzano για την f στο $[0,\ 1]$ αφού $\begin{matrix} f(0) = -2 < 0 \\ f(1) = 1 > 0 \end{matrix}$.

3.5. Προτεινόμενα Διαγωνίσματα επιπέδου θέματος Γ

Διαγώνισμα 1ο	ΘΕΜΑ 1ο: Θέμα 13 στην § 3.2, Κεφάλαιο 3ο
	ΘΕΜΑ 1ο: Θέμα 1 στην § 3.3.
	ΘΕΜΑ 1ο: Θέμα 20 στην §3.4.
Διαγώνισμα 2ο	ΘΕΜΑ 1ο: Θέμα 15 στην § 3.2, Κεφάλαιο 3ο
	ΘΕΜΑ 2ο: Θέμα 9 στην § 3.3.
	ΘΕΜΑ 3ο: Θέμα 15 στην § 3.4
Διαγώνισμα 3ο	ΘΕΜΑ 1ο: Θέμα 2 στην § 3.2., Κεφάλαιο 4ο
	ΘΕΜΑ 2ο: Θέμα 3 στην § 3.3.
	ΘΕΜΑ 3ο: Θέμα 5 στην § 3.3.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{o} : ΘΕΜΑ Δ

4.1. Σχολικού βιβλίου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο : Διαφορικός Λογισμός

Άσκηση	Στο σχολικό βιβλίο	Παράγραφος
1	13	Γενικές
2	12	Γενικές

4.2. Ψηφιακού βοηθήματος

Τις πλήρεις λύσεις θα τις βρείτε στο δικτυακό τόπο του Ψηφιακού Εκπαιδευτικού Βοηθήματος του ΥΠ.Π.Ε.Θ.:

http://www.study4exams.gr/math_k/course/view.php?id=68

4.3. Προτεινόμενα

Θέμα	Απάντηση-Υπόδειξη
1	Προσομοίωση 1, Θέμα Δ
3	Προσομοίωση 1, Θέμα Δ
5	Προσομοίωση 1, Θέμα Δ
7	Προσομοίωση 1, Θέμα Δ
9	Προσομοίωση 1, Θέμα Δ

Θέμα 2ο (Λύση)

Δ1. i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ επομένως και η $\ln f(x)$ είναι παραγωίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$. Άρα έχουμε:

$$\big(\ln f(x)+f(x)\big)'=(x)'\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}+f'(x)=1\Rightarrow f'(x)\left(\frac{1+f(x)}{f(x)}\right)=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{f(x)}{1+f(x)}>0, x\in\mathbb{R}\ \big(f(x)>0,\ 1+f(x)>0\big)$$

ii. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με:

$$f''(x)=\left(\frac{f(x)}{1+f(x)}\right)'=\frac{f'(x)(f(x)+1)-f(x)f'(x)}{(1+f(x))^2}=\frac{f'(x)\big(f(x)+1-f(x)\big)}{(1+f(x))^2}=$$

$$=\frac{f'(x)}{(1+f(x))^2}>0,\ x\in\mathbb{R}$$

Επομένως η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Δ2. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι:

$$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x-1) \text{ (I)}$$

Θα βρούμε αρχικά το $f(1)$ και μετά το $f'(1)$.

Στη δεδομένη σχέση θέτουμε $x = 1$ και έχουμε:

$$\ln f(1) + f(1) = 1 \Leftrightarrow \ln f(1) + f(1) - 1 = 0 \text{ (II)}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln x + x - 1,\ x \in (0, +\infty)$. Το $x = 1$ είναι προφανής ρίζα αφού $g(1) = 0$. Όμως η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσμιων συναρτήσεων στο $(0, +\infty)$) με:

$$g'(x) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{x+1}{x} > 0,\ x \in (0, +\infty)$$

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ άρα και συνάρτηση «1-1» και επομένως έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$. Όμως έχουμε από τη σχέση (II) $g(f(1)) = 0$ άρα $f(1) = 1$. Τέλος έχουμε:

$$f'(1) = \frac{f(1)}{1 + f(1)} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$$

Οπότε από τη σχέση (I) η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι η $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Δ3. Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και δέχεται εφαπτομένη (ε) στο σημείο Α, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής. Έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \geq 0$$

Άρα ισχύει:

$$\int_1^2 \left(f(x) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right) dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx - \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx - \frac{5}{4} \geq 0$$

Τώρα έχουμε (το $\int_1^2 f(x)dx$ είναι πραγματικός αριθμός):

$$\int_2^6 \left(\int_1^2 \left(f(x) - \frac{5}{4} \right) \right) dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_2^6 \int_1^2 f(x)dx - \int_2^6 \frac{5}{4} dx \geq 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \int_2^6 \int_1^2 f(x)dx \geq 5$$

Δ4. Έχουμε:

$$\int_2^4 \frac{\left(f(x)\right)^2}{1+f(x)}dx = \int_2^4 \frac{f(x)}{1+f(x)} \cdot f(x)dx = \int_2^4 f'(x)f(x)dx = \left[\frac{f^2(x)}{2}\right]_2^4 = \frac{f^2(4)-f^2(2)}{2} \quad \text{(III)}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x) = f^2(x),\ x \in [2,\ 4]$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού:

- Η $K(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[2,\ 4]$ (ως σύνθεση συνεχών στο $[2,\ 4]$)
- Η $K(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(2,\ 4)$, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(2,\ 4)$ με $K'(x) = 2f(x)f'(x), x \in (2,4)$

Άρα υπάρχει $\xi \in (2,4)$ (και λόγω της σχέσης III) ,τέτοιο, ώστε:

$$K'(\xi) = \frac{f^2(4)-f^2(2)}{2} \Leftrightarrow 2f(\xi)f'(\xi) = \int_2^4 \frac{\left(f(x)\right)^2}{1+f(x)}dx$$

Θέμα 4ο (Υπόδειξη)

Δ1. Θέτω $u = \dfrac{1}{x}$ κ.λ.π., $f(0) = -1 \ldots f'(x) = -\sqrt{x^2+1}$.

Δ2. $d(x) = \sqrt{2x^2-2x+2}$, ελάχιστη απόσταση για $x = \dfrac{1}{2}$ δηλαδή το σημείο $M\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

Δ3. $f \cap$ αφού $f''(x) = -\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} < 0$.

Δ4. Θ.Μ.Τ. στο $\left[x,\ \dfrac{x}{2}\right]$

Δ5. Ολοκλήρωση της σχέσης του Δ4.

Θέμα 6ο (Λύση)

Δ1. i. Θέτουμε $u = \ln x$ και έχουμε:

$$du = \frac{1}{x}dx$$

$$x = 1 \Rightarrow u = 0$$

$$x = e \Rightarrow u = 1$$

Επομένως:

$$I = \int_0^1 (u + f''(u)du = \int_0^1 udu + \int_0^1 f''(u)du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 + \left[f'(u)\right]_0^1 = \frac{1}{2} + f'(1) - f'(0)$$

ii. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για την f' στο διάστημα $[0,\ 1]$:

Η f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,\ 1]$ (άρα και συνεχής στο διάστημα $[0,\ 1]$)

Άρα υπάρχει $\xi \in (0,\ 1)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = f'(1) - f'(0)$ (1).

Τώρα έχουμε:

$$I > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + f'(1) - f'(0) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(1) - f'(0) > 0 \ \ (2)$$

Επομένως από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $f''(\xi) > 0$.

Όμως η f'' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ διότι:

Η f'' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και αφού $f''(\xi) > 0$ για κάποιο $\xi \in (0,\ 1) \subset \mathbb{R}$ είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

iii. Η ανίσωση γράφεται:

$$f(2015) + f(2017) > 2f(2016) \Leftrightarrow f(2017) - f(2016) > f(2016) - f(2015) \ \ (3)$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για την f στα διατήματα $[2015,\ 2016]$ και $[2016,\ 2017]$ αντίστοιχα:

- Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[2015,\ 2016]$ και $[2016,\ 2017]$ (αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσμη στο $\mathbb{R}$).
- Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(2015,\ 2016)$ και $(2016,\ 2017)$ (αφού είναι παραγωγίσμη στο $\mathbb{R}$).

Άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (2015,\ 2016)$ και $\xi_2 \in (2016,\ 2017)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = f(2016) - f(2017)$$

$$f'(\xi_2) = f(2017) - f(2016)$$

Επομένως η σχέση (3) γίνεται ισοδύναμα:

$$f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow \xi_2 > \xi_1$$

που είναι αληθής αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ διότι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ2. i. Θέτουμε $\dfrac{f(x) + \ln x - x}{(x-1)^2} = K(x)$ και άρα έχουμε $\lim\limits_{x \to 1} K(x) = \kappa \in \mathbb{R}$.

Επομένως είναι:

$$f(x) = K(x)(x-1)^2 + x - \ln x,\ x > 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left[K(x)(x-1)^2 + x - \ln x\right] = \kappa \cdot 0 + 1 + 0 = 1$$

(τα όρια υπάρχουν οπότε η ιδιότητα του ορίου αθροίσματος εφαρμόζεται)

Επειδή η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $x_0 = 1$ θα έχουμε $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1 = f(1)$

Άρα $f(1) = 1$.

ii. Έχουμε:

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{K(x)(x-1)^2 + x - \ln x - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left[\frac{K(x)(x-1)^2}{x-1} + \frac{x-\ln x - 1}{x-1}\right] (4)$$

Επειδή

$$\lim_{x\to 1}\frac{K(x)(x-1)^2}{x-1} = \lim_{x\to 1} K(x)(x-1) = \kappa \cdot 0 = 0$$

και

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\ln x-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 1}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 0$$

η σχέση (4) δίνει $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{K(x)(x-1)^2}{x-1} + \lim\limits_{x\to 1}\frac{x-\ln x-1}{x-1} = 0 + 0 = 0$.

iii. Αφού η f' είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με $f'(1) = 0$.

Έχουμε:

$$x > 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) \Rightarrow f'(x) > 0$$

$$x < 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0$$

Ο πίνακας μονοτονίας της f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$ 1	$+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	↓	↑

Ολικό ελάχιστο $f(1) = 1$

Άρα $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 1$

Θέμα 8ο (Υπόδειξη)

Δ1. i. Θ. Rolle στο [0,1]

ii. Παραγωγίζουμε τη δοθείσα σχέση και εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f' στο (0, 1).

Δ2. Κατά παράγοντες ολοκλήρωση.

Δ3. i. $\int_0^1 f(x)dx = \dfrac{1}{4}$ **ii.** $K(x) = 4F(x+1),\ H(x) = 4F(x) + 6x^2$ και παίρνουμε $K'(x) = H'(x) \Rightarrow K(x) = H(x) + c$ από όπου $c = 1$

Θέμα 10ο (Λύση)

Δ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$f'(x) = 20e^x + 20x^4 - 20x^3 - 40x + 20 = 20(e^x + x^4 - x^3 - 2x + 1) = 20\left[(e^x - x) + x^4 - x^3 - x + 1\right],\ x \in \mathbb{R}$

Θα αποδείξουμε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέτουμε $K(x) = e^x - x,\ x \in \mathbb{R}$. Επειδή ισχύει $\ln u \le u - 1$ για κάθε $u > 0$ έχουμε για $u = e^x > 0$ ότι (από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου):

$$\ln e^x \le e^x - 1 \Leftrightarrow x \le e^x - 1 \Leftrightarrow e^x - x \ge 1,\ x \in \mathbb{R}$$

Δηλαδή $K(x) > 0$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέτουμε $h(x) = x^4 - x^3 - x + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση h γράφεται:

$$h(x) = (x-1)^2(x^2 + x + 1) \ge 0,\ x \ne 1$$

Για $x \ne 1$ είναι $f'(x) > 0$ αφού $K(x) = e^x - x > 0$ και $h(x) = (x-1)^2(x^2 + x + 1) > 0$.

Επομένως $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ2. i. Για $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

Για $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow f(x) > 0$ (επειδή η είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$)

Για $x < 0 \Rightarrow f(x) < f(0) \Rightarrow f(x) < 0$ (επειδή η είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$).

ii. Από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου είναι $\ln u = u - 1 \Leftrightarrow u = 1$.

Θέτουμε $u = x^2 + x + 1 > 0$ $(\Delta = -3 < 0)$. Άρα:

$$x^2 + x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ή } x = -1)$$

iii[1]. Έχουμε ισοδύναμα:

$$f(c^3+4c^2+5c+2)>f(8c\sqrt{2c})\Leftrightarrow c^3+4c^2+5c+2>8c\sqrt{2c}\Leftrightarrow (c+1)^2(c+2)>8c\sqrt{2c}\ \ (1)$$

Η τιμή $c=1$ είναι λύση της (1) αφού $12>8\sqrt{2}$

Η τιμή $c=2$ είναι λύση της (1) αφού $36>32$

Για $c\neq 1,\ 2$ έχουμε:

$$g(1)=1+c-2\sqrt{c}=(1-\sqrt{c})^2>0\Leftrightarrow 1+c>2\sqrt{c}\Leftrightarrow (1+c)^2>4c\ \ (2)$$

$$g(2)=2+c-2\sqrt{2c}=(2-\sqrt{c})^2>0\Leftrightarrow 2+c>\sqrt{2c}\ \ (3)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις (2) και (3) κατά μέλη έχουμε:

$$(c+1)^2(c+2)>8c\sqrt{2c}$$

Επομένως ισχύει και η ισοδύναμή της η (1) για κάθε $c>0$.

4.4. Πανελλαδικών Εξετάσεων

1. Δ1. $f(t)=8\ln(t+1)-2t,\ t\geq 0$ **Δ2.** $t=3$

Δ3. $f(8)=16(\ln 3-1)>0$, $f(10)=8\ln 11-20<0$

2. Δ2. $x=150$ **Δ3.** $E(150)$

3. α. Πρέπει $f(6)=15,\ f'(6)=0$ και $\alpha=5,\ \beta=6$

β. Πρέπει $f(t)\geq 12$. Είναι $t\in[3,\ 12]$

4. Δ1. $P(0)=\dfrac{76}{25}$ (χιλιάδες ευρώ)

Δ2. Να βρείτε το $t>0$ τέτοιο, ώστε $P'(t)>0$. Είναι το διάστημα $\left[0,\ \dfrac{25}{2}\right]$

Δ3. Για $t_0=\dfrac{25}{2}$

Δ4. Είναι $\lim\limits_{t\to+\infty}P(t)=4>\dfrac{76}{25}=P(0)$

5. Δ1. $x=3,\ f(3)=7$ **Δ2.** Να βρείτε τα $f'(2),\ f'(4)$. Είναι $f'(2)=-1,\ f'(4)=\dfrac{5}{3}$

6. Δ1. $(-\infty,\ 1]$ **Δ2.** $x=0,\ y=0$ (στο $+\infty$)

---

[1] Στο ερώτημα αυτό έχει υπάρξει διόρθωση στην εκφώνηση

Δ3. $E=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e \frac{1}{x}dx+\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx=\ldots\frac{3}{2}$ τ.μ .

7. Δ1. $f'(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$ **Δ2.** $f'(x)>0,\ x\in(-\infty,0)$, $f'(x)<0,\ x\in(0,+\infty)$ **Δ3.** $y=0$

8. Δ1. Απλό (από φέτος μπορεί να χρησιμοποιείται και αναπόδεικτα).

Δ2. α. $f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{-f(x)}}$

β. Θεωρήστε τις συναρτήσεις $g(x)=f(x)-\dfrac{x}{2},\ x>0$ και

$h(x)=f(x)-xf'(x),\ x>0$ και μελετήστε την μονοτονία και τα ακρότατά τους.

Δ3. Ολοκληρώστε την σχέση **Δ2 β** από 0 έως 1.

9. Δ1. Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα για κάθε $x\in\mathbb{R}$:

$$f''(x)f(x)+\left[f'(x)\right]^2=f(x)f'(x)\Leftrightarrow\left(f'(x)f(x)\right)'=\left(\frac{f^2(x)}{2}\right)'$$

Άρα $f'(x)f(x)=\dfrac{f^2(x)}{2}+c$, για $x=0\Rightarrow c=0$

Τώρα έχουμε:

$$f'(x)f(x)=\frac{f^2(x)}{2}\Leftrightarrow 2f'(x)f(x)=f^2(x)\Leftrightarrow 2f'(x)f(x)-f^2(x)=0\Leftrightarrow\left(\frac{f^2(x)}{e^x}\right)=0$$

Άρα $\dfrac{f^2(x)}{e^x}=c\Leftrightarrow f^2(x)=ce^x$

Για $x=0\Rightarrow c=1$. Άρα $f^2(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ η οποία δεν έχει ρίζες γιατί αν υποθέσουμε ότι είχε μία ρίζα $x_0\in\mathbb{R}$ θα ήταν $f^2(x_0)=0\Leftrightarrow e^{x_0}=0$ (αδύνατη). Επομένως η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε όλο το $\mathbb{R}$ και επειδή $f(0)=1>0$ είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $f(x)=\sqrt{e^x},\ x\in\mathbb{R}$.

10. Δ1. $\kappa=12$ **Δ2.** $\lim\limits_{x\to1}f(x)=3$ **Δ3.** $f'(4)=-8$ **Δ4.** $y=x-1$

11. Δ1. Θ. Bolzano $x_0\in[\gamma,\ \delta]\subseteq[\alpha,\ \beta]\ [\gamma,\ \delta]\subseteq[\alpha,\ \beta]:f(x_0)=0$.

Δ2. Έστω $f(\gamma)>0,\ f(\delta)<0$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας)

- Θ.Μ.Τ. για την f στα $[\alpha,\ \gamma]$, $[\gamma,\ x_0]$. Άρα υπάρχουν $x_1 \in (\alpha,\ \gamma)$ και $x_2 \in (\gamma,\ x_0)$:

$$f'(x_1) = \frac{f(\gamma)}{\gamma - \alpha} > 0 \text{ και } f'(x_2) = -\frac{f(\gamma)}{\gamma - x_0} < 0 .$$

Τώρα εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f' στο (x_1, x_2) και άρα προκύπτει:

$$f''(\xi_1) = \frac{f'(x_1) - f'(x_2)}{x_1 - x_1} < 0$$

- Θ.Μ.Τ. για την f στα $[x_0,\ \delta]$, $[\delta,\ \beta]$. Άρα υπάρχουν $x_3 \in (x_0,\ \delta)$, $x_4 \in (\delta,\ \beta)$:

$$f'(x_3) = \frac{f(\delta)}{\delta - x_0} < 0 \text{ και } f'(x_4) = -\frac{f(\delta)}{\beta - \delta} > 0 ¨$$

Τώρα εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f' στο $[x_3,\ x_4]$ και άρα προκύπτει:

$$f''(\xi_2) = \frac{f'(x_4) - f'(x_3)}{x_4 - x_3} > 0$$

Δ3. Θ. Bolzano για την f'' στο $[\xi_1,\ \xi_2]$ και άρα υπάρχει $x_0 \in (\xi_1,\ \xi_2)$:

$f''(x_0) = 0$ (πρόκειται για πιθανό σημείο καμπής αφού η f'' δεν είναι βέβαιο ότι αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0).

12. Δ1. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ χωρίς ρίζες και άρα διατηρεί σταθρό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, δηλαδή $f'(x) > 0$ ή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η f είναι γνησώς αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ αντίστοιχα.

Δ2. Θ. Bolzano στο $[0,\ 2]$. Είναι $f(0)\cdot f(2) = -(f(2))^2 < 0$ ($f(2) \neq 0$ γιατί αν $f(2) \neq 0$, τότε $f(2) = 0 = f(0)$ άτοπο αφού η f «1-1»)[2] (Είναι η $x = 1$).

Δ3. Πρέπει να δείξουμε ότι[3] $g'(1)$=εφ$45^0 = 1$.

---

[2] Αν θέλουμε να τη βρούμε έχουμε: $x = 1 \Rightarrow f(1) = -f(1) \Rightarrow 2f(1) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$

[3] Δεν μπορούμε να παραγωγίσουμε την g για $x \in \mathbb{R}$ αφού δεν γνωρίζουμε αν η συνάρτηση στο β΄μέλος είναι παραγωγίσιμη επειδή δεν γνωρίζουμε αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

$$g'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{f(x)}{f'(x)}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{f'(x)}\cdot\frac{f(x)}{x-1}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{f'(x)}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}(\text{γιατί;})=\frac{1}{f'(1)}\cdot f'(1)=1$$

13. Δ1. i. Θέτουμε $\dfrac{f(x)-x}{x^2}=g(x),\ x\neq 0$ και $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$.

ii. $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(xg(x)+1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(xg(x)+1\right)=1$.

Δ2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\lambda^2\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2}{2+\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2}=\dfrac{1+\lambda^2\left(f'(0)\right)^2}{2+\left(f'(0)\right)^2}=\dfrac{1+\lambda}{3}$

Είναι: $\dfrac{1+\lambda}{3}=3\Leftrightarrow \lambda=8$

Δ3. i. $f'(x)>f(x)\Leftrightarrow\left(e^{-x}f(x)\right)'>0$. Θέτουμε $h(x)=e^{-x}f(x),\ x\in\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Άρα:

$$x>0\Leftrightarrow h(x)>h(0)\Leftrightarrow e^{-x}f(x)>0\Leftrightarrow f(x)>0\Leftrightarrow xf(x)>0$$

$$x<0\Leftrightarrow h(x)<h(0)\Leftrightarrow e^{-x}f(x)<0\Leftrightarrow f(x)<0\Leftrightarrow xf(x)<0$$

ii. $f'(x)>f(x)\Leftrightarrow\int_0^1 f'(x)dx>\int_0^1 f(x)dx\Leftrightarrow\left[f(x)\right]_0^1>\int_0^1 f(x)dx\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx<1$

14. Δ1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-a-1)x^2-(\kappa-3)x+2}{x-3}=0$, επομένως $a=1,\ \kappa=3$

Δ2. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi\in(1,\ 2):\ f'(\xi)=0$. Θ.Rolle για την f στο [1, 2].(με δεδομένο ότι $a=1,\ \kappa=3$).

Δ3. $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$

15. Δ1. $f'(0)=1\Leftrightarrow\ldots\kappa=4$ **Δ2.** Στο $\dfrac{1}{2}$, το $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{7}{16}$

Δ3. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi\in(2,\ 4):\ f'(\xi)=\lambda_{AB}=-\dfrac{1}{2}$.

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την f στο [2, 4].

16. Δ1. $A=(0,\ 1)\cup(1,\ +\infty),\ f(A)=\mathbb{R}$

Δ2. Είναι:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$$

Αν $\Delta_1=(0,\ 1)$ και $\Delta_2=(1,\ +\infty)$, τότε $f(\Delta_1)=\mathbb{R},\ f(\Delta_2)=\mathbb{R}$. Όμως:

$$0\in f(\Delta_1)=\mathbb{R},\ 0\in f(\Delta_2)=\mathbb{R}$$

και η f είναι γνησίως μονότονη στα Δ_1 και Δ_2, άρα έχει δύο ακριβώς ρίζες τις $\rho_1\in(0,\ 1)$ και $\rho_2\in(1,\ +\infty)$.

Δ3. Πρέπει:

$$\frac{1}{\alpha}=e^{\beta}\ \text{(I) και}\ \ln a-1=e^{\beta}-\beta e^{\beta}\ \text{(II)}$$

Έχουμε $\frac{1}{\alpha}=e^{\beta}\Leftrightarrow \beta=-\ln a$ και άρα η σχέση (II) γίνεται:

$$a+1-(a-1)\ln a=0\Leftrightarrow f(a)=0\ (\text{το } a=1 \text{ απορρίπτεται})$$

Δ4. Το σύστημα των (I) και (II) έχει μοναδική λύση για κάθε ρίζα a της f. Η f έχει δύο ρίζες και άρα το σύστημα έχει και αυτό δύο λύσεις α και β. Άρα θα υπάρχουν δύο εφαπτομένες.

17. Δ1. Θ.Μ.Τ. για την $g(x)=\ln t,\ t\in[x,\ x+1],\ x>0$:

$$g'(\xi)=\frac{g(x+1)-g(x)}{x+1-x}\Rightarrow \ln(x+1)-\ln x=\frac{1}{\xi}<\frac{1}{x},\ \xi\in(x,\ x+1)$$

Δ2. $f'(x)=\ldots\left(\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}<0$ (ερώτημα Δ1 και $-\frac{1}{x+1}<0$).

