

ΠΡΟΣΟΜΟΙΗΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 28 ΜΑΡΤΙΟΥ 2018

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

A2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι κυρτή στο Δ τότε $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ »

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**.

A3. Να διατυπώσετε και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα του Fermat.

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$$

β) Οι κανόνες de l' Hospital δεν ισχύουν για πλευρικά όρια.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της C_f , σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη C_f , με εξαίρεση το σημείο επαφής.

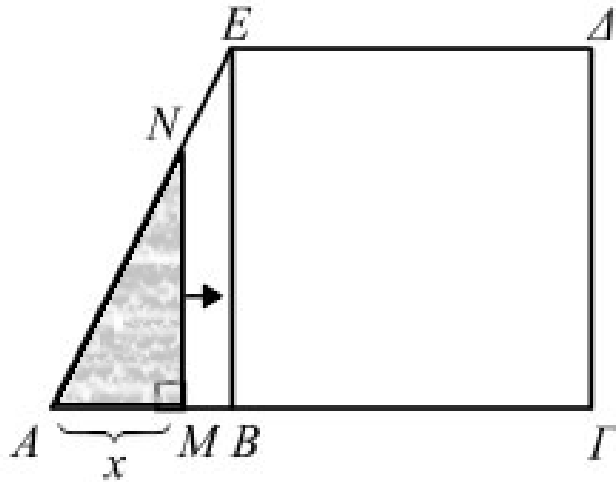
δ) Στα σημεία του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f στα οποία η f δεν είναι συνεχής, δεν αναζητούμε ασύμπτωτες της C_f

ε) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f σε κάθε σημείο καμπής της "διαπερνά" την C_f

Μονάδες 7+1+3+4+10

ΘΕΜΑ Β

Στο παρακάτω σχήμα το ΕΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 2 και ΑΒ=1



B1. Να εκφράσετε το ευθύγραμμο τμήμα MN συναρτήσει του x και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου, συναρτήσει του $x=AM$, όταν το σημείο M διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ, δίνεται απ' τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x \leq 1 \\ 2x - 1, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Μονάδες 5

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1

Μονάδες 3

B3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \eta \mu \left(\frac{1}{x} \right) + \sigma \upsilon \nu x - 1 + x}{f(x) + \eta \mu x}$

Μονάδες 7

B4. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι από το σημείο $A\left(2, \frac{3}{2}\right)$ άγονται δύο ακριβώς εφαπτόμενες ευθείες στην C_f τις οποίες και να βρείτε.

Μονάδες 8

Γ2. Αν $\varepsilon_1: y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, $\varepsilon_2: y=\frac{1}{4}x+1$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος **Γ1.**, να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

Μονάδες 6

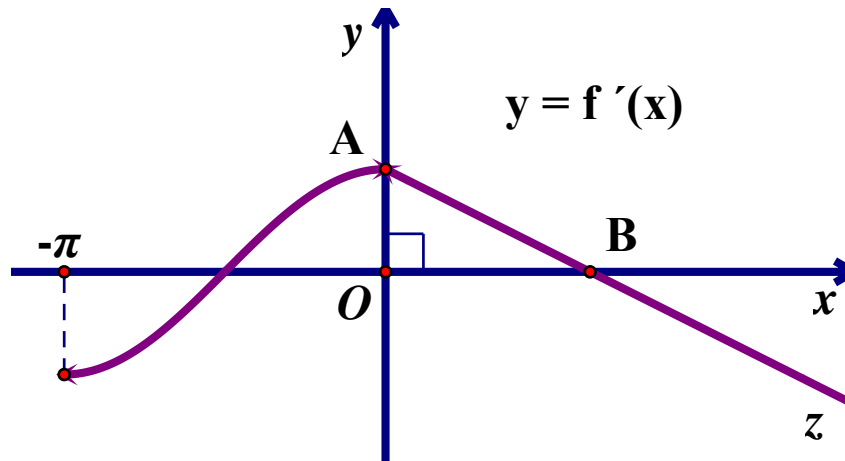
Γ3. Αν $g(x)=\ln x$ να προσδιορίσετε την συνάρτηση $g \circ f$ και να βρείτε την σχετική θέση των C_f και $C_{g \circ f}$ στο διάστημα $(0, +\infty)$

Μονάδες 6

Γ4. Ένα κινητό M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=g(f(x))$, $x>0$ με $x=x(t)$ και $y=y(t)$ ως συναρτήσεις του χρόνου t . Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $x(t)$ του M είναι διπλάσιος απ' τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$, αν υποθεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t \geq 0$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ



Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f : [-\pi, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0)=0$

Η C_f αποτελείται από δύο συνεχόμενες γραμμές, την $y=\sin x$ με $-\pi \leq x \leq 0$ και την ημιευθεία Az που σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού $(OAB)=1$

Δ1. Να αποδείξετε ότι
$$f(x) = \begin{cases} \eta \mu x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ x - \frac{x^2}{4}, & x > 0 \end{cases}$$

Μονάδες 5

Δ2. Αν $a, \beta \in [-\pi, +\infty)$ με $a < \beta$ να αποδείξετε ότι $f(\beta) - f(a) \leq \beta - a$

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι
$$\int_{-\pi/8}^{-\pi/9} \frac{1}{f(x)} dx < \ln \frac{8}{9}$$

Μονάδες 7

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $2018^{f^2(x)-1} = f(2) + \left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2$ στο διάστημα $(-\pi, 0)$

Μονάδες 8

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