**ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣΗΣ ΝΟ 2**

**Γ΄ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕ.Λ.**

**18 ΜΑΙΟΥ 2018**

---

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Εστω μια συνάρτηση $f$ και $x_0$ ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$, όταν $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ .

**Α2.**

**i.** Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $x_1, x_2 \in \Delta$. Πράγματι:

♦ Αν $x_1 = x_2$ , τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$ .

♦ Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η $f$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

Επειδή το $\xi$ είναι εσωτερικό σημείο του *Δ*, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότ ι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

**ii.** Η πρόταση:

*«Αν η* $\mathrm{f}$ *είναι κυρτή στο Δ, τότε* $\mathrm{f}''(\mathrm{x}) > 0$ *για κάθε εσωτερικό σημείο* $\mathrm{x}$ *του Δ»* είναι **Ψευδής.**

**Αντιπαράδειγμα:**

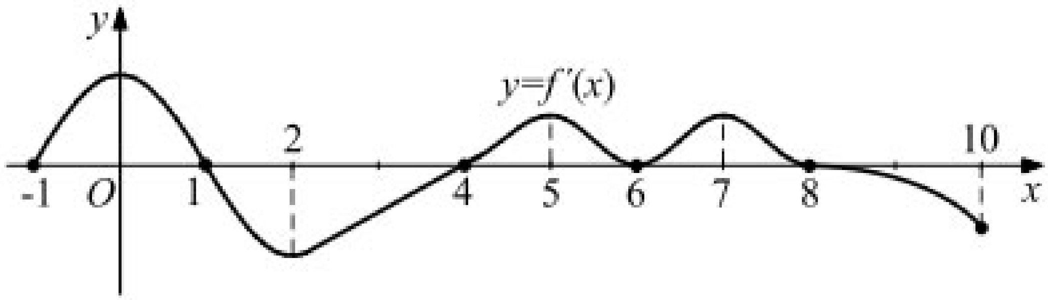
Η συνάρτηση $f(x) = x^4$ είναι είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 4x^3$. Η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα η $f$ είναι κυρτή.Ωστόσο $f''(x) = 12x^2$ για την οποία δεν ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού $f''(0) = 0$.

**Α3.**

**α)** Λάθος, **β)** Σωστό, **γ)** Σωστό, **δ)** Λάθος, **ε)** Σωστό.

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.**




**i.**

- Η $f$ στο διάστημα $[-1,1]$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη σ΄αυτό και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,1)$. Επομένως η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1,1]$.
- Η $f$ στο διάστημα $[1,4]$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη σ΄αυτό και ισχύει $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(1,4)$. Επομένως η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,4]$.
- Η $f$ στο διάστημα $[4,6]$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη σ΄αυτό και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(4,6)$. Επομένως η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[4,6]$.
- Η $f$ στο διάστημα $[6,8]$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη σ΄αυτό και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(6,8)$. Επομένως η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[6,8]$ (Μπορούμε να πούμε ότι η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[4,8]$)
- Η $f$ στο διάστημα $[8,10]$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη σ΄αυτό και ισχύει $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(8,10)$. Επομένως η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[8,10]$.

**ii.**

- Η $f$ στο διάστημα $[-1,0]$ είναι συνεχής και η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1,0)$. Επομένως η $f$ είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα προς τα άνω) στο διάστημα $[-1,0]$.
- Η $f$ στο διάστημα $[0,2]$ είναι συνεχής και η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,2)$. Επομένως η $f$ είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) στο διάστημα $[0,2]$.
- Η $f$ στο διάστημα $[2,5]$ είναι συνεχής και η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(2,5)$. Επομένως η $f$ είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα προς τα άνω) στο διάστημα $[2,5]$.