Δ3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x+1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=1$

Δ4.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\frac{x+1}{x}-\ln x\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

$f\left(0,\ +\infty\right) = \mathbb{R}$, άρα η έχει μία ρίζα $\rho > 0$ που είναι μοναδική γιατί η f είναι γνησίως φθίνουσα .

18. Δ1. $f'(1) = 0 \Leftrightarrow ...\kappa = 3$

Δ2. α.

x	$-\infty$ 0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	–	+
$f(x)$	↑	↓	↑

Τ.Μ. $f(0) = 10$ **Τ.Ε** $f(1) = 9$

β. $f\left((-\infty,\ 0]\right) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x),\ f(0)\right] = (-\infty,\ 0]$

γ. $f((0,1)) = (\lim_{x\to 1} f(x),\ \lim_{x\to 0} f(x)) = (9,\ 10)$,

$$14 < \alpha < 15 \Leftrightarrow 9 < \alpha - 5 < 10 \Leftrightarrow \alpha - 5 \in f((0,1))$$

Άρα υπάρχει $x_0 \in (0,1)$: $f(x_0) = \alpha - 5$. Η μοναδικότητα εξασφαλίζεται από την μονοτονία της f στο $(0,1)$, άρα η f «1-1».

19. Δ1. $D_f = \mathbb{R}^*$ **Δ2.** $f'(1) = 0... \Leftrightarrow \kappa = 1$

Δ3. α. $\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = ... = 1,\ b = \lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = ... = 2$,

$y = x + 2$ (όμοια και στο $-\infty$).

β. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,\ +\infty)$.

20. Δ1. Η g είναι συνεχής στο $[0,\ 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με:

$$g(0)=0$$

$$g(2)=12-\frac{f'(2)-2f(2)}{e^4}=0$$

Δ2. Από το Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (0,2): g'(\xi)=0 \Leftrightarrow f''(\xi)+4f(\xi)=6\xi e^{2\xi}+4f'(\xi)$.

Δ3. $g'(x)=...=6x-\kappa x$

$g'(\xi)=0 \Leftrightarrow \xi(6-\kappa)=0 \Leftrightarrow \kappa=6\left(\xi \in (0,2),\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \xi \neq 0\right)$

Δ4. Από το ερώτημα Δ3 έχουμε:

$$g(x)=0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}=3x^2 \Leftrightarrow \left[f'(x)-2f(x)\right]e^{-2x}=3x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[f(x)e^{-2x}\right]'=(x^3)' \Leftrightarrow f(x)=x^3e^{2x}+ce^{2x}$$

$$f(1)=e^2 \Leftrightarrow e^2+ce^2=e^2 \Leftrightarrow c=0$$

Άρα $f(x)=x^3e^{2x}, 0\le x\le 2$.

Δ5. $I=\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}dx=\int_1^2 xe^{2x}dx=\frac{1}{2}\int_1^2 x(e^{2x})'dx=...=\frac{1}{4}e^2\left(3e^2-1\right)$

21. Δ1. $D_f=\mathbb{R}^*$, $f'(x)=\frac{3(x^2-1)}{x^2}$ και Τ.Μ. στο -1, το $f(-1)=-6$ και Τ.Ε. στο 1, το $f(1)=6$.

Δ2. Στο $\pm\infty$ $y=3x$ και κατακόρυφη $x=0$.

Δ3. $y=6$ **Δ4.** $\lambda=\sqrt{3}$

22. Δ1. $D_f=[-3,\ 3]$

Δ2. α. $f'(x)=\frac{-2x^2-3x+9}{\sqrt{9-x^2}},\ x\neq 3,\ x\neq -3$

β. $f'(-3)=\lim\limits_{x\to -3}\frac{f(x)-f(3)}{x+3}=\lim\limits_{x\to -3}\frac{(x+3)\sqrt{9-x^2}}{x+3}=\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{9-x^2}=0$

Δ3. $f\uparrow\left[-3,\ \frac{3}{2}\right]$ και $f\downarrow\left[\frac{3}{2},\ 3\right]$

Δ4. Έχει τοπικό μέγιστο στο $\frac{3}{2}$, το $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9\sqrt{27}}{4}$.

23. Δ1.

$$f(0)=\lim_{x\to 0}\left(x\frac{f(x)}{x}\right)=0\cdot(1+f(0))=0$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1+f(0)=1$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$\varepsilon:\ y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=x$$

Δ2. Η f'' διατηρεί σταθερό πρόσημο, αφού ειναι συνεχής (ωςπαραγωγίσιμη) και $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η f' είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(0,\ 1):\ f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)>f'(0)$. Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη και ισχύουν $\xi>0$ και $f'(\xi)>f(0)$ η f θα είναι γνησίως αύξουσα.

Δ3. Είναι $g'(x)=f'(x)-1,\ x\in\mathbb{R}$ και η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με $g'(0)=0$.

$$x>0\Rightarrow g'(x)>g'(0)\Rightarrow g'(x)>0\Rightarrow g\uparrow[0,\ +\infty)$$

$$x<0\Rightarrow g'(x)<g'(0)\Rightarrow g'(x)<0\Rightarrow g\downarrow(-\infty,\ 0)$$

Άρα το $g(0)=0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{xg(x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{g(x)}\right)=+\infty\ \left(\lim_{x\to 0}g(x)=0,\ g(x)\geq 0\ \delta\iota\acute{o}\tau\iota\ g(x)\geq g(0)=f(0)=0\right)$$

(ακόμα μπορούμε να πούμε ότι αφού η f είναι κυρτή , η C_f βρίσκεται «πάνω» από την εφαπτομένη στο 0, με εξαίρεση το σημείο $(0,\ f(0))$.

Άρα:

$$f(x)>x\Leftrightarrow f(x)-x>0\Leftrightarrow g(x)>0$$

Δ4. Ισχύει $g(x)\geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$. Επομένως:

$$\int_0^2 g(x)dx>0\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)dx>\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=2.$$

Δ5. $E(\Omega)=\displaystyle\int_0^1 g(x)dx=e-\frac{5}{2}\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=e-\frac{5}{2}\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx=e-2$

24. Δ1. $g'(x)=f(x)+xf'(x)-\eta\mu x=\eta\mu x-\eta\mu x=0,\ x\in\mathbb{R}$

$g(x) = c$

$x = 0 \Rightarrow g(0) = c \Rightarrow c = 1$

$g(x) = 1,\ x \in \mathbb{R}$

Δ2. Για $x \neq 0$:

$$g(x) = 1 \Leftrightarrow xf(x) + \sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x},\ x \neq 0$$

Δ3. $K(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x,\ x \in \left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$. Θεώρημα Bolzano .

$$K\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2-\pi}{2} < 0$$

$$K\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 + \frac{3\pi}{2} > 0$$

Δ4. Θ. Μ. Τ για την f στο $(0,\ \pi)$:

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{\xi\eta\mu\xi + \sigma\upsilon\nu\xi - 1}{\xi^2} = \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi - 0} \Leftrightarrow \xi\eta\mu\xi + \sigma\upsilon\nu\xi = 1 + \frac{2}{\pi^2}\xi^2$$

25. Δ1.

$$\left\{\begin{array}{l} f(-2) = \dfrac{5}{12} \\ f'(-2) = \dfrac{5}{18} \end{array}\right\} \Leftrightarrow (a = 1,\ \beta = 4)$$

Δ2. $f'(x) = \dfrac{(x-2)(x^2+16)}{x^3(x-4)},\ x \neq 0,\ x \neq 4$. Είναι:

Μονοτονία: $f \uparrow$ στα $(-\infty,\ 0)$, $[2,\ 4)$, $(4,\ +\infty)$ και $f \downarrow (0,\ 2]$

Ακρότατα: Τοπικό ελάχιστο στο 2, το $f(2) = \dfrac{3}{4}$.

Δ3. Το $\mathbb{R}^*$

Δ4. $f(x) = \kappa \Leftrightarrow \dfrac{x - 4 - x^2}{x^2(x-4)} = \kappa \Leftrightarrow \kappa x^3 + (1 - 4\kappa)x^2 - x + 4 = 0$

Το πλήθος των ριζών της δοθείσας εξίσωσης είναι το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$. Έχουμε:

Αν $\kappa < 0$, μία ρίζα στο $(4,\ +\infty)$

Αν $0 < \kappa < \frac{3}{4}$, μία ρίζα στο $(-\infty,\ 0)$

Αν $\kappa > \frac{3}{4}$, δύο ρίζες μία στο $(0,\ 2)$ και μία στο $(2,\ 4)$

Αν $\kappa = 0$, καμία ρίζα

Αν $\kappa = \frac{3}{4}$ μία ρίζα την $x_0 = 2$

26. Δ1[4]**.** $f'(x) = 1 + \sqrt{x^2+1} + x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = 1 + \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} > 0,\ x \in \mathbb{R}$.

Άρα η είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ2. $f(x^3 - x + 1) = f(2) \Leftrightarrow x^3 - x + 1 = 2 \Leftrightarrow x^3 - x - 1 = 0$ (αφού η f είναι «1-1» ως γνησίως μονότονη)

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = x^3 - x - 1,\ x \in \mathbb{R}$ και εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο διάστημα $[1, 3]$ αφού $\begin{matrix} g(1) = -1 < 0 \\ g(3) = 23 > 0 \end{matrix}$.

Άρα η δοθείσα έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,\ 3)$

Δ3. Ισχύουν και προκύπτει η ζητούμενη σχέση με τη διαδοχική εφαρμογή τους.

27. Δ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\sqrt{x^2+1}f'(x) + f(x)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[f(x)\sqrt{x^2+1}\right]' = (x)' \Leftrightarrow f(x)\sqrt{x^2+1} = x + c,\ c = 0$$

Άρα $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$

Δ2. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} \cdot (x^2+1)} > 0,\ x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

[4] Έχει υπάρξει διόρθωση σε νεότερη έκδοση: « $f(x) = x\left(1 + \sqrt{x^2+1}\right)$ ...»

$f(x^4+1)=f(3x^3+2x^2+3x)\Leftrightarrow 3x^3+2x^2+3x-x^4-1=0$ (αφού η f είναι «1-1» ως γνησίως μονότονη). Θεώρημα Bolzano για την $K(x)=3x^3+2x^2+3x-x^4-1$ στα διαστήματα $[0,\ 1],\ [1,\ 4]$.

Δ4. $h(x)=4x^3-9x^2-4x-3,\ x\in\mathbb{R}$. Θεώρημα Bolzano για την $h(x)$ στο $[0,\ 4]$

28. Δ1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0} e^x=1=f(0)$.

Για κάθε $x\neq 0$ έχουμε $f'(x)=\dfrac{xe^x-x+1}{x^2}$. Θέτουμε $g(x)=xe^x-x+1,\ x\in\mathbb{R}$ και μελετάμε την g από όπου παίρνουμε $g(x)>0,\ x\neq 0$ και άρα $f'(x)>0, x\neq 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο 0 θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ2. α. $y'(t)=f'(x(t)\cdot x'(t)\Leftrightarrow f'(x(t))=\dfrac{1}{2}=f'(0)\Leftrightarrow x(t)=0$. Επομένως το ζητούμενο σημείο, εφόσον υπάρχει, είναι το $M\left(0,\ 1\right)$.

β.

$$g(x)=\left(e^x-e\right)\cdot\left(x-2\right)^2$$
$$g'(x)=2\left(e^x-e\right)\left(x-2\right)\left(\left(x-1\right)e^x-e\right)$$

Θέτουμε $h(x)=(x-1)e^x-e$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\ +\infty)$ και από το θεώρημα του Bolzano έχει μοναδική ρίζα $x_0\in\left(0,\ 1\right)$.

Τα συμπεράσματα φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

x	$-\infty$ 1	x_0	2	$+\infty$
e^x-e	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$h(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$g'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$g(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Άρα η g έχει δύο θέσεις Τ. Ε τις $x_1=1,\ x_2=2$ και μία θέση Τ.Μ. την $x_3=x_0$.

29. Δ1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[h(x)-(x-2)\right]=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(a-1)x^2+4}{x+1}=0$. Άρα $a=1$

Δ2. α. Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[h(x)-(x-2)\right]=0$ η $y=x-2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

β. Επειδή $\begin{matrix}\lim\limits_{x\to-1^-}h(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-1^+}h(x)=+\infty\end{matrix}$ η $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_h.

Δ3. $h(x)+\dfrac{(x+3)^2}{x}=0 \Leftrightarrow xh(x)+(x+3)^2=0$,

Θέτουμε $K(x)=xh(x)+(x+3)^2,\ x\in[-2,\ 0]$ και εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο $[-2,\ 0]$, αφού $K(0)=9>0$ και $K(-2)=-2h(-2)+1=-15<0$.

30. Δ1. Η δοσμένη σχέση δίνει:

$$e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x \Leftrightarrow e^{2f(x)}-2xe^{f(x)}=1 \Rightarrow \left(e^{f(x)}-x\right)^2=x^2+1\neq 0$$

Επειδή η $g(x)=e^{f(x)}-x,\ x\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει πραγματικές ρίζες διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $g(0)=1>0$ είναι $g(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$. Άρα:

$$e^{f(x)}-x=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}+x,\ x\in\mathbb{R}$$

Δ2. α.

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\ x\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad f''(x)=-\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3},\ x\in\mathbb{R}$$

Η f είναι κυρτή στο $(-\infty,\ 0]$, κοίλη στο $[0,\ +\infty)$ και το $A(0,\ f(0))$ είναι σημείο καμπής.

β. Είναι $\mathrm{E}=\int_0^1\left|x-f(x)\right|dx$. Μελετάμε το πρόσημο της $K(x)=x-f(x),\ x\in[0,\ 1]$ (με μονοτονία ή και με την εφαπτομένη στο O(0,0)) και παίρνουμε:

$$K(x)\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\leq x,\ x\geq 0$$

Άρα:

$$\mathrm{E}=\int_0^1\left|x-f(x)\right|dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}-I$$

Υπολογίζουμε το:

$$I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x)' f(x)dx = \left[xf(x)\right]_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = f(1) - \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1$$

Επομένως τελικά:

$$E = \frac{1}{2} - I = \frac{1}{2} + \sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})\ \tau.\mu$$

31. Δ1. Για κάθε $x \in (0,\ +\infty)$, $x \neq 1$ έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$(x^2 - x) f'(x) + xf(x) = 1 \Leftrightarrow e^{(1-x)f(x)}\left[(x^2 - x) f'(x) + xf(x) - 1\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[xe^{(1-x)f(x)}\right]' = 0 \Leftrightarrow xe^{(1-x)f(x)} = c$$

Για $x = 1 \Rightarrow c = 1$. Άρα:

$$xe^{(1-x)f(x)} = 1 \Leftrightarrow e^{(1-x)f(x)} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow (1-x)f(x) = \ln\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow (1-x)f(x) = -\ln x \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln x}{1-x},\ x \in (0,\ +\infty),\ x \neq 1$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,\ +\infty)$ θα είναι συνεχής και στο σημείο $x_0 = 1$.

Επομένως είναι $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$ με:

$$\lim_{x \to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

Άρα $f(1) = 1$, δηλαδή:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

32. Δ1. Από το θεώρημα του Fermat έχουμε:

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \alpha = -12$$

Δ2. $\beta \leq -5$ **Δ3.** $y = 3x + 4$

Δ4. $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x^\nu} \cdot \eta\mu\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right) = \begin{cases} 0, & \nu \geq 4 \\ +\infty, & \nu < 4 \end{cases}$

Τα θέματα 33-37 μπορείτε να τα αναζητήσετε στο 5^{o} Κεφάλαιο στις λύσεις των θεμάτων των Πανελλαδικών Εξετάσεων 2016 των Ημερησίων και Εσπερινών Γενικών Λυκείων.

38. Δ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f''(x) > 0 \Rightarrow f' \uparrow \mathbb{R}$. Επομένως:

$$x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow [0, \ +\infty)$$

$$x < 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow (-\infty, \ 0]$$

και επειδή η f είναι συνεχής στο 0 έχει στο 0 ολικό ελάχιστο, το $f(0) = 0$.

Δ2. Έχουμε διαδοχικά:

$$f'(x) + 2x = 2x\left(f(x) + x^2\right) \Leftrightarrow f'(x) - 2xf(x) = 2x^3 - 2x \Leftrightarrow e^{-x^2}\left(f'(x) - 2xf(x)\right) = e^{-x^2}\left(2x^3 - 2x\right)$$

Άρα είναι:

$$\left(e^{-x^2} f(x)\right)' = \left(-x^2 e^{-x^2}\right)' \Leftrightarrow e^{-x^2} f(x) = -x^2 e^{-x^2} + c, \ c = 1$$

Επομένως:

$$e^{-x^2} f(x) = -x^2 e^{-x^2} + 1 \Leftrightarrow f(x) = e^{x^2} - x^2, \ x \in \mathbb{R}$$

39. Δ1. Έστω $\int_0^2 f(t)dt = a \in \mathbb{R}$. Έχουμε $f(x) = (10x^3 + 3x) \cdot a - 45$. Είναι:

$$\int_0^2 \left((10x^3 + 3x) \cdot a - 45\right)dx = \int_0^2 f(t)dt \Leftrightarrow a\left[\frac{10x^4}{4} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^2 - 45\left[x\right]_0^2 = a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ldots 45a = 90 \Leftrightarrow a = 2$$

Άρα $f(x) = 20x^3 + 6x - 45$

Δ2. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g'(x) - g'(x-h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g'(x + (-h) - g'(x)}{-h} = g''(x)$ (αν θέσουμε $-h = u$)

Δ3. i.

$$\lim_{h \to 0} \frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{2h} = f(x) + 45 \Leftrightarrow \lim_{h \to 0}\left(\frac{g'(x+h) - g'(x)}{2h} + \frac{g'(x) - g'(x-h)}{2h}\right) = f(x) + 45 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(g''(x) + g''(x)\right) = f(x) + 45 \Leftrightarrow g''(x) = 20x^3 + 6x \Leftrightarrow g''(x) = \left(5x^4 + 3x^2\right)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + c_1$$

Είναι $g'(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1$, άρα:

$$g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 \Leftrightarrow g'(x) = \left(x^5 + x^3 + x\right)' \Leftrightarrow g'(x) = x^5 + x^3 + x + c_2$$

Είναι $g'(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 1$. Άρα $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1, \ x \in \mathbb{R}$.

ii. $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0, \ x \in \mathbb{R}$. Άρα g είναι γνησίως αύξουσα άρα και «1-1».

4.5. Προτεινόμενα Διαγωνίσματα επιπεδου θέματος Δ

Διαγώνισμα 1ο	ΘΕΜΑ 1ο: ΘΕΜΑ 4 της § 4.2
	ΘΕΜΑ 1ο: ΘΕΜΑ 29 της § 4.4.
	ΘΕΜΑ 1ο: ΘΕΜΑ 3 της § 4.3
Διαγώνισμα 2ο	ΘΕΜΑ 1ο: ΘΕΜΑ 12 της § 4.2 (Κεφάλαιο 2ο)
	ΘΕΜΑ 2ο: ΘΕΜΑ 15 της § 4.4
	ΘΕΜΑ 3ο: ΘΕΜΑ 9 της § 4.3
Διαγώνισμα 3ο	ΘΕΜΑ 1ο: ΘΕΜΑ 8 της § 4.2 (Κεφάλαιο 2ο)
	ΘΕΜΑ 2ο: ΘΕΜΑ 1 της § 4.4.
	ΘΕΜΑ 3ο: ΘΕΜΑ 7 της § 4.3

5.1. Επαναληπτικά θέματα προτεινόμενα από την Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία (Ε.Μ.Ε.).

Τα θέματα αυτά επιλέχθηκαν ανάμεσα σε αρκετά θέματα που υπάρχουν στην βάση, ώστε να είναι **συμβατά με την νέα εξεταστέα ύλη** των Πανελλαδικών Εξετάσεων όπως ανακοινώθηκε από το ΥΠ.Π.Ε.Θ. για το σχολικό έτος 2016-2017.

Το επίπεδο των θεμάτων κυμαίνεται **ανάμεσα στο 3^{ο} και 4^{ο} θέμα των Πανελλαδικών Εξετάσεων**.

Τις πλήρεις λύσεις μπορείτε να τις αναζητήσετε στον σύνδεσμο:

http://www.hms.gr/sites/default/files/subsites/problems/gl/TRAPEZA16_30_2014.pdf

καθώς και στον σύνδεσμο:

http://www.hms.gr/sites/default/files/subsites/problems/gl/TRAPEZA31_45_2014.pdf

5.1. ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΕΝΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ -1-

ΘΕΜΑ 1^{o}

Α1.

Απάντηση:

Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση 1−1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

«Αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$»

Α2.

Απάντηση:

Το $\int_{\alpha}^{\beta} c dx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση β − α και ύψος c .

Α3.

Απόδειξη:

Για $x \neq x_0$, ισχύει :

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)+g'(x_0),$$

Δηλαδή:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Α4.

α) Σωστό.

β) Λάθος.

γ) Σωστό.

δ) Λάθος.

ε) Σωστό.

ΘΕΜΑ 2ο

ΛΥΣΗ

Β1. Για το πεδίο ορισμού D_f της f έχουμε:

$$\left\{\begin{matrix} \dfrac{x+1}{1-x}>0 \\ 1-x\neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} (x+1)(1-x)>0 \\ x\neq 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow -1<x<1$$

Επομένως $D_f=(-1,\ 1)$.

Β2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $D_f=(-1,\ 1)$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων αφού οι επόμενες συναρτήσεις:

$$g(x)=\frac{x+1}{1-x}$$
$$h(x)=\ln g(x)$$
$$\Phi(x)=2\ln g(x)+3$$

είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού της.

Β3. Έστω $x_1, x_2\in D_f=(-1,\ 1)$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Θα αποδείξουμε ότι $x_1=x_2$. Έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow 2\ln\frac{x_1+1}{1-x_1}+3=2\ln\frac{x_2+1}{1-x_2}+3\Leftrightarrow \ln\frac{x_1+1}{1-x_1}=\ln\frac{x_2+1}{1-x_2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x_1+1}{1-x_1}=\frac{x_2+1}{1-x_2}\Leftrightarrow (x_1+1)(1-x_2)=(1-x_1)(x_2+1)\Leftrightarrow 2x_1=2x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f αντιστρέφεται.

Για την αντίστροφή της έχουμε:

Πρέπει:

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=2\ln\frac{x+1}{1-x}+3\Leftrightarrow 2\ln\frac{x+1}{1-x}=y-3\Leftrightarrow \ln\frac{x+1}{1-x}=\frac{y-3}{2}\Leftrightarrow \frac{x+1}{1-x}=e^{\frac{y-3}{2}}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x+1=(1-x)e^{\frac{y-3}{2}}\Leftrightarrow x+1=e^{\frac{y-3}{2}}-xe^{\frac{y-3}{2}}\Leftrightarrow x+xe^{\frac{y-3}{2}}=e^{\frac{y-3}{2}}-1\Leftrightarrow x\left(1+e^{\frac{y-3}{2}}\right)=e^{\frac{y-3}{2}}-1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{1+e^{\frac{y-3}{2}}}$$

$$x\in D_f\Leftrightarrow -1<\frac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{\left(1+e^{\frac{y-3}{2}}\right)}<1\Leftrightarrow \left(\begin{matrix} \dfrac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{\left(1+e^{\frac{y-3}{2}}\right)}<1 \\ -1<\dfrac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{\left(1+e^{\frac{y-3}{2}}\right)} \end{matrix}\right)\Leftrightarrow \left(\begin{matrix} e^{\frac{y-3}{2}}-1<1+e^{\frac{y-3}{2}} \\ -1-e^{\frac{y-3}{2}}<e^{\frac{y-3}{2}}-1 \end{matrix}\right)$$

Οι τελευταίες σχέσεις είναι αληθείς για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως:

$$f^{-1}(x)=\frac{e^{\frac{x-3}{2}}-1}{1+e^{\frac{x-3}{2}}},\ x\in\mathbb{R}$$

Η $f^{-1}(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο και σύνθεση των επόμενων συνεχών συναρήσεων $\left(f_2 o f_1\right)$:

$$f_1(x)=e^{\frac{x-3}{2}}$$

$$f_2(x)=\frac{e^x-1}{1+e^x}$$

Β4. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(2\ln\frac{x+1}{1-x}+3\right)=\lim_{u\to\infty}(2u+3)=+\infty\quad\left(u=\frac{x+1}{1-x},\ \lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{1-x}=+\infty\right)$$

Επίσης:

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\left(2\ln\frac{x+1}{1-x}+3\right)=\lim_{u\to 0^+}\left(2\ln u+3\right)=-\infty\quad\left(u=\frac{x+1}{1-x},\ \lim_{x\to -1^+}\frac{x+1}{1-x}=0\right)$$

ΘΕΜΑ Γ

ΛΥΣΗ

Γ1. Η συνάρτηση f γίνεται:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x}, & \text{αν } x>0 \ \kappa\alpha\iota\ x\neq 1\\ \dfrac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln(-x)}, & \alpha\nu\ x<0\\ \kappa, & \alpha\nu\ x=1\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$$

Για το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x}=0$,

αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[e^{-x^2+1}(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x^2+1}\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)=e\cdot(-1)=-e$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln(-x)}=0$,

αφού $\lim\limits_{x\to 0^-}\left[e^{-x^2+1}(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-x^2+1}\cdot\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=e\cdot(-1)=-e$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\ln(-x)\right)=-\infty$

Επομένως είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ και άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{0,\ 1\}$ ώς πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Επίσης η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, αφού $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$. Τέλος για να είναι η f συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_1=1$.

