

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΡΟΣΟΣΜΟΙΩΣΗΣ 1, 23/03/2018**ΘΕΜΑ Α**

A1. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστο διάστημα $[a, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, β) και επιπλέον:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \text{ και } \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

A2. i. Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα αποδείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

οπότε έχουμε:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

ii. Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει.

Αντι-παράδειγμα:

Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , όμως έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το \mathbb{R} , αφού $f'(0) = 0$ (Ισχύει όμως $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$).

A3.

α) Σωστό

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Σωστό

Αντιπαραδείγματα στις Λάθος προτάσεις:

β) Η συνάρτηση $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σε αυτό αφού:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0$ η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ ενώ επειδή:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

η f δεν είναι αραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

δ) Έχουμε:

$$\int_0^{2\pi} \eta \mu x dx = -[\sigma \nu \chi]_0^{2\pi} = -\sigma \nu 2\pi - +\sigma \nu 0 = 1 + 1 = 0$$

Αλλά δεν είναι $\eta \mu x = 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

ΘΕΜΑ Β

B1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το \mathbb{R} . Έστω ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Θα εξετάσουμε το είδος μονοτονίας της g (για το σκοπό αυτό θα εξετάσουμε το πρόσημο της διαφοράς):

$$\begin{aligned} g(x_1) - g(x_2) &= \frac{f(x_1)}{f^2(x_1) + 1} - \frac{f(x_2)}{f^2(x_2) + 1} = \frac{f(x_1)(f^2(x_2) + 1) - f(x_2)(f^2(x_1) + 1)}{(f^2(x_2) + 1)(f^2(x_1) + 1)} = \\ &= \frac{f(x_1)f(x_2)(f(x_2) - f(x_1)) - (f(x_2) - f(x_1))}{(f^2(x_2) + 1)(f^2(x_1) + 1)} = \frac{(f(x_2) - f(x_1))(f(x_1)f(x_2) - 1)}{(f^2(x_2) + 1)(f^2(x_1) + 1)} \end{aligned} \quad (1)$$

Έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} 0 < f(x_1) < 1 \\ 0 < f(x_2) < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < f(x_1)f(x_2) < 1 \Rightarrow f(x_1)f(x_2) - 1 < 0$$

και $(f^2(x_2) + 1)(f^2(x_1) + 1) > 0$

Άρα:

♦ Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} τότε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow g(x_1) - g(x_2) < 0 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

, δηλαδή η g είναι επίσης γνησίως αύξουσα.

♦ Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} τότε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0 \Rightarrow g(x_1) - g(x_2) > 0 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

, δηλαδή η g είναι επίσης γνησίως φθίνουσα.

B2. Έστω ότι η f και g είναι και οι δύο γνησίως αύξουσες στο \mathbb{R} ή και οι δύο γνησίως φθίνουσες στο \mathbb{R} (αφού, σύμφωνα με το ερώτημα B1 έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας).

♦ f και g γνησίως αύξουσες στο \mathbb{R}

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) < f(g(x_2)) \Rightarrow (fog)(x_1) < (fog)(x_2)$$

δηλαδή η fog είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

♦ f και g γνησίως φθίνουσες στο \mathbb{R}

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) < f(g(x_2)) \Rightarrow (fog)(x_1) < (fog)(x_2)$$

δηλαδή η fog είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

Άρα σε κάθε περίπτωση η fog είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και επομένως είναι συνάρτηση «1-1».

B3. Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$(fog)(x^3+1) = (fog)(4x^2+2x) \Leftrightarrow x^3+1 = 4x^2+2x \Leftrightarrow x^3+1-4x^2-2x = 0$$

Θέτουμε:

$$h(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 1, x \in \mathbb{R}$$

και έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty, h(0) = 1, h(1) = -4 < 0$$

Αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$, υπάρχει $\alpha < 0$ τέτοιο, ώστε $h(\alpha) < 0$ και αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ υπάρχει $\beta > 0$ τέτοιο, ώστε $h(\beta) > 0$.