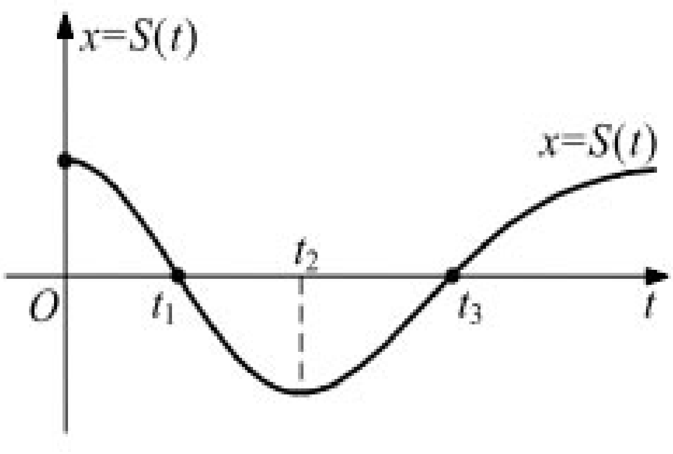
- Η $f$ στο διάστημα $[5,6]$ είναι συνεχής και η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(5,6)$. Επομένως η $f$ είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) στο διάστημα $[5,6]$.
- Η $f$ στο διάστημα $[6,7]$ είναι συνεχής και η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(6,7)$. Επομένως η $f$ είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα προς τα άνω) στο διάστημα $[6,7]$.
- Η $f$ στο διάστημα $[7,10]$ είναι συνεχής και η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(7,10)$. Επομένως η $f$ είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) στο διάστημα $[7,10]$.

**iii.**

- Πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων είναι τα σημεία 1,4,6,8 που είναι εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της και στα οποία η $f'$ μηδενίζεται, καθώς και τα σημεία -1,10 που είναι άκρα του πεδίου ορισμού της της $f$. Οι αριθμοί 1, 8 είναι θέσεις τοπικών μεγίστων, ενώ οι αριθμοί -1,4,10 είναι θέσεις τοπικών ελαχίστων. Ο αριθμός 6 δεν είναι θέση τοπικού ακροτάτου αφού η η $f'$ δεν αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 6.

Τέλος τα σημεία 0, 2, 5, 6, 7 είναι θέσεις σημείων καμπής, αφού σε αυτά η $f$ είναι συνεχής και αλλάζει η μονοτονία της $f'$.

**B2.**




**i.** Επειδή η συνάρτηση $S$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,t_2]$ το κινητό για $t \in [0,t_2]$ κινείται κατά την αρνητική φορά.

Επειδή η η συνάρτηση $S$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[t_2,+\infty\right)$ το κινητό για $t \geq t_2$ κινείται κατά την θετική φορά.

**ii.** Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα του κινητού είναι $u(t)=S'(t)$ και ότι τις χρονικές στιγμές $t_1,t_3$ παρουσιάζει καμπή. Από το δοθέν σχήμα έχουμε:

- Στο διάστημα $\left[0,t_1\right]$ η $S$ στρέφει τα κοίλα κάτω και άρα η $u(t)=S'(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό. Δηλαδή η ταχύτητα μειώνεται.
- Στο διάστημα $\left[t_1,t_3\right]$ η $S$ στρέφει τα κοίλα άνω και άρα η $u(t)=S'(t)$ είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό. Δηλαδή η ταχύτητα αυξάνεται.
- Στο διάστημα $\left[t_3,+\infty\right)$ η $S$ στρέφει τα κοίλα κάτω και άρα η $u(t)=S'(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό. Δηλαδή η ταχύτητα μειώνεται.

Ένας ενδεικτικός πίνακας μεταβολών της ταχύτητας είναι ο επόμενος:

| $t$ | $0$ $\qquad\qquad$ $t_1$ | $t_3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $u(t)=S'(t)$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | $\searrow$ |

Άρα, ταχύτητα του κινητού αυξάνεται στο διάστημα $\left[t_1,t_3\right]$ και στα διαστήματα $\left[0,t_1\right]$ και $\left[t_3,+\infty\right)$ μειώνεται.

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Για να είναι η $f$ αντιστρέψιμη στο πεδίο ορισμού της $D_f=(-2,+\infty)$ αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι συνάρτηση «1-1».Έστω $x_1,x_2>-2$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow e^{f(x_1)}=e^{f(x_2)}\Rightarrow f(e^{f(x_1)})=f(e^{f(x_2)})\Rightarrow \ln(x_1+4)=\ln(x_2+4)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1+4=x_2+4\Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η συνάρτηση $f$ είναι «1-1».