Έχουμε, σύμφωνα με τον κανόνα του de L΄ Hospital:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{e^{-x^2+1}\left(-2x^2+2x+1\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1}\left[e^{-x^2+1}\left(-2x^2+2x+1\right)x\right] = 1$$

Επομένως: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = \kappa \Leftrightarrow \kappa = 1$.

Γ2. i) Η συνάρτηση $g(x) = f(x)\ln\left(\frac{1}{x^2}\right),\ x>0$ γίνεται διαδοχικά:

(Για $x=1$ έχουμε $g(1) = f(1)\cdot \ln 1 = 0$)

$$g(x) = \frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln|x|}\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x}\left(\ln 1 - \ln x^2\right) =$$

$$= \frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x}\left(-2\ln x\right) = -2e^{-x^2+1}(x-1)$$

Επομένως θα μελετήσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης:

$$g(x) = -2e^{-x^2+1}(x-1),\ x>0\ .$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ \infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g'(x) = -2\left[-2x(x-1)e^{-x^2+1} + e^{-x^2+1}\right] = -2e^{-x^2+1}\left(-2x^2+2x+1\right),\ x>0$$

Επειδή $-2e^{-x^2+1} < 0$, για $x>0$, το πρόσημο της $g'(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο του τριωνύμου $-2x^2+2x+1$.

Ο πίνακας προσήμου της $g'(x)$ είναι ο επόμενος:

x	0	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$	$+$
$g(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Επομένως η συνάρτηση g είναι:

- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$ και

- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2},\ +\infty\right)$.

ii) Σύμφωνα με τον πίνακα προσήμου της $g'(x)$ του ερωτήματος (i) η συνάρτηση g έχει ελάχιστο (ολικό) στο σημείο $x_2=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, το $g\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)=e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1-\sqrt{3}\right)$.

Επομένως για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$g(x)\geq g\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\Leftrightarrow -2e^{-x^2+1}(x-1)\geq e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1-\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow e^{-x^2+1}(x-1)\leq\frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$$

Άρα:

- Για $x-1>0\Leftrightarrow x>1$ έχουμε:

$$e^{-x^2+1}\leq\frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2(x-1)}$$

- Για $x-1<0\ \kappa\alpha\iota\ x>0\Leftrightarrow 0<x<1$ έχουμε:

$$e^{-x^2+1}\geq\frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2(x-1)}$$

Γ3. i) Η $g'(x)$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ (ή αλλιώς η $g(x)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$) ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g''(x)=-4e^{-x^2+1}\left(2x^3-2x^2-3x+1\right)=-4e^{-x^2+1}\left(2x^3-2x^2-3x+1\right)=-4e^{-x^2+1}(x+1)\left(2x^2-4x+1\right),\ x>0$$

Επειδή $-4e^{-x^2+1}<0\ \gamma\iota\alpha\ x>0$, το πρόσημο της $g''(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο του $(x+1)\left(2x^2-4x+1\right)$.

Ο πίνακας του προσήμου της $g''(x)$ είναι ο επόμενος:

x	0	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ $+\infty$
$g''(x)$	$-$	$+$	$-$
$g(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Επομένως η συνάρτηση g:

Είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο διάστημα $\left(0,\ \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right]$.

Είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα άνω) στο διάστημα $\left[\dfrac{2+\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right]$.

Είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο διάστημα $\left[\dfrac{2+\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right)$.

Τα σημεία καμπής της είναι το και το $A\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2},\ g\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ ή το $A\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{2}e^{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}}\right)$ και

το $B\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2},\ g\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ ή το $B\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2},\ -\sqrt{2}e^{-\frac{1+2\sqrt{2}}{2}}\right)$.

ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $A(2,\ g(2))$ είναι:

$$y-g(2)=g'(2)(x-2)\Leftrightarrow y+2e^{-3}=6e^{-3}(x-2)\Leftrightarrow y=6e^{-3}x-14e^{-3}$$

Επειδή η g είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο διάστημα $\left[\dfrac{2+\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right)$ θα είναι:

$$y\geq g(x)\Leftrightarrow 6e^{-3}x-14e^{-3}\geq -2e^{-x^2+1}(x-1)\Leftrightarrow -3e^{-3}x+7e^{-3}\leq e^{-x^2+1}(x-1)\Leftrightarrow$$
$$e^{-4}(-3x+7)\leq e^{-x^2}(x-1)$$

, για κάθε $x\in\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right)$.

Επίσης, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $B(1,\ g(1))$ είναι:

$$y-g(1)=g'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=-2(x-1)$$

Επειδή η g είναι κυρτή (στέφει τα κοίλα άνω) στο διάστημα

$\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2},\ 1\right)\subset\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$ θα είναι:

$$y\leq g(x)\Leftrightarrow -2(x-1)\leq -2e^{-x^2+1}(x-1)\Leftrightarrow x-1\geq e^{-x^2+1}(x-1)\Leftrightarrow 1\leq e^{-x^2+1}\Leftrightarrow e^{-x^2}\geq e^{-1}$$

, για κάθε $x<1$, αφού $x-1<0$.

ΘΕΜΑ 4^{o}

ΛΥΣΗ

Δ1. Αφού η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\infty)$, το 1^{o} μέλος της δοθείσας σχέσης είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων), όπως προφανώς παραγωγίσιμη είναι η συνάρτηση του 2^{ου} μέλους. Παραγωγίζοντας[1] λοιπόν τα μέλη της δοθείσας σχέσης έχουμε διαδοχικά (όχι ισοδύναμα):

---

[1] Μπορεί να αποδειχθεί και χωρίς την παραγωγισιμότητα της f με ιδιότητες της ισότητας.

$$e^{f(x)}(f^2(x)-2f(x)+3)=x$$
$$e^{f(x)}f'(x)[f^2(x)-2f(x)+3]+e^{f(x)}[2f(x)f'(x)-2f'(x)]=1$$
$$e^{f(x)}[f'(x)f^2(x)-2f(x)f'(x)+3f'(x)+2f(x)f'(x)-2f'(x)]=1$$
$$e^{f(x)}[f'(x)f^2(x)+f'(x)]=1 \Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)(f^2(x)+1)=1$$
$$f'(x)=\frac{e^{-f(x)}}{f^2(x)+1}>0, x\in(0,\infty)$$

Άρα η f *είναι γνησίως αύξουσα στο* $(0,\infty)$ *άρα και* "1−1" *και άρα αντιστρέψιμη*

Για την εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης θέτουμε:

$$f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y) \text{ με } x\in A=(0,\ \infty) \text{ και } y\in f(A)=\mathbb{R}.$$

Άρα, θα έχουμε από την δοθείσα σχέση:

$$e^y(y^2-2y+3)=f^{-1}(y),\ y\in\mathbb{R} \text{ ή } f^{-1}(x)=e^x(x^2-2x+3),\ x\in\mathbb{R}.$$

Δ2. Η συνάρτηση $f^{-1}(x)=e^x(x^2-2x+3),\ x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$\left(f^{-1}(x)\right)'=e^x(x^2-2x+3)+e^x(2x-2)=e^x(x^2+1),\ x\in\mathbb{R}.$$

Η συνάρτηση $\left(f^{-1}(x)\right)'$ είναι επίσης παραγωγίσιμη $\mathbb{R}$(ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$\left(f^{-1}(x)\right)''=e^x(x^2+1)+2xe^x=e^x(x+1)^2,\ x\in\mathbb{R},$$

δηλαδή $\left(f^{-1}(x)\right)''>0,\ x\in(-\infty,-1)\ \textit{και}\ x\in(-1,\ -\infty)$ που σημαίνει ότι η $f^{-1}(x)$ είναι κυρτή στο $(-\infty,-1]$ και στο $[-1,\ +\infty)$ (δηλαδή στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$).

Η συνάρτηση $f^{-1}(x)$ τέμνει τον άξονα x΄x όταν $x=0 \Rightarrow f^{-1}(0)=3$ δηλαδή στο σημείο $A(0,\ 3)$. Αν θέσουμε $g(x)=f^{-1}(x),\ x\in\mathbb{R}$ τότε η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο Α είναι:

$$y-3=g'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=x+3\ \ (g'(0)=(f^{-1})'(0)=3)$$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\int_0^1\left|f^{-1}(x)-(x+3)\right|dx=\int_0^1[e^x(x^2-2x+3)-x-3]dx=\int_0^1 x^2e^xdx-2\int_0^1 xe^xdx+3\int_0^1 e^x-[\frac{x^2}{2}]_0^1-3[x]_0^1=$$
$$=4e-\frac{21}{2}\tau.\mu.$$

(χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η f^{-1} είναι κυρτή δηλαδή ότι $f^{-1}(x)\ge x+3,\ x\in\mathbb{R}$ άρα $f^{-1}(x)-(x+3)\ge 0,\ x\in(0.1)$).

Δ3. i)[2] Έχουμε:

$$f'(x)=\frac{e^{-f(x)}}{f^2(x)+1},\ \ x\in(0,\ +\infty) \text{ και } \left(f^{-1}(x)\right)'=e^x(x^2+1),\ x\in\mathbb{R}$$

---

[2] Αυτό το συμπέρασμα ισχύει και γενικότερα αφού: $f(f^{-1}(x))=x,\ x\in D_{f^{-1}}$ και παραγωγίζοντας τα μέλη της έχουμε $f'(f^{-1}(x))\cdot[f^{-1}(x)]'=1$. Επίσης τα σημεία $A(x,\ f^{-1}(x))$ και $B(f^{-1}(x),\ x)$ είναι συμμετρικά ως προς την $y=x$.

Άρα :

$$f'(f^{-1}(x) = \frac{e^{-f(f^{-1}(x))}}{[f(f^{-1}(x))]^2+1} = \frac{e^{-x}}{x^2+1}$$

$$f'(f^{-1}(x))\cdot[f^{-1}(x)]' = \frac{e^{-x}}{x^2+1}\cdot e^{x}(x^2+1) = 1$$

ii) Η απόσταση των σημείων Α και Β είναι:

$$(\text{AB})^2 = 2(x - f^{-1}(x))^2,\ x\in\mathbb{R}$$

$$(\text{AB}) = \sqrt{2}\left|x - f^{-1}(x)\right|,\ x\in\mathbb{R}$$

$$(\text{AB}) = \sqrt{2}(f^{-1}(x) - x),\ x\in\mathbb{R}$$

(Χρησιμοποιήσαμε $f^{-1}(x) \ge x+3 > x,\ x\in\mathbb{R} \Rightarrow f^{-1}(x) - x > 0$).

Αν θέσουμε :

$$h(x) = \sqrt{2}(f^{-1}(x) - x) = \sqrt{2}[e^{x}(x^2-2x+3) - x], x\in\mathbb{R}$$

θα έχουμε ότι η $h(x)$ είναι παραγωγίσμη (ως πράξεις παραγωγίσμων) με:

$$h'(x) = \sqrt{2}[e^{x}(x^2+1) - 1],\ x\in\mathbb{R}\ .$$

Έχουμε:

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ μοναδικό, διότι η συνάρτηση $\varphi(x) = e^{x}(x^2+1) - 1, x\in\mathbb{R}$ είναι συνάρτηση «1-1» αφού η $\varphi'(x) = e^{x}(x+1)^2 > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και άρα γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Τώρα έχουμε:

- $x < 0 \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(0) \Rightarrow \varphi(x) < 0 \Rightarrow e^{x}(x^2+1) - 1 < 0 \Rightarrow \sqrt{2}[e^{x}(x^2+1) - 1] < 0 \Rightarrow$
  η $h(x)$ *είναι γνησίως* φθίνουσα *στο* $(-\infty, 0]$
- $x > 0 \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(0) \Rightarrow \varphi(x) > 0 \Rightarrow e^{x}(x^2+1) - 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{2}[e^{x}(x^2+1) - 1] > 0 \Rightarrow$
  η $h(x)$ *είναι γνησίως* αύξουσα *στο* $[0, +\infty)$

και άρα η συνάρτηση $h(x)$ (μπορεί να φανεί πιο καθαρά από τον πίνακα προσήμου της $h'(x)$) έχει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, το $h(0) = \sqrt{2}(f^{-1}(0)) = 3\sqrt{2}$, δηλαδή $(AB)_{\min} = 3\sqrt{2}$.

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ -2-

ΘΕΜΑ 1ο :

Α1.

Απάντηση

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της f στο Δ** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$F'(x) = f(x)\ , \quad \text{για κάθε} \quad x \in \Delta.$$

Α2.

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$.

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε:

$$(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \subseteq \Delta \quad \text{και} \quad f(x) \le f(x_0)\ , \text{για κάθε } x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)\ . \qquad (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x0, ισχύει:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\ .$$

Επομένως,

— αν $x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$, οπότε θα έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0 \quad (2)$$

— αν $x \in (x_0,\ x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0$, οπότε θα έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0 \quad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$

Α3.

α. Σωστό.

β. Λάθος.

γ. Σωστό.

δ. Σωστό.

ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ 2^o

ΛΥΣΗ

Β1. Πρέπει να ισχύει:

$$e^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \ln 2$$

Επομένως $D_f = [\ln 2, \ +\infty)$

Β2. Θα εξετάσουμε την μονοτονία της f **.** Εχουμε διαδοχικά:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} - 2 < e^{x_2} - 2 \Leftrightarrow \sqrt{e^{x_1} - 2} < \sqrt{e^{x_2} - 2} \Leftrightarrow \sqrt{e^{x_1} - 2} + 3 < \sqrt{e^{x_2} - 2} + 3$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\ln 2, \ +\infty)$.

<u>Σημείωση:</u> Μπορεί, πιο εύκολα, η μονοτονία της συνάρτησης f να προκύψει και ως εξής:

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη (ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $f'(x) = \dfrac{2e^x}{\sqrt{e^x - 2}}$, $x > \ln 2$. *Άρα η* f *είναι γνησίως αύξουσα στο* $[\ln 2, \ +\infty)$.

Έτσι το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $\left[f(\ln 2), \ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \right)$ με $f(\ln 2) = 3, \ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(4\sqrt{e^x - 2} + 3\right) = +\infty$, δηλαδή το σύνολο τιμών είναι το διάστημα $[3, \ +\infty)$.

Η f δεν έχει ρίζες αφού $f(x) \geq 3$, για κάθε $x \in [\ln 2, \ +\infty)$.

Β3. Για κάθε $y \in [3, \ +\infty)$ έχουμε διαδοχικά:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = 4\sqrt{e^x - 2} + 3 \Leftrightarrow \frac{y-3}{4} = \sqrt{e^x - 2} \Leftrightarrow \left(\frac{y-3}{4}\right)^2 = e^x - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = \left(\frac{y-3}{4}\right)^2 + 2 \Leftrightarrow x = \ln\left[\left(\frac{y-3}{4}\right)^2 + 2\right]$$

Επομένως:

$$f^{-1}(x) = \ln\left[\left(\frac{x-3}{4}\right)^2 + 2\right], \ x \in [3, \ +\infty)$$

Β4. Η συνάρτηση g είναι άρτια, αφού $g(x) = g(-x) = \dfrac{1}{x^2} + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Επομένως η g **δεν** είναι αντστρέψιμη.

Β4. Για το πεδίο ορισμού της fog έχουμε:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \ / \ g(x) \in D_f\} = \left\{x \in \mathbb{R}^* \ / \ \frac{1}{x^2} + 2 \geq \ln 2\right\} = \mathbb{R}^*$$

(αφού $\dfrac{1}{x^2} + 2 > 1, \ \ln 2 < 1$ είναι πάντα αληθείς)

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε: $(fog)(x) = f(g(x)) = 4\sqrt{e^{\frac{1}{x^2}+3} - 2} + 2$.

ΘΕΜΑ 3º

ΛΥΣΗ

Γ1. Έχουμε:

$$2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} 2x^2 \cdot \ln x + 1 > 0,$$

οπότε θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = 2x^2 \cdot \ln x + 1, \ x > 0.$$

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, \ +\infty)$ με:

$$g'(x) = 4x \cdot \ln x + 2x = 2x \cdot (2\ln x + 1)$$

και έχουμε:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot (2\ln x + 1) = 0 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

και

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x \cdot (2\ln x + 1) > 0 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} \ln x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt{e}},$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x \cdot (2\ln x + 1) < 0 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} \ln x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0, \ \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}, \ +\infty\right)$, και

επειδή είναι συνεχής στο $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ παρουσιάζει στο σημείο αυτό ολικό ελάχιστο το:

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{e-1}{e} > 0.$$

Επομένως:

$$g(x) \geq g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{e-1}{e} > 0 \ \text{ για κάθε } \ x > 0,$$

άρα αποδείξαμε ότι:

$$2x\ln x+\frac{1}{x}>0 \quad \text{για κάθε} \quad x>0.$$

Γ2. Η f είναι και παραγωγίσιμη στο $\left(0,\ +\infty\right)$ με:

$$f'(x)=\left[(x^2+1)\cdot \ln x\right]'=2x\ln x+x+\frac{1}{x}=x+\left(2x\ln x+\frac{1}{x}\right)>0$$

Αφού:

$x>0$ και $2x\ln x+\dfrac{1}{x}>0$ από το προηγούμενο ερώτημα.

Άρα η συνεχής συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\ +\infty\right)$.

Επίσης το $x=1$ είναι προφανής λύση της εξίσωσης $f\left(x\right)=0$, η οποία λόγω της μονοτονίας της f είναι και μοναδική.

Γ3. Έχουμε: Η f' είναι και παραγωγίσιμη στο $\left(0,\ +\infty\right)$ με:

$$f''(x)=\left(2x\ln x+x+\frac{1}{x}\right)'=2\ln x+2+1-\frac{1}{x^2}=2\ln x+3-\frac{1}{x^2}$$

και $f^{(3)}(x)=\left(2\ln x+3-\dfrac{1}{x^2}\right)'=\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^3}>0$

Για κάθε $x>0$

Αφού $f^{(3)}(x)>0$ στο $\left(0,+\infty\right)$, έπεται ότι η συνεχής συνάρτηση f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,+\infty\right)$.

Επίσης $f''\left(\dfrac{1}{e}\right)=1-e^2<0$ και $f''(1)=2>0$ και επειδή η f'' είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{e},\ 1\right]$, υπάρχει σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(\dfrac{1}{e},\ 1\right)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0)=0$, το οποίο λόγω της μονοτονίας της f'' είναι μοναδικό.

Επίσης έχουμε:

$$0 < x < x_0 \overset{f'' \text{ γν.αύξ.}}{\Longleftrightarrow} f''(x) < f''(x_0) = 0$$

και

$$x > x_0 \overset{f'' \text{ γν.αύξ.}}{\Longleftrightarrow} f''(x) > f''(x_0) = 0.$$

Επειδή η f'' μηδενίζεται στο σημείο x_0 και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημα το σημείο $A\left(x_0,\ f(x_0)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f .

Γ4. i. Έχουμε:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \ln x = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

άρα η C_f δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 + 1) \cdot \ln x = -\infty,$$

αφού:

$$\lim_{x \to 0^+} (x^2 + 1) = 1$$ και

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty.$$

Άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$.

ii. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$E(\Omega) = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left| f(x) \right| dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{e} f(x)dx = -I_1 + I_2$, όπου $I_1 = \int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)dx$ και $I_2 = \int_{1}^{e} f(x)dx$

αφού , επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι:

$$x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) \Rightarrow f(x) > 0$$
$$\frac{1}{e} < x < 1 \Rightarrow f(x) < f(1) \Rightarrow f(x) < 0$$

Έχουμε:

$$I_1=\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(x^2+1\right)\cdot \ln x dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\frac{x^3}{3}+x\right)'\ln x dx=\left[\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{1}-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x^3}{3}+x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3e^3}+\frac{1}{e}-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\frac{x^2}{3}+1\right)dx=\frac{1}{3e^3}+\frac{1}{e}-\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{e}}^{1}-\left[x\right]_{\frac{1}{e}}^{1}=\frac{1}{3e^3}+\frac{1}{9e^3}+\frac{2}{e}-\frac{10}{9}=\frac{4}{9e^3}+\frac{2}{e}-\frac{10}{9}$$

$$I_2=\int_{1}^{e}\left(x^2+1\right)\cdot \ln x dx=\int_{1}^{e}\left(\frac{x^3}{3}+x\right)'\ln x dx=\left[\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x\right]_{1}^{e}-\int_{1}^{e}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x^3}{3}+x\right)dx=$$

$$\frac{e^3}{3}+e-\int_{1}^{e}\left(\frac{x^2}{3}+1\right)dx=$$

$$=\frac{e^3}{3}+e-\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{e}-\left[x\right]_{1}^{e}=\frac{2e^3}{9}+\frac{10}{9}$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega)=\frac{2e^3}{9}+\frac{10}{9}-\frac{4}{9e^3}-\frac{2}{e}+\frac{10}{9}=\frac{2e^3}{9}+\frac{20}{9}-\frac{4}{9e^3}-\frac{2}{e}\ \ \tau.\mu$$

ΘΕΜΑ 4ο

ΛΥΣΗ

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x)\Leftrightarrow e^x f'(x)+e^x f''(x)-e^x=f'(x)+xf''(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(e^x f'(x)-e^x\right)'=\left(xf'(x)\right)'\Leftrightarrow e^x f'(x)-e^x=xf'(x)+c\ \ (1)$$

Για $x=0$ είναι $0-1=0+c\Leftrightarrow c=-1$. Επομένως από την σχέση (1) έχουμε:

$$e^x f'(x)-e^x=xf'(x)-1\Leftrightarrow e^x f'(x)-xf'(x)=e^x-1\Leftrightarrow\left(e^x-x\right)f'(x)=e^x-1,\ x\in\mathbb{R}\ \ (2)$$

Θα εξετάσουμε το πρόσημο της συνάρτησης $h(x)=e^x-x,\ x\in\mathbb{R}$. Η $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη για $x\in\mathbb{R}$ (ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων για $x\in\mathbb{R}$) με $h'(x)=e^x-1,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι:

$$h'(x)=0\Leftrightarrow x=0$$
$$h'(x)>0\Leftrightarrow e^x-1>0\Leftrightarrow x>0$$
$$h'(x)<0\Leftrightarrow e^x-1<0\Leftrightarrow x<0$$

Επειδή η συνάρτηση $h(x)$ είναι και συνεχής στο $x_0=0$ είναι :

- Γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,0\right]$ και
- Γνησίως αύξουσα στο $\left[0,+\infty\right)$

Επομένως η $h(x)$ έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$, δηλαδή $h(x)\geq h(0)=1>0$, $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή $e^x-x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα από τη σχέση (2) έχουμε $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x},\ x\in\mathbb{R}$.

Τώρα έχουμε διαδοχικά:

$$f'(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{\left(e^x-x\right)'}{e^x-x}\Leftrightarrow f'(x)=\left(\ln\left|e^x-x\right|\right)'\Leftrightarrow f(x)=\ln\left|e^x-x\right|+c_1,\ x\in\mathbb{R}$$

Για $x=0$ είναι $0=0+c_1\Leftrightarrow c_1=0$. Επομένως από την σχέση (2) έχουμε:

$$f(x)=\ln\left|e^x-x\right| \text{ ή } f(x)=\ln\left(e^x-x\right),\ x\in\mathbb{R},$$

αφού $e^x-x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με

$f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x},\ x\in\mathbb{R}$. Είναι:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow e^x-1=0\Leftrightarrow x=0$$
$$f'(x)>0\Leftrightarrow e^x-1>0\Leftrightarrow x>0$$
$$f'(x)<0\Leftrightarrow e^x-1<0\Leftrightarrow x<0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,\ +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,\ 0\right]$. Έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο $x_0=0$, το $f(0)=0$ (επειδή η f είναι και συνεχής στο 0).