Από το θεώρημα του Bolzano στα διαδοχικά διαστήματα $[\alpha, 0]$, $[0, 1]$, $[1, \beta]$ (στα οποία πληρούνται οι προϋποθέσεις αφού η $h(x)$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο \mathbb{R} , άρα και στα διαστήματα αυτά) υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, 0)$, $\xi_2 \in (0, 1)$, $\xi_3 \in (1, \beta)$ τέτοια, ώστε:

$$h(\xi_1) = h(\xi_2) = h(\xi_3) = 0 \text{ με } \xi_1, \xi_2 > 0 \text{ και } \xi_3 < 0.$$

Τέλος επειδή η $h(x)$ είναι πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού δεν μπορεί να έχει περισσότερες από 3 ρίζες και επομένως οι παραπάνω ρίζες είναι μοναδικές.

2^{ος} τρόπος για τις ρίζες της h(x):

Βρίσκουμε μέσω της $h(x)$ τις εικόνες των διαστημάτων $(-\infty, 0)$, $[0, 1]$, $[1, +\infty)$ οι οποίες είναι (αφού πρώτα μελετήσουμε την μονοτονία της h) στις οποίες ανήκει το 0. Επομένως υπάρχουν 3 ρίζες και δεν υπάρχουν περισσότερες διότι ο βαθμός του πολυωνύμου είναι 3.

B4. Αφού η fog είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , έχουμε:

$$\begin{aligned} (fog)(x^3+4) > (fog)(3x^2) &\Leftrightarrow x^3+4 > 3x^2 \Leftrightarrow x^3-3x^2+4 > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)^2 > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1, x \neq 2 \end{aligned}$$

δηλαδή $x \in (1, 2) \cup (2, +\infty)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι «1-1» και επομένως είναι αντιστρέψιμη.

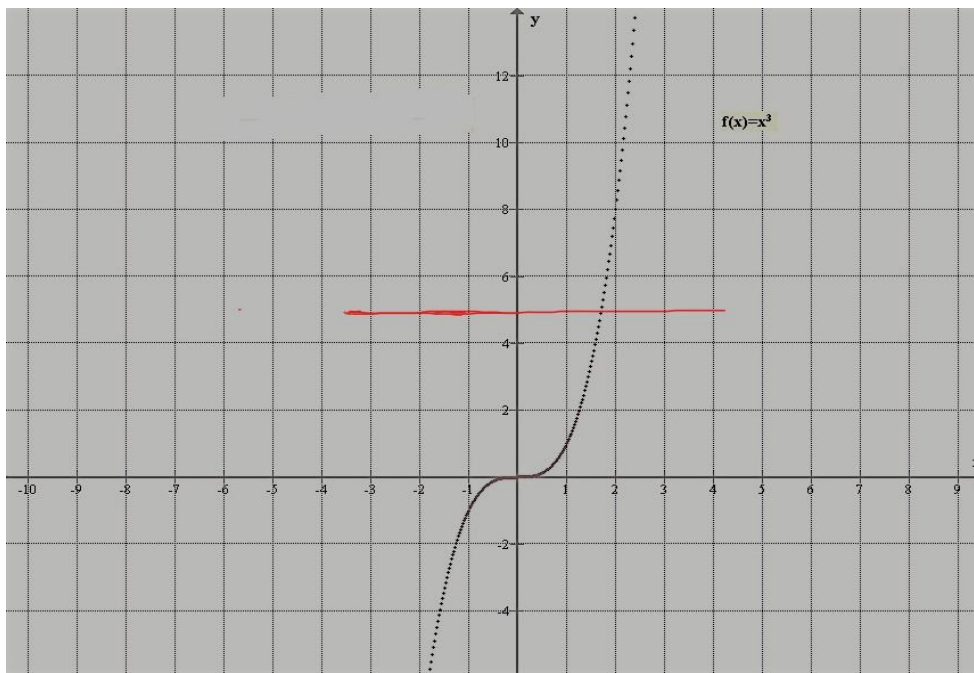
Για την εύρεση της αντίστροφης έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = x^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{y}, \text{ αν } y \geq 0 \\ x = -\sqrt[3]{-y}, \text{ αν } y < 0 \end{cases}$$

Άρα:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, \text{ αν } x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, \text{ αν } x < 0 \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι:



Αφού η f είναι «1-1» οποιαδήποτε παράλληλη ευθεία προς τον άξονα $x'x$ τέμνει την γραφική παράσταση C_f της f το πολύ σε ένα σημείο (ή ότι δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετεγμένη).

Γ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} (ως πολυωνυμική) με $f'(x) = 3x^2 > 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ και $x \in (0, +\infty)$ και αφού η f είναι συνεχής στο 0 είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$, επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \eta\mu x - x + \frac{1}{6}x^3$, $x \geq 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0, +\infty)$) με:

$$g'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1 + \frac{1}{2}x^2, \quad x \geq 0$$

Η συνάρτηση $g'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0, +\infty)$) με:

$g''(x) = -\eta\mu x + x > 0$ για κάθε $x > 0$ (αφού $\eta\mu x < x \Leftrightarrow -\eta\mu x + x > 0$ για κάθε $x > 0$, η ισότητα $\eta\mu x = x$ ισχύει μόνο για $x = 0$). Άρα η συνάρτηση $g'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα έχουμε:

$$x > 0 \Rightarrow g'(x) > g'(0) \Rightarrow g'(x) > 0, \text{ δηλαδή η } g \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } [0, +\infty)$$

$$x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) \Rightarrow g(x) > 0.$$

Επομένως για κάθε $x > 0$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} έχουμε:

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow \eta\mu x > x - \frac{1}{6}x^3 \Rightarrow f(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$$

Γ3. Έστω $M(x(t_0), y(t_0))$ το σημείο της καμπύλης στο οποίο την χρονική στιγμή $t = t_0$ έχουμε $x'(t_0) = y'(t_0)$. Για κάθε $t \geq 0$ έχουμε $y(t) = x^3(t)$. Παραγωγίζοντας τη σχέση αυτή για κάθε $t \geq 0$ έχουμε:

$$y'(t) = [x^3(t)]' \Leftrightarrow y'(t) = 3x^2(t) \cdot x'(t)$$

Για $t = t_0$ έχουμε:

$$y'(t_0) = 3x^2(t_0) \cdot x'(t_0) \Leftrightarrow x'(t_0) = 3x^2(t_0) \cdot x'(t_0) \Leftrightarrow 3x^2(t_0) = 1 \Leftrightarrow x^2(t_0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x(t_0) = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Άρα δεκτή τιμή η $x(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, οπότε $y(t_0) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{9}$. Επομένως το ζητούμενο σημείο

της καμπύλης για το οποίο $x'(t_0) = y'(t_0)$ είναι $M\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$.

Μια φυσική ερμηνεία του προβλήματος είναι η επόμενη:

Όταν το κινητό (σημείο) κινείται πάνω στην καμπύλη $y(t) = x^3(t)$ την χρονική στιγμή t_0 κατά

την οποία το κινητό διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$ η συνιστώσα της ταχύτητας στον

άξονα $x'x$ (οριζόντια συνιστώσα) είναι ίση με την συνιστώσα της ταχύτητας στον άξονα $y'y$ (κατακόρυφη συνιστώσα). $(x'(t)) > 0$ σημαίνει ότι το κινητό κινείται κατά την θετική κατεύθυνση του άξονα $x'x$).

Γ4. Για το ολοκλήρωμα I έχουμε:

$$I = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)g(-x)dx$$

αφού η g είναι άρτια $g(x) = g(-x)$ για κάθε $x \in [-1,1]$ θέτουμε:

$$-x = u \Leftrightarrow x = -u$$

$$dx = -du$$

$$x = -1 \Leftrightarrow u = 1$$

$$x = 1 \Leftrightarrow u = -1$$

Άρα έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)g(-x)dx = \int_{-1}^1 x^3 g(-x)dx = -\int_1^{-1} (-u)^3 g(u)du = \\ &= \int_{-1}^1 (-u)^3 g(u)du = -\int_{-1}^1 u^3 g(u)du = -I \end{aligned}$$

Επομένως:

$$I = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x) = x\eta\mu x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x - f(x) = \sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\eta\mu x - f(x))' = (x\sigma\upsilon\nu x)' \Leftrightarrow f(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

για $x = 0$ έχουμε:

$$f(0) = 0 + c \Leftrightarrow 0 = c \Leftrightarrow c = 0$$

άρα:

$$f(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

ii. Η συνάρτηση:

$$f(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x$$

είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$) με:

$$f'(x) = x\eta\mu x > 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ και η } f \text{ είναι συνεχής στο } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και ισχύει:

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(0) < f(x) \Leftrightarrow 0 < \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x > x\sigma\upsilon\nu x$$

Δ2. Έχουμε:

$$g(x) = |x\varepsilon\varphi x - x^2| = |x| \cdot |\varepsilon\varphi x - x|, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Από το ερώτημα (Δ1 ii) ισχύει:

$$\eta\mu x > x\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x > x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Έχουμε:

- ♦ Αν $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, τότε $-x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και ισχύει:

$$\varepsilon\varphi(-x) > -x \Leftrightarrow -\varepsilon\varphi x > -x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x < x$$

- ♦ για $x = 0 \Rightarrow g(0) = 0$

Άρα:

$$g(x) = x\varepsilon\varphi x - x^2, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων

συναρτήσεων στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$) με:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x\varepsilon\varphi x - x^2)' = \varepsilon\varphi x - 2x + \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\ &= (\varepsilon\varphi x - x) + x \left(\frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \right) = (\varepsilon\varphi x - x) + \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - x = (\varepsilon\varphi x - x) + x \cdot \varepsilon\varphi^2 x \end{aligned}$$

- ♦ Αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε $\varepsilon\varphi x - x > 0$ και $x\varepsilon\varphi^2 x > 0$ άρα $g'(x) > 0$
- ♦ Αν $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, τότε $\varepsilon\varphi x - x < 0$ και $x\varepsilon\varphi^2 x < 0$ άρα $g'(x) < 0$
- ♦ Αν $x = 0 \Rightarrow g'(0) = 0$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

Η g παρουσιάζει για $x = 0$ ολικό ελάχιστο το $g(0) = 0$ (Η g είναι συνεχής στο $x = 0$).

2^{ος} τρόπος:

$$g'(x) = (x \varepsilon \varphi x - x^2)' = \varepsilon \varphi x - 2x + \frac{x}{\sigma \upsilon \nu^2 x} = \frac{\eta \mu x \cdot \sigma \upsilon \nu x + x - 2x \sigma \upsilon \nu^2 x}{\sigma \upsilon \nu^2 x} =$$

$$= \frac{\sigma \upsilon \nu x \cdot (\eta \mu x - x \sigma \upsilon \nu x) + x \eta \mu^2 x}{\sigma \upsilon \nu^2 x}$$

και $g'(0) = 0$

- ♦ Αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε $\sigma \upsilon \nu x > 0$, $\eta \mu x > x \sigma \upsilon \nu x$, $x \eta \mu^2 x > 0$, τότε $g'(x) > 0$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

- ♦ Έστω $x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ με $x_1 < x_2$, τότε:

$$-x_1 > -x_2 \Rightarrow g(-x_1) > g(-x_2) \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

Η g παρουσιάζει για $x = 0$ ολικό ελάχιστο το $g(0) = 0$

Δ3. α) $g(x) = a$, όπου $a > 0$

- ♦ $g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = [0, +\infty)$ και $a \in [0, +\infty)$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(γιατί η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$) τέτοιο, ώστε $g(x_0) = a$

- ♦ $-x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ και $g(-x_0) = (-x_0) \varepsilon \varphi(-x_0) - (-x_0)^2 = g(x_0) = a$

Το $-x_0$ είναι μοναδικό (γιατί η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$)

Άρα το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $g(x) = a$, όταν $a > 0$ είναι $-x_0 + x_0 = 0$.

β). Επειδή x_1, x_2, x_3 οι θετικές ρίζες των εξισώσεων:

$$g(x) = 1, \quad g(x) = 2, \quad g(x) = 3$$

αντίστοιχα, έχουμε:

$$g(x_1) = 1, \quad g(x_2) = 2, \quad g(x_3) = 3$$

και είναι:

$$1 < 2 < 3 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2) < g(x_3) \Leftrightarrow x_1 < x_2 < x_3$$

από την εφαρμογή του Θ.Μ.Τ του Διαφορικού Λογισμού για την g στα $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ (αφού πληρούνται οι προϋποθέσεις διότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, επομένως και στα, $[x_1, x_2][x_2, x_3]$, άρα είναι και συνεχής σε αυτά) έχουμε ότι υπάρχουν ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (x_2, x_3)$:

$$(x_2 - x_1) \cdot g'(\xi_1) = g(x_2) - g(x_1) = 2 - 1 = 1, \xi_1 \in (x_1, x_2)$$

$$(x_3 - x_2) \cdot g'(\xi_2) = g(x_3) - g(x_2) = 3 - 2 = 1$$

Προσθέτοντας τις προηγούμενες σχέσεις κατά μέλη προκύπτει:

$$(x_2 - x_1) \cdot g'(\xi_1) + (x_3 - x_2) \cdot g'(\xi_2) = 2$$

Δ4. i. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln[\eta\mu x - f(x)] - \ln x + x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x) + x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x} \stackrel{D.L.P}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\varepsilon\varphi x + 2x}{2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x + 1} \stackrel{D.L.P}{=} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + 2}{2\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\eta\mu^2 x + 2\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x} = \\ &= \frac{-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 0} + 2}{2\sigma\upsilon\nu^2 0 - 2\eta\mu^2 0 + 2\eta\mu 0 + 0\sigma\upsilon\nu 0} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln[\eta\mu x - f(x)] - \ln x + x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x) + x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)}{x^2} + 1}{\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 - \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}} = l \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\varepsilon\varphi x}{2x} &\stackrel{D.L.H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)}{x^2} \stackrel{D.L.H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2\sigma\upsilon\nu^2 x} = -\frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 &= 1^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} &\stackrel{D.L.H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\eta\mu x}{1} = 0 \end{aligned}$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln[\eta\mu x - f(x)] - \ln x + x^2}{\eta\mu^2 x - \chi\sigma\nu\nu x + x} = \frac{-\frac{1}{2} + 1}{1 - 0} = \frac{1}{2}$$

ii. Για $0 < x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \eta\mu x - \chi\sigma\nu\nu x > 0$ (I) (από το ερώτημα Δ1 ii) και $\chi\eta\mu x > 0$ (II) για κάθε

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Άρα με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$\eta\mu x - \chi\sigma\nu\nu x + \chi\eta\mu x > 0 \text{ (III), για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f, -f'$ τέμνονται μόνο στο σημείο $O(0,0)$ (αφού $f(0) = f'(0) = 0$).

Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

f και $-f'$ και την ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$

είναι (λόγω της σχέσης (III)) έχουμε:

$$|\eta\mu x - \chi\sigma\nu\nu x + \chi\eta\mu x| = \eta\mu x - \chi\sigma\nu\nu x + \chi\eta\mu x \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{):}$$

$$E(\Omega) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x) - f'(x)| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\eta\mu x - \chi\sigma\nu\nu x + \chi\eta\mu x| dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta\mu x - \chi\sigma\nu\nu x + \chi\eta\mu x) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \chi\sigma\nu\nu x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \chi\eta\mu x dx = I_1 - I_2 + I_3 \text{ (1)}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x dx = [-\sigma\nu\nu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \chi\sigma\nu\nu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\eta\mu x)' dx =$$

$$= [\chi\eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x dx = \frac{\pi}{2} + [\sigma\nu\nu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \chi\eta\mu x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sigma\nu\nu x)' dx = -[\chi\sigma\nu\nu x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\nu\nu x dx = [\eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Άρα:

$$E(\Omega) = 1 - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + 1 = 3 - \frac{\pi}{2} \text{ τ.μ.}$$

Εναλλακτικά για το μοναδικό σημείο τομής των $f, -f'$ έχουμε:

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f, -f'$ τέμνονται μόνο στο σημείο $O(0,0)$ αφού:

$$\begin{aligned} f(x) = -f'(x) &\Leftrightarrow \eta\mu x - \chi\sigma\upsilon\nu x = -\chi\eta\mu x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \eta\mu x - \chi\sigma\upsilon\nu x + \chi\eta\mu x = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Προφανώς για $x = 0$ η (1) επαληθεύεται, δηλαδή οι $f, -f'$ τέμνονται στο $O(0,0)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$K(x) = \eta\mu x - \chi\sigma\upsilon\nu x + \chi\eta\mu x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων

παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$) με:

$$K'(x) = \chi\eta\mu x + \eta\mu x + \chi\sigma\upsilon\nu x > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

και επειδή η K είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, άρα και

«1-1» και επομένως η $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της (1). Άρα οι $f, -f'$ τέμνονται μόνο στο σημείο $O(0,0)$.

Καραγιάννης Ιωάννης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών