



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
35^η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
3 Μαρτίου 2018

Θέματα μικρών τάξεων

Ενδεικτικές λύσεις

Πρόβλημα 1

- (α) Να εξετάσετε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός x , τέτοιος ώστε οι αριθμοί $x + \sqrt{3}$ και $x^2 + \sqrt{3}$ να είναι και οι δύο ρητοί.
(β) Να εξετάσετε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός y τέτοιος ώστε οι αριθμοί $y + \sqrt{3}$ και $y^3 + \sqrt{3}$ να είναι και οι δύο ρητοί.

Λύση

- (α) Έστω $x + \sqrt{3} = q$, $x^2 + \sqrt{3} = p$ με $p, q \in \mathbb{Q}$. Τότε

$$x = q - \sqrt{3} \Rightarrow x^2 = q^2 - 2q\sqrt{3} + 3$$

οπότε αν αντικαταστήσουμε στη δεύτερη παίρνουμε:

$$(q^2 - 2q\sqrt{3} + 3) + \sqrt{3} = p \Leftrightarrow -\sqrt{3}(2q - 1) = p - q^2 - 3$$

Τότε πρέπει $2q - 1 = 0 \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}$. Σε αυτή την περίπτωση $p = q^2 + 3 \Rightarrow q = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4}$

και $x = \frac{1}{2} - \sqrt{3}$.

- (β) Έστω $y + \sqrt{3} = q$, $y^3 + \sqrt{3} = p$ με $p, q \in \mathbb{Q}$. Τότε

$$y = q - \sqrt{3} \Rightarrow y^3 = q^3 - 3q^2\sqrt{3} + 9q - 3\sqrt{3}$$

οπότε αν αντικαταστήσουμε στη δεύτερη παίρνουμε:

$$(q^3 - 3q^2\sqrt{3} + 9q - 3\sqrt{3}) + \sqrt{3} = p \Leftrightarrow -\sqrt{3}(3q^2 + 2) = p - q^3 - 9q \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{3} = \frac{q^3 + 9q - p}{3q^2 + 2} \in \mathbb{Q}$$

που είναι άτοπο.

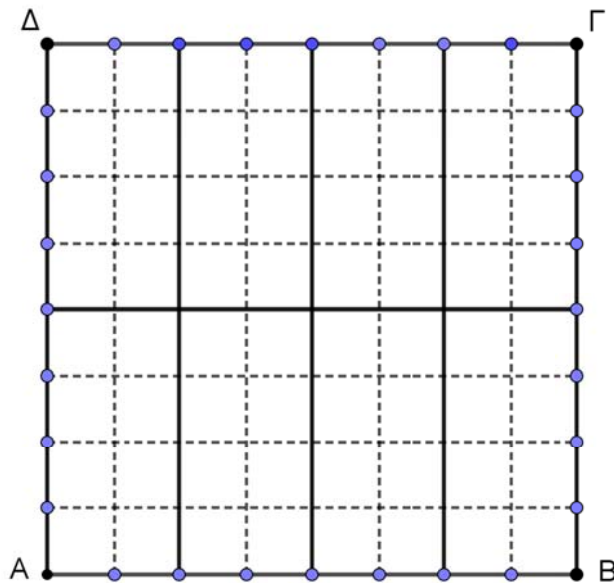
Πρόβλημα 2

Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 8 cm το οποίο υποδιαιρούμε με ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του σε 64 μικρά τετράγωνα πλευράς 1cm. Χρωματίζουμε 7 μικρά τετράγωνα μαύρα, ενώ όλα τα υπόλοιπα 57 μικρά τετράγωνα είναι λευκά. Υποθέτουμε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε ανεξάρτητα από τη θέση των 7 μαύρων μικρών τετραγώνων, υπάρχει ορθογώνιο εμβαδού $k \text{ cm}^2$ με πλευρές παράλληλες στις πλευρές του ΑΒΓΔ και με όλα τα μικρά τετράγωνα από τα οποία

αποτελείται να είναι λευκά, που μπορεί να αποκοπεί από το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του k .

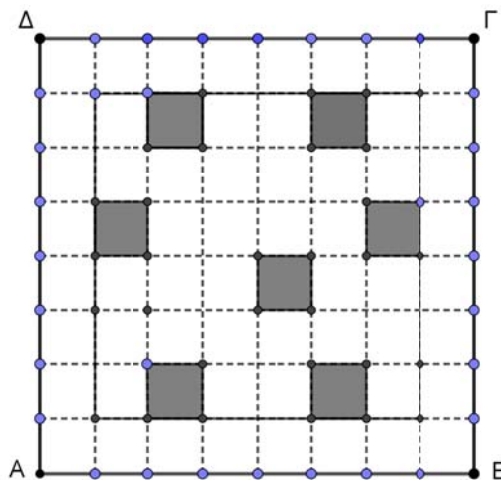
Λύση

Μπορούμε να χωρίσουμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ σε 8 ορθογώνια 4×2 . Έτσι μπορούμε να χρωματίσουμε στα επτά 4×2 ορθογώνια από ένα μαύρο μικρό τετράγωνο, οπότε από την αρχή του Περιστερώνα θα μείνει με λευκά μικρά τετράγωνα τουλάχιστον ένα 4×2 ορθογώνιο εμβαδού 8 cm^2 .