Δ3. Η f' είναι παραγωγίσμη στο $\mathbb{R}$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $f''(x)=\dfrac{(2-x)e^x-1}{\left(e^x-x\right)^2},\ x\in\mathbb{R}$. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $(2-x)e^x-1$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

Θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση $K(x)=(2-x)e^x-1,\ x\in\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$K'(x)=-e^x+(2-x)e^x=e^x\left(1-x\right),\ x\in\mathbb{R}.$$

Έχουμε:

$$K'(x)=0\Leftrightarrow x=1$$
$$K'(x)>0\Leftrightarrow x<1$$
$$K'(x)<0\Leftrightarrow x>1$$

Άρα η $K(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty,\ 1\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[1,\ +\infty\right)$. Έχει ολικό μέγιστο στο σημείο $x_1=1$ το $K(1)=e-1>0$.

Θα βρούμε τις εικόνες $K\left((-\infty,1]\right)$, $K\left([1,+\infty)\right)$. Έχουμε:

$$K\left((-\infty,1]\right)=\left(\lim_{x\to-\infty}K(x),\ K(1)\right]=\left(-1,\ e-1\right]$$
$$K\left([1,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to+\infty}K(x),\ K(1)\right]=\left(-\infty,e-1\right]$$

αφού:

$$\lim_{x\to-\infty} K(x) = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[(2-x)e^{x}\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{2-x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-x}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} K(x) = -\infty$$

Επειδή $0\in\left(-1,\ e-1\right]$ και $0\in\left(-\infty, e-1\right]$ η $K(x)$ έχει μία ρίζα ξ_1 στο $(-\infty,1]$ και μία ρίζα ξ_2 στο $[1,+\infty)$, οι οποίες είναι μοναδικές, επειδή η $K(x)$ είναι «1-1» στα διαστήματα αυτά (ως γνησίως μονότονη στα διαστήματα $\left(-\infty,\ 1\right]$ και $\left[1,\ +\infty\right)$ αντίστοιχα). Για να αποδείξουμε όμως ότι τα σημεία $A\left(\xi_1, f(\xi_1)\right)$ και $B\left(\xi_2, f(\xi_2)\right)$ είναι σημεία καμπής της C_f πρέπει να αποδείξουμε ότι η $f''(x)$ (ισοδύναμα η $K(x)$) αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν των $\xi_1,\ \xi_2$. Έχουμε:

$$1 > x > \xi_1 \Rightarrow K(x) > K(\xi_1) \Rightarrow K(x) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$$
$$x < \xi_1 \Rightarrow K(x) < K(\xi_1) \Rightarrow K(x) < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$$
$$x > \xi_2 \Rightarrow K(x) < K(\xi_2) \Rightarrow K(x) < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$$
$$1 < x < \xi_2 \Rightarrow K(x) > K(\xi_2) \Rightarrow K(x) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$$

Επομένως η f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής τα $\xi_1\in\left(-\infty,\ 1\right]$ και $\xi_2\in\left[1,\ +\infty\right)$.

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \ln\left(e^{x}-x\right) - \sigma\upsilon\nu x,\ x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$. Από το θεώρημα του Bolzano έχουμε:

Η $h(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ (ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων).

- $h(0) = -1 < 0$
- $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ (διότι $\frac{\pi}{2} > 0 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) > f\left(0\right) = 0$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\ +\infty)$).

  Άρα $h(0)\cdot h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$.

- Επομένως υπάρχει, τουλάχιστον ένα, $x_0\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(e^{x_0}-x_0\right) - \sigma\upsilon\nu x_0$. Για τη μοναδικότητα του x_0 θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως μονότονη (ή «1-1» με τον ορισμό). Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $h'(x) = f'(x) + \eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$.

Είναι $h'(x) > 0$ για κάθε $x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, διότι είναι $f'(x) > 0$ και $\eta\mu x > 0$ για κάθε $x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$. Άρα το x_0 είναι μοναδικό.

Δ5. Έχουμε:

$$I=\int_0^1\left(e^x-1\right)\frac{f(x)}{e^x-x}dx=\int_0^1\frac{e^x-1}{e^x-x}\cdot f(x)dx=\int_0^1 f'(x)\cdot f(x)dx=\left[f(x)f(x)\right]_0^1-\int_0^1 f(x)\cdot f'(x)dx$$

Επομένως:

$$I=f^2(1)-f^2(0)-I\Leftrightarrow 2I=\ln^2\left(e-1\right)\Leftrightarrow I=\frac{\ln^2\left(e-1\right)}{2}.$$

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ 3

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Θεωρία

Α2. Θεωρία

Α3.

α. Λάθος.

β. Σωστό.

γ. Σωστό.

δ. Σωστό.

ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ 2ο

ΛΥΣΗ

Β1. Για να ορίζεται η f, πρέπει:

$3e^x + 1 > 0$, που αληθεύει για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Άρα, το πεδίο ορισμού της είναι $D_f = \mathbf{R}$

Β2. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow 3e^{x_1} < 3e^{x_2} \Rightarrow 3e^{x_1} + 1 < 3e^{x_2} + 1 \Rightarrow$$

$$\ell n(3e^{x_1} + 1) < \ell n(3e^{x_2} + 1) \Rightarrow \ell n(3e^{x_1} + 1) - 2 < \ell n(3e^{x_2} + 1) - 2 \Rightarrow$$

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα «1-1» οπότε αντιστρέφεται.

<u>**Σχόλιο:**</u>Θα μπορούσαμενα αποδείξουμε εύκολα ότι:

$$f'(x) = \frac{3e^x}{3e^x + 1} > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα «1-1» οπότε αντιστρέφεται.

Β3.Έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow y + 2 = \ell n(3e^x + 1) \Leftrightarrow e^{y+2} = 3e^x + 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x = \frac{e^{y+2}-1}{3}, \frac{e^{y+2}-1}{3} > 0$$ οπότε:

$$x = \ell n\frac{1}{3}(e^{y+2}-1), y > -2.$$

Άρα:

$$f^{-1}(x) = \ln\frac{1}{3}(e^{x+2}-1), x \in (-2, +\infty)$$

B4. Έχουμε:

$$f(x) < f^{-1}(\ln 5 - 2) - 2 \Leftrightarrow \ln(3e^x+1) - 2 < \ln\frac{1}{3}\left(e^{\ln 5}-1\right) - 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(3e^x+1) < \ln\frac{4}{3} \Leftrightarrow 3e^x + 1 < \frac{4}{3} \Leftrightarrow 9e^x + 3 < 4 \Leftrightarrow$$

$$e^x < \frac{1}{9} \Leftrightarrow x < \ln\frac{1}{9} \Leftrightarrow x < -\ln 9$$

Επειδή όμως $x \in (-2, \ +\infty)$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ 3ο

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(-1, +\infty)$.

Γ1. Έχουμε:

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$$ και

$$f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Επειδή $f''(x) > 0$ για κάθε $x > -1$, έπεται ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, +\infty)$.

Επίσης $f'(0)=0$, άρα

για $-1<x<0 \overset{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Longleftrightarrow} f'(x)<f'(0)=0$ και

για $x>0 \overset{f' \text{ γν. αύξ.}}{\Longleftrightarrow} f'(x)>f'(0)=0$.

Επιπλέον $f(0)=0$ και έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	-1		0		$+\infty$
f′(x)		-	0	+	
f(x)		↘	0	↗	

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=0$ το $f(0)=0$.

Γ2. i. Έχουμε:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\left[e^x-\ln(x+1)-1\right]=+\infty$$, αφού

$$\lim_{x\to -1^+}\ln(x+1)\overset{u=x+1}{=}\lim_{u\to 0^+}\ln(u)=-\infty$$ και $$\lim_{x\to -1^+}\left[e^x-1\right]=\frac{1}{e}-1$$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $[0,+\infty)$.

Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει στο πεδίο ορισμού της $(-1,+\infty)$, μοναδική λύση την $x=0$, αφού:

για $x<0 \overset{f \text{ γν. φθί.}}{\Longleftrightarrow} f(x)>f(0)=0$ και για $x > 0 \overset{f \text{ γν. αύξ.}}{\Longleftrightarrow} f(x) > f(0) = 0$.

ii. Αναζητούμε τις ασύμπτωτες της

<u>**Κατακόρυφες**</u>: Επειδή $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \left(e^x - \ln(x+1) - 1\right) = +\infty$, η ευθεία $x = -1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

<u>**Οριζόντιες:**</u> Η C_f **δεν** έχει οριζόντια ασύμπτωση αφού:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(e^x - \ln(x+1) - 1\right) = \lim_{x \to +\infty} e^x \left(1 - \frac{\ln(x+1)}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = (+\infty) \cdot 1 = +\infty$$

, διότι είναι:

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{e^x} = \left(\frac{0}{0} - D, L\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(x+1)e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

<u>**Πλάγιες:**</u> Επειδή:

$$\lambda = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - \ln(x+1) - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x \left(1 - \frac{\ln(x+1)}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} \cdot \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{\ln(x+1)}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = (+\infty) \cdot 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{\ln(x+1)}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = 1 - 0 - 0 = 1$$

η C_f **δεν** έχει πλάγιες ασύμπτωτες

Γ3. Η δοσμένη σχέση γίνεται ισοδύναμα:

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln(2\alpha+\beta) + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln(\alpha+2\beta-1) \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$e^{2\alpha+\beta-1}-\ln((2\alpha+\beta-1)+1)-1+e^{\alpha+2\beta-2}-\ln((\alpha+2\beta-2)+1)-1\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$f(2\alpha+\beta-1)+f(\alpha+2\beta-2)\leq 0 \quad \textbf{(1)}$$

Από την τελευταία σχέση έπεται ότι:

$$f(2\alpha+\beta-1)=f(\alpha+2\beta-2)=0, \quad \textbf{(2)}$$

γιατί αν υποθέσουμε ότι π.χ. $f(2\alpha+\beta-1)\neq 0$ τότε, επειδή $f(x)\geq 0$ για κάθε $x>-1$, θα πρέπει $f(2\alpha+\beta-1)>0$ και η **(1)** μας δίνει:

$f(\alpha+2\beta-2)\leq -f(2\alpha+\beta-1)<0$ δηλαδή $f(\alpha+2\beta-2)<0$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως

$f(2\alpha+\beta-1)=0$

οπότε από την **(1)** και $f(\alpha+2\beta-2)=0$.

Από την **(2)** και από το ερώτημα **iii)** έχουμε ότι:

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta-1=0 \\ \alpha+2\beta-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=1 \end{cases}.$$

Γ4. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^1|f(x)|dx=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(e^x-\ln(x+1)-1\right)dx=\int_0^1 e^x dx-\int_0^1\ln(x+1)dx-\int_0^1 1dx=$$

$$=\left[e^x\right]_0^1-\left[x\ln(x+1)\right]_0^1+\int_0^1\frac{x}{x+1}dx-\left[x\right]_0^1=e-1-\ln 2+I-1=e-2-\ln 2+I$$

$$I=\int_0^1\frac{x}{x+1}dx=\int_0^1\frac{x+1-1}{x+1}dx=\int_0^1 1dx-\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\left[x\right]_0^1-\left[\ln(x+1)\right]_0^1=1-\ln 2$$

Επομένως:

$$\mathrm{E}(\Omega)=e-2-\ln 2+1-\ln 2=e-1-2\ln 2 \ \tau.\mu$$

ΘΕΜΑ 4ο

ΛΥΣΗ

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1+x\ln x}{x\ln x}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x\ln x}+1\Leftrightarrow\ln\left|f(x)\right|=\left[\ln(\ln x)\right]'+\left(x\right)'\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\ln\left|f(x)\right|\right]'=\left[\ln(\ln x)+x\right]'\Leftrightarrow\ln\left|f(x)\right|=\ln(\ln x)+x+c$$

Για $x=e$ έχουμε:

$$\ln\left|f(e)\right|=\ln(\ln e)+e+c\Rightarrow\ln e^{e}=e+c\Rightarrow e=e+c\Rightarrow c=0$$

Επομένως $\ln\left|f(x)\right|=\ln(\ln x)+x$ (1).

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(1,\ +\infty)$ (ως παραγωγίσιμη στο $(1,\ +\infty)$) και δεν έχει ρίζες αφού $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in(1,\ +\infty)$, η συνάρτηση f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(1,\ +\infty)$ και αφού $f(e)=e^{e}>0$ θα είναι $f(x)>0$, για κάθε $x\in(1,\ +\infty)$.

Άρα από την σχέση (1) έχουμε:

$\ln f(x)=\ln(\ln x)+x\Leftrightarrow\ln f(x)=\ln(\ln x)+\ln e^{x}\Leftrightarrow\ln f(x)=\ln\left(e^{x}\cdot\ln x\right)\Leftrightarrow f(x)=e^{x}\cdot\ln x,\ x>1$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι οι συναρτήσεις $g(x)=e^{x},\ h(x)=\ln x$ δεν έχουν κοινό σημείο, δηλαδή ότι η εξίσωση:

$$g(x)=h(x)\Leftrightarrow e^{x}=\ln x\Leftrightarrow e^{x}-\ln x=0 \text{ δεν έχει ρίζα στο } (1,\ +\infty)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $K(x)=e^{x}-\ln x,\ x\geq 1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[1,\ +\infty)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[1,\ +\infty)$) με $K'(x)=e^{x}-\frac{1}{x},\ x\geq 1$. Η συνάρτηση $K'(x)$ είναι επίσης παραγωγίσιμη στο $[1,\ +\infty)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[1,\ +\infty)$)

με $K''(x)=e^{x}+\frac{1}{x^{2}}>0,\ x\geq 1$. Άρα η $K'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,\ +\infty)$. Άρα:

$$x>1\Rightarrow K'(x)>K'(1)=e-1\Rightarrow K'(x)>0,\ x>1$$

Επομένως η συνάρτηση $K(x)$ είναι είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,\ +\infty)$. Άρα:

$$x>1\Rightarrow K(x)>K(1)=e>0\Rightarrow K(x)>0,\ x>1$$

Οπότε η συνάρτηση $K(x)$ δεν έχει ρίζα στο $(1,\ +\infty)$, δηλαδή ισοδύναμα οι συναρτήσεις $g(x)=e^{x},\ h(x)=\ln x$ δεν έχουν κοινό σημείο στο $(1,\ +\infty)$.

Δ2. i) Η συνάρτηση $f(x)=e^{x}\cdot\ln x,\ x>1$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,\ +\infty)$ (ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(1,\ +\infty)$) με:

$$f'(x)=e^{x}\ln x+e^{x}\cdot\frac{1}{x}>0 \text{, για κάθε } x>1$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα $(1,\ +\infty)$. Για το σύνολο τιμών της έχουμε:

$f\left((1,\ +\infty)\right)=\left(\lim\limits_{x\to1^+} f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα $\left(1,\ +\infty\right)$.

Είναι:

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\left(e^x\cdot\ln x\right)=0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x\cdot\ln x\right)=+\infty$$

Αρα $f\left((1,\ +\infty)\right)=\left(0,\ +\infty\right)$

ii)Έχουμε $f(x)=\dfrac{\lambda}{x}\Leftrightarrow xf(x)=\lambda\Leftrightarrow\varphi(x)=\lambda$, $x>1$, όπου $\varphi(x)=xf(x),\ x>1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\left(1,\ +\infty\right)$ (ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(1,\ +\infty\right)$) με:

$\varphi'(x)=f(x)+xf'(x)=e^x\ln x+x\left(e^x\ln x+e^x\cdot\dfrac{1}{x}\right)=e^x\ln x+xe^x\ln x+e^x=e^x\left(\ln x+x\ln x+1\right)>0$, για κάθε $x\in\left(1,\ +\infty\right)$

Άρα η συνάρτηση $\varphi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(1,\ +\infty\right)$ και επομένως το σύνολο τιμών της είναι

$$\varphi\left((1,\ +\infty)\right)=\left(\lim_{x\to1^+}\varphi(x),\ \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)\right)=\left(0,\ +\infty\right), \text{ αφού:}$$

$$\lim_{x\to1^+}\varphi(x)=\lim_{x\to1^+}\left(xf(x)\right)=0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(xf(x)\right)=+\infty$$

Άρα:

- Αν $\lambda\le0$ η εξίσωση $f(x)=\dfrac{\lambda}{x}$ δεν έχει ρίζα στο $\left(1,\ +\infty\right)$
- Αν $\lambda>0$ η εξίσωση $f(x)=\dfrac{\lambda}{x}$ έχει μοναδική ρίζα στο $\left(1,\ +\infty\right)$, αφού είναι «1-1» στο $\left(1,\ +\infty\right)$ (ως γνησίως αύξουσα στο $\left(1,\ +\infty\right)$).

Δ3. Η συνάρτηση $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(1,\ +\infty\right)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(1,\ +\infty\right)$) με:

$$f''(x)=e^x\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}+e^x\cdot\frac{1}{x}-e^x\frac{1}{x^2}=e^x\ln x+2e^x\cdot\frac{1}{x}-e^x\frac{1}{x^2}=$$
$$e^x\left(\ln x+2\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=e^x\left(\frac{x^2\ln x+2x-1}{x^2}\right)>0,\ x>1$$

Αφού για κάθε $x\in\left(1,\ +\infty\right)$ είναι :

$$e^x>0$$
$$x^2>0$$
$$x^2\ln x+2x-1>0\left(x^2\ln x>0,\ 2x-1>0\right)$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(1,\ +\infty)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(e,\ f(e))$ είναι:

$$y-e^e=\left(e^e+e^{e-1}\right)(x-e)\Leftrightarrow y=\left(e^e+e^{e-1}\right)x-e^{e+1}-e^e+e^e\Leftrightarrow y=\left(e^e+e^{e-1}\right)x-e^{e+1}$$

, αφού $f'(e)=e^e+e^{e-1}$

Δ4. i) Αφού η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(1,\ +\infty)$ η γραφική της παράσταση θα βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη (στο σημείο επαφής Α ισχύει η ισότητα). Επομένως θα έχουμε:

$$f(x)\geq\left(e^e+e^{e-1}\right)x-e^{e+1}\Leftrightarrow f(x)\geq e^{e-1}(e+1)x-e^{e+1}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{f(x)}{e^{e-1}}\geq(e+1)x-\frac{e^{e+1}}{e^{e-1}}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{e^{e-1}}\geq(e+1)x-e^2\quad,$$

για κάθε $x>1$

ii) Ολοκληρώνοντας[1] την προηγούμενη ανισοισότητα έχουμε:

$$\int_2^3\frac{f(x)}{e^{e-1}}dx\geq\int_2^3\left[(e+1)x-e^2\right]dx\Leftrightarrow\frac{1}{e^{e-1}}\int_2^3 f(x)dx\geq(e+1)\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3-e^2\left[x\right]_2^3\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{e^{e-1}}\int_2^3 f(x)dx\geq(e+1)\left(\frac{9}{2}-\frac{4}{2}\right)-e^2(3-2)\Leftrightarrow\frac{1}{e^{e-1}}\int_2^3 f(x)dx\geq\frac{5}{2}(e+1)-e^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{e^{e-1}}\int_2^3 f(x)dx\geq\frac{5+5e-2e^2}{2}\Leftrightarrow\int_2^3 f(x)dx\geq e^{e-1}\cdot\frac{5+5e-2e^2}{2}$$

Δ5. Επειδή η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(1,\ +\infty)$ (προηγούμενο ερώτημα) η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,\ +\infty)$. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού στα διαστήματα $\left[x_1,\ \frac{x_1+x_2}{2}\right]$ και $\left[\frac{x_1+x_2}{2},\ x_2\right]$, αντίστοιχα, αφού πληρούνται οι προϋποθέσεις (η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στα $\left[x_1,\ \frac{x_1+x_2}{2}\right]$ και $\left[\frac{x_1+x_2}{2},\ x_2\right]$).

Επομένως υπάρχουν $\xi_1\in\left(x_1,\ \frac{x_1+x_2}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ x_2\right)$ τέτοια, ώστε:

---

[1] Το βήμα αυτό δεν χρειάζεται απόδειξη: Αν f,g συνεχείς στο $[a,\beta]$ με $f(x)\geq g(x), x\in[a,\beta]$, τότε $\int_a^\beta f(x)dx\geq\int_a^\beta g(x)dx$.

Απόδειξη (έχει δοθεί οδηγία να χρησιμοποιείται αναπόδεικτα): $f(x)-g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$,άρα:

$f(x)-g(x)\geq 0\Rightarrow\int_a^\beta\left(f(x)-g(x)\right)dx\geq 0\Leftrightarrow\int_a^\beta f(x)dx-\int_a^\beta g(x)dx\geq 0\Leftrightarrow\int_a^\beta f(x)dx\geq\int_a^\beta g(x)dx$

$$f'(\xi_1) = 2\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f'(\xi_2) = 2\frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1}$$

Από το γεγονός ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα έχουμε:

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow 2\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 2\frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1} \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1) < f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ -4-

ΘΕΜΑ 1^o

Α1.

Απάντηση

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β], όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \lim_{x\to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

Α2.

Απάντηση

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της *f*.

Α3.

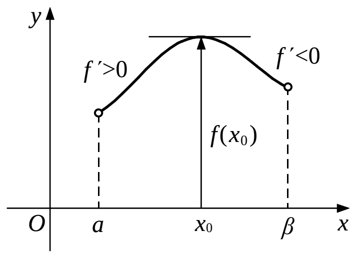
Απάντηση

Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο [α,β], η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Έτσι έχουμε:

$$f(x) \le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ \ x \in (\alpha, x_0]. \qquad (1)$$

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο [α,β], η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (α,β).. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ \ x \in [x_0, \beta). \qquad (2)$$



Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x) \le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ x \in (\alpha, \beta)\ ,$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Α4.

α. Σωστό (αφού η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[a, \beta]$ άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ ή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [a,\ \beta]$.

Επομένως $\int_a^\beta f(x)dx > 0$ ή $\int_a^\beta f(x)dx < 0$).

β. Λάθος (είναι $(B,\ \mathrm{A})$ αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα)

γ. Σωστό.

δ. Σωστό (αφού η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και χωρίς ρίζες θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, επομένως είναι ή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή γνησίως αύξουσα, ή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή γνησίως φθίνουσα).

ε. Σωστό (αν $x_1 \in \mathbb{R}$ θέση τοπικού ακροτάτου, τότε από το θεώρημα του Fermat θα είναι $f'(x_1) = 0$, δηλαδή η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_1, f(x_1))$ είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ -οριζόντια εφαπτομένη).

ΘΕΜΑ 2^o

ΛΥΣΗ

B1. Η f είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$, άρα και στο $x_0 = 0$

f : συνεχής στο $x = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2x+\kappa\eta\mu x}{x-x^2}\right) = \lim_{x\to 0^-}\frac{2+\kappa\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x}}{1-x} = \frac{2+\kappa\cdot 1}{1} = 2+\kappa$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0+}\left(\sqrt{8x^2+x+16}-3x\right) = 4$$

$$f(0) = \lambda$$

Άρα: $\lambda = 4$ και $2+\kappa = 4 \Leftrightarrow \kappa = 2$ και επομένως:

B2. Για $\kappa = 2$ και $\lambda = 4$ έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+2\eta\mu x}{x-x^2}, & x<0 \\ 4, & x=0 \\ \sqrt{8x^2+x+16}-3x, & x>0 \end{cases}$$

οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{8x^2+x+16}-3x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{8x^2+x+16-9x^2}{\sqrt{8x^2+x+16}+3x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{16}{x^2}\right)}{x\left(\sqrt{8+\dfrac{1}{x}+\dfrac{16}{x^2}}+3\right)} = (+\infty)\left(\frac{-1}{\sqrt{8}+3}\right) = -\infty$$

Β3.Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+2\eta\mu x}{x-x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+2\frac{\eta\mu x}{x}}{1-x}=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{1-x}\left(2+2\frac{\eta\mu x}{x}\right)\right]=0,$$

αφού:

$$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{|x|}\leq\frac{1}{|x|}\Leftrightarrow\frac{-1}{|x|}\leq\frac{\eta\mu x}{x}\leq\frac{1}{|x|}$$

και $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|}=0$, οπότε από το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$$

Β4. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=f(x)-2\ln(8x+1),\ x\in[0,1]$$

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ (ως σύνθεση και αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$)

Επίσης:

$$g(0)=f(0)=4>0$$

$$g(1)=f(1)-2\ln 9=2-2\ln 9=2\ln\frac{e}{9}<0$$

Άρα, από το θεώρημα Bolzano, έχουμε ότι η εξίσωση:

$$g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=2\ln(8x+1)$$

έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο $(0,1)$.