**Γ2.** Έχουμε:

$$(fof)(e^{f(x)})=\ln(\ln(x+4)+2)\Leftrightarrow f(f(e^{f(x)})=\ln(\ln(x+4)+2)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(\ln(x+4)=\ln(\ln(x+4)+2)\ (1)$$

Θέτουμε: $\ln(x+4)=y, y+2>0$ και η **(1)** γίνεται:

$f(y)=\ln(y+2), y>-2$ ή $f(x)=\ln(x+2), x>-2$

Η γραφική της παράσταση είναι η γνωστή λογαριθμική καμπύλη που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Α(-1,0)(να την σχεδιάσετε).

**Γ3**. Το πεδίο ορισμού της $fof$ είναι:

$$D_{fof}=\{x>-2\,/\,f(x)>-2\}=\{x>-2\,/\ln(x+2)>-2\}=\left\{x>-2\,/\,x>\frac{1}{e^2}-2\right\}=\left(\frac{1}{e^2}-2,+\infty\right)$$

Για κάθε $x\in\left(\frac{1}{e^2}-2,+\infty\right)$ έχουμε:

$$(fof)(x)=f(e^{-x}+2)\Leftrightarrow f(f(x))=f(e^{-x}+2)\Leftrightarrow f(x)=e^{-x}+2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x)-e^{-x}-2=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=f(x)-e^{-x}-2=\ln(x+2)-e^{-x}-2,\ x>-2$$

και εφαρμόζουμε το Θ.Bolzano στο διάστημα $\left[e^2-2,e^3-2\right]\subset\left(\frac{1}{e^2}-2,+\infty\right)$. Είναι:

- Η $g$ είναι συνεχής στο $\left[e^2-2,e^3-2\right]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο $\left[e^2-2,e^3-2\right]$.
- $g(e^2-2)=\ln e^2-e^{-(e^2-2)}-2=-e^{-(e^2-2)}<0$
- $g\left(e^3-2\right)=\ln e^3-e^{-(e^3-2)}-2=1-e^{-(e^3-2)}=1-\frac{1}{e^{(e^3-2)}}>0$

δηλαδή:

$$g(e^2-2)\cdot g\left(e^3-2\right),$$

οπότε ισχύει το Θ.Bolzano.

Άρα υπάρχει, ένα τουλάχιστον, $x_0\in\left(e^2-2,e^3-2\right)$ έτσι ώστε :

$$g(x_0)=0\Leftrightarrow(fof)(x_0)=f(e^{-x_0}+2)$$

**Γ4.** Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη για $x>-2$ με $f'(x)=\frac{1}{x+2},x>-2$ . Η $f'$ είναι επίσης παραγωγίσιμη $x>-2$ με $f''(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}<0$ για κάθε $x>-2$.

Επομένως η $f$ είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) ή ότι η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα για $x>1$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την $f$ στα διαστήματα:

$$\left[x_1,\frac{x_1+x_2}{2}\right]\subset(-2,+\infty),\ \left[\frac{x_1+x_2}{2},x_2\right]\subset(-2,+\infty)$$

αφού η $f$ είναι παραγωγίσιμη σε αυτά (άρα και συνεχής) διότι είναι παραγωγίσιμη στο $(-2,+\infty)$ .

Άρα υπάρχουν αντίστοιχα, τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in \left( x_1, \frac{x_1+x_2}{2} \right)$ και τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in \left( \frac{x_1+x_2}{2}, x_2 \right)$, τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2} - x_1} = 2\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (I)$$

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}} = 2\frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1} \quad (II)$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Rightarrow 2\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 2\frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x - 2e^{x-1}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ (ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,+\infty)$) με:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1 - 2e^{x-1} \quad \text{και} \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2e^{x-1} < 0, x > 0$$

επομένως η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα ·

Παρατηρούμε ότι:

$$f'(1) = \frac{1}{1} + 1 - 2e^{1-1} = 0$$

Έχουμε:

$$\bullet x > 1 \overset{f'\downarrow}{\Longrightarrow} f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0$$

$$\bullet x < 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) \Rightarrow f'(x) > 0$$

Το πρόσημο της $f'$ και η μονοτονία της $f$ φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | | − |
| $f(x)$ | γν.αύξουσα | | γν.φθίνουσα |

| | | |
|---|---|---|
| | | |

**<u>Μονοτονία</u>**

- η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,1\right]$
- γνησίως φθίνουσα στο $\left[1,+\infty\right)$

**<u>Ακρότατα</u>:** η $f$ παρουσιάζει για x=1 μέγιστο το f(1)=-1

**Εναλλακτικά**

**<u>2$^{ος}$ τρόπος</u>** (για τον υπολογισμό του ακροτάτου).

Για κάθε $x>0$ εχουμε:

$$\ln x \le x-1 \text{ (I) και } e^{x-1} \ge x \Leftrightarrow -2e^{x-1} \le -2x \text{ (II)}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (I) και (II) έχουμε:

$\ln x - 2e^{x-1} \le -x-1 \Leftrightarrow \ln x - 2e^{x-1} + x \le -x-x+x \Leftrightarrow f(x) \le -1 \Leftrightarrow f(x) \le f(1)$ για κάθε $x>0$.

Επομένως η $f$ παρουσιάζει στο 1 ολικό μέγιστο, το $f(1)=-1$

**Δ2.**

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$f'(x) = \int_e^{e^2} \frac{f'(\ln t)}{t}dt \Leftrightarrow f'(x) = \left[f(\ln t)\right]_e^{e^2} = f(2)-f(1)$$

Για την f ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο [1,2] (ως παραγωγίσιμη στο (0,+00)
- Είναι παραγωγίσιμη στο (1 ,2) (ως παραγωγίσιμη στο (0,+00)

αφού για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ του διαφορικού , υπάρχει $x_0 \in (1,\ 2)$ τέτοιο , ώστε:

$$f'(x_o) = f(2)-f(1)$$

Η ρίζα $x_o$ είναι μοναδική στο διάστημα (1, 2) αφού η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1.

**Εναλλακτικά:**

**<u>2$^{ος}$ τρόπος</u>:**

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$\Lambda(x) = f'(x) + f(1) - f(2)$$

για την οποία ισχύουν:

- είναι συνεχής στο [1,2] (ως παραγωγίσιμη στο (0,+00)

$\Lambda(1) = f'(1) + f(1) - f(2) = 0 + f(1) - f(2) > 0$

διότι $1 < 2 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(1) > f(2) \Rightarrow f(1) - f(2) > 0$

$$\Lambda(2) = f'(2) + f(1) - f(2) = \frac{1}{2} + 1 - 2e - 1 - \ln 2 - 2 + 2e = -\frac{3}{2} - \ln 2 < 0$$

Από το Θ.Bolzano υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε:

$$\Lambda(x_o) = 0 \Leftrightarrow f'(x_o) + f(1) - f(2) \Leftrightarrow f'(x_o) = f(2) - f(1)$$

Η ρίζα $x_o$ είναι μοναδική στο διάστημα (1,2) αφού η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1.

**Εναλλακτικά:**

**<u>3<sup>ος</sup> τρόπος</u>:**

Έστω η συνάρτηση:

$$K(x) = f(x) - x \cdot \left( f(2) - f(1) \right)$$

Για την f ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο [1,2] (ως παραγωγίσιμη στο (0,+00)
- Είναι παραγωγίσιμη στο (1,2) (ως παραγωγίσιμη στο (0,+00)
- $k(1) = 2f(1) - f(2)$ , $k(2) = 2f(1) - f(2)$

από το Θ.Rolle έχουμε :

υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε:

$$k'(x_o) = 0 \Leftrightarrow f'(x_o) + f(1) - f(2) \Leftrightarrow f'(x_o) = f(2) - f(1)$$

Η ρίζα $x_o$ είναι μοναδική στο διάστημα (1,2) αφού η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα άρα και «1-1».

