

1^ο ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΕΝΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2019
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
05/04/2019

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + b$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

A2. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν:

- ♦ Η f είναι συνεχής στο Δ και
- ♦ $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση «1-1», αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: Αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

β. Αν για μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$ με $\alpha < \beta$, τότε ορίζεται η $\frac{1}{f'(x)}$ στο $[\alpha, \beta]$.

γ. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: (\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο β .

δ. Αν $\alpha > 1$, τότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$.

ε. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι αντιστρέψιμη τότε η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

Μονάδες 10

A4.

α. Να χαρακτηρίσετε την επόμενη πρόταση ως Ψευδή ή Αληθή:

«Για όλες τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f + g$ συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι και η f και η g είναι επίσης συνεχείς συναρτήσεις στο x_0 ».

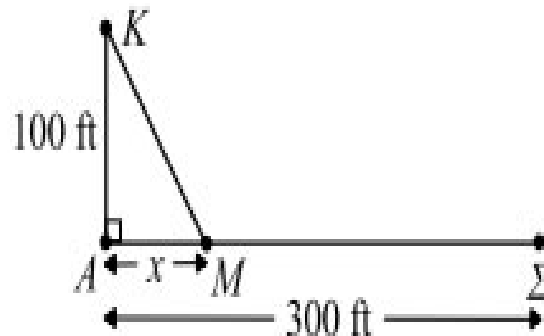
Μονάδες 2

β. Αν η παραπάνω πρόταση είναι αληθής να το αποδείξετε, ενώ αν είναι ψευδής να δώσετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Β

Ένας κολυμβητής K βρίσκεται στη θάλασσα 100ft μακριά από το πλησιέστερο σημείο A μιας ευθύγραμμης ακτής, ενώ το σπίτι του Σ βρίσκεται 300ft μακριά από το σημείο A . Υποθέτουμε ότι ο κολυμβητής μπορεί να κολυμβήσει με ταχύτητα 3ft/s και να τρέξει στην ακτή με ταχύτητα 5ft/s.



B1. Να αποδείξετε ότι για να διανύσει τη διαδρομή $KM\Sigma$ του διπλανού σχήματος χρειάζεται χρόνο T :

$$T(x) = \frac{\sqrt{100^2 + x^2}}{3} + \frac{300 - x}{5}$$

Μονάδες 10

B2. Για ποια τιμή του x ο κολυμβητής θα χρειαστεί το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του;

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 + x + 1, x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο, το $A(-1, -1)$.

Μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι:

α. Ισχύει: $|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| \leq |x - y| \leq |f(x) - f(y)|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

β. Η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

Μονάδες 2χ3=6

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f^{-1}(\xi) + 2\xi = 0$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = e^x(x^2 + x + 3)$ και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι, ώστε να ισχύει:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+h) - g(2-h)}{h} = 0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $g'(2) = 0$

Μονάδες 6

Δ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f για $x \rightarrow -\infty$

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 6

Δ4. Να βρείτε σημείο B της C_h με $h(x) = \sqrt{f(x)}$ ώστε το σημείο $A(2, 0)$ να απέχει την ελάχιστη απόσταση από τη C_h και να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_h είναι κάθετη στην ευθεία AB .

Μονάδες 7

Διάρκεια εξέτασης: **3 ώρες**

Επιστημονικά υπεύθυνος: Καραγιάννης Ιωάννης, Συντονιστής Εκπαιδευτικού Έργου Ν. Δωδεκανήσου, 2^ο ΠΕ.Κ.Ε.Σ Ν. Αγαίου.