Σχήμα 1

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι υπάρχει χρωματισμός των 7 μικρών τετραγώνων έτσι ώστε να μην υπάρχει ορθογώνιο με λευκά τετράγωνα εμβαδού μεγαλύτερου των 8 cm^2 . Στο τετράγωνο του παρακάτω σχήματος 2 αφήνουμε όλα τα συνοριακά μικρά τετράγωνα λευκά και στο 6×6 εσωτερικό τετράγωνο χρωματίζουμε 7 μικρά τετράγωνα μαύρα, έτσι ώστε να μην υπάρχει ορθογώνιο με λευκά τετράγωνα εμβαδού μεγαλύτερου των 8 cm^2 .



Σχήμα 2

Σημείωση: Για το πρώτο κομμάτι της άσκησης μπορούμε να θεωρήσουμε τις 8 γραμμές ή τις 8 στήλες του πίνακα και να κάνουμε το επιχειρήμα όπως στην παραπάνω λύση με την αρχή του Περιστερώνα.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε τους θετικούς ακεραίους a, b τέτοιους ώστε ο αριθμός

$$\frac{(a+b)^2 + 4a}{ab}$$

να είναι ακέραιος. Να αποδείξετε ότι αν ο b είναι περιττός, τότε ο a είναι τέλειο τετράγωνο.

Λύση

Έστω $\frac{(a+b)^2 + 4a}{ab} = \kappa \in \mathbb{Z}$. Η τελευταία γράφεται ως

$$(a+b)^2 + 4a = \kappa ab \quad (1)$$

Θα δείξουμε ότι ο a είναι περιττός. (2) Πράγματι, αν $2 \mid a$, τότε θα πρέπει $2 \mid (a+b)^2$, τότε θα πρέπει και ο b να είναι άρτιος, άτοπο. Θεωρούμε τώρα την (1) σαν δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς b , στη μορφή:

$$b^2 + b(2 - \kappa)a + a^2 + 4a = 0$$

Για να έχει αυτή ακέραιες λύσεις, η διακρίνουσά της θα πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο. Έχουμε ότι $\Delta = a^2(\kappa - 2)^2 - 4(a^2 + 4a) = a(a(\kappa - 2)^2 - 4a - 16)$. Επομένως το γινόμενο των $a, a(\kappa - 2)^2 - 4a - 16$ είναι τέλειο τετράγωνο. Επειδή όμως ο a είναι περιττός είναι πρώτοι μεταξύ τους, οπότε ο καθένας τους θα πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο, άρα ο a είναι τέλειο τετράγωνο.

2^{ος} τρόπος:

Έστω $d = (a, b)$ και γράφουμε $a = dx, b = dy$, με $(x, y) = 1$. Παρατηρούμε ότι επειδή $d \mid b$ και ο b είναι περιττός, θα πρέπει d περιττός. Τότε ο αριθμός

$$\frac{(a+b)^2 + 4a}{ab} = \frac{d^2(x+y)^2 + 4dx}{d^2xy} = \frac{d(x+y)^2 + 4x}{dxy}$$

είναι ακέραιος. Άρα $x \mid d(x+y)^2 + 4x \Rightarrow x \mid dy^2$ και επειδή $(x, y) = 1$, πρέπει $x \mid d$.

Επίσης, $d \mid d(x+y)^2 + 4x \Rightarrow d \mid 4x$ και αφού d περιττός, $d \mid x$. Από τις δύο αυτές σχέσεις έχουμε $d = x$, άρα $a = d^2$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma < B\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο c με κέντρο O και ακτίνα R . Ονομάζουμε Δ το αντιδιαμετρικό της κορυφής A . Δίνεται επίσης ο κύκλος c_1 του οποίου το κέντρο K βρίσκεται επάνω στο τμήμα $B\Delta$ και περνάει από τα σημεία B και Γ . Αν ο κύκλος c_1 τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E , να αποδείξετε