**Δ3.** Η f παρουσιάζει για x=1 μέγιστο το f(1) άρα:

$$f(x) \le f(1) \Rightarrow f(x) \le -1 < 0$$

Επομένως :

$$f\left(\frac{1}{x}\right)<0\left(\gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ \frac{1}{x}>0\gamma\iota\alpha\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon x>0\right)$$

$$\left|h(x)\right|=\left|\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)\right|=\frac{1}{x^2}\left|f\left(\frac{1}{x}\right)\right|=-\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ για κάθε } x\in\left[\frac{1}{e},1\right]$$

το εμβαδόν του χωρίου ισούται με :

$$\mathrm{E}=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left|h(x)\right|dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left|\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)\right|dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}-\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)dx\overset{u=\frac{1}{x}}{=}\int_{e}^{1}f(u)du=$$

$$\int_{e}^{1}\left(\ln u+u-2e^{u-1}\right)du=\int_{e}^{1}\left(u\ln u-u+\frac{u^2}{2}-2e^{u-1}\right)'du=\frac{4e^{e-1}-e^2-5}{2}$$

**Δ4.** Η f παρουσιάζει για x=1 μέγιστο το f(1) άρα:

$$f(x)\le f(1)\Rightarrow\ f(x)\le -1<0$$

i) Η απόσταση των ($A_\lambda$ ,$B_\lambda$ ) είναι:

$$\left(A_\lambda B_\lambda\right)=\left|f(\lambda)-g(\lambda)\right|=\left|2f(\lambda)\right|=2\left|f(\lambda)\right|=-2f(\lambda)$$

και γράφεται ως συνάρτηση του λ , $d(\lambda)=-2f(\lambda)$

$d'(\lambda)=-2f'(\lambda)$ , $d'(\lambda)\ge 0\Leftrightarrow\ f'(\lambda)\le 0\Leftrightarrow \lambda\ge 1$

| λ | 0 | 1 +∞ |
|---|---|---|
| $d'(\lambda)$ | - | + |
| $d(\lambda)$ | γν.φθίνουσα | γν.αύξουσα |

άρα η ελάχιστη τιμή είναι $d(1)=\left(A_1B_1\right)=-2f(1)=2$

ii)

$$\mathrm{E}(\lambda)=\frac{1}{2}\lambda\cdot\left(-2f(\lambda)\right)=-\lambda\cdot f(\lambda)$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\mathrm{E}(\lambda)}{\lambda^2+1}=\ \lim_{\lambda\to+\infty}-\frac{\lambda\left(\ln\lambda+\lambda-2e^{\lambda-1}\right)}{\lambda^2+1}=\ -\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda}+1-2\frac{e^{\lambda-1}}{\lambda}\right)}{\lambda^2+1}=$$

$$-\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2+1}\right)\cdot\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda}+1-2\frac{e^{\lambda-1}}{\lambda}\right)=-1\cdot\left(0+1-\infty\right)=+\infty$$

γιατί :

- $\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\ln\lambda}{\lambda}\overset{D.L.H}{=}\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{(\ln\lambda)'}{(\lambda)'}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}=0$
- $\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{e^{\lambda-1}}{\lambda}\overset{D.L.H}{=}\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{(e^{\lambda-1})'}{(\lambda)'}=\lim_{\lambda\to+\infty}e^{\lambda-1}=+\infty$

- $\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\dfrac{\lambda^2}{\lambda^2+1}\right)= \quad \lim_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda^2}{\lambda^2}=\lim_{\lambda\to+\infty}1=1$

$$\lim_{\lambda\to0^+}\frac{\mathrm{E}(\lambda)}{\lambda^2+1}=\lim_{\lambda\to0^+}-\frac{\lambda\left(\ln\lambda+\lambda-2e^{\lambda-1}\right)}{\lambda^2+1}=-\lim_{\lambda\to0^+}\frac{\left(\ln\lambda+\lambda-2e^{\lambda-1}\right)}{\lambda+\dfrac{1}{\lambda}}\overset{D.L.H}{=}$$

$$-\lim_{\lambda\to0^+}\frac{\dfrac{1}{\lambda}+1-2e^{\lambda-1}}{1-\dfrac{1}{\lambda^2}}=-\lim_{\lambda\to0^+}\frac{\lambda+\lambda^2-2\lambda^2e^{\lambda-1}}{\lambda^2-1}=\frac{0+0-0}{0^2-1}=\frac{0}{-1}=0$$

Επιστημονική επιμέλεια:

Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

Ρουμελιώτης Αντώνης, καθηγητής Μαθηματικών