ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΚΑΤΟΙΚΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(α, x_o)\cup(x_o, β)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

Μονάδες 7

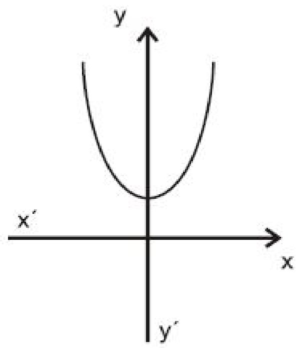
Απάντηση: Η απόδειξη της σελίδας 145 του Σχολικού Βιβλίου.

A2. Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A;

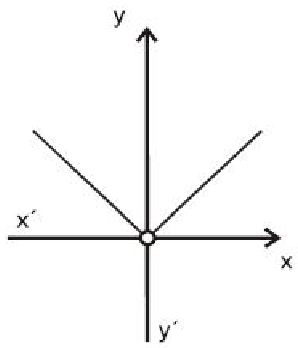
Απάντηση: Ο Ορισμός της σελίδας 15 του Σχολικού Βιβλίου.

Μονάδες 4

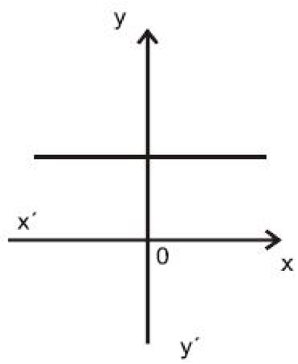
A3. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, F, G, H, T.



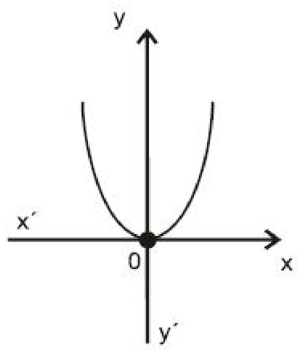
(f)



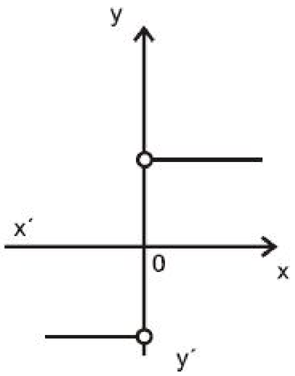
(g)



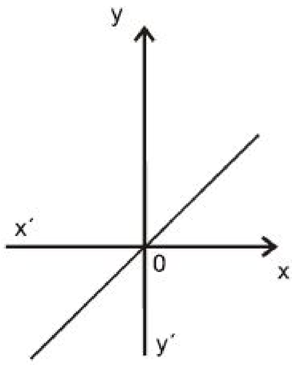
(F)



(G)



(Η)



(Τ)

Να γράψετε στο τετράδιό σας ποια από τις συναρτήσεις F, G, H, T μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης f και ποια της g.

Μονάδες 4

Απάντηση: Της T μπορεί να είναι η f.

Της H μπορεί να είναι η g.

A4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων f,g:(0, +∞) → ℝ, αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right] = 0$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

Απάντηση: Ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Απάντηση: Το παράδειγμα της παραγράφου 1.6 στο σχολικό βιβλίο με:

$$f(x) = -\frac{1}{x^2}+1,\ g(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to 0} g(x) = +\infty,\ \lim_{x\to 0}\left(f(x)+g(x)\right) = 1 \neq 0$$

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f: ℝ → ℝ μπορεί να τέμνει μια ασύμπτωτή της.

Απάντηση: Σωστή

β) Αν μια συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ‘1-1’, τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση

της f το πολύ σε ένα σημείο.

Απάντηση: Σωστή

γ) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το [0, 1] και σύνολο τιμών το [2, 3], τότε ορίζεται η f o g με πεδίο ορισμού το [0, 1] και σύνολο τιμών το [2, 3].

Μονάδες 6

Απάντηση: Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + \alpha, & x \le 1 \end{cases}$

B1. Να υπολογίσετε το α∈ $\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

Μονάδες 3

ΛΥΣΗ:

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(1,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων (πολυωνυμικών)
- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty,1)$, ως πολυωνυμική.

Θα πρέπει να είναι συνχής και στο σημείο $x_0 = 1$, δηλαδή πρέπει και αρκεί:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 2 = a+1 \Leftrightarrow a = 1$$

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι α = 1 .

B2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{2},4\right]$

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ: Η συνάρτηση είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + 1, & x \le 1 \end{cases}$$

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{2},4\right]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ με παράγωγο $f'(x) = 2x$

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1,4)$, με παράγωγο $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
- Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{x+1}{x}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1}=-1$$

Επομένως η f **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ και άρα η f **δεν** ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle.