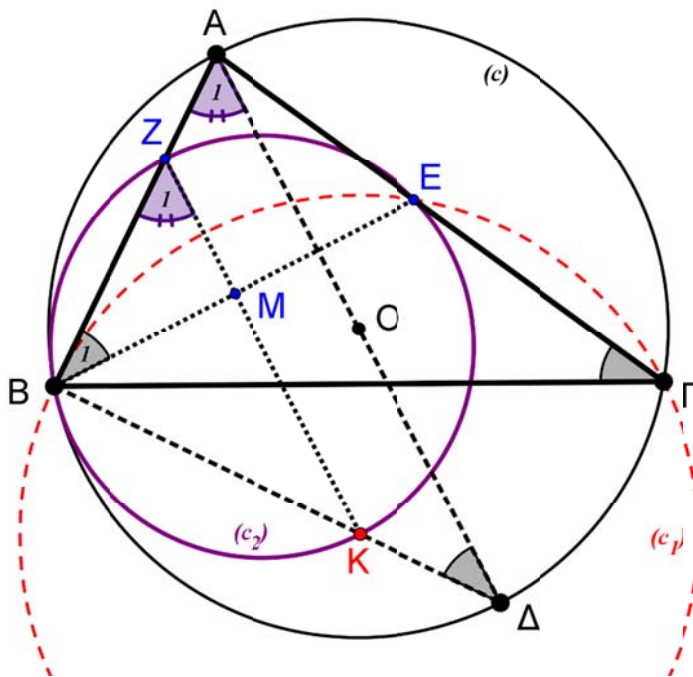
ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BKE , έστω c_2 , εφάπτεται του περιγεγραμμένου κύκλου c .

Λύση (1^{ος} Τρόπος)

Έστω Z η τομή του κύκλου c_2 με την AB και M η τομή της KZ με την BE . Η γωνία $\hat{A}B\Delta$ (άρα και η γωνία $\hat{Z}BK$) είναι ορθή διότι βαίνει στη διάμετρο AD του περιγεγραμμένου κύκλου $c(O, R)$.

Εφόσον $\hat{ZBK} = 90^\circ$, η ZK είναι διάμετρος του κύκλου c_2 και κατά συνέπεια η ZK θα είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής BE των κύκλων c_1 και c_2 . Η AB εφάπτεται στον κύκλο c_1 , άρα $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο BMZ έχουμε:

$$\hat{Z}_1 = 90^\circ - \hat{B}_1 = 90^\circ - \hat{\Gamma} \quad (1)$$



Σχήμα 3

Οι γωνίες $\hat{\Delta}, \hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο c και βαίνουν στο ίδιο τόξο, άρα $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$, έχουμε: $\hat{A}_1 = 90^\circ - \hat{\Delta} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$ (2).

Από τις ισότητες γωνιών (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι: $\hat{A}_1 = \hat{Z}_1$, οπότε τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Delta$ και KZ είναι παράλληλα και κατά συνέπεια το

τετράπλευρο $A\Delta KZ$ είναι τραπέζιο. Εφόσον το O είναι το μέσο της $A\Delta$, συμπεραίνουμε ότι η OB θα διέρχεται από το μέσο της KZ που είναι το κέντρο του κύκλου c_2 . Άρα τα κέντρα των κύκλων c , c_2 και το σημείο B θα είναι συνευθειακά.

Εναλλακτικά, το τελικό συμπέρασμα (που διατυπώνεται στην τελευταία παράγραφο) θα μπορούσε να προκύψει και με τη βοήθεια του μετασχηματισμού της ομοιοθεσίας:

Από τις ισότητες γωνιών (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι: $\hat{A}_1 = \hat{Z}_1$, οπότε τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Delta$ και KZ είναι παράλληλα και κατά συνέπεια ομοιόθετα στην ομοιοθεσία με κέντρο ομοιοθεσίας το σημείο B .

Εφόσον τα τμήματα $A\Delta$ και KZ (δηλαδή, οι διάμετροι των κύκλων c και c_2) είναι ομοιόθετα με κέντρο ομοιοθεσίας το B και οι κύκλοι c και c_2 θα είναι ομοιόθετοι με το ίδιο κέντρο ομοιοθεσίας. Δηλαδή τα κέντρα των κύκλων c , c_2 και το σημείο B θα είναι συνευθειακά.

2^{ος} τρόπος

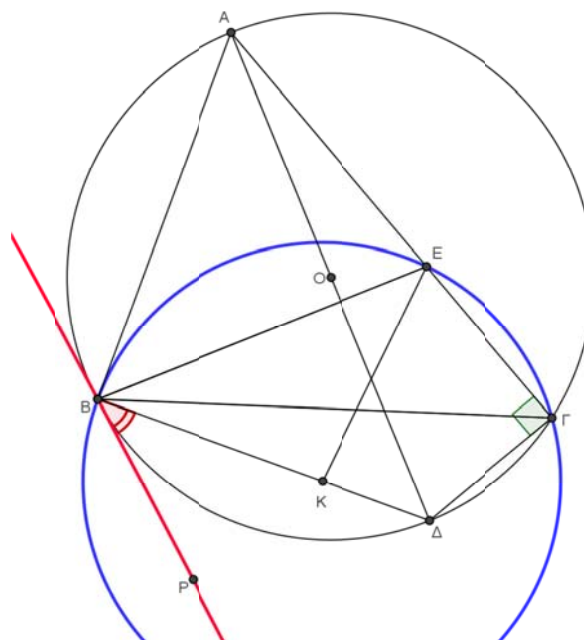
Θα αποδείξουμε ότι ο c_2 εφάπτεται του κύκλου $c(O, R)$ στο σημείο B . Για το σκοπό αυτό θα δείξουμε ότι οι δύο αυτοί κύκλοι έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο B . Έστω BP η εφαπτομένη του $c(O, R)$ στο σημείο B και ονομάζουμε $\widehat{KBP} = \omega$. Για να δείξουμε ότι η BP είναι εφαπτομένη του c_2 στο B , αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\widehat{BEK} = \omega. \quad (1)$$