ΘΕΜΑ 3^o

ΛΥΣΗ

Γ1. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,+\infty)$) με:

$$g'(x)=2f(x)+2xf'(x)+2xf'(x)+x^2f''(x)-2\ln x-1-2=$$
$$=2f(x)+4xf'(x)+x^2f''(x)-2\ln x-3=0$$

, λόγω της δεδομένης σχέσης. Επομένως η συνάρτηση g είναι σταθερή, δηλαδή $g(x)=c\in\mathbb{R}$, για κάθε x>0.

Γ2. Αφού από το ερώτημα Δ1 η συνάρτηση g είναι σταθερή θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $g(x) = c$.

Για $x = 1 \Rightarrow g(1) = c \Rightarrow 2f(1) + f'(1) - 1 = c \Rightarrow c = 0$.

Επομένως έχουμε διαδοχικά:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2xf(x) + x^2 f'(x) - x(2\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow 2xf(x) + x^2 f'(x) = x(2\ln x + 1) \Leftrightarrow$$
$$2xf(x) + x^2 f'(x) = 2x\ln x + x \Leftrightarrow \left[x^2 f(x)\right]' = \left[x^2 \ln x\right]' \Leftrightarrow x^2 f(x) = x^2 \ln x + c_1 \ (c_1 \in \mathbb{R})$$

Για $x = 1 \Rightarrow f(1) = 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$

Επομένως:

$$x^2 f(x) = x^2 \ln x \Leftrightarrow f(x) = \ln x,\ x > 0$$

Γ3. i). Έστω $A(x_0,\ f(x_0))$ το σημείο επαφής της γραφικής παράστασης C_f της f με την εφαπτομένη της (ε) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \dfrac{1}{x}, x > 0$. Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) στο Α είναι:

$$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$$

Αφού η (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων $0(0,0)$ έχουμε:

$$0 - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(0 - x_0) \Leftrightarrow -\ln x_0 = -1 \Leftrightarrow \ln x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 = e$$

Επομένως η ζητούμενη εξισωση είναι:

$$y - f(e) = f'(e)(x - e) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) \Leftrightarrow y = \frac{1}{e}x$$

ii) Έχουμε:

$$y(t) = (fof)(x(t)) = f\left(f(x(t))\right) = \ln\left(\ln(x(t))\right),\ t > 0,\ x(t) > 1$$

Η συνάρτηση $y(t)$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $t > 0$ (ως συνθέσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων για $t > 0$) με:

$$y'(t) = \frac{1}{\ln(x(t)} \cdot \left(\ln(x(t))\right)' = \frac{1}{\ln(x(t)} \cdot \frac{1}{x(t)} \cdot x'(t),\ t > 0$$

Τη χρονική στιγμή $t = t_0$ sec είναι:

$$t = t_0 \Rightarrow y'(t_0) = \frac{1}{\ln(x(t_o)} \cdot \frac{1}{x(t_0)} \cdot x'(t_0) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2\ln 2}\ cm/\text{sec}$$

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x) = \ln\left(|f(x)|\right),\ x \in \left(0,\ \dfrac{1}{e}\right]$. Η $K(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\ \dfrac{1}{e}\right]$ (ως συνθέσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(0,\ \dfrac{1}{e}\right]$) με $K'(x) = \dfrac{1}{x\ln x},\ \text{x} \in \left(0,\ \dfrac{1}{e}\right]$. Η $K'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\ \dfrac{1}{e}\right]$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συνατήσεων στο $\left(0,\ \dfrac{1}{e}\right]$) με

$K''(x) = \dfrac{-(1+\ln x)}{x^2 \ln^2 x} > 0$, για κάθε $\left(0,\ \dfrac{1}{e}\right)$

(είναι $x < \dfrac{1}{e} \Leftrightarrow \ln x < \ln\dfrac{1}{e} \Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow \ln x + 1 < 0$).

Άρα η $K'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0,\ \dfrac{1}{e}\right]$, δηλαδή η K είναι κυρτή στο $\left(0,\ \dfrac{1}{e}\right]$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στα διαστήματα $\left[a,\ \dfrac{a+\beta}{2}\right]$ και $\left[\dfrac{a+\beta}{2},\ \beta\right]$ αντίστοιχα αφού:

Η συνάρτηση $K(x)$ είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $\left[a,\ \dfrac{a+\beta}{2}\right]$ και $\left[\dfrac{a+\beta}{2},\ \beta\right]$ (άρα και συνεχής σε αυτά). Επομένως, υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 \in \left(a,\ \dfrac{a+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\dfrac{a+\beta}{2},\ \beta\right)$ τέτοια, ώστε:

$$K'(\xi_1) = 2\frac{K\left(\frac{a+\beta}{2}\right) - K(a)}{\beta-\alpha} \quad \text{και} \quad K'(\xi_2) = 2\frac{K(\beta) - K\left(\frac{a+\beta}{2}\right)}{\beta-\alpha}.$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow K'(\xi_1) < K'(\xi_2) \Rightarrow 2\frac{K\left(\frac{a+\beta}{2}\right) - K(a)}{\beta-\alpha} < 2\frac{K(\beta) - K\left(\frac{a+\beta}{2}\right)}{\beta-\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K\left(\frac{a+\beta}{2}\right) - K(a) < K(\beta) - K\left(\frac{a+\beta}{2}\right) \Rightarrow 2K\left(\frac{a+\beta}{2}\right) < K(a) + K(\beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\ln\left(\left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right|\right) < \ln|f(a)| + \ln|f(\beta)| \Rightarrow \ln\left(\left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right|\right)^2 < \ln\left(|f(a)|\cdot|f(\beta)|\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right|\right)^2 < |f(a)|\cdot|f(\beta)| \Rightarrow \left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right| < \sqrt{|f(a)|\cdot|f(\beta)|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right| < \sqrt{f(a)\cdot f(\beta)}$$

$(\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ f(a) < 0,\ f(\beta) < 0,\ \delta\iota\acute{o}\tau\iota\ \alpha,\beta \in \left(0,\ \frac{1}{e}\right))$

ΘΕΜΑ 4ο

ΛΥΣΗ

Δ1.

i) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με:

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή είναι «1-1» οπότε η f αντιστρέφεται.

ii) Έχουμε διαδοχικά:

$$e^{5x}+e^{3x+2}+e^{x+4}\ge e^5\cdot x\left(x^4+x^2+1\right)\Leftrightarrow \frac{e^{5x}+e^{3x+2}+e^{x+4}}{e^5}\ge x^5+x^3+x\Leftrightarrow$$
$$e^{5(x-1)}+e^{3(x-1)}+e^{x-1}\ge x^5+x^3+x\Leftrightarrow f(e^{x-1})\ge f(x)\Leftrightarrow e^{x-1}\ge x$$

Η τελευταία σχέση αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αφού:

- Για $x>0$ γίνεται $x-1\ge \ln x$ (αληθής με χρήση της εφαρμογής 2,ii) στη σελίδα 266 του σχολικού βιβλίου).
- Για $x\le 0$, είναι προφανής, αφού $e^{x-1}>0$.

Επομένως, οι λύσεις της δοθείσας ανίσωσης είναι όλα τα $x\in\mathbb{R}$.

<u>Σημείωση:</u> Μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=e^{x-1}-x,\ x\in\mathbb{R}$ και να μελετήσουμε την μονοτονία και τα ακρότατά της, οπότε αποδυκνείουμε ότι $g(x)\ge 0\Leftrightarrow e^{x-1}\ge x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως, οι λύσεις της δοθείσας ανίσωσης είναι όλα τα $x\in\mathbb{R}$.

Δ2.

i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x)=f(x)-1,\ x\in[0,1]$.

- Η συνάρτηση $K(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ (ως πολυωνυμική).
- $\begin{matrix} K(0)=f(0)-1=-1<0 \\ K(1)=f(1)-1=2>0 \end{matrix}$, άρα $K(0)\cdot K(1)<0$

Επομένως, από το Θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(0,1)$, τέτοιο, ώστε $K(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=1$. Επειδή η f είναι συνάρτηση «1-1» το x_0 είναι μοναδικό.

ii) Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=2x^6+3x^4+6x^2-12x,x\in\mathbb{R}$ και έτσι θέλουμε ισοδύναμα να λύσουμε την ανίσωση:

$$2x^6+3x^4+6x^2-12x\ge 2x_0{}^6+3x_0{}^4+6x_0{}^2-12x_0\Leftrightarrow h(x)\ge h(x_0)\ \text{(I)}$$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με:

$$h'(x)=12x^5+12x^3+12x-1=12\left[\left(x^5+x^3+x\right)-1\right]=12(f(x)-1),\ x\in\mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$h'(x)=0\Leftrightarrow 12(f(x)-1)=0\Leftrightarrow f(x)=1\Leftrightarrow x=x_0\in(0,1)$$
$$x>x_0\Leftrightarrow f(x)>f(x_0)\Leftrightarrow f(x)>1\Leftrightarrow f(x)-1>0\Leftrightarrow h'(x)>0$$
$$0<x<x_0\Leftrightarrow f(x)<f(x_0)\Leftrightarrow f(x)<1\Leftrightarrow f(x)-1<0\Leftrightarrow h'(x)<0$$

Επομένως η συνάρτηση h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=x_0$ και άρα είναι $h(x)\ge h(x_0)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως, το σύνολο λύσεων της ανίσωσης είναι το $\mathbb{R}$.

<u>2ος τρόπος (Δ2 ii)</u>

Έχουμε ισοδύναμα:

$$2x^6+3x^4+6x^2-12x\ge 2x_0{}^6+3x_0{}^4+6x_0{}^2-12x_0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-x\ge \frac{x_0{}^6}{6}+\frac{x_0{}^4}{4}+\frac{x_0{}^2}{2}-x_0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x)=\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2},\ x\in\mathbb{R}$, η οποία είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, αφού η F είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με:

$$F'(x)=x^5+x^3+x=f(x),\ x\in\mathbb{R}$$
$$F''(x)=f'(x)>0,\ x\in\mathbb{R}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_F της F στο σημείο της $A\left(x_0,F(x_0)\right)$ είναι:

$$y-F(x_0)=F'(x_0)\left(x-x_0\right)\Rightarrow y=F(x_0)+F'(x_0)\left(x-x_0\right)\Rightarrow$$
$$y=F(x_0)+f(x_0)\left(x-x_0\right)\Rightarrow y=F(x_0)+\left(x-x_0\right)$$

Αφού η F είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, έχουμε διαδοχικά:

$$F(x)\ge y\Leftrightarrow F(x)\ge F(x_0)+\left(x-x_0\right)\Leftrightarrow F(x)-x\ge F(x_0)-x_0\Leftrightarrow\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-x>\frac{x_0{}^6}{6}+\frac{x_0{}^4}{4}+\frac{x_0{}^2}{2}-x_0,\ x\in\mathbb{R}$$

Επομένως, το σύνολο λύσεων της ανίσωσης (I) είναι το $\mathbb{R}$

Δ3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\xi_1+1,\ \xi_2+1\right]$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έχουμε:

$$\xi_1+1\le t\le\xi_2+1\Rightarrow f\left(\xi_1+1\right)\le f(t)\le f\left(\xi_2+1\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1}f\left(\xi_1+1\right)dt\le\int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1}f(t)dt\le\int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1}f\left(\xi_2+1\right)dt\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f\left(\xi_1+1\right)\left(\xi_2-\xi_1\right)\le\int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1}f(t)dt\le f\left(\xi_2+1\right)\left(\xi_2-\xi_1\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f\left(\xi_1+1\right)\le\frac{\int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1}f(t)dt}{\xi_2-\xi_1}\le f\left(\xi_2+1\right)\ (II)$$

Τώρα έχουμε:

$$0<\xi_1<\xi_2<1\Rightarrow 1<\xi_1+1<\xi_2+1<2\Rightarrow f(1)<f\left(\xi_1+1\right)<f\left(\xi_2+1\right)<f(2)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3<f\left(\xi_1+1\right)<f\left(\xi_2+1\right)<42\ (III)$$

Επομένως, από τη σχέση (II),λόγω της σχέσης (III) προκύπτει ότι:

$$3\le\frac{\int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1}f(t)dt}{\xi_2-\xi_1}\le 42$$

Δ4.

i) Ισχύει ότι $e^{x-1}\ge x,\ x\in\mathbb{R}$ (ερώτημα Δ1,ii). Αν θέσουμε όπου x το x^2+1 έχουμε $e^{x^2}\ge x^2+1\Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\ge 0$ (IV), για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Η συνάρτηση $\varphi(x)=e^{x^2}-x^2-1$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,1\right]$(ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων στο $\left[0,1\right]$) και επίσης δεν είναι παντού μηδέν στο $\left[0,1\right]$.

Ολοκληρώνοντας την σχέση (IV) έχουμε διαδοχικά:

$$\int_0^1\left(e^{x^2}-x^2-1\right)dx>0\Rightarrow\int_0^1 e^{x^2}dx-\int_0^1 x^2dx-\int_0^1 1dx\Rightarrow\int_0^1 e^{x^2}dx>\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[x\right]_0^1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_0^1 e^{x^2}dx>\frac{1}{3}+1\Rightarrow\int_0^1 e^{x^2}dx>\frac{4}{3}\Rightarrow 3\int_0^1 e^{x^2}dx>4$$

ii) Θέτουμε $f^{-1}(x)=u$ και έχουμε:

$$f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)$$
$$dx=f'(u)du$$
$$x=0\Leftrightarrow f(u)=0\Leftrightarrow u=0$$
$$x=1\Leftrightarrow f(u)=1\Leftrightarrow u=x_0$$
$$u\in\left[0,x_0\right]\subseteq\left[0,1\right]\Rightarrow u\geq 0$$

Επομένως, το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι:

$$\int_0^1\left|f^{-1}(x)\right|dx=\int_0^{x_0}|u|f'(u)du=\int_0^{x_0}uf'(u)du=\int_0^{x_0}u\left(5u^4+3u^2+1\right)du=\int_0^{x_0}\left(5u^5+3u^3+u\right)du=$$
$$=\left[\frac{5u^6}{6}+\frac{3u^4}{4}+\frac{u^2}{2}\right]_0^{x_0}=\frac{5{x_0}^6}{6}+\frac{3{x_0}^4}{4}+\frac{{x_0}^2}{2}$$

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ 5

ΘΕΜΑ 1^o

Α1.

Απάντηση

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α, την ευθεία ε που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι:

$$y-f(x_0)=\lambda(x-x_0)\ ,\ \lambda=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Α2.

Απάντηση

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

● έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α **και**

● για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(x)=g(x)$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f=g$.

Α3.

Απόδειξη

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^\nu-x_0^\nu}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1},$$

Οπότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1},$$

Δηλαδή: $(x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}$

Α4.

α. Σωστό (πρόταση του σχολικού βιβλίου)

β. Σωστό (η παράγωγος της f είναι **παντού** 0 αφού η f είναι σταθερή συνάρτηση, ως ορισμένο ολοκλήρωμα).

γ. Λάθος (όχι σε ένα τουλάχιστον σημείο αλλά σε ένα **το πολύ** σημείο).

δ. Λάθος (δεν ισχύει **υποχρεωτικά**, αφού π.χ. η συνάρτηση $f(x)=x^3,\ x\in\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ενώ $f'(x)=3x^2\geq 0$, δηλαδή μπορεί και να μηδενίζεται σε κάποια σημεία).

ε. Σωστό[2] (Αν έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y=a$ θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a\in\mathbb{R}$. Τότε όμως, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ οπότε ασύμπτωτη είναι πάλι η $y=a$).

ΘΕΜΑ 2ο

ΛΥΣΗ

Β1. Η σχέση

$$(fof)(x)+2f(x)=2x+1$$

ισχύει για κάθε $x\in\mathbf{R}$, οπότε για $x=2$ έχουμε:

$$f(f(2))+2f(2)=2\cdot 2+1 \Leftrightarrow f(5)+10=5 \Leftrightarrow f(5)=-5$$

Β2. Έστω $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε έχουμε διαδοχικά:

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f(f(x_1))=f(f(x_2))$ (επειδή η f είναι συνάρτηση) και

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2f(x_1)=2f(x_2)$$

άρα:

$$f(f(x_1))+2f(x_1)=f(f(x_2))+2f(x_2)\Rightarrow 2x_1+1=2x_2+1\Rightarrow x_1=x_2$$

οπότε η f είναι $1-1$, και άρα αντιστρέφεται.

Β3. Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(2)$ και έχουμε:

$$f(f(f^{-1}(2)))+2f(f^{-1}(2))=2f^{-1}(2)+1\Rightarrow f(2)+4=2f^{-1}(2)+1\Rightarrow$$

$$5+4-1=2f^{-1}(2)\Rightarrow f^{-1}(2)=4.$$

---

2 Εδώ προφανώς εννοεί «πλάγια ασύμπτωση» ευθεία της μορφής $y=ax+\beta$ με $\alpha\neq 0$, όπως ορίζεται στο σχολικό βιβλίο.

Β4. Έχουμε:

$$f(f^{-1}(2x^2+7x)-1)=2 \Leftrightarrow f^{-1}(2x^2+7x)-1=f^{-1}(2) \Leftrightarrow$$

$$f^{-1}(2x^2+7x)=5 \Leftrightarrow 2x^2+7x=f(5) \Leftrightarrow 2x^2+7x+5=0 \Leftrightarrow$$

$x_1=-1$ ή $x_2=-\dfrac{5}{2}$.

<u>**Παρατήρηση:**</u> Κανονικά σε τέτοιου είδους ασκήσεις θα πρέπει εξ΄αρχής να βρούμε το πεδίο ορισμού της f^{-1}, δηλαδή το σύνολο τιμών της f για να δούμε για ποια x ορίζεται η εξίσωση., Αυτό δεν είναι πάντα εφικτό. Στην προκειμένη περίπτωση είναι $D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 3ο

ΛΥΣΗ

Γ1. Έχουμε:

$$f(x)-1\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq 1 \Leftrightarrow f(x)\geq f(0), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο (ολικό ελάχιστο) στο σημείο $x_1=0$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$.

Επιπλέον, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2x+\alpha-1,\ x\in\mathbb{R}$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat, θα είναι:

$$f'(0)=0 \Leftrightarrow \alpha-1=0 \Leftrightarrow \alpha=1$$

<u>**Παρατήρηση:**</u> Θα πρέπει να επαληθεύσουμε την ευρεθείσα τιμή, αφού το αντίστροφο του Θεώρηματος του Fermat **δεν ισχύει**. Έχουμε:

Για $\alpha=1$ η συνάρτηση f γίνεται:

$$f(x)=x(x+1)-x+1=x^2+x-x+1=x^2+1,\ x\in\mathbb{R}$$

Παρατηρούμε ότι $f(x)=x^2+1\geq 1=f(0)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως η τιμή α=1 είναι δεκτή.

Γ2. Για κάθε $x\in(1,\ +\infty)$ έχουμε διαδοχικά:

$$g'(x)\ln x=\frac{2g(x)}{x} \Rightarrow g'(x)\ln x-\frac{2g(x)}{x}=0 \Rightarrow g'(x)\ln^2 x-2\ln x\cdot\frac{1}{x}g(x)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x)\ln^2 x-\left(\ln^2 x\right)'g(x)=0 \Rightarrow \frac{g'(x)\ln^2 x-\left(\ln^2 x\right)'g(x)}{\ln^4 x}=0 \Rightarrow \left(\frac{g(x)}{\ln^2 x}\right)'=0$$

Επομένως, υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

$$\frac{g(x)}{\ln^2 x}=c,\ x\in(1,\ +\infty).$$

Για $x=e$ είναι:

$$x = e \Rightarrow \frac{g(e)}{\ln^2 e} = c \Rightarrow c = -1$$

Επομένως:

$$\frac{g(x)}{\ln^2 x} = -1 \Leftrightarrow g(x) = -\ln^2 x,\ x \in (1,\ +\infty)$$

Γ3. i) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$K(x) = f(x) - g(x) = x^2 + 1 + \ln^2 x,\ x \in (0,\ +\infty),$$

η οποία είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.

Θα βρούμε το ελάχιστο της $K(x)$.

Η συνάρτηση $K(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ (ώς άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,\ +\infty)$) με:

$$K'(x) = 2x + 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = 2\frac{x^2 + \ln x}{x},\ x > 0$$

Θεωρούμε, επίσης, τη συνάρτηση $\Phi(x) = x^2 + \ln x,\ x > 0$ η οποία είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$. (Οι ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης $K(x)$ είναι όμοια με τις ρίζες και το πρόσημο αντίστοιχα της συνάρτησης $\Phi(x)$).

Η συνάρτηση $\Phi(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ (ώς άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,\ +\infty)$) με $\Phi'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$, για κάθε $x \in (0,\ +\infty)$. Άρα η συνάρτηση $\Phi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\ +\infty)$, άρα και στο διάστημα $(0,1)$, οπότε:

$$\Phi((0,1)) = \left(\lim_{x\to 0^+}\Phi(x),\ \lim_{x\to 1^-}\Phi(x)\right) = (-\infty, 1),\ \text{ αφού}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\Phi(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x^2 + \ln x\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\Phi(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(x^2 + \ln x\right) = 1$$

Επειδή $0 \in (-\infty, 1) = \Phi((0,1))$ υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$\Phi(x_0) = 0 \Leftrightarrow K'(x_0) = 0.$$

Έχουμε:

$$x > x_0 \Rightarrow \Phi(x) > \Phi(x_0) \Rightarrow \Phi(x) > 0 \Leftrightarrow K'(x) > 0$$

$$0 < x < x_0 \Rightarrow \Phi(x) < \Phi(x_0) \Rightarrow \Phi(x) < 0 \Leftrightarrow K'(x) < 0$$

Άρα η συνάρτηση K(x) είναι:

- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,\ x_0]$ (στο x_0 είναι συνεχής) και
- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[x_0,\ +\infty)$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης K φαίνονται στον επόμενο πίνακα μεταβολών.

x	0	x_0	$+\infty$
K΄(x)	-		+
K(x)	↓		↑

Ολ. Ελ

Επομένως, η συνάρτηση $K(x)=f(x)-g(x)$ παρουσιάζει **ένα μόνο** ελάχιστο (ολικό) στο $x_0\in(0,1)$.

ii) Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,\ +\infty)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=g'(\xi)$.

Η συνάρτηση $K(x)=f(x)-g(x)$ έχει ακρότατο στο $x_0\in(0,\ 1)$ και είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ (ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,1)$) με:

$$K'(x)=f'(x)-g'(x),\,x\in(0,1).$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, θα είναι:

$$K'(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)-g'(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)=g'(x_0)$$

Το $x_0=\xi$ είναι μοναδικό, ως μοναδική ρίζα της συνάρτησης Φ του ερωτήματος (Γ3i) (αφού η Φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$), άρα και μοναδική ρίζα της συνάρτησης K').

Γ4. i) Έχουμε διαδοχικά:

$$I=\lim_{x\to1^+}\left[\frac{(x-1)^x}{\eta\mu(x-1)+\dfrac{g(x)}{f(x)}}\right]=\lim_{x\to1^+}\left[\frac{(x-1)^x}{\eta\mu(x-1)-\dfrac{\ln^2 x}{x^2+1}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to1^+}\left[\frac{\dfrac{(x-1)^x}{x-1}}{\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}-\dfrac{\ln^2 x}{(x-1)(x^2+1)}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to1^+}\left[\frac{(x-1)^{x-1}}{\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}-\dfrac{\ln^2 x}{(x-1)(x^2+1)}}\right]$$

Θα βρούμε ξεχωριστά τα παραπάνω όρια.

Με χρήση του κανόνα του de l’ Hospital για τα παραπάνω όρια έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+}\left(x-1\right)^{x-1}=\lim_{x\to 1^+}e^{(x-1)\ln(x-1)}=\lim_{u\to u_0}e^u,\ \acute{o}\pi o\upsilon\ u=(x-1)\ln(x-1)$$

$$u_0=\lim_{x\to 1^+}(x-1)\ln(x-1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x-1)}{\dfrac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\dfrac{1}{x-1}}{-\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}}=-\lim_{x\to 1^+}\left(x-1\right)=0$$

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)^{x-1}=\lim_{u\to u_0}e^u=e^0=1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\eta\mu\left(x-1\right)}{x-1}=\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1\ (\acute{o}\pi o\upsilon\ u=x-1,\ \acute{o}\tau\alpha\nu\ x\to 1\Leftrightarrow u\to 0)$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln^2 x}{(x-1)(x^2+1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln^2 x}{x^3-x^2+x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2\frac{1}{x}\ln x}{3x^2-2x+1}=0$$

Επομένως:

$$I=\frac{\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)^{x-1}}{\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\eta\mu\left(x-1\right)}{x-1}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2 x}{(x-1)(x^2+1)}}=\frac{1}{1-0}=1$$

ii) Το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου Ω είναι:

$$\mathrm{E}\left(\Omega\right)=\int_1^e\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_1^e\left|K(x)\right|dx=\int_1^e K(x)dx=\int_1^e\left(x^2+1+\ln^2 x\right)dx=$$

$$=\int_1^e x^2dx+\int_1^e 1dx+\int_1^e\ln^2 xdx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e+\left[x\right]_1^e+J=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}+e-1+J=\frac{e^3+3e-4}{3}+J\ \ (V)$$

, όπου $J=\int_1^e\ln^2 xdx$. Τώρα για το J έχουμε:

$$J=\int_1^e\ln^2 xdx=\int_1^e\left(x\right)'\cdot\ln^2 xdx=\left[x\ln^2 x\right]_1^e-\int_1^e x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=e-2\int_1^e\ln xdx=$$

$$=e-2\int_1^e(x)'\cdot\ln xdx=e-2\left[x\ln x\right]_1^e+2\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=e-2e+2\int_1^e 1dx=-e+2\left[x\right]_1^e=-e+2e-2=e-2$$

Επομένως, από τη σχέση (V), έχουμε τελικά:

$$\mathrm{E}\left(\Omega\right)=\frac{e^3+3e-4}{3}+J=\frac{e^3+3e-4}{3}+e-2=\frac{e^3+3e-4+3e-6}{3}=\frac{e^3+6e-10}{3}$$

, δηλαδή $\mathrm{E}\left(\Omega\right)=\dfrac{e^3+6e-10}{3}$ τ.μ

ΘΕΜΑ 4ο

ΛΥΣΗ

Δ1. Αφού η f' είναι συνεχής και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, δηλαδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, αντίστοιχα.

Από την σχέση $f(x)+f(1-x)=0$, για $x=\frac{1}{2}$ έχουμε:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(1-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 2f\left(\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

Άρα ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι η $x=\frac{1}{2}$, η οποία είναι μοναδική διότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη άρα και «1-1».

Δ2. Για τη συνάρτηση f ισχύουν:

- είναι συνεχής στο $[0,1]$ και
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$

Άρα, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, στο διάστημα $[0,1]$ προκύπτει ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_0)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0} \Leftrightarrow f'(x_0)=f(1)-f(0) \Leftrightarrow f'(x_0)=f(1)+f(1) \Leftrightarrow f'(x_0)=2f(1)$$

(γιατί για $x=1$ από την σχέση $f(x)+f(1-x)=0$ έχουμε $f(1)+f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)=-f(1)$).

<u>2^{ος} τρόπος:</u> Αποδεικνύεται και με την εφαρμογή του θεωρήματος του Rolle για την συνάρτηση $K(x)=f(x)-2f(1)x,\ x\in[0,\ 1]$, αφού στο διάστημα $[0,1]$ πληρούνται οι προϋποθέσεις του.

Δ3. Για το σημείο $A(x_1,\ g(x_1))$ στο οποίο η g τέμνει τον άξονα $x'x$ έχουμε:

$$g(x_1)=\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=0 \Leftrightarrow f(x_1)=0 \Leftrightarrow f(x_1)=f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x_1=\frac{1}{2},$$

αφού η f είναι συνάρτηση «1-1».

Άρα $A\left(\frac{1}{2},\ g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

Για να αποδείξουμε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g, στο σημείο $A\left(\frac{1}{2},\ g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^0 πρέπει να αποδείξουμε ότι η g είναι παραγωγίσιμη[3] στο $x_0=\frac{1}{2}$ με $g'\left(\frac{1}{2}\right)=1$. Έχουμε:

[3] Η παραγώγιση της συνάρτησης g γενικά από τον τύπο της δεν είναι δυνατή, αφού αυτό απαιτεί η f να είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, το οποίο όμως δεν είναι δεδομένο αλλά ούτε προκύπτει ως συνέπεια των δεδομένων.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{g(x)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\frac{f(x)}{f'(x)}-0}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{f'(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{f'(x)}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}\right]=$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{f'(x)}\cdot\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=\frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot f'\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

Αφού:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}\left(f'\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \frac{1}{2}\right)\ \text{ και }\ f'\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}},$$

δηλαδή $g'\left(\frac{1}{2}\right)=1$.

Επομένως, $g'\left(\frac{1}{2}\right)=1\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=1\Leftrightarrow \omega=45^0$.

Δ4 i) Έχουμε ότι:

$$f(x)+f(1-x)=0\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f(1-x)dx=0\Rightarrow I_1+I_2=0\ (1),$$

$$\text{όπου } I_1=\int_0^1 f(x)dx \text{ και } I_2=\int_0^1 f(1-x)dx.$$

Για το ολοκλήρωμα I_2:

Θέτουμε:

$$\begin{aligned}&1-x=u\Leftrightarrow x=1-u\\&dx=-du\\&x=1\Leftrightarrow u=0\\&x=0\Leftrightarrow u=1\end{aligned}\qquad \text{, οπότε έχουμε:}$$

$$I_2=\int_0^1 f(1-x)dx=-\int_1^0 f(u)du=\int_0^1 f(u)du=\int_0^1 f(x)dx=I_1$$

Επομένως , από τη σχέση (1), έχουμε:

$$I_1+I_2=0\Leftrightarrow 2I_1=0\Leftrightarrow I_1=0\Leftrightarrow I_1=0\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx=0$$

ii) Είναι:

$$\int_0^1 f'(x)dx=f(1)-f(0)=1\ (I)$$

από την σχέση $f(x)+f(1-x)=0$, για $x=1$ έχουμε $f(0)+f(1)=0\ (II)$

Από τις σχέσεις (Ι) και (ΙΙ), προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε

$$f(0)=-\frac{1}{2}\ \kappa\alpha\iota\ f(1)=\frac{1}{2}\ .$$

Το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου Ω είναι $\mathrm{E}(\Omega)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left|f^{-1}(x)\right|dx$.

Θέτουμε:

$$f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$$
$$dx = f'(u)du$$
$$x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u) = f(0) \Leftrightarrow u = 0 \quad \text{(αφού η } f \text{ είναι «1-1»)}$$
$$x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u) = f(1) \Leftrightarrow u = 1$$

Επομένως, έχουμε διαδοχικά:

$$\mathrm{E}(\Omega) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| f^{-1}(x) \right| dx = \int_0^1 |u| \cdot f'(u)du = \int_0^1 u f'(u)du = \left[uf(u) \right]_0^1 - \int_0^1 f(u)du = f(1) - 0 = \frac{1}{2}$$

, δηλαδή $\mathrm{E}(\Omega) = \dfrac{1}{2}$ τ.μ.

Δ5. i) Θέτουμε ξανά:

$$f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$$
$$dx = f'(u)du$$
$$x = 0 \Leftrightarrow u = f^{-1}(0) \Leftrightarrow u = \frac{1}{2} \quad (\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 0)$$
$$x = f(\lambda) \Leftrightarrow u = f^{-1}\big(f(\lambda)\big) \Leftrightarrow u = \lambda$$

και έχουμε:

$$K(\lambda) = \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)dx + \int_0^{f(\lambda)} f^{-1}(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} uf'(u)du =$$
$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)dx + \left[uf(u) \right]_{\frac{1}{2}}^{\lambda} - \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(u)du =$$
$$= \lambda f(\lambda) - \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda f(\lambda) - \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda f(\lambda)$$

ii) Με επαναλαμβανόμενη χρήση του κανόνα του de l' Hospital έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\mathrm{K}(\lambda) \cdot \ln \lambda}{f(\lambda) \cdot e^{\lambda}} = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda f(\lambda) \cdot \ln \lambda}{f(\lambda) \cdot e^{\lambda}} = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda \cdot \ln \lambda}{e^{\lambda}} = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1 + \ln \lambda}{e^{\lambda}} = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\frac{1}{\lambda}}{e^{\lambda}} = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda}} = 0$$

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2016

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Απάντηση

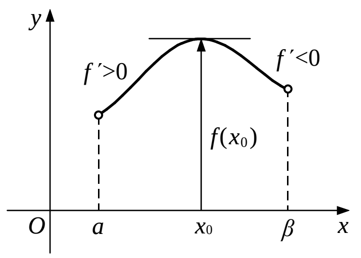
Α1. Θεωρία, στη σελίδα 262 του σχολικού βιβλίου.

Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο [α,β], η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Έτσι έχουμε:

$$f(x) \le f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0]. \quad (1)$$

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο[α,β], η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (α,β). Έτσι έχουμε:

$$f(x) \le f(x_0), \text{ για κάθε } x \in [x_0, \beta). \quad (2)$$



Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x) \le f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta),$$

που σημαίνει ότι το x0 είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Απάντηση

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

● έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α **και**

● για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$.

Α3.

Απάντηση

Διατύπωση:

Αν μια συνάρτηση f είναι:

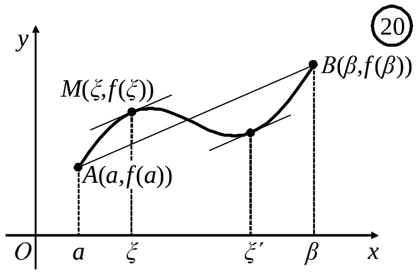
- συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Γεωμετρική ερμηνεία:

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Μ να είναι παράλληλη της ευθείας AB.



Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

Απαντήσεις

α) Λάθος (διότι είναι $\int_a^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$)

β) Σωστό (πρόταση στη σελίδα 166 του σχολικού βιβλίου).

γ) Λάθος. (Η αντίστοιχη πρόταση δεν ισχύει γενικά σε ένωση διαστημάτων)

δ) Σωστό (γνωστή πρόταση –σχόλιο στο σχολικό βιβλίο).

ε) Σωστό (θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής, σχολικό βιβλίο).

ΘΕΜΑ 2^o

ΛΥΣΗ

Β1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πηλίκου παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot \left(x^2+1\right) - x^2 \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}, x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\left(x^2+1\right)^2 > 0$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0, η συνάρτηση f θα είναι:

- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,+\infty\right)$.
- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,0\right]$.
- Έχει ακρότατο (ολικό ελάχιστο) στο 0 , το $f(0)=0$.

Ο πίνακας μεταβολών (μονοτονίας-ακροτάτων) της συνάρτησης f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$\downarrow$	$\uparrow$

Ολ. ελάχιστο

B2. Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πηλίκου και σύνθεσης παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f''(x)=\frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3},\ x\in\mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3}=0\Leftrightarrow 1-3x^2=0\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\left(x^2+1\right)^3>0$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι:

- Κοίλη στα διαστήματα $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\ +\infty\right)$.
- Κυρτή στο διάστημα $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

Έχει σημεία καμπής τα $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$ και $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$.

Ο πίνακας μεταβολών (Κυρτότητας και Σημείων Καμπής) της f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ $+\infty$
$f''(x)$	-	+	-
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

B3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε **δεν** έχει **κατακόρυφη** ασύμπτωτη ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$).

Πλάγιες-οριζόντιες: $y = \lambda x + \beta \ (\lambda, \beta \in \mathbb{R})$ με:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^3+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - \lambda x \right] = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

Επομένως η C_f **έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο** $+\infty$ την $y = 1$.

Ακόμα:

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^3+x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\beta = \lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - \lambda x \right] = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

Επομένως η C_f **έχει οριζοντια ασύμπτωτη στο** $-\infty$ την $y = 1$.

Παρατηρήσεις:

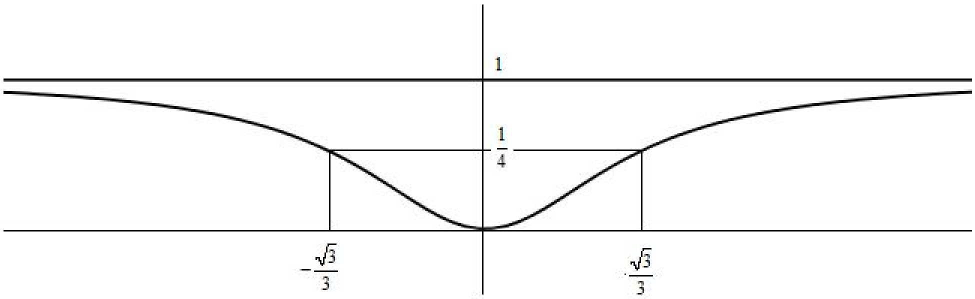
1. Μπορούμε να παρατηρήσουμε (και να αποδείξουμε) ότι η συνάρτηση f είναι άρτια ($f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$) και άρα θα έχει την ίδια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$**,** αποφεύγοντας έτσι να ξαναβρούμε τα παραπάνω όρια στο $-\infty$.

2. Μπορούμε, επίσης, να βρούμε την οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$ **και να δικαολογήσουμε** ότι μια συνάρτηση f δεν μπορεί να έχει ταυτόχρονα και πλάγια και οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$ αντίστοιχα (άρα δεν θα έχει πλάγια ασύμπτωτη).

B4. Συνοπτικά ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\qquad +\infty$
$f''(x)$	-	+	+	-
f'	-	-	+	+
$f(x)$	$\downarrow \cap$	$\downarrow \cup$	$\uparrow \cup$	$\uparrow \cap$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f (αφού λάβουμε και υπόψη μας ότι είναι άρτια και θετική) είναι η επόμενη:



Σημείωση: Για την σωστή παρουσίαση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε, ότι αυτή είναι άρτια και θετική ($f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο στο $x = 0$, δηλαδή να διέρχεται από το O(0,0)).

ΘΕΜΑ 3ο

ΛΥΣΗ

Γ1. Η εξίσωση $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$ έχει προφανή ρίζα το $x_0 = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x - 2x = 2x \cdot \left(e^{x^2} - 1\right),\ x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot \left(e^{x^2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$x^2 > 0 \Leftrightarrow e^{x^2} > e^0 \Leftrightarrow e^{x^2} > 1 \Leftrightarrow e^{x^2} - 1 > 0, x \in \mathbb{R}$$

Ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	0 $+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$\downarrow$	$\uparrow$

Επομένως, η συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο στο 0 το $f(0)=0$ και άρα:

$f(x)\geq f(0)\Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\geq 0$ (η ισότητα ισχύει μόνο στο $x=0$, αφού στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ είναι γνησίως μονότονη άρα και «1-1»).

2ος Τρόπος

Από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου (εφαρμογή 2/ii στη σελίδα 266) γνωρίζουμε ότι:

$$\ln x\leq x-1,\ \text{για κάθε } x>0 \ (\text{η ισότητα ισχύει για } x=1)$$

Θέτοντας όπου x το $e^{x^2}>0$ (για κάθε $x\in\mathbb{R}$) έχουμε:

$$\ln e^{x^2}\leq e^{x^2}-1\Leftrightarrow x^2\leq e^{x^2}-1\Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\geq 0\ ,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

$$(\text{η ισότητα ισχύει για } e^{x^2}=1\Leftrightarrow e^{x^2}=e^0\Leftrightarrow x=0).$$

3ος Τρόπος

Μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x-x-1,\ x\in\mathbb{R}$, να μελετήσουμε την μονοτονία και τα ακρότατά της και να πάρουμε $g(x)\geq g(0)\Leftrightarrow g(x)\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έπειτα να πάρουμε $g(x^2)\geq 0\Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ2. Έχουμε ισοδύναμα:

$$f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2\Leftrightarrow|f(x)|=\left|e^{x^2}-x^2-1\right|\Leftrightarrow|f(x)|=e^{x^2}-x^2-1, x\in\mathbb{R}$$

(Επειδή, από το προηγούμενο ερώτημα: $f(x)\geq f(0)\Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$).

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ και δεν έχει ρίζες σε αυτά, διότι αν υποθέσουμε ότι έχει μία ρίζα $\rho\in(-\infty,0)$ ή $\rho\in(0,+\infty)$, τότε θα είναι από το θεώρημα του Fermat (που πληρούνται οι προϋποθέσεις του) ότι $f(\rho)=0$. Οπότε έχουμε:

$$|f(\rho)|=0\Leftrightarrow e^{\rho^2}-\rho^2-1=0\Leftrightarrow\rho=0$$

άτοπο.

Άρα η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

Επομένως έχουμε τις περιπτώσεις:

$$x>0,\ f(x)>0 \Rightarrow f(x)=e^{x^2}-x^2-1$$
$$x>0,\ f(x)<0 \Rightarrow f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$$
$$x<0,\ f(x)<0 \Rightarrow f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$$
$$x<0,\ f(x)>0 \Rightarrow f(x)=e^{x^2}-x^2-1$$

Επειδή οι ζητούμενες συναρτήσεις πρέπει να είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ (και συνεχείς στο $x_0=0$ με $f(0)=0$) θα έχουμε:

- $f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$ ή
- $f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right),\ x\in\mathbb{R}$ ή
- $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & x\geq 0 \\ -\left(e^{x^2}-x^2-1\right), & x<0 \end{cases}$ ή
- $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & x<0 \\ -\left(e^{x^2}-x^2-1\right), & x\geq 0 \end{cases}$

Οι παραπάνω συναρτήσεις είναι οι **μοναδικές** οι οποίες **επαληθεύουν** την δοσμένη σχέση και είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$.

Γ3. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x)=e^{x^2}\cdot 2x-2x=2x\cdot\left(e^{x^2}-1\right),\ x\in\mathbb{R}$$

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f''(x)=4x^2e^{x^2}+2\left(e^{x^2}-1\right)>0 \text{, για κάθε } x\in(-\infty,0) \text{ και για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

(αφού $x^2e^{x^2}\geq 0$ και $e^{x^2}-1>0$)

Επειδή η f' είναι συνεχής στο 0 (αφού είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων) η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[0,+\infty)$, δηλαδή σε όλο το $\mathbb{R}$.

Γ4. Προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $x=0$ (την επαληθεύει).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x+3)-f(x),\ x\in\mathbb{R}$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα διαφοράς και σύνθεσης παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$g'(x)=f'(x+3)-f'(x)>0,\ x\in\mathbb{R}$$

αφού $x+3>x \Rightarrow f'(x+3)>f'(x)$ (η f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, διότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$).

Για $x>0$ έχουμε διαδοχικά:

$$|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow g(|\eta\mu x|) < g(x) \Leftrightarrow f\left(|\eta\mu x|+3\right) - f\left(|\eta\mu x|\right) < f(x+3) - f(x)$$

Επομένως **μοναδική λύση** της δοθείσας εξίσωσης είναι η $x = 0$

<u>2ος Τρόπος</u>

Προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $x = 0$ (την επαληθεύει).

Εξετάζουμε τις επόμενες περιπτώσεις ($x > 0$):

1η περίπτωση) Αν $|\eta\mu x| + 3 > x$, τότε προκύπτει η διάταξη: $|\eta\mu x| < x < |\eta\mu x| + 3 < x + 3$

- Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[x,\ |\eta\mu x|\right]$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[x,\ |\eta\mu x|\right]$ (επομένως και συνεχής στο $\left[x,\ |\eta\mu x|\right]$). Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi_1 \in \left(|\eta\mu x|, x\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'\left(\xi_1\right) = \frac{f(x) - f(|\eta\mu x|)}{x - |\eta\mu x|} \quad \text{(I)}$$

- Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[|\eta\mu x|+3,\ x+3\right]$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[|\eta\mu x|+3,\ x+3\right]$ (επομένως και συνεχής στο $\left[|\eta\mu x|+3,\ x+3\right]$).

Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi_2 \in \left(|\eta\mu x|+3, x+3\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'\left(\xi_2\right) = \frac{f(x+3) - f(|\eta\mu x|+3)}{(x+3) - \left(|\eta\mu x|+3\right)} = \frac{f(x+3) - f(|\eta\mu x|+3)}{x - |\eta\mu x|} \quad \text{(II)}$$

Τώρα έχουμε διαδοχικά από τις σχέσεις (I) και (II) και αφού η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα:

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'\left(\xi_1\right) < f'\left(\xi_2\right) \Rightarrow \frac{f(x) - f(|\eta\mu x|)}{x - |\eta\mu x|} < \frac{f(x+3) - f(|\eta\mu x|+3)}{x - |\eta\mu x|}$$

Επειδή $|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow x - |\eta\mu x| > 0$ έχουμε:

$$f(x) - f(|\eta\mu x|) < f(x+3) - f(|\eta\mu x|+3) \Leftrightarrow f(|\eta\mu x|+3) - f(|\eta\mu x|) < f(x+3) - f(x)$$

Επομένως, η δοθείσα εξίσωση **δεν** έχει άλλη ρίζα εκτός από την $x = 0$.

2η περίπτωση) Αν $|\eta\mu x| + 3 < x$, τότε προκύπτει η διάταξη $|\eta\mu x| < |\eta\mu x| + 3 < x < x + 3$.

- Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[|\eta\mu x|,\ |\eta\mu x|+3\right]$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[|\eta\mu x|,\ |\eta\mu x|+3\right]$ (επομένως και συνεχής στο $\left[|\eta\mu x|,\ |\eta\mu x|+3\right]$). Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi_3 \in \left(|\eta\mu x|,\ |\eta\mu x|+3\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_3)=\frac{f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)}{(|\eta\mu x|+3)-|\eta\mu x|}=\frac{f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)}{3} \quad \text{(III)}$$

- Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[x,\ x+3]$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[x,\ x+3]$ (επομένως και συνεχής στο $[x,\ x+3]$). Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi_4 \in (x,\ x+3)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_4)=\frac{f(x+3)-f(x)}{(x+3)-x}=\frac{f(x+3)-f(x)}{3} \quad \text{(IV)}$$

Τώρα έχουμε διαδοχικά από τις σχέσεις (III) και (IV) και αφού η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα:

$$\xi_3<\xi_4 \Rightarrow f'(\xi_3)<f'(\xi_4) \Rightarrow \frac{f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)}{3}<\frac{f(x+3)-f(x)}{3} \Rightarrow f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)<f(x+3)-f(x)$$

Επομένως, η δοθείσα εξίσωση **δεν** έχει άλλη ρίζα εκτός από την $x=0$.

<u>Σημείωση:</u> Ακόμα και αν $|\eta\mu x|+3=x$, τα παραπάνω θεωρήματα και τα συμπεράσματα εφαρμόζονται χωρίς βλάβη της γενικότητας.

<u>Εναλλακτικά:</u>

Υποθέτουμε, αντίθετα, ότι υπάρχει $x_0>0$ που να είναι λύση της εξίσωσης. Ισχύει $|\eta\mu x_0|<x_0$ (από τη γνωστή ανισότητα $|\eta\mu x|\le|x|$ με την ισότητα μόνο για $x=0$) καθώς επίσης $|\eta\mu x_0|<|\eta\mu x_0|+3$ και $x_0<x_0+3$.

Αν διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $|\eta\mu x_0|+3<x_0$, τότε $|\eta\mu x_0|<|\eta\mu x_0|+3<x_0<x_0+3$
- Αν $x_0\le|\eta\mu x_0|+3$, τότε $|\eta\mu x_0|<x_0\le|\eta\mu x_0|+3<x_0+3$.

και εραρμόσουμε ΘΜΤ σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[|\eta\mu x_0|, |\eta\mu x_0|+3]$, $[x_0, x_0+3]$ καταλήγουμε σε $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$ και αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα (ως κυρτή) άρα είναι και «$1-1$» κι έτσι παίρνουμε $\xi_1=\xi_2$, πράγμα άτοπο αφού τα ξ_1, ξ_2 ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα. Επομένως σε κάθε περίπτωση η δοθείσα εξίσωση έχει **μοναδική** λύση την $x=0$.

<u>3ος Τρόπος</u>

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(t)=f(t+3)-f(t),\ t\ge 0$

Επομένως αρκεί να λύσουμε την εξίσωση:

$$h(|\eta\mu x|)=h(x),\ x\ge 0$$

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ (ως αποτέλεσμα διαφοράς και σύνθεσης παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0,+\infty)$) με:

$$h'(t)=f'(t+3)-f'(t),\ t\ge 0$$

Επειδή η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα (αφού η f είναι κυρτή) έχουμε διαδοχικά:

$$t+3>t \Rightarrow f'(t+3)>f'(t) \Rightarrow f'(t+3)-f'(t)>0 \Rightarrow h'(t)>0,\ t\geq 0$$

Επομένως η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,+\infty\right)$ και άρα είναι «1-1» στο $\left[0,+\infty\right)$. Άρα η δοθείσα εξίσωση για $x\geq 0$ γράφεται ισοδύναμα:

$$h\left(\left|\eta\mu x\right|\right)=h(x) \Leftrightarrow \left|\eta\mu x\right|=x \Leftrightarrow \left|\eta\mu x\right|=\left|x\right| \Leftrightarrow x=0,$$

Αφού στην ανισοισότητα $\left|\eta\mu x\right|\leq\left|x\right|$ το = ισχύει **μόνο** για $x=0$ (πρόταση σελίδας 171, σχολικό βιβλίο).

<u>4ος Τρόπος</u>

ΘΕΜΑ 4ο

ΛΥΣΗ

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\cdot\eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow \int_0^{\pi}f(x)\eta\mu x dx+\int_0^{\pi}f''(x)\eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow\\
&\int_0^{\pi}f(x)\eta\mu x dx+\left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx=\pi \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \int_0^{\pi}f(x)\eta\mu x dx-\left[f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f(x)\eta\mu x dx=\pi\\
&\Leftrightarrow f(\pi)+f(0)=\pi \quad (1)
\end{aligned}$$

Τώρα θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)}{\eta\mu x} \Leftrightarrow f(x)=g(x)\cdot\eta\mu x$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$.

Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(g(x)\cdot\eta\mu x\right)=\lim_{x\to 0}g(x)\cdot\lim_{x\to 0}\eta\mu x=1\cdot 0=0$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0 (αφού είναι παραγωγίσιμη στο 0) θα είναι:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$$

Από τη σχέση (1) έχουμε $f\left(\pi\right)=\pi$.

Ακόμα:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cdot\eta\mu x}{x}=\lim_{x\to 0}\left[g(x)\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}g(x)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1\cdot 1=1$$

Επομένως, η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=1$.

Δ2. α) Έστω οτι η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0\in\mathbb{R}$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και το $x_0 = 0$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$, σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat, θα έχουμε ότι $f'(x_0) = 0$.

Παραγωγίζοντας τη δοσμένη σχέση (αφού τα μέλη της είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) έχουμε:

$$e^{f(x)} \cdot f'(x) + 1 = f'\left(f(x)\right) \cdot f'(x) + e^x, x \in \mathbb{R}$$

Για $x = x_0$ από την προηγούμενη σχέση παίρνουμε:

$$e^{f(x_0)} \cdot f'(x_0) + 1 = f'\left(f(x_0)\right) \cdot f'(x_0) + e^{x_0} \Leftrightarrow e^{x_0} = 1 \Leftrightarrow e^{x_0} = e^0 \Leftrightarrow x_0 = 0,$$

Δηλαδή $f'\left(x_0\right) = f'\left(0\right) = 0$, άτοπο αφού $f'\left(0\right) = 1$.

Επομένως η συνάρτηση f **δεν** παρουσιάζει ακρότατο στο $\mathbb{R}$.

β) Από το ερώτημα Δ2 (α) έχουμε ότι $f'\left(x\right) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (δηλαδή η συνάρτηση f' δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$ και είναι επίσης συνεχής (αφού f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$). Επομένως η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και αφού $f'\left(0\right) = 1 > 0$ (Δ1 ερώτημα) θα είναι $f'\left(x\right) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής f και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με $f\left(\mathbb{R}\right) = \mathbb{R}$ θα είναι[1] $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Έχουμε: $\begin{array}{l} -1 \leq \eta\mu x \leq 1 \\ -1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1 \end{array}$.

Προσθέτοντας τις προηγούμενες σχέσεις κατά μέλη και διαιρώντας με $f(x) > 0$ (αφού $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, άρα $f(x) > 0$ «κοντά» στο $+\infty$) έχουμε:

$$-2 \leq \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \leq 2 \Rightarrow \frac{-2}{f(x)} \leq \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)}$$

Τώρα έχουμε:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2}{f(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{f(x)} = 0$ και, από το κριτήριο της παρεμβολής, παίρνουμε ότι:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$$

---

[1] Στην πραγματικότητα ο ισχυρισμός αυτός είναι το αντίστροφο γνωστής πρότασης του σχολικού βιβλίου. Για την πλήρη δικαιολόγηση μπορούμε να πούμε: Αν ήταν $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ θα είχαμε: $f\left(\mathbb{R}\right) = f\left(\left(-\infty, +\infty\right)\right) = \left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right) = \left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x),\ l\right)$ άτοπο αφού $f\left(\mathbb{R}\right) = \mathbb{R}$. Επίσης αν ήταν $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ θα είχαμε $f(x) < 0$ για κάποια $x > 0$ που είναι άτοπο (αφού η $f \uparrow$ και άρα $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow f(x) > 0$).

Δ4. Για ευκολία θέτουμε $\mathrm{I} = \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx$. Θα δείξουμε ότι $0 < \mathrm{I} < \pi^2$

Θέτουμε (αλλαγή μεταβλητής στο ολοκλήρωμα):

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \Rightarrow du = \frac{1}{e^u} dx \Rightarrow e^u du = dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow x = e^u$$

$$x = 1 \Leftrightarrow u = 0$$

$$x = e^\pi \Leftrightarrow u = \pi$$

Οπότε :

$$\mathrm{I} = \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_0^\pi \frac{f(u)}{e^u} e^u du = \int_0^\pi f(u) du$$

Έχουμε, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$:

$$0 \le x \le \pi \Rightarrow f(0) \le f(x) \le f(\pi) \Rightarrow 0 \le f(x) \le \pi$$

Η ισότητες στην προηγούμενη σχέση δεν ισχύουν παντού και άρα έχουμε:

$$\int_0^\pi 0 dx < \int_0^\pi f(x) dx < \int_0^\pi \pi dx \Rightarrow 0 < \int_0^\pi f(x) dx < \pi^2 \Leftrightarrow 0 < I < \pi^2$$

2ος Τρόπος

Επειδή η συνάρτηση $\ln x$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσες (από το ερώτημα Δ2(β)) έχουμε διαδοχικά:

$$1 \le x \le e^\pi \Rightarrow \ln 1 \le \ln x \le \ln e^\pi \Rightarrow 0 \le \ln x \le 2 \Rightarrow f(0) \le f(\ln x) \le f(\pi)$$

Διαιρώντας με $x \in \left[1,\ e^\pi\right]$ (δηλαδή $x > 0$) έχουμε:

$$\frac{f(0)}{x} \le \frac{f(\ln x)}{x} \le \frac{f(\pi)}{x} \Leftrightarrow 0 \le \frac{f(\ln x)}{x} \le \frac{\pi}{x}$$

Δηλαδή έχουμε τις ανισώσεις:

- $\frac{f(\ln x)}{x} \ge 0$, $x \in \left[1,\ e^\pi\right]$ και η συνάρτηση $\frac{f(\ln x)}{x}$ δεν είναι παντού 0 (αφού π.χ για $x = e^\pi$ δίνει $\frac{f(\ln e^\pi)}{\pi} = \frac{\pi}{\pi} = 1 \ne 0$) . Επομένως έχουμε:

$$\int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx > 0$$

- $\frac{f(\ln x)}{x} \le \frac{\pi}{x} \Leftrightarrow \frac{f(\ln x)}{x} - \frac{\pi}{x} \le 0$, $x \in \left[1,\ e^\pi\right]$ και η συνάρτηση $\frac{f(\ln x)}{x} - \frac{\pi}{x}$ δεν είναι παντού 0 (αφού π.χ για $x = 1$ δίνει $\frac{f(\ln 1)}{1} - \frac{\pi}{1} = f(0) - \pi = -\pi \ne 0$). Επομένως έχουμε:

$$\int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx - \int_1^{e^\pi} \frac{\pi}{x} dx < 0 \Rightarrow \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \int_1^{e^\pi} \frac{\pi}{x} dx \Rightarrow \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi \left[\ln x\right]_1^{e^\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi\left(\ln e^\pi - \ln 1\right) \Rightarrow \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi(\pi - 0) \Rightarrow \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$$

Άρα:

$$0 < \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$$

3ος Τρόπος

Έστω F μία αρχική της f στο $\left[0,+\infty\right)$ (αυτό εξασφαλίζεται αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[0,+\infty\right)$). Άρα ισχύει ότι η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$, $x \ge 0$. Έτσι ισχύει ότι:

$$\frac{f(\ln x)}{x} = \left[F\left(\ln x\right)\right]', x \ge 0$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_1^{e^\pi} \left[F\left(\ln x\right)\right]' dx = \left[F\left(\ln x\right)\right]_1^{e^\pi} = \\ &= F\left(\ln e^\pi\right) - F\left(\ln 1\right) = F(\pi) - F(0) \end{aligned} \quad (*)$$

Εφαρμοζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για την F στο διάστημα $\left[0,\pi\right]$, αφού F παραγωγίσιμη στο $\left[0,\pi\right]$ (άρα και συνεχής στο $\left[0,\pi\right]$), οπότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in \left(0,\ \pi\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$F'\left(\xi\right) = \frac{F(\pi) - F(0)}{\pi} \Rightarrow f(\xi) = \frac{F(\pi) - F(0)}{\pi} \Rightarrow F(\pi) - F(0) = \pi f(\xi) \;((**)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (*) και (**) έχουμε:

$$\begin{aligned} &0 < \xi < \pi \Rightarrow f(0) < f(\xi) < f(\pi) \Rightarrow 0 < f(\xi) < \pi \Rightarrow 0 < \pi f(\xi) < \pi^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 < F(\pi) - F(0) < \pi^2 \Rightarrow 0 < \mathrm{I} < \pi^2 \end{aligned}$$

4ος Τρόπος

Για το $I = \int_1^{e^\pi} \frac{f\left(\ln x\right)}{x} dx$, θέτουμε (αλλαγή μεταβλητής):

$$\begin{aligned} &u = \ln x \\ &du = \frac{1}{x} dx \\ &x = 1 \Leftrightarrow u = \ln 1 \Leftrightarrow u = 0 \\ &x = e^\pi \Leftrightarrow u = \ln e^\pi \Leftrightarrow u = \pi \end{aligned}$$

και έχουμε ότι $I = \int_0^\pi f(u) du$

Αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έχουμε διαδοχικά:

$$0 \le u \le \pi \Rightarrow f(0) \le f(u) \le f(\pi) \Rightarrow 0 \le f(u) \le \pi$$

Επομένως έχουμε:

$f(u) \ge 0$ και η f δεν είναι παντού 0, άρα $\int_0^\pi f(u) du > 0 \Leftrightarrow I > 0$ (1).

Ακόμα $f(u) \le \pi \Leftrightarrow f(u) - \pi \le 0$ και η συνάρτηση $f(u) - \pi$ δεν είναι παντού 0, άρα:

$$\int_0^\pi \left(f(u) - \pi\right) du < 0 \Leftrightarrow \int_0^\pi f(u) du - \int_0^\pi \pi du < 0 \Leftrightarrow I < \pi \left[x\right]_0^\pi \Leftrightarrow \mathrm{I} < \pi^2 \quad (2)$$

Επομένως $0 < \mathrm{I} < \pi^2$.

<u>5</u>

5^{ος} Τρόπος

Εφαρμόζουμε κατά παράγοντες ολοκλήρωση στο $I = \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx$ και έχουμε:

$$I = \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_1^{e^\pi} f(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx = \int_1^{e^\pi} f(\ln x)(\ln x)' dx =$$

$$= \left[f(\ln x)(\ln x) \right]_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} (\ln x) \cdot \left[f(\ln x) \right]' dx =$$

$$f\left(\ln e^\pi\right)\left(\ln e^\pi\right) - 0 - \int_1^{e^\pi} (\ln x) \cdot f'(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx = f(\pi) \cdot \pi - \int_1^{e^\pi} K(x) dx = \pi^2 - \int_1^{e^\pi} K(x) dx \ (1)$$

, όπου $K(x) = (\ln x) \cdot f'(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \geq 0,\ x \in \left[1,\ e^\pi\right]$ διότι:

$x \geq 11 \Rightarrow \ln x \geq \ln 1 \Rightarrow \ln x \geq 0$

$x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$

$f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα και $f'(\ln x) > 0$.

Αφού η συνάρτηση $K(x)$ δεν είναι παντού 0, έχουμε (χρησιμοποιούμε και τη σχέση (1)):

$$\int_1^{e^\pi} K(x) dx > 0 \Leftrightarrow -\int_1^{e^\pi} K(x) dx < 0 \Leftrightarrow \pi^2 - \int_1^{e^\pi} K(x) dx < \pi^2 \Leftrightarrow I < \pi^2$$

Επομένως $0 < I < \pi^2$.

<u>Σχόλιο:</u> Η συνάρτηση $f'(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ από τα δεδομένα). Επίσης η συνάρτηση $\ln x$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ οπότε και η συνάρτηση $f'(\ln x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[1,\ e^\pi\right]$ που μας ενδιαφέρει.

Επομένως, η συνάρτηση $K(x) = (\ln x) \cdot f'(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \geq 0,\ x \in \left[1,\ e^\pi\right]$ είναι συνεχής και άρα το ολοκλήρωμα $\int_1^{e^\pi} K(x) dx$ έχει νόημα.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΓΕ.Λ.

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Θεωρία, στη σελίδα 260 του σχολικού βιβλίου (Θ. Fermat).

Α2. Θεωρία, στη σελίδα 169 του σχολικού βιβλίου.

Α3. Θεωρία-Ορισμός, στη σελίδα 280 του σχολικού βιβλίου.

Α4.

α. Λάθος.

β. Λάθος.

γ. Σωστό.

δ. Λάθος.

ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. Το πεδίο ορισμού D_f της συνάρτησης f είναι $D_f = (1,5) \cup (5,\ 9]$.

Το σύνολο τιμών Α είναι $A = f\left(D_f\right) = (-2,5]$

Β2. Έχουμε:

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -2$

β) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 1 \neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$ (Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$)

γ) $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 3 = \lim\limits_{x\to 5} f(x)$

δ) $\lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = 4 \neq \lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = 2$ (Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$)

ε) $\lim\limits_{x\to 9} f(x) = \lim\limits_{x\to 9^+} f(x) = 3$

Β3.
α) Είναι:

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (1,2)$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (2,3)$

β) Είναι:

$\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 6} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (5,7)$

γ) θέτουμε $f(x)=u$ και έχουμε $\lim\limits_{x\to 8} f(x)=u_0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 8^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 8^-} f(x)=5=u_0$.

Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to 8} f\left(f(x)\right)=\lim_{u\to u_0} f(u)=\lim_{u\to 5} f(u)=3$$

B4. Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στα σημεία $x_1=3$ και $x_2=7$ αφού:

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=1\neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=3$ (Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$) και

$\lim\limits_{x\to 7^+} f(x)=4\neq \lim\limits_{x\to 7^-} f(x)=2$ (Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$)

B5. Τα σημεία στα οποία έχουμε $f'(x)=0$ είναι $\begin{matrix} x_3=4 \\ x_4=6 \\ x_5=8 \end{matrix}$, αφού από την παρατήρηση του δοσμένου σχήματος σε αυτά δέχεται οριζόντια εφαπτομένη παράλληλη με τον άξονα x΄x οπότε (και επειδή στα σημεία αυτά είναι συνεχής) θα έχουμε $f'(x_1)=f'(x_2)=f'(x_3)=0$.

ΘΕΜΑ 3^{o}

Γ1. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1^{\,3}=x_2^{\,3}\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι «1-1» και επομένως είναι αντιστρέψιμη .

Για την εύρεση της αντίστροφης έχουμε:

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=x^3\Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt[3]{y},\ \alpha\nu\ y\geq 0 \\ x=-\sqrt[3]{-y},\ \alpha\nu\ y<0 \end{cases}$$

Άρα:

$$f^{-1}\left(x\right)=\begin{cases} \sqrt[3]{x},\ \alpha\nu\ \mathrm{x}\geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x},\ \alpha\nu\ \mathrm{x}<0 \end{cases}$$

Γ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με $f'(x)=3x^2>0$, για κάθε $x\in\left(-\infty,0\right)$ και $x\in\left(0,+\infty\right)$ και αφού η f είναι συνεχής στο 0 είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,0\right]$ και $\left[0,+\infty\right)$, επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\eta\mu x-x+\dfrac{1}{6}x^3,\ x\geq 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,+\infty\right)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left[0,+\infty\right)$) με

$$g'(x)=\sigma\upsilon\nu x-1+\frac{1}{2}x^2,\ x\geq 0$$

Η συνάρτηση $g'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,+\infty\right)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left[0,+\infty\right)$) με

$g''(x) = -\eta\mu x + x > 0$ για κάθε $x > 0$ (αφού $\eta\mu x < x \Leftrightarrow -\eta\mu x + x > 0$ για κάθε $x > 0$, η ισότητα $\eta\mu x = x$ ισχύει μόνο για $x = 0$).

Άρα η συνάρτηση $g'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, +\infty\right)$.

Άρα έχουμε:

$x > 0 \Rightarrow g'(x) > g'(0) \Rightarrow g'(x) > 0$, δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, +\infty\right)$

$x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) \Rightarrow g(x) > 0$.

Επομένως για κάθε $x > 0$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχουμε:

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow \eta\mu x > x - \frac{1}{6}x^3 \Rightarrow f\left(\eta\mu x\right) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$$

Γ3. Έστω $M\left(x(t_0),\, y(t_0)\right)$ το σημείο της καμπύλης στο οποίο την χρονική στιγμή $t = t_0$ έχουμε $x'(t_0) = y'(t_0)$. Για κάθε $t \geq 0$ έχουμε $y(t) = x^3(t)$. Παραγωγίζοντας τη σχέση αυτή για κάθε $t \geq 0$ έχουμε:

$$y'(t) = \left[x^3(t)\right]' \Leftrightarrow y'(t) = 3x^2(t) \cdot x'(t)$$

Για $t = t_0$ έχουμε:

$$y'(t_0) = 3x^2(t_0) \cdot x'(t_0) \Leftrightarrow x'(t_0) = 3x^2(t_0) \cdot x'(t_0) \Leftrightarrow 3x^2(t_0) = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2(t_0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x(t_0) = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Άρα δεκτή τιμή η $x(t_0) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, οπότε $y(t_0) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$. Επομένως το ζητούμενο σημείο της καμπύλης για το οποίο $x'(t_0) = y'(t_0)$ είναι $M\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\, \dfrac{\sqrt{3}}{9}\right)$.

Γ4. Για το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)g(-x)dx$ (αφού η g είναι άρτια $g(x) = g(-x)$ για κάθε $x \in \left[-1, 1\right]$) θέτουμε:

$$\begin{aligned} &-x = u \Leftrightarrow x = -u \\ &dx = -du \\ &x = -1 \Leftrightarrow u = 1 \\ &x = 1 \Leftrightarrow u = -1 \end{aligned}$$

Άρα έχουμε διαδοχικά:

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)g(-x)dx = \int_{-1}^{1} x^3 g(-x)dx = -\int_{1}^{-1} \left(-u\right)^3 g(u)du =$$
$$= \int_{-1}^{1} \left(-u\right)^3 g(u)du = -\int_{-1}^{1} u^3 g(u)du = -I$$

Επομένως $I = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0$

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1.

- Για κάθε $x \in (0,1)$ η συνάρτηση f είναι συνεχής (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο $(0,1)$).
- Για κάθε $x > 1$ η συνάρτηση f είναι συνεχής (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο $(0,1)$).

Θα εξετάσουμε τη συνέχεια της f στο $x_0 = 1$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\ln x}{x}+1\right) = \lim_{x\to 1^-}\frac{\ln x}{x}+1 = 0+1=1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1} = (D'L) = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x} = 1$$

$$f(1)=1$$

Άρα η f είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$, επομένως είναι συνεχής και στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$ και άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες για $x_0 > 0$.

Θα εξετάσουμε αν έχει κατακόρυφη ασύμπτωστη στο $x_0 = 0$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln x\cdot\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\ln x\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x}+1\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}+1 = -\infty$$

Επομένως η ευθεία $x=0$ (δηλαδή ο άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Δ2.

- Για $x \in (0,1)$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,1)$) με:

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}+1\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2},\ x\in(0,1)$$

Είναι:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}=0 \Leftrightarrow 1-\ln x = 0 \Leftrightarrow x = e \notin (0,1)$$

Άρα $f'(x) \neq 0, x\in(0,1)$. Είναι $f'(x)>0$ για κάθε $0<x<1$

Για $x>1$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(1,+\infty)$ με:

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)'=\frac{\frac{1}{x}(x-1)-\ln x}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2},x>0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=x-1-x\ln x, x>0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο$\left(0,+\infty\right)$((ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο$\left(0,+\infty\right)$) με :

$$h'(x)=1-(\ln x+1)=-\ln x, x>0$$
$$h'(x)=0 \Leftrightarrow -\ln x=0 \Leftrightarrow x=1$$

Έχουμε:

- $x>1 \Rightarrow h'(x)<0$, άρα η $h(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[1,+\infty\right)$ (αφού είναι και συνεχής στο$\left[1,+\infty\right)$) και άρα:

$x>1 \Rightarrow h(x)<h(1) \Rightarrow h(x)<0$ για κάθε $x>1$

Επομένως $h(x)<0, x\in\left(0,+\infty\right)$ άρα $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x(x-1)^2}<0,\ x>1$.

Το μοναδικό πιθανό κρίσιμο σημείο ειναι το $x_0=1$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\ln x}{x(x-1)}=\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{1}{x}}{2x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x(2x-1)}=1$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{\ln x}{x-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{1-x}{2x(x-1)}=-\frac{1}{2}$$

Άρα η f έχει μοναδικό κρίσιμο σημείο το $x_0=1$.

Δ3. i) Αφού $f'(x)>0$ για κάθε$0<x<1$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,1\right]$(αφού η f είναι συνεχής στο 1). Άρα έχουμε:

- $f\left(\left(0,1\right]\right)=\left(\lim\limits_{x\to0^+}f(x), f(1)\right]=\left(-\infty,1\right]$ επειδή $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$ και $f(1)=1$.

Αφού $0\in\left(-\infty,1\right]$ η f θα έχει μία ρίζα η οποία θα είναι μοναδική αφού η f είναι»1-1» ως γνησίως αύξουσα στο $\left(0,1\right]$

Αφού $f'(x)<0$ για κάθε $x>1$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[1,+\infty\right)$ $\left(0,1\right]$(αφού η f είναι συνεχής στο 1). Άρα έχουμε:

- $f\left(\left[1,+\infty\right)\right)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x), f(1)\right]=\left(0,1\right]$ επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. Όμως $0\notin\left(0,1\right]$ και άρα η f δεν έχει ρίζα στο $\left[1,+\infty\right)$.

Άρα η f έχει μοναδική ρίζα $x_0\in\left(0,1\right]$.

ii) Το Εμβαδόν του χωρίου είναι $E\left(\Omega\right)=\int_{x_0}^{1}\left|f(x)\right|dx, x_0\in\left(0,1\right]$.

Επειδή η είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ έχουμε:

$$x \geq x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow f(x) \geq 0$$

Άρα :

$$E(\Omega) = \int_{x_0}^{1} f(x)dx = \int_{x_0}^{1} \left(\frac{\ln x}{x} + 1\right) dx = \int_{x_0}^{1} \frac{\ln x}{x}dx + \int_{x_0}^{1} 1dx = \int_{x_0}^{1} \ln x \cdot \frac{1}{x}dx + [x]_{x_0}^{1} = I + 1 - x_0$$

$$\mathrm{I} = \int_{x_0}^{1} \ln x \cdot (\ln x)' dx = \left[\ln^2 x\right]_{x_0}^{1} - \int_{x_0}^{1} \ln x \cdot (\ln x)' dx = -\ln x_0 - I$$

$$2I = -\ln x_0 \Rightarrow I = \frac{-\ln x_0}{2}$$

$$E(\Omega) = \frac{-\ln x_0}{2} + 1 - x_0 \quad (1)$$

Επειδή το x_0 είναι ρίζα της f έχουμε:

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x_0}{x_0} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x_0 + x_0}{x_0} = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 + x_0 = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = -x_0 .$$

Άρα από τη σχέση (1) έχουμε:

$$E(\Omega) = -\frac{x_0^{\;2}}{2} + 1 - x_0 = \frac{-x_0^{\;2} - 2x_0 + 2}{2} \text{ τ.μ.}$$

Δ4. Για κάθε $x > 1$ έχουμε $f'(x) < 0 \Rightarrow F''(x) < 0$. Η F' είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $x = 1$ λόγω της αντίστοιχης συνέχειας της f. Άρα η F' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

Ισχύει: $1 < x < x^2$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την F στα διαδοχικά διαστήματα $[1,x],\left[x,x^2\right]$ στα οποία ικανοποιούνται οι προυποθέσεις (Η F είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $[1,+\infty)$, οπότε και στα $[1,x],\left[x,x^2\right]$).

Επομένως υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 \in (1,x)$ και $\xi_2 \in \left(x,x^2\right)$ με:

$$F'(\xi_1) = \frac{F(x) - F(1)}{x - 1}$$

$$F'(\xi_2) = \frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x}$$

Έχουμε διαδοχικά :

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow F'\left(\xi_1\right) > F'\left(\xi_2\right) \Rightarrow \frac{F\left(x\right) - F(1)}{x-1} > \frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x} \Rightarrow$$

$$\frac{F\left(x\right) - F(1)}{x-1} > \frac{F(x^2) - F(x)}{x(x-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F\left(x\right) - F(1) > \frac{F(x^2) - F(x)}{x} \Rightarrow$$

$$xF(x) - xF(1) > F(x^2) - F(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xF(x) + F(x) > xF(1) + F(x^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x+1\right)F(x) > xF(1) + F(x^2)$$

ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Έστω μια συνάρτηση *f*, η οποία είναι *σ υ ν ε χ ή ς* σε ένα διάστημα *Δ*.

• Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο *x* του *Δ*, τότε να αποδείξετε ότι η *f* είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το *Δ*.

Απάντηση

Έστω x_1 $x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

, οπότε έχουμε $f(x_2) - f(x_1) = f\,'(\xi)\,(x_2 - x_1)$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Θεωρία, στη σελίδα 141 του σχολικού βιβλίου.

Απάντηση

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

● έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α **και**

● για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$.

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία

Θεωρία, στη σελίδα 246 του σχολικού βιβλίου.

Απάντηση

Διατύπωση:

Αν μια συνάρτηση f είναι:

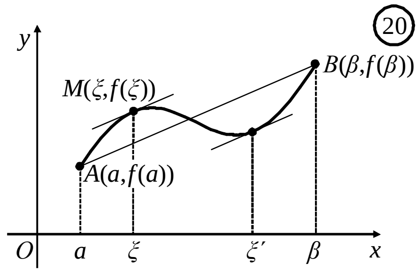
- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Γεωμετρική ερμηνεία:

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB.



Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

Απαντήσεις

α) Ισχύει $\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

Λάθος (Ισχύει $\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$)

β) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) \le \lim_{x \to x_0} g(x)$.

Σωστό (πρόταση στη σελίδα 166 του σχολικού βιβλίου).

γ) Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in\left(a,x_0\right)\cup\left(x_0,\beta\right)$, είναι σταθερή στο $\left(a,x_0\right)\cup\left(x_0,\beta\right)$.

Λάθος. (Η αντίστοιχη πρόταση δεν ισχύει γενικά σε ένωση διαστημάτων)

δ) Μια συνάρτηση f είναι «1-1», αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της , η εξίσωση $y=f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

Σωστό (γνωστή πρόταση –σχόλιο στο σχολικό βιβλίο).

ε) Αν η f είναι συνεχής στο $\left[\alpha,\beta\right]$, τότε η f παίρνει στο $\left[\alpha,\beta\right]$ μία μέγιστη τιμή Μ και μία ελάχιστη τιμή m.

Σωστό (θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής)

ΘΕΜΑ 2^{o}

Β1. Για να είναι συνεχής η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2+a, & x\le 1\\ 2x, & x>1\end{cases}$ στο σημείο $x_0=1$ πρέπει:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(x^2+a\right)=1+a$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}2x=2$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ οπότε $1+a=2\Leftrightarrow a=1$.

Β2. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής για $a=1$ θα εξετάσουμε μόνο για την τιμή αυτή την παραγωγισιμότητα της f.

Για να είναι η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$ πρέπει τα όρια $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ να είναι ίσα και πεπερασμένα.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2(x-1)}{x-1}=2$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$ με $f'(1)=2$.

Β3. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάτησης f στο σημείο $A(1,\ f(1))$ δηλαδή στο $A(1,\ 2)$ είναι:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y-2=2(x-1)\Rightarrow y=2x$$

Δηλαδή διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο(0,0).

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πηλίκου παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot\left(x^2+1\right)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2},\ x\in\mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Leftrightarrow x=0$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}>0\Leftrightarrow x>0$$

$$f'(x)<0\Leftrightarrow \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}<0\Leftrightarrow x<0$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0, η συνάρτηση f θα είναι:

- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$.
- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$.
- Έχει ακρότατο (ολικό ελάχιστο) στο 0 , το $f(0)=0$.

Ο πίνακας μεταβολών (μονοτονίας-ακροτάτων) της συνάρτησης f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	0 $+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$\downarrow$	$\uparrow$

Ολ. ελάχιστο

Γ2. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πηλίκου παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f''(x) = \frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3},\ x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3} = 0 \Leftrightarrow 1-3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3} > 0 \Leftrightarrow 1-3x^2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3} < 0 \Leftrightarrow 1-3x^2 < 0 \Leftrightarrow \left(x > \frac{\sqrt{3}}{3}\ \acute{\eta}\ x < -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Ο πίνακας προσήμου της $f''(x)$ είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ $+\infty$
$f''(x)$	-	+	-

Γ3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε **δεν** έχει **κατακόρυφη** ασύμπτωτη ($\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$).

<u>**Πλάγιες-οριζόντιες:**</u> $y = \lambda x + \beta \ (\lambda, \beta \in \mathbb{R})$ με:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^3+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - \lambda x \right] = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

Επομένως η C_f **έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο** $+\infty$ την $y = 1$.

Ακόμα:

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^3+x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\beta = \lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - \lambda x \right] = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

Επομένως η C_f **έχει οριζοντια ασύμπτωτη στο** $-\infty$ την $y = 1$.

<u>**Παρατήρηση:**</u>

Μπορούμε επίσης να βρούμε την οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$ **και να δικαιολογήσουμε** ότι μια συνάρτηση f δεν μπορεί να έχει ταυτόχρονα και πλάγια και οριζόντια στο $-\infty$ και στο $+\infty$ αντίστοιχα (άρα δεν θα έχει πλάγια ασύμπτωτη).

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x)\cdot f'(x) = x \Leftrightarrow 2f(x)\cdot f'(x) = 2x \Leftrightarrow \left[f^2(x) \right]' = (x^2)' \Leftrightarrow f^2(x) = x^2 + c$$

Για $x = 0 \Rightarrow f^2(0) = c \Rightarrow c = 1$. Άρα $f^2(x) = x^2 + 1,\ x \in \mathbb{R}$. (1)

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$) και δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, αφού αν είχε μία ρίζα $\rho \in \mathbb{R}$ θα είχαμε:

$$f^2(\rho) = \rho^2 + 1 \Leftrightarrow 0 = \rho^2 + 1 \Leftrightarrow \rho^2 = -1 \text{ που είναι άτοπο.}$$

Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $f(0)=1>0$ θα είναι $f(x)>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η (1) είναι ισοδύναμη με την $f(x)=\sqrt{x^2+1},\ x \in \mathbb{R}$.

Δ2. Εχουμε:

$$f(x)=x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\lambda\right),\ x>0$$

Άρα:

$$\text{A}=\lim_{x\to+\infty} f(x)=x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\lambda\right)=(1-\lambda)\cdot(+\infty)$$

Διακρίνουμε τις επόμενες περιπτώσεις:

1^{η}) $1-\lambda>0 \Leftrightarrow \lambda<1$, τότε Α=$+\infty$

2^{η}) $1-\lambda<0 \Leftrightarrow \lambda>1$, τότε Α=$-\infty$

3^{η}) $1-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=1$, τότε έχουμε:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x},\ x>0$$

Άρα:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

Δ3. Η είναι παραγωγίσιμη στο (ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο) με:

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},\ x \in \mathbb{R}$$

Είναι:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow x>0$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

Άρα:

$$f\left([0, +\infty)\right) = \left[1, +\infty\right)$$

$$f\left((-\infty, 0]\right) = \left[1, +\infty\right)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι $f(\mathbb{R}) = \left[1, +\infty\right)$.

Δ4. Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $-1 \le \sigma\upsilon\nu x \le 1$ πρέπει για να έχει λύση η δοθείσα εξίσωση να είναι:

$$\sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}$$

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Θεωρία, στη σελίδα 260 του σχολικού βιβλίου (Θ. Fermat).

Α2. Θεωρία, στη σελίδα 169 του σχολικού βιβλίου.

Α3. Θεωρία-Ορισμός, στη σελίδα 280 του σχολικού βιβλίου.

Α4.

α. Λάθος.

β. Σωστό.

γ. Σωστό.

δ. Λάθος.

ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. Το πεδίο ορισμού D_f της συνάρτησης f είναι $D_f=(1,5)\cup(5,\ 9]$.

Το σύνολο τιμών Α είναι $A=f\left(D_f\right)=(-2,5]$

Β2. Έχουμε:

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-2$

β) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=1\neq\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=2$ (Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$)

γ) $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=3=\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

δ) $\lim\limits_{x\to 7^+} f(x)=4\neq\lim\limits_{x\to 7^-} f(x)=2$ (Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$)

ε) $\lim\limits_{x\to 9} f(x)=\lim\limits_{x\to 9^+} f(x)=3$

Β3.

α) Είναι:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{f(x)}=-\infty$$, διότι $\lim_{x\to 2^-} f(x)=0$ και $f(x)<0$ για κάθε $x\in(1,2)$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{f(x)}=+\infty$$,διότι $\lim_{x\to 2^+} f(x)=0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(2,3)$

β) Είναι:

$$\lim_{x\to 6}\frac{1}{f(x)}=+\infty$$, διότι $\lim_{x\to 6} f(x)=0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(5,7)$

γ) θέτουμε $f(x)=u$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to 8} f(x)=u_0 \Rightarrow \lim_{x\to 8^+} f(x)=\lim_{x\to 8^-} f(x)=5=u_0 .$$

Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to 8} f\left(f(x)\right)=\lim_{u\to u_0} f(u)=\lim_{u\to 5} f(u)=3$$

Β4. Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στα σημεία $x_1=3$ και $x_2=7$ αφού:

$\lim_{x\to 3^-} f(x)=1\neq \lim_{x\to 3^+} f(x)=3$ (Δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 3} f(x)$) και

$\lim_{x\to 7^+} f(x)=4\neq \lim_{x\to 7^-} f(x)=2$ (Δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 7} f(x)$)

Β5. Τα σημεία στα οποία έχουμε $f'(x)=0$ είναι $\begin{matrix} x_3=4 \\ x_4=6 \\ x_5=8 \end{matrix}$, αφού από την παρατήρηση του δοσμένου σχήματος σε αυτά δέχεται οριζόντια εφαπτομένη παράλληλη με τον άξονα x΄x οπότε (και επειδή στα σημεία αυτά είναι συνεχής) θα έχουμε $f'(x_1)=f'(x_2)=f'(x_3)=0$.

ΘΕΜΑ 3^{o}

Γ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,\ 0)$ και $(0,\ +\infty)$ ως πολυωνυμική. Στο $x_0=0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1,\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=1,\ f(0)=1$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(1)$ και άρα η f είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$,δηλαδή είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Η f είναι συνεχής στο $[-1,\ 1]$ (ως συνεχής στο $\mathbb{R}$). Επίσης η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,\ 0)$ και $(0,\ 1)$. Θα εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$.Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x+1-1}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^2+1-1}{x} = \lim_{x\to 0^-}(-x) = 0$$

Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και άρα η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού στο διάστημα $[-1,\ 1]$.

Γ3.Έστω $B\left(x_0,\ f(x_0)\right)$ το σημείο επαφής της C_f με την εφαπτομένη. Η εξίσωση της C_f στο σημείο Β είναι:

- Για $x \le 0$, έχουμε:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\left(x - x_0\right)$$

$$y - \left(-x_0^2 + 1\right) = -2x_0\left(x - x_0\right)$$

$$y + x_0^2 - 1 = -2x_0 x + 2x_0^2$$

Επειδή η C_f διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\ \frac{5}{4}\right)$ θα είναι:

$$\frac{5}{4} + x_0^2 - 1 = 2x_0^2 \Leftrightarrow x_0 = \pm\frac{1}{2}$$

Δεκτή τιμή $x_0 = -\frac{1}{2}$. Άρα η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y - f\left(-\frac{1}{2}\right) = f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y - \frac{3}{4} = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = x + \frac{5}{4}$$

- $x > 0$, έχουμε:

$$y - f(x_0) = f'(\mathrm{x}_0)\left(x - x_0\right)$$
$$y - \left(-x_0 + 1\right) = -\left(x - x_0\right)$$
$$y + x_0 - 1 = -x + x_0$$
$$y - 1 = -x$$
$$y = -x + 1$$

Η οποία δεν επαληθεύεται από το σημείο $A\left(0,\ \frac{5}{4}\right)$.

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y = x + \frac{5}{4}$

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. Η συνάρτηση f είναι "1-1" αφού για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Για την αντίστροφη έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}\ .$$

Επομένως: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x},\ x \geq 0$.

Δ2. Θα αποδείξουμε αρχικά ότι: $\text{ημx} > x - \frac{1}{6}x^3$ για κάθε $x > 0$ ή ισοδύναμα ότι:

$\text{ημx} - x + \frac{1}{6}x^3 > 0,\ x > 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \text{ημx} - x + \frac{1}{6}x^3,\ x \geq 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\ +\infty\right)$ με $g'(\mathrm{x}) = \text{συνx} - 1 + x^2,\ x > 0$. Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\ +\infty\right)$ με $g''(\mathrm{x}) = -\eta\mu x + x > 0,\ x > 0$ (αφού ισχύει $\left|\eta\mu x\right| \leq x$ για κάθε $x \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$).Άρα η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\ +\infty\right)$. Έχουμε:

$$x > 0 \Rightarrow g'(x) > g'(0) \Rightarrow g'(x) > 0\ ,$$

δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \ +\infty)$. ‘Εχουμε:

$$x>0 \Rightarrow g(x)>g(0) \Rightarrow g(x)>0 \Rightarrow \text{ημx}-x+\frac{1}{6}x^3>0 \Rightarrow \text{ημx}>x-\frac{1}{6}x^3 .$$

Άρα για κάθε $x>0$, έχουμε:

$$\text{ημx}>x-\frac{1}{6}x^3 \Rightarrow f\left(\text{ημx}\right)>f\left(x-\frac{1}{6}x^3\right),$$

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα:

$$\text{ημx}>x-\frac{1}{6}x^3 \Rightarrow f\left(\text{ημx}\right)>f\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)$$

Δ3. Έστω $M\left(x(t),\ y(t)\right),\ x(t)\geq 0,\ t\geq 0$ το σημείο το οποίο κινείται στην καμπύλη $y=x^3,\ x\geq 0$.Έχουμε $y(t)=x^3(t)$. Ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης για κάθε $t\geq 0$ είναι $y'(\text{t})=3\text{x}^2(\text{t})x'(\text{t})$ (1). Έστω t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία έχουμε $y'(\text{t}_0)=\text{x}'(t_0)$. Η σχέση (1) για $t=t_0$ γίνεται:

$$y'(\text{t}_0)=3\text{x}^2(\text{t}_0)x'(\text{t}_0) \Leftrightarrow x'(\text{t}_0)=3\text{x}^2(\text{t}_0)x'(\text{t}_0) \Leftrightarrow x'(\text{t}_0)\left(1-3\text{x}^2(\text{t}_0)\right)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x'(\text{t}_0) \text{ ή } 1-3\text{x}^2(\text{t}_0)=0\right)$$

Επειδή $\text{x}'(t_0)>0$ θα είναι $3\text{x}^2(\text{t}_0)=1 \Leftrightarrow x(t_0)=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ με δεκτή τιμή $x(t_0)=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Άρα $y\left(t_0\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{9}$ και επομένως το ζητούμενο σημείο είναι $M\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$.

Δ4. Επειδή η f είναι «1-1», έχουμε:

$$f\left(\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+2}}\right)=f(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+2}}=x \Leftrightarrow f(x)=x\sqrt{x^2+2} \Leftrightarrow x^3=x\sqrt{x^2+2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\left(x^2-\sqrt{x^2+2}\right)=0 \Leftrightarrow \left(x=0,\ \sqrt{x^2+2}=x^2\right)$$

$\sqrt{x^2+2} = x^2 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 2 = 0$. Θέτουμε $x^2 = \omega > 0$, οπότε $\omega^2 - \omega - 2 = 0$ με ρίζες $\omega = -1$ (απορρίπτεται) και $\omega = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Επομένως οι ρίζες είναι:

$$x = 0,\ x = \frac{\sqrt{2}}{2},\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΤΡΙΤΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΤΕΚΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Για κάθε $x \in R_1$ έχουμε :

$$(\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}. \quad \blacksquare$$

Α2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της f στο Δ** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$F'(x) = f(x), \quad \text{για κάθε} \quad x \in \Delta.$$

Α3.

α. Λάθος.

β. Σωστό.

γ. Σωστό.

δ. Λάθος.

ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. Για να διέρχεται η C_f από το σημείο $A(3,\ 2)$ πρέπει:

$$f(3) = 2 \Leftrightarrow \frac{3a-1}{4} = 2 \Leftrightarrow 3a = 9 \Leftrightarrow a = 3$$

Β2. Για $\alpha = 3$ η συνάρτηση γίνεται $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+1},\ x \neq -1.$

Έστω $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R} - \{1\}$ με $f(x_1) = f(x_2)$.

Έχουμε:

$$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)\Leftrightarrow\frac{3x_1-1}{x_1+1}=\frac{3x_2-1}{x_2+1}\Leftrightarrow 3x_1x_2+3x_1-x_2-1=3x_1x_2+3x_2-x_1-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x_1-x_2=3x_2-x_1\Leftrightarrow 4x_1=4x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι «1-1».

B3. Αφού η f είναι «1-1» υπάρχει η αντίστροφή της f^{-1}.Έχουμε:

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\frac{3x-1}{x+1}\Leftrightarrow y(x+1)=3x-1\Leftrightarrow x(y-3)=-y-1$$

Αν $y\neq 3$, έχουμε $x=\dfrac{y+1}{3-y}$. Πρέπει , επιπλέον, να είναι:

$$x\neq -1\Leftrightarrow\frac{y+1}{3-y}\neq -1\Leftrightarrow y+1\neq -3+y\Leftrightarrow 1\neq -3$$

Η τελευταία σχέση είναι αληθής και επομένως έχουμε:

$$f^{-1}\left(x\right)=\frac{x+1}{3-x},\ x\neq 3.$$

B4. Έχουμε διαδοχικά:

$$f^{-1}\left(x\right)=f(x)\Leftrightarrow\frac{x+1}{3-x}=\frac{3x-1}{x+1}\Leftrightarrow x^2+2x+1=-3x^2+10x-3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-8x+4=0\Leftrightarrow 4\left(x-1\right)^2=0\Leftrightarrow x=1$$

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(2,\ +\infty\right)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f'(x)=1-\frac{-1}{(x-2)^2}=1+\frac{1}{(x-2)^2}>0\text{, για κάθε } x\in\left(2,\ +\infty\right).$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(2,\ +\infty\right)$.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με:

$$f''\left(x\right)=-\frac{2}{\left(x-2\right)^3}<0\text{ ,για κάθε } x\in\left(2,\ +\infty\right).$$

Επομένως η f είναι κοίλη στο διάστημα $\left(2,\ +\infty\right)$.

Γ2. Είναι:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(x+1-\frac{1}{x-2}\right) = +\infty$$

Επομένως η $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. Τώρα επειδή:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(x+1-\frac{1}{x-2}\right) = +\infty$$

η C_f δεν έχει οριζόντιες και πλάγιες ασύτμπτωτες στο $+\infty$.

Γ3. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\lambda) = \int_{\lambda}^{\lambda+1}\left|f(x)-(x+1)\right|dx = \int_{\lambda}^{\lambda+1}\left|-\frac{1}{x-2}\right|dx = \int_{\lambda}^{\lambda+1}\frac{1}{x-2}dx =$$

$$= \left[\ln|x-2|\right]_{\lambda}^{\lambda+1} = \left[\ln(x-2)\right]_{\lambda}^{\lambda+1} = \ln(\lambda-1)-\ln(\lambda-2) = \ln\frac{\lambda-1}{\lambda-2},\ \lambda>2$$

Γ4. Έχουμε:

$$\mathrm{E}(\lambda) > \ln 2 \Leftrightarrow \ln\frac{\lambda-1}{\lambda-2} > \ln 2 \Leftrightarrow \frac{\lambda-1}{\lambda-2} > 2 \Leftrightarrow \lambda < 3$$

Επομένως $2<\lambda<3$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $(0,\ 1)$ και στο $(1,\ +\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων). Θα εξετάσουμε τη συνέχεια της f στα σημεία $x_0=0$ και $x_1=1$.

Για $x_0=0$:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\ln x}{x-1} = \dfrac{0}{-1} = 0$, αφού:

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0 \text{ και } \lim_{x\to 0^+}(x-1) = -1$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ και επομένως η f είναι συνεχής και στο $x_0=0$

Για $x_1 = 1$(σύμφωνα με τον κανόνα του D'L Hospital):

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x-1} = \frac{\ln x + 1}{1} = 1$$

Άρα $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1$ και επομένως η f είναι συνεχής και στο $x_1 = 1$, οπότε η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\ +\infty)$.

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ 1)$ και στο $(1,\ +\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσμων συναρτήσεων) με:

$$f'(x) = \frac{(\ln x + 1)(x-1) - x\ln x}{(x-1)^2} = \frac{x - \ln x - 1}{(x-1)^2} = \frac{h(x)}{(x-1)^2}$$

με $h(x) = x - \ln x - 1,\ x > 0$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ με:

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$$h'(x) > 0,\ x > 1$$

$$h'(x) < 0,\ 0 < x < 1$$

Άρα η h έχει ελάχιστο στο $x_1 = 1$ και επομένως $h(x) \geq h(1) = 0$.

Άρα:

- $h(x) > 0,\ x \in (0,\ 1)$, δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,\ 1)$ και επειδή η f είναι συνεχής στα σημεία $x_0 = 0$ και $x_1 = 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\ 1]$.
- $h(x) > 0,\ x \in (1,\ +\infty)$, δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1,\ +\infty)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο σημείο $x_1 = 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,\ +\infty)$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,\ +\infty)$.

Δ3. Για κάθε $x > 0$, έχουμε:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)+\ln x=\frac{\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1}+\ln x=\frac{-\frac{\ln x}{x}}{\frac{1-x}{x}}+\ln x=-\frac{\ln x}{1-x}+\ln x=$$

$$=\frac{-\ln x+\ln x-x\ln x}{1-x}=\frac{x\ln x}{x-1}=f(x)$$

Δ4. Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(e^x)}{e^{f(x)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x\ln e^x}{e^x-1}}{e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}\cdot e^{\ln x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{xe^x}{e^x-1}}{xe^{f\left(\frac{1}{x}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x}{e^x-1}\cdot\frac{1}{e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}}\right] \quad (1)$$

Για το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-1}$ θέτουμε $u=e^x$ και έχουμε:

$$x\to+\infty \Leftrightarrow u\to+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-1}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u}{u-1}=1$$

Για το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}}$ θέτουμε $t=\frac{1}{x}$ και έχουμε (f συνεχής στο 0):

$$x\to+\infty \Leftrightarrow t\to 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}}=\lim_{t\to0}\frac{1}{e^{f(t)}}=\frac{1}{e^{f(0)}}=1$$

Επομένως η (1) γίνεται:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(e^x)}{e^{f(x)}}==\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-1}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}}=1\cdot1=1$$

Τα 10 απαιτητικά θέματα θα λύνονται σταδιακά στην ερίοδο του Πάσχα στον Μαθηματικό Περιηγητή (blogs.sch.gr/iokaragi) προκειμένου να πάρξει και συμμετοχή των μαθητών στις λύσεις όταν έχουν ολοκληρώσει την προετοιμασία τους.