B3. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=-\frac{1}{4}x+2018$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ:

Αν $A_k(x_0, f(x_0))$ τα σημεία στα οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=-\frac{1}{4}x+2018$, τότε πρέπει να ισχύει $f'(x_0)=-\frac{1}{4}$.

Είναι:

- Αν $x_0<1$, τότε $f'(x_0)=2x_0$ και άρα:

$f'(x_0)=2x_0 \Leftrightarrow 2x_0=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0=-\frac{1}{8}$. Το αντίστοιχο σημείο είναι $A_1\left(-\frac{1}{8}, f\left(-\frac{1}{8}\right)\right)$ ή $A_1\left(-\frac{1}{8},\frac{65}{64}\right)$.

- Αν $x_0>1$, τότε $f'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$ και άρα:

$f'(x_0)=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{x_0^2}=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0=\pm 2$ και επειδή $x_0>1$ δεκτή τιμή είναι η $x_0=2$. Το αντίστοιχο σημείο είναι $A_2(2, f(2))$ ή $A_2\left(2,\frac{3}{2}\right)$.

- Αν $x_0=1$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη.

Οι εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά είναι:

- Στο $A_1: y-f\left(-\frac{1}{8}\right)=-\frac{1}{4}(x+\frac{1}{8}) \Leftrightarrow y-\frac{65}{64}=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{32} \Leftrightarrow y=-\frac{1}{4}x+\frac{63}{64}$
- Στο A_2: $y-f(2)=-\frac{1}{4}(x+2) \Leftrightarrow y-\frac{3}{2}=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2} \Leftrightarrow y=-\frac{1}{4}x+2$

B4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ:

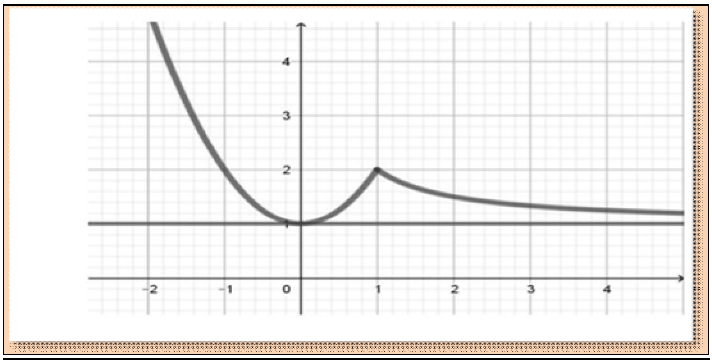
- Στο $-\infty$ η f δεν έχει πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες, ως πολυώνυμο 2[ου] βαθμού.
- Δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες, αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
- Στο $+\infty$ έχουμε:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x+1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x^2} = 0$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x} = 1$$

Άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Η γραφική παράσταση της f δίνεται στο επόμενο σχήμα:



Εικόνα 1 Γραφική παράσταση της f

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο: $f(x)=\frac{e^x}{x}$

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και όι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα $(e,+\infty)$.

ΛΥΣΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1»

Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>1$, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}>0, x>1$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$, άρα και «1-1».

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f που, επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$ έχουμε:

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{e^x}{x}=e,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $(e,+\infty)$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(a)}{x-1}+\frac{f^{-1}(a)}{x-2}+\frac{\eta\mu\alpha-2}{x}=0, \text{ όπου } a>e$$

Έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς x, μία στο δάστημα (0,1) και μία στο διάστημα (0,2).

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=x(x-2)f(a)+x(x-1)f^{-1}(a)+(x-1)(x-2)(\eta\mu a-2), x\in[0,2]$$

Η δοσμένη εξίσωση είναι ισοδύναμη:

$$\frac{f(a)}{x-1}+\frac{f^{-1}(a)}{x-2}+\frac{\eta\mu\alpha-2}{x}=0 \Leftrightarrow g(x)=0, \Leftrightarrow g(x)=0, x\in(0,1)\cup(1,2)$$

Στο διάστημα $[0,1]$ έχουμε:

- Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ (ως πολυωνυμική 2^{ου} βαθμού)
- $g(0)=2\eta\mu a-2=2(\eta\mu\alpha-1)<0$ $(-1<\eta\mu\alpha<1,\ \alpha>e)$
- $g(1)=-f(a)<0$ $(a>1 \Leftrightarrow f(a)>e)$

Άρα η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

Στο διάστημα $[1,2]$ έχουμε:

- Η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ (ως πολυωνυμική 2^{ου} βαθμού)
- $g(1)=-f(a)<0$ $(a>0 \Leftrightarrow 0<f(a)<1)$
- $g(2)=2f^{-1}(a)>0$ (αφού το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το $(1,+\infty)$).

Άρα η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1,2)$. Επειδή η εξίσωση $g(x)=0, x\in(0,1)\cup(1,2)$ είναι πολυωνυμική 2^{ου} βαθμού θα έχει το πολύ 2 πραγματικές ρίζες.

Άρα η εξίσωση $g(x)=0, x\in(0,1)\cup(1,2)$ θα έχει ακριβώς 2 πραγματικές ρίζες, μία στο διάστημα $(0,1)$ και μία στο διάστημα $(1,2)$.

Σχόλιο: Ο βαθμός της πολυωνυμικής εξίσωσης $g(x)=0, x\in(0,1)\cup(1,2)$ είναι 2, διότι ο συντελεστής του x^2 είναι :

$g(x)=0 \Leftrightarrow (f(a)+f^{-1}(a)+(\eta\mu\alpha-2)x^2+(2f(a)-f^{-1}(a)-3(\eta\mu\alpha-2))x+2\eta\mu(\alpha-2)$ και

$f(a)+f^{-1}(a)+\eta\mu\alpha-2>0$.

Γ3. Να αποδείξετε ότι $f(x)+1>e+\ln f(x)$

ΛΥΣΗ

Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$f(x)+1>e+\ln f(x)\Leftrightarrow e^{f(x)+1}>e^{e+\ln f(x)}\Leftrightarrow e^{f(x)}\cdot e>e^{e}\cdot e^{\ln f(x)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e\cdot e^{f(x)}>e^{e}f(x)\Leftrightarrow \frac{e^{f(x)}}{f(x)}>\frac{e^{e}}{e}\Leftrightarrow f(f(x))>f(e)\Leftrightarrow f(x)>e\ (f\nearrow)$$

Η τελευταία σχέση είναι αληθής και , ισοδύναμα, αποδείχθηκε το ζητούμενο

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f : [0, π] →ℝ, με τύπο: f(x) = 2ημx − x .

Δ1. Να βρείτε τα ακρότατα της f (τοπικά και ολικά).

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,\pi]$ με $f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x-1, x\in[0,\pi]$. Έχουμε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x-1=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}$$

Ο πίνακας προσήμου της f' δίνεται στον επόμενο πίνακα:

X	0	$\frac{\pi}{3}$ π
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	↗	↘

(Το πρόσημο της f' βρίσκεται με την σκέψη ότι επειδή η f' είναι συνεχής στο [0,π] θα διατηρεί σταθερό πρόσημο μεταξύ των ριζών. Δίνοντας μια οποιαδήποτε τιμή μεταξύ των ριζών π.χ.

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1>0,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0-1=-1<0$)

Δ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_o\in[0, \pi]$ η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο

Α(x_o, f(x_o)) έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ:

Η f είναι δύο φορές με $f''(x)=-2\eta\mu x, x\in[0,\pi]$. Άρα η f είναι κοίλη στο διάστημα $[0,\pi]$ και επομένως η γραφική της παράσταση θα βρίσκεται «πάνω» από την εφαπτομένη της στο σημείο Α, εκτός του ίδιου του σημείου Α. Άρα η εφαπτομένη και η γραφική παράσταση της f έχουν κοινό μόνο το σημείο Α.

Δ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^{\pi} f(x)\cdot \sigma\upsilon\nu x dx$

Μονάδες 87

ΛΥΣΗ:

$$\int_0^{\pi} f(x)\sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^{\pi}(2\eta\mu x - x)\sigma\upsilon\nu x dx = 2\int_0^{\pi}\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x dx - \int_0^{\pi} x\sigma\upsilon\nu x dx = 2I - J,$$

όπου $I = \int_0^{\pi}\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x dx,\ J = \int_0^{\pi} x\sigma\upsilon\nu x dx$.

Για το I : Θέτουμε:

$$u = \eta\mu x \Rightarrow du = \sigma\upsilon\nu x$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$x = \pi \Rightarrow u = 0$$

και άρα $I = 0$. Για το J έχουμε:

$$J = \int_0^{\pi} x\sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^{\pi} x(\eta\mu x)' dx = [x\eta\mu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\eta\mu x dx = 0 + [\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} = -2$$

Άρα: $\int_0^{\pi} f(x)\cdot \sigma\upsilon\nu x dx = 2$

Δ4. α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$. (μονάδες 2)

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\left[(f(x)-f(2x))\cdot \ln x\right]$. (μονάδες 5)

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ:

α) Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\eta\mu x - x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(2\frac{\eta\mu x}{x} - 1\right) = 2\cdot 1 - 1 = 1$$

β) Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\left[(f(x) - f(2x))\ln x\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x) - f(2x)}{x} x\ln x\right] (1)$$

$$K = \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x) - f(2x)}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} - 2\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{2x} = 1 - 2 = -1$$

$$\lim_{x\to 0}(x\ln x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

$$K = (-1)\cdot 0 = 0$$