Επειδή η BP η εφαπτομένη του $c(O, R)$, έχουμε ότι $\widehat{\Delta\Gamma B} = \omega$. Επιπλέον η $A\Delta$ είναι διάμετρος, οπότε $\widehat{A\Gamma\Delta} = 90^\circ$, οπότε $\widehat{E\Gamma B} = 90^\circ - \omega$. Όμως

$$\widehat{BKE} = 2\widehat{B\Gamma E} = 2(90^\circ - \omega) = 180^\circ - 2\omega, \quad (2)$$

από τη σχέση επίκεντρης εγγεγραμμένης στον c_1 . Όμως το τρίγωνο BKE είναι ισοσκελές επομένως λόγω της (2) θα είναι $\widehat{KBE} = \widehat{KEB} = \omega$, οπότε η (1) ισχύει και έχουμε το ζητούμενο.





ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
35^η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
3 Μαρτίου 2018

Θέματα μεγάλων τάξεων

Ενδεικτικές λύσεις

Πρόβλημα 1

Θεωρούμε την ακολουθία (x_n) , $n \in \mathbb{N}^*$, που ορίζεται αναδρομικά από τη σχέση $x_{n+1} = 3x_n^3 + x_n$, με $x_1 = \frac{a}{b}$, όπου a, b είναι θετικοί ακέραιοι και ο 3 δεν διαιρεί τον ακέραιο b . Αν για κάποιο θετικό ακέραιο m ο x_m είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού, να αποδείξετε ότι και ο x_1 είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Λύση

Θα δείξουμε ότι αν ο x_{n+1} είναι τέλειο τετράγωνο ρητού, τότε και ο x_n είναι τέλειο τετράγωνο ρητού, οπότε επαγωγικά θα πάρουμε το ζητούμενο.

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι αφού ο 3 δεν διαιρεί τον b , δεν θα διαιρεί κανέναν παρονομαστή όρου της ακολουθίας.

Από την αναδρομική σχέση έχουμε $x_m = 3x_{m-1}^3 + x_{m-1}$. Θέτουμε $x_{m-1} = \frac{p}{q}$ όπου ο q

δεν διαιρείται με 3 (*) και $(p, q) = 1$. Τότε

$$x_m = 3x_{m-1}^3 + x_{m-1} = \frac{3p^3 + pq^2}{q^3} = \frac{p(3p^2 + q^2)}{q^3}.$$

Αφού $(p, q) = 1$, αυτή είναι η ανάγωγη μορφή του x_m . Πράγματι, οι αριθμοί

$p(3p^2 + q^2)$, q^3 είναι πρώτοι μεταξύ τους, αφού αν ένας πρώτος s διαιρεί και τους δύο, τότε $s | q^3 \Rightarrow s | q$ και $s | 3p^2 + q^2$ τότε $s | 3p^2$. Αφού όμως s δεν διαιρεί τον p , θα έχουμε $s | 3 \Rightarrow s = 3$, $3 | q$, άτοπο από την (*).

Από την εκφώνηση ο x_m είναι τέλειο τετράγωνο ρητού, οπότε θα πρέπει ο αριθμητής και ο παρονομαστής να είναι τέλεια τετράγωνα.

Για να είναι ο παρονομαστής τέλειο τετράγωνο, πρέπει ο q να είναι τέλειο τετράγωνο, έστω $q = a^2$. Για να είναι ο αριθμητής τέλειο τετράγωνο, έστω $p(3p^2 + q^2) = \kappa^2$, πρέπει και οι δύο παράγοντες να είναι τέλεια τετράγωνα αφού είναι σχετικά πρώτοι.

Πράγματι, αν ένας πρώτος t διαιρεί τον p και τον $3p^2 + q^2$, τότε $t | q$, που είναι άτοπο αφού $(p, q) = 1$.

Έτσι $p = b^2$, $2p^2 + q^2 = c^2$. Επομένως $x_{m-1} = \frac{p}{q} = \frac{b^2}{a^2}$, άρα ο x_{m-1} είναι τέλειο

τετράγωνο ρητού.

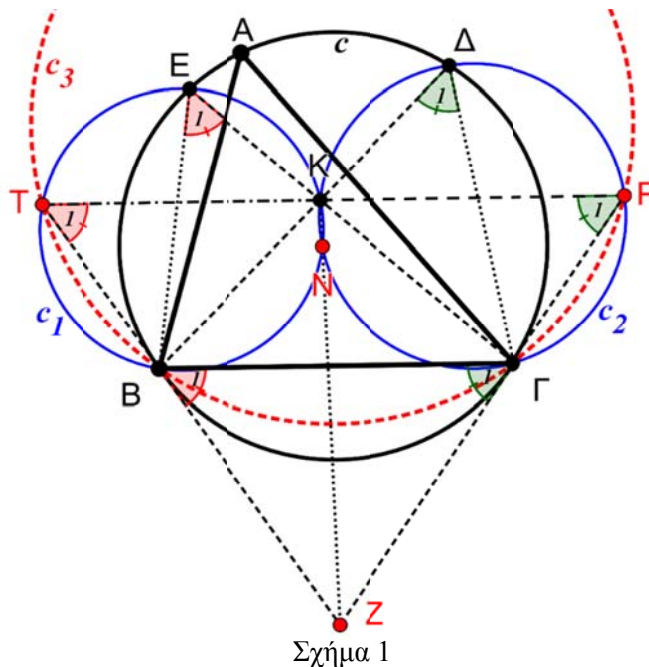
Όμοια τώρα, πηγαίνοντας προς τα πίσω δείχνουμε ότι ο x_{m-2} είναι τέλειο τετράγωνο ρητού, κ.ο.κ μέχρι να φτάσουμε στον x_1 .

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma < B\Gamma$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του c με κέντρο O και ακτίνα R . Στα μικρά τόξα $A\Gamma$ και AB θεωρούμε τα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Έστω K είναι το σημείο τομής των $B\Delta$, ΓE και N είναι το δεύτερο κοινό σημείο των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων BKE , έστω c_1 , και $\Gamma K\Delta$ (έστω c_2). Να αποδείξετε ότι: τα σημεία A, K, N είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν, το σημείο K ανήκει στη συμμετροδιάμεσο του τριγώνου $AB\Gamma$, που αντιστοιχεί στην κορυφή A .

Σημείωση: Συμμετροδιάμεσος τριγώνου είναι η συμμετρική ευθεία της διαμέσου ως προς τη διχοτόμο που περνάει από την ίδια κορυφή με τη διάμεσο

Λύση



Σχήμα 1

1^{ος} Τρόπος

Έστω K το σημείο τομής των $B\Delta$, ΓE και N το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων c_1 , c_2 . Έστω ακόμη Z το σημείο τομής των εφαπτομένων στα σημεία B, Γ του κύκλου c . Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία K, N, Z είναι συνευθειακά.

Σημειώνουμε με T τη τομή της BZ με τον c_1 και P τη τομή της $Z\Gamma$ με τον c_2 , τότε θα ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$$\hat{E}_1 = \hat{T}_1 : (\text{εγγεγραμμένες στο κύκλο } c_1 \text{ και βαίνουν στο ίδιο τόξο } BK)$$

$$\hat{E}_1 = \hat{B}_1 : (\text{η } \hat{B}_1 \text{ δημιουργείτε από τη χορδή } B\Gamma \text{ και την εφαπτομένη } BZ \text{ στο κύκλο } c)$$

$$\hat{\Delta}_1 = \hat{P}_1 : (\text{εγγεγραμμένες στο κύκλο } c_2 \text{ και βαίνουν στο ίδιο τόξο } \Gamma K)$$

$$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1 : (\text{η } \hat{\Gamma}_1 \text{ είναι γωνία της χορδής } B\Gamma \text{ και την εφαπτομένης } \Gamma Z \text{ στο κύκλο } c)$$

$\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$: (οι ZB και $Z\Gamma$ είναι εφαπτόμενες στο κύκλο c)

Από τις παραπάνω ισότητες προκύπτουν τα εξής:

$\hat{B}_1 = \hat{T}_1$, άρα $KT // B\Gamma$ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{P}_1$, άρα $KP // B\Gamma$.

Επομένως το τετράπλευρο $B\Gamma PT$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και κατά συνέπεια εγγράψιμο σε κύκλο (έστω c_3).

Άρα η κοινή χορδή KN των κύκλων c_1 και c_2 θα διέρχεται από το ριζικό κέντρο Z των κύκλων c_1, c_2, c_3 .

Αν τώρα υποθέσουμε ότι τα σημεία A, K, N είναι συνευθειακά, τότε (επειδή και τα σημεία K, N, T είναι συνευθειακά) συμπεραίνουμε ότι τα σημεία A, K, N, T είναι συνευθειακά, δηλαδή τα σημεία A, K, N θα ανήκουν στη συμμετροδιάμεσο AT .

Αντίστροφα τώρα, αν υποθέσουμε ότι το σημείο K ανήκει στη συμμετροδιάμεσο AT , τότε τα σημεία A, K, T θα είναι συνευθειακά. Οπότε (επειδή και τα σημεία K, N, T είναι συνευθειακά) συμπεραίνουμε ότι τα σημεία A, K, N είναι συνευθειακά.

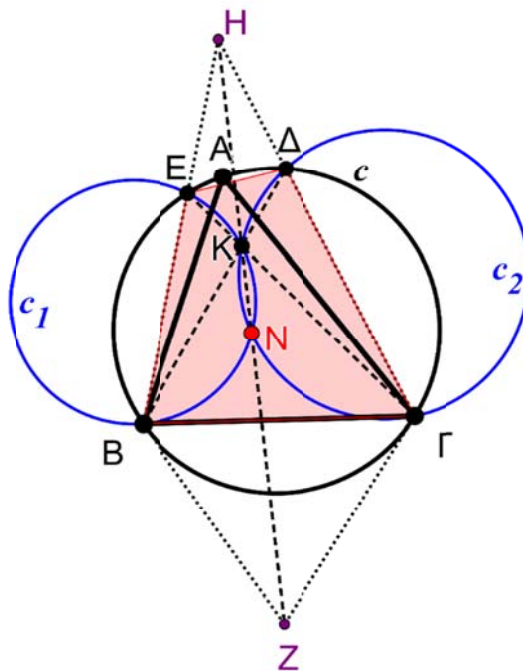
2^{ος} Τρόπος

Έστω K το σημείο τομής των $B\Delta$, ΓE και N το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων c_1, c_2 . Έστω ακόμη Z το σημείο τομής των εφαπτομένων στα σημεία B, Γ του κύκλου c . Αν H είναι το σημείο τομής των EB και $\Delta\Gamma$, θα αποδείξουμε ότι τα σημεία K, N, Z, H είναι συνευθειακά.

Από την εφαρμογή του θεωρήματος Pascal στο εκφυλισμένο εξάγωνο $BB\Gamma\Delta E$, συμπεραίνουμε ότι τα σημεία H, K, Z είναι συνευθειακά.

Το σημείο H έχει την ίδια δύναμη ως προς το κύκλο c . Δηλ. $HE \cdot HB = H\Delta \cdot H\Gamma$.

Άρα τα σημεία K, N, H είναι συνευθειακά. Οπότε τα σημεία K, N, Z, H είναι συνευθειακά.



Σχήμα 2

Αν τώρα υποθέσουμε ότι τα σημεία A, K, N είναι συνευθειακά, το σημείο K θα ανήκει στην συμμετροδιάμεσο AZ .

Αντίστροφα, αν το K ανήκει στην συμμετροδιάμεσο AZ τότε τα σημεία A, K, N είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 3

(α) Δίνονται οι φυσικοί αριθμοί n, m με $n < m$ και διακεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί a_1, \dots, a_m . Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα P με πραγματικούς συντελεστές, βαθμού το πολύ n , για τα οποία ισχύει η ισότητα

$$|P(a_i) - P(a_j)| = |a_i - a_j|, \quad (1)$$

για κάθε i, j με $1 \leq i < j \leq m$.

(β) Δίνονται φυσικοί αριθμοί $m, n \geq 2$ με $n < m$. Να εξετάσετε αν υπάρχει πολυώνυμο Q με πραγματικούς συντελεστές βαθμού n καθώς και διακεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί a_1, \dots, a_m , τέτοιοι ώστε

$$|Q(a_i) - Q(a_j)| < |a_i - a_j|,$$

για κάθε i, j με $1 \leq i < j \leq m$.

Λύση

(α) Θα ασχοληθούμε πρώτα με το ερώτημα (α). Λόγω της συμμετρίας υποθέτουμε ότι $a_1 > a_2 > \dots > a_m$ και για ευκολία θέτουμε $d_i = P(a_i) - P(a_{i+1})$. Τότε λόγω της (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} & |d_1| + |d_2| + \dots + |d_{m-1}| = \\ & = |P(a_1) - P(a_2)| + |P(a_2) - P(a_3)| + \dots + |P(a_{m-1}) - P(a_m)| \\ & = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{m-1} - a_m| \\ & = a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \dots + a_{m-1} - a_m \\ & = a_1 - a_m = |a_1 - a_m| \\ & = |P(a_1) - P(a_m)| = |P(a_1) - P(a_2) + P(a_2) - P(a_3) + \dots + P(a_{m-1}) - P(a_m)| \\ & = |d_1 + d_2 + \dots + d_{m-1}| \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι οι αριθμοί d_1, d_2, \dots, d_{m-1} είναι ομόσημοι. Οπότε έχουμε δύο περιπτώσεις.

1^η περίπτωση: Όλοι οι d_1, d_2, \dots, d_{m-1} είναι θετικοί. Είναι Τότε από την (1) έχουμε ότι $P(a_1) - P(a_2) = a_1 - a_2 \Rightarrow P(a_1) - a_1 = P(a_2) - a_2$. Όμοια

$P(a_2) - a_2 = P(a_3) - a_3, \dots, P(a_{m-1}) - a_{m-1} = P(a_m) - a_m$. Έπεται ότι

$$P(a_1) - a_1 = P(a_2) - a_2 = \dots = P(a_m) - a_m = k \quad (2)$$

Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο $Q(x) = P(x) - x - k$ που είναι βαθμού το πολύ n ,

έχει $m > n$ διακεκριμένες ρίζες (τα $a_1 > a_2 > \dots > a_m$). Έπεται ότι το $Q(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, οπότε $P(x) = x + k$, όπου $k \in \mathbb{R}$.

2^η περίπτωση: Όλοι οι d_1, d_2, \dots, d_{m-1} είναι αρνητικοί. Τότε από την (1) έχουμε ότι $-P(a_1) + P(a_2) = a_1 - a_2 \Rightarrow P(a_1) + a_1 = P(a_2) + a_2$. Επομένως

$$P(a_1) + a_1 = P(a_2) + a_2 = \dots = P(a_m) + a_m = \lambda \quad (3)$$

Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο $R(x) = P(x) + x - \lambda$ που είναι βαθμού το πολύ n , έχει $m > n$ διακεκριμένες ρίζες (τα $a_1 > a_2 > \dots > a_m$). Έπεται ότι το $R(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, οπότε $P(x) = -x + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Επομένως δύο πολυώνυμα, το $P(x) = x + k$ και το $P(x) = -x + \lambda$ είναι τα μόνα που ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος.

2^{ος} τρόπος: Ας υποθέσουμε ότι $m \geq 3$ και ότι υπάρχουν $p, q, r \in \{a_1, \dots, a_m\}$ ώστε να ισχύει:

$$P(p) - P(q) = p - q, \quad P(p) - P(r) = r - p.$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των παραπάνω παίρνουμε ότι

$$P(r) - P(q) = 2p - q - r. \quad (4)$$

Όμως από την συνθήκη της εκφώνησης έχουμε ότι $P(r) - P(q) = r - q$ ή $P(r) - P(q) = q - r$. Στην πρώτη περίπτωση η (4) γίνεται $2r = 2p \Rightarrow r = p$, άτοπο αφού οι $p, r \in \{a_1, \dots, a_m\}$ που είναι διακεκριμένοι. Όμοια, αν $P(r) - P(q) = q - r$ τότε η (4) δίνει $q = p$, πάλι άτοπο.

Αυτό σημαίνει ότι είτε $m < 3$, είτε ότι δεν υπάρχουν τέτοιοι $p, q, r \in \{a_1, \dots, a_m\}$.

1^η περίπτωση: Αν $m < 3$, τότε $n = 1$ ή $n = 0$. Προφανώς η $n = 0$ απορρίπτεται αφού κανένα σταθερό πολυώνυμο δεν ικανοποιεί. Η $n = 1$ δίνει $P(x) = ax + b$, οπότε πρέπει

$$|a \cdot a_i + b - a \cdot a_j - b| = |a_i - a_j| \Leftrightarrow |a| = 1$$

οπότε $P(x) = x + b$, ή $P(x) = -x + b$.

2^η περίπτωση: Αν δεν υπάρχουν τέτοιοι $p, q, r \in \{a_1, \dots, a_m\}$, τότε είτε

$P(a_1) - a_1 = P(a_2) - a_2 = \dots = P(a_m) - a_m = k$, οπότε οδηγούμαστε στην 1^η περίπτωση που είδαμε στον 1^ο τρόπο, είτε

$P(a_1) + a_1 = P(a_2) + a_2 = \dots = P(a_m) + a_m = \lambda$, οπότε οδηγούμαστε στην 2^η περίπτωση που είδαμε στον 1^ο τρόπο.

(β) Θα δείξουμε ότι αν $Q(x) = x^n$ και $|a_i| < \frac{1}{n}$ για κάθε $1 \leq i \leq m$ τότε ισχύει η

ζητούμενη ανισότητα. Πράγματι,

$$|Q(a_i) - Q(a_j)| = |a_i^n - a_j^n| = |a_i - a_j| \cdot |a_i^{n-1} + a_i^{n-2}a_j + \dots + a_j^{n-1}| \quad (1)$$

και

$$|a_i^{n-1} + a_i^{n-2}a_j + \dots + a_j^{n-1}| \leq |a_i^{n-1}| + |a_i^{n-2}a_j| + \dots + |a_j^{n-1}| < \frac{1}{n^{n-1}} + \frac{1}{n^{n-1}} + \dots + \frac{1}{n^{n-1}} = \frac{n}{n^{n-1}} < 1$$

οπότε από την (1) έχουμε $|P(a_i) - P(a_j)| < |a_i - a_j|$.

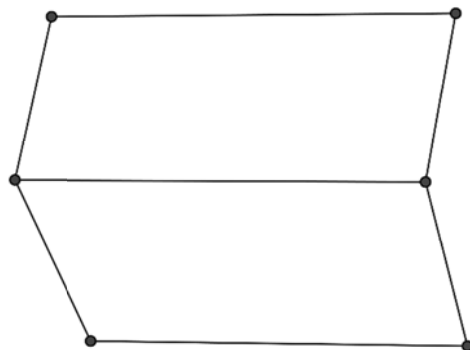
Σημείωση: Στο δεύτερο ερώτημα υπάρχουν και άλλες πιθανές κατασκευές που μπορεί να γίνουν.

Πρόβλημα 4.

Θεωρούμε n σημεία στο επίπεδο, $n \geq 4$, ανά τρία μη συνευθειακά. Ονομάζουμε $A(n)$ το πλήθος των παραλληλογράμμων εμβαδού 1 που σχηματίζονται με κορυφές αυτά τα σημεία. Να αποδείξετε ότι $A(n) \leq \frac{n^2 - 3n}{4}$, για κάθε $n \geq 4$.

Λύση

Σταθεροποιούμε μία διεύθυνση \vec{u} στο επίπεδο. Σε κάθε ευθεία παράλληλη σε αυτή τη διεύθυνση μπορεί να έχουμε το πολύ δύο σημεία. Ας υποθέσουμε ότι σε αυτή υπάρχουν k ζεύγη σημείων για αυτή τη διεύθυνση. Τότε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (για $k=3$), σχηματίζονται το πολύ $k-1$ παραλληλόγραμμα εμβαδού 1 με αυτά τα k ζεύγη σημείων.



$k=3$, σχηματίζονται 2 παραλληλόγραμμα

Διεύθυνση \vec{u}

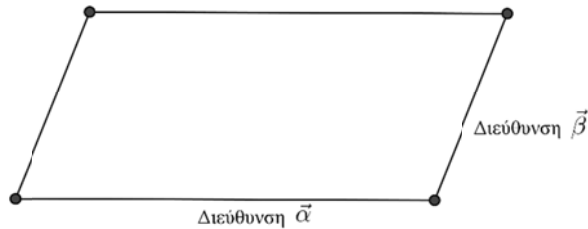
Σχήμα 3

Επομένως σε μία διεύθυνση με k ζεύγη σημείων, σχηματίζονται το πολύ $k-1$ παραλληλόγραμμα εμβαδού 1. Επομένως, αν αθροίσουμε τα παραλληλόγραμμα σε όλες τις διευθύνσεις, θα πάρουμε

$$\sum (k-1) = \left(\sum k \right) - s,$$

όπου s είναι το συνολικό πλήθος των διευθύνσεων στις οποίες βρίσκονται σημεία. Το άθροισμα όμως $\left(\sum k \right)$ είναι το άθροισμα όλων των τμημάτων, που είναι $\binom{n}{2}$.

Επομένως, το πλήθος των παραλληλογράμμων εμβαδού 1 είναι το $\binom{n}{2} - s$. Αλλά με αυτό τον τρόπο μετρήσαμε κάθε παραλληλόγραμμο δύο φορές. Μία φορά για την διεύθυνση $\vec{\alpha}$ και μία φορά για τη διεύθυνση $\vec{\beta}$, όπως φαίνεται στο σχήμα:

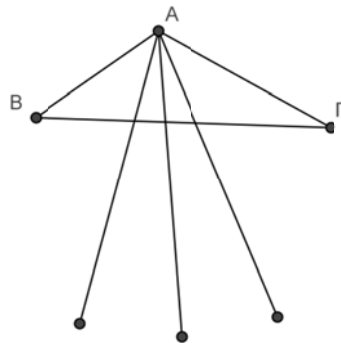


Σχήμα 4

Επομένως το συνολικό πλήθος των παραλληλογράμμων εμβαδού 1 είναι το πολύ

$$\frac{\binom{n}{2} - s}{2}.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι αν έχουμε $n \geq 4$ σημεία στο επίπεδο, ανά τρία μη συνευθειακά, τότε το πλήθος των διευθύνσεων είναι $s \geq n$. Πράγματι ας πάρουμε τρία γειτονικά σημεία A, B, Γ (σε κυρτή θέση) όπως στο σχήμα:



Σχήμα 5

Το σημείο A συνδέεται με $n-1$ τμήματα με τα υπόλοιπα σημεία. Όλα αυτά τα τμήμα έχουν κοινό σημείο το A, οπότε ορίζουν $n-1$ διαφορετικές διευθύνσεις. Επιπλέον το τμήμα BΓ δεν είναι παράλληλο σε κανένα από αυτά τα τμήματα, αφού τα τέμνει όλα, άρα ορίζει μία ακόμη διεύθυνση. Επομένως έχουμε τουλάχιστον $n-1+1 = n$ διαφορετικές διευθύνσεις, οπότε το πλήθος των παραλληλογράμμων είναι το πολύ

$$\frac{\binom{n}{2} - n}{2} = \frac{n^2 - 3n}{4}.